

Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

Von

Gerhard Grüss in Berlin.

Verschiedene Aufgaben der technischen Physik geben zu der im folgenden untersuchten Frage Anlaß, um wieviel sich das Integralmittel des Produktes zweier Funktionen vom Produkt der Integralmittel der beiden Faktoren höchstens unterscheiden kann, d. h. zu einer Abschätzung von

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \right|.$$

Wenn es sich z. B. darum handelt, die Wärmeabgabe eines Heizkörpers während einer Zeitspanne $t_1 \leq t \leq t_2$ zu messen, müßte eigentlich das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t) g(t) dt$ bestimmt werden, worin $f(t)$ die Temperaturdifferenz des Wassers zwischen Vor- und Rücklauf bedeutet und $g(t)$ die in der Zeiteinheit ein- und ausströmende Wassermenge. Nun ist es aber meßtechnisch einfacher, $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ und $\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$ für sich zu bestimmen, und damit ist die oben angedeutete Frage unmittelbar gegeben.

Von allgemeinerer Bedeutung, weil in den mannigfachsten Zusammenhängen wiederkehrend, ist das folgende Beispiel. Die Funktion $g(t) = 1 + p(t)$ bedeutet einen zeitlich veränderlichen Korrektionsfaktor für die Funktion $f(t)$, d. h. statt des vom Meßinstrument gelieferten fehlerhaften Wertes $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ interessiert eigentlich das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t) (1 + p(t)) dt$, und es fragt sich, wie weit dieser Wert durch das

Produkt der Integrale $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ und $\int_{t_1}^{t_2} (1 + p(t)) dt$ approximiert werden kann¹⁾.

Von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ soll zunächst nur vorausgesetzt werden, daß sie im Bereich $a \leq x \leq b$ eigentlich integrabel im Sinne Riemanns sind. Indem man $\xi = \frac{x-a}{b-a}$ als neue Veränderliche einführt, erhält man

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 f(a + \xi(b-a)) d\xi = \int_0^1 f^*(\xi) d\xi$$

usf. Wenn man also nach der Substitution wieder ξ durch x , f^* durch f usf. ersetzt, besteht die Aufgabe darin, den Ausdruck

$$D(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$$

abzuschätzen. Man betrachte nun zunächst den durch die Annahmen

$$(1) \quad f(x) = g(x)$$

und

$$(2) \quad \int_0^1 f(x) dx = 0$$

charakterisierten Sonderfall, und es sei

$$(3) \quad \varphi \leq f(x) \leq \Phi \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Dann ist

$$(4) \quad f(x) = \varphi + (\Phi - \varphi) \vartheta(x),$$

und die Funktion $\vartheta(x) = \frac{f(x) - \varphi}{\Phi - \varphi}$ (der Fall $\Phi = \varphi$ kann offensichtlich hier wie stets im folgenden außer acht gelassen werden) ist im Bereich $0 \leq x \leq 1$ integrabel, und es gilt

$$(5) \quad 0 \leq \vartheta(x) \leq 1.$$

Nun ist

$$(6) \quad \begin{aligned} D(f, f) &= \int_0^1 f^2(x) dx \\ &= \varphi^2 + 2\varphi(\Phi - \varphi) \int_0^1 \vartheta(x) dx + (\Phi - \varphi)^2 \int_0^1 \vartheta^2(x) dx, \end{aligned}$$

¹⁾ So ging auch die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung von der Praxis aus. Mein Bruder, H. Grüss, Physiker im Wernerwerk M der Siemens und Halske A. G., vermutete die Richtigkeit der Abschätzungsformel (18). Vgl. Der Chemie-Ingenieur, Bd. II, Teil III, S. 215.

und wenn man (2) und (5) beachtet:

$$(7) \quad \int_0^1 \vartheta^2(x) dx \leq \int_0^1 \vartheta(x) dx = -\frac{\varphi}{\Phi - \varphi}.$$

Aus (6) und (7) folgt

$$(8) \quad D(f, f) \leq -\varphi\Phi = \frac{1}{4}\{(\Phi - \varphi)^2 - (\Phi + \varphi)^2\} \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)^2.$$

Um eine von der Voraussetzung (2) unabhängige Schranke für $D(f, f)$ zu finden, setze man im Fall $\int_0^1 f(x) dx = F \neq 0$ $f_1(x) = f(x) - F$. Dann ist $\int_0^1 f_1(x) dx = 0$ und $\varphi - F \leq f_1(x) \leq \Phi - F$ für $0 \leq x \leq 1$. Also folgt aus (8)

$$(9) \quad D(f_1, f_1) \leq (\Phi - F)(F - \varphi) = \frac{1}{4}\{(\Phi - \varphi)^2 - (\Phi + \varphi - 2F)^2\} \\ \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)^2$$

Nun ist aber

$$0 \leq D(f, f) = \int_0^1 (f(x) - F)^2 dx = \int_0^1 f_1^2 dx - F^2 = D(f_1, f_1),$$

wie überhaupt $D(f + \text{const}, g + \text{Const}) = D(f, g)$ gilt. Also liefert (9)

$$(10) \quad 0 \leq D(f, f) \leq (\Phi - F)(F - \varphi),$$

d. h.

$$(11) \quad \int_0^1 f^2 dx \leq (\varphi + \Phi) \int_0^1 f dx - \varphi\Phi$$

und endlich als eine von dem Wert $F = \int_0^1 f dx$ unabhängige Schranke für $D(f, f)$

$$(12) \quad D(f, f) \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)^2.$$

Die Abschätzung von $D(f, f)$ durch die Ungleichung (10) ist im allgemeinen genauer als die durch die Schranke (12); (10) und (12) stimmen, nur überein, wenn $F = \frac{1}{2}(\varphi + \Phi)$ ist.

Nun mögen zwei verschiedene im Bereich $0 \leq x \leq 1$ eigentlich integrable Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $\varphi \leq f(x) \leq \Phi$, $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ gegeben sein. Dann ist

$$(13) \quad D(f, g) = \int_0^1 f g dx - \int_0^1 f dx \int_0^1 g dx \\ = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 [(f + g)^2 - (f - g)^2] dx - 4 \int_0^1 f dx \int_0^1 g dx \right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\int_0^1 f dx = F$, $\int_0^1 g dx = G$ und schätzt $\int_0^1 (f+g)^2 dx$ mit Hilfe der Ungleichheit (12) ab, so erhält man

$$D(f, g) \leq \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} (\Phi + \Gamma - \varphi - \gamma)^2 + \left(\int_0^1 (f+g) dx \right)^2 - \int_0^1 (f-g)^2 dx - 4FG \right\},$$

$$(14) \quad D(f, g) \leq \frac{1}{16} (\Phi + \Gamma - \varphi - \gamma)^2 + \frac{1}{4} \left\{ (F - G)^2 - \int_0^1 (f-g)^2 dx \right\}.$$

Nun ist aber

$$(15) \quad \int_0^1 (f-g)^2 dx \geq \left(\int_0^1 (f-g) dx \right)^2 = (F - G)^2,$$

also liefert (14)

$$(16) \quad \begin{aligned} D(f, g) &\leq \frac{1}{16} (\Phi + \Gamma - \varphi - \gamma)^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) + \frac{1}{4} (\Phi - \varphi - \Gamma + \gamma)^2 \}. \end{aligned}$$

Wenn nun speziell $\Phi - \varphi = \Gamma - \gamma$ gilt, ist die Ungleichung (16) mit

$$(17) \quad D(f, g) \leq \frac{1}{4} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$$

identisch; aber auch wenn $\Phi - \varphi \neq \Gamma - \gamma$ ist, läßt sich die Abschätzung (17) beweisen; sie stellt dann eine Verbesserung gegenüber (16) dar. Dazu setze man

$$p = + \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma}{\Phi - \varphi}}, \quad q = + \sqrt{\frac{\Phi - \varphi}{\Gamma - \gamma}} \quad \text{und} \quad f_1(x) = p \cdot f(x), \quad g_1(x) = q \cdot g(x)$$

und erhält

$$\varphi_1 = p\varphi \leq f_1(x) \leq p\Phi = \Phi_1, \quad \gamma_1 = q\gamma \leq g_1(x) \leq q\Gamma = \Gamma_1,$$

also

$$\Phi_1 - \varphi_1 = \Gamma_1 - \gamma_1 = + \sqrt{(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)}.$$

Daher liefert (17)

$$D(f_1, g_1) = pq D(f, g) = D(f, g) \leq \frac{1}{4} (\Phi_1 - \varphi_1)(\Gamma_1 - \gamma_1)$$

oder

$$(17) \quad D(f, g) \leq \frac{1}{4} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$$

unabhängig von der Voraussetzung $\Phi - \varphi = \Gamma - \gamma$. Während $D(f, f) \geq 0$ ist, wie oben gezeigt wurde, kann natürlich $D(f, g)$ auch negativ sein; man sieht aber sofort, daß die rechte Seite von (17) eine Schranke für $|D(f, g)|$ ist; denn wenn man etwa $f(x)$ durch $-f(x)$ ersetzt, liefert (17)

$$D(-f, g) = -D(f, g) \leq \frac{1}{4} (-\varphi + \Phi)(\Gamma - \gamma),$$

also

$$D(f, g) \geq -\frac{1}{4} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma).$$

Wenn

$$f(x) = \begin{cases} \varphi & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \Phi & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \gamma & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \Gamma & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist, erhält man $D(f, g) = \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$. Also ist folgender Satz bewiesen:

Für irgend zwei im Bereich $0 \leq x \leq 1$ eigentlich integrable Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ($\varphi \leq f(x) \leq \Phi$, $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$) gilt

$$(18) \quad |D(f, g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma).$$

Der Faktor $\frac{1}{4}$ kann durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.

Beim Übergang von Gleichung 13 zu Ungleichung 14 wurde zur Abschätzung von $\int_0^1 (f + g)^2 dx$ die Formel 12 benutzt; verwendet man an ihrer Stelle die im allgemeinen genauere Formel 11, so gelangt man zu einer Schranke für $D(f, g)$, die im allgemeinen kleiner ist als $\frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$, dafür aber außer von φ , Φ , γ , Γ noch von den Integralwerten F und G abhängt. Von dem anfangs charakterisierten Standpunkt der Anwendungen aus gesehen ist diese Verbesserung der Abschätzung von $D(f, g)$ durchaus sinnvoll, weil ja die Integrale F und G durch die Messungen gegeben sind.

Aus (11) und (13) folgt

$$D(f, g) \leq \frac{1}{4} \left\{ (\varphi + \Phi + \gamma + \Gamma)(F + G) - (\varphi + \gamma)(\Phi + \Gamma) - \int_0^1 (f - g)^2 dx - 4FG \right\},$$

und wenn man wieder (15) beachtet, erhält man

$$(19) \quad D(f, g) \leq \sigma = \frac{1}{4} \left\{ (\varphi + \gamma + \Phi + \Gamma)(F + G) - (\varphi + \gamma)(\Phi + \Gamma) - (F + G)^2 \right\}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) - \sigma = \frac{1}{4} \left(F + G - \frac{\varphi + \gamma + \Phi + \Gamma}{2} \right)^2 - \frac{1}{16}(\Phi - \varphi - \Gamma + \gamma)^2,$$

also $\sigma < \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$, wenn $F + G \neq \frac{1}{2}(\varphi + \gamma + \Phi + \Gamma)$ und $\Phi - \varphi = \Gamma - \gamma$ gilt. Wenn die letzte Bedingung nicht erfüllt ist, setze man wieder

$$(20) \quad f_1(x) = pf(x) = + \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma}{\Phi - \varphi}} f(x), \quad g_1(x) = qg(x) = + \sqrt{\frac{\Phi - \varphi}{\Gamma - \gamma}} g(x).$$

Dann folgt aus (19)

$$(21a) \quad D(f_1, g_1) = D(f, g) \leq \sigma_1 = \frac{1}{4} \left\{ (p[\varphi + \Phi] + q[\gamma + \Gamma])(pF + qG) - (p\varphi + q\gamma)(p\Phi + q\Gamma) - (pF + qG)^2 \right\},$$

und da $\Phi_1 - \varphi_1 = \Gamma_1 - \gamma_1 = \sqrt{(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)}$ ist, gilt

$$(22) \quad \sigma_1 \leq \frac{1}{4}(\Phi_1 - \varphi_1)(\Gamma_1 - \gamma_1) = \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma),$$

und das Gleichheitszeichen in (22) trifft nur zu, wenn

$$(23 \text{ a}) \quad F_1 + G_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \Phi_1 + \gamma_1 + \Gamma_1)$$

gilt.

Ersetzt man in (21 a) $f(x)$ durch $-f(x)$, so erhält man

$$(21 \text{ b}) \quad D(-f, g) = -D(f, g) \leq \sigma_2 = \frac{1}{4} \{(-p[\varphi + \Phi] + q[\gamma + \Gamma])(-pF + qG) - (-p\Phi + q\gamma)(-p\varphi + q\Gamma) - (-pF + qG)^2\},$$

und es ist dann und nur dann nicht $\sigma_2 < \frac{1}{4}(\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$, wenn

$$(23 \text{ b}) \quad -F_1 + G_1 = \frac{1}{2}(-\varphi_1 - \Phi_1 + \gamma_1 + \Gamma_1)$$

gilt.

Die aus (21 a) und (21 b) folgende Abschätzung von $|D(f, g)|$

$$(24) \quad -\sigma_2 \leq D(f, g) \leq \sigma_1$$

ist also immer dann genauer als die der Formel (18), wenn die Gleichungen (23 a) und (23 b) nicht erfüllt sind, d. h. wenn

$$\frac{\varphi + \Phi - 2F}{\Phi - \varphi} \pm \frac{\gamma + \Gamma - 2G}{\Gamma - \gamma} \neq 0$$

ist²⁾.

Bisher wurde von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur vorausgesetzt, daß sie im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel seien. Es liegt daher nahe zu fragen, ob die Abschätzung von $D(f, g)$ nicht verbessert, insbesondere: ob der Faktor $\frac{1}{4}$ in der Ungleichheit (18) nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann, wenn man $f(x)$ und $g(x)$ strengeren Voraussetzungen unterwirft. Daß es hierfür allerdings nicht genügt, $f(x)$ und $g(x)$ als stetig vorauszusetzen, geht aus dem oben angeführten Beispiel sofort hervor. Dagegen kann man, wie im folgenden noch gezeigt werden soll, eine spezielle Klasse stetiger Funktionen angeben, die eine wesentlich schärfere Abschätzung der Differenz der Integralmittelwerte gestattet³⁾.

²⁾ Auf eine noch wirksamere Verschärfung der Abschätzung 18 hat mich freundlicherweise Herr M. Krafft in Marburg brieflich aufmerksam gemacht. Es ist

$$(*) \quad D(f, g) \leq \frac{1}{4} \sqrt{(\Phi - \varphi)^2 - (\Phi + \varphi - 2F)^2} \cdot \sqrt{(\Gamma - \gamma)^2 - (\Gamma + \gamma - 2G)^2}.$$

Da die rechte Seite gleich $\sqrt{(\Phi - F)(F - \varphi)(\Gamma - G)(G - \gamma)}$ ist, erhält man die Ungleichung (*) sofort aus der Formel (10), wenn man beachtet, daß $(D(f, g))^2 \leq D(f, f) \cdot D(g, g)$ ist, was sehr leicht aus der Schwarz'schen Ungleichheit folgt.

³⁾ Für die Klasse der positiven konvexen Funktionen läßt sich auf Grund der Ergebnisse von Blaschke, Frank und Pick (Frank und Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum I, Math. Annalen 76, 1915, S. 354 ff. und Blaschke und Pick, Distanzschätzungen im Funktionenraum II, Math. Annalen 77, 1916, S. 277 ff.) eine Schranke für $D(f, g)$ bestimmen, die nach Art der Abschätzung 24 von den Integralwerten F und G abhängt. Z. B. wird in der erstgenannten Arbeit bewiesen, daß eine beliebige positive konvexe Funktion $f(x)$, die durch die Bedingung $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$

Um ein Kriterium für die Zugehörigkeit einer im Bereich $0 \leq x \leq 1$ stetigen Funktion zu jener Klasse zu erhalten, betrachte man bei beliebig vorgegebenem, ganzzahligem $n > 0$ das Differenzenschema der Funktion $f(x)$, das zu den äquidistanten Abszissen $x_\lambda = \frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = 0, 1, \dots, n$) gehört, also das Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_0 = 0 & f_0 = f(0) & = \Delta^0 f_0 & & & & \\
 x_1 = \frac{1}{n} & f_1 = f\left(\frac{1}{n}\right) & = \Delta^0 f_1 & \Delta^1 f_0 & & & \\
 x_2 = \frac{2}{n} & f_2 = f\left(\frac{2}{n}\right) & = \Delta^0 f_2 & \Delta^1 f_1 & \Delta^2 f_0 & & \\
 x_3 = \frac{3}{n} & f_3 = f\left(\frac{3}{n}\right) & = \Delta^0 f_3 & \Delta^1 f_2 & \Delta^2 f_1 & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 x_{n-1} = \frac{n-1}{n} & f_{n-1} = f\left(\frac{n-1}{n}\right) & = \Delta^0 f_{n-1} & \Delta^1 f_{n-2} & \Delta^2 f_{n-3} & \dots & \Delta^n f_0 \\
 x_n = 1 & f_n = f(1) & = \Delta^0 f_n & & & &
 \end{array}$$

Die Funktion $f(x)$ soll dann und nur dann zur Klasse der „vollmonotonen Funktionen“ gehören, wenn entweder $\Delta^\lambda f_0 \geq 0$ oder $\Delta^\lambda f_0 \leq 0$ gilt für alle $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$). Die Bezeichnung „vollmonoton“ ist aus folgendem Grunde gerechtfertigt. Da

$$\Delta^{\lambda-1} f_\nu = \Delta^\lambda f_{\nu-1} + \Delta^{\lambda-1} f_{\nu-1} \quad (\lambda, \nu = 1, 2, \dots, n; \lambda + \nu \leq n + 1)$$

gilt, besteht das Differenzenschema einer „vollmonotonen“ Funktion entweder aus lauter nicht negativen oder aus lauter nicht positiven Zahlen,

normiert ist, von der Funktion $g(x) = 1$ höchstens den sphärischen Abstand $\pi/6$ haben kann; dabei ist der sphärische Abstand ϑ zweier normierter Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ durch die Gleichung $\cos \vartheta = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ erklärt. Es ist also

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \cos \frac{\pi}{6} \text{ oder } \frac{4}{3} \left(\int_0^1 f dx \right)^2 \geq 1 = \int_0^1 f^2 dx \geq \left(\int_0^1 f dx \right)^2,$$

so daß sich $0 \leq D(f, f) \leq \frac{1}{3} \left(\int_0^1 f dx \right)^2 = \frac{1}{3} F^2$ ergibt. Da, wie oben bemerkt

wurde, $|D(f, g)| \leq \sqrt{D(f, f) \cdot D(g, g)}$ gilt, erhält man sofort $|D(f, g)| \leq \frac{1}{3} FG$ für beliebige positive konvexe Funktionen. Wahrscheinlich lassen sich aus den weiteren Sätzen von Frank, Pick und Blaschke noch andere Abschätzungen für $D(f, g)$ gewinnen, doch soll hier darauf nicht eingegangen werden. Den Hinweis auf jene Noten verdanke ich Herrn M. Krafft.

⁴⁾ Da es sich hier nur darum handelt, $D(f, g)$ abzuschätzen, und da $D(f + \text{const}, g) = D(f, g)$ ist, kann durch Addition einer passenden Konstanten über das Vorzeichen von $f(0)$ frei verfügt werden; es kommt also nur auf $sgn \Delta^\lambda f_0$ an für $\lambda \geq 1$. — Die funktionentheoretischen Eigenschaften der vollmonotonen Funktionen sollen an anderer Stelle näher untersucht werden.

während bei einer monotonen Funktion im allgemeinen nur die Glieder der ersten Differenzenspalte nicht negativ bzw. nicht positiv sind.

Es soll nun gezeigt werden, daß für zwei vollmonotone Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Ungleichheit

$$(25) \quad |D(f, g)| \leq \frac{4}{45} (\Phi - \varphi) (\Gamma - \gamma)$$

besteht.

Zum Beweise betrachte man zunächst zwei spezielle vollmonotone Funktionen, nämlich die Polynome

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^*(x) = \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda x^\lambda \\ \text{wobei} \quad a_\lambda \geq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \dots, n \\ \text{oder} \quad a_\lambda \leq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \text{und} \\ g^*(x) = \sum_{\lambda=0}^n b_\lambda x^\lambda, \\ \text{wobei} \quad b_\lambda \geq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \dots, n \\ \text{oder} \quad b_\lambda \leq 0 \text{ gilt für } \lambda = 0, 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D(f^*, g^*) &= \int_0^1 \sum_{\lambda, \mu=0}^n a_\lambda b_\mu x^{\lambda+\mu} dx - \int_0^1 \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda x^\lambda dx \cdot \int_0^1 \sum_{\mu=0}^n b_\mu x^\mu dx \\ &= \sum_{\lambda, \mu=0}^n a_\lambda b_\mu \left(\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\mu+1} \right) = \sum_{\lambda, \mu=1}^n \dots, \end{aligned}$$

also wegen (26)

$$|D(f^*, g^*)| = \sum_{\lambda, \mu=1}^n |a_\lambda| |b_\mu| \left(\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\mu+1} \right),$$

und da

$$\frac{1}{\lambda+\mu+1} - \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{1}{\mu+1} \leq \frac{4}{45} \quad \text{für } \lambda, \mu = 1, 2, \dots$$

$$|D(f^*, g^*)| \leq \frac{4}{45} \sum_{\lambda=1}^n |a_\lambda| \sum_{\mu=1}^n |b_\mu|.$$

Nun ist aber

$$|f^*(1) - f^*(0)| = \Phi^* - \varphi^* = \left| \sum_1^n a_\lambda \right| = \sum_1^n |a_\lambda|$$

und

$$|g^*(1) - g^*(0)| = \Gamma^* - \gamma^* = \left| \sum_1^n b_\mu \right| = \sum_1^n |b_\mu|$$

und daher, wie behauptet wurde,

$$(27) \quad |D(f^*, g^*)| \leq \frac{4}{45} (\Phi^* - \varphi^*) (\Gamma^* - \gamma^*).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß dieselbe Ungleichheit nicht nur für derartige Polynome, sondern für beliebige vollmonotone Funktionen richtig ist. Dazu wird zunächst folgendes bewiesen:

Wenn $f(x)$ vollmonoton ist, gibt es ein Polynom $p(x) = \sum_0^n a_\lambda x^\lambda$ mit nur nicht negativen bzw. mit nur nicht positiven Koeffizienten derart, daß

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1,$$

wenn nur n genügend groß ist.

Man benutze nämlich zur Approximation von $f(x)$ das Polynom

$$(28) \quad p(x) = \sum_{r=0}^n f\left(\frac{r}{n}\right) \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r}.$$

Daß $p(x)$ die Funktion $f(x)$ bei hinreichend großem n im Bereich $0 \leq x \leq 1$ beliebig nahe approximiert, ist bekannt⁵⁾. Man braucht also nur noch zu zeigen, daß die Koeffizienten von $p(x)$ der Bedingung genügen, sämtlich nicht negativ bzw. sämtlich nicht positiv zu sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda x^\lambda = \sum_{r=0}^n f_r \binom{n}{r} \sum_{\alpha=0}^{n-r} x^{r+\alpha} (-1)^\alpha \binom{n-r}{\alpha} \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{\lambda=r}^n f_r \binom{n}{\lambda} x^\lambda (-1)^{\lambda-r} \binom{n-r}{\lambda-r} \\ &= \sum_{\lambda=0}^n x^\lambda \sum_{r=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-r} \binom{n}{\lambda} f_r \binom{n-r}{\lambda-r}, \\ a_\lambda &= \binom{n}{\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} (-1)^\kappa \binom{n}{\lambda-\kappa} \binom{n-\lambda+\kappa}{\kappa} f_{\lambda-\kappa}, \end{aligned}$$

also schließlich

$$a_\lambda = \binom{n}{\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} (-1)^\kappa \binom{\lambda}{\kappa} f_{\lambda-\kappa} = \binom{n}{\lambda} \Delta^\lambda f_0,$$

d. h. die Koeffizienten des die Funktion $f(x)$ approximierenden Polynoms (28) sind bis auf positive Faktoren die Glieder der ersten Zeile des Differenzschemas und daher für vollmonotone Funktionen sämtlich nicht negativ bzw. nicht positiv. Übrigens ist noch leicht einzusehen, daß $p(0) = f(0)$ und $p(1) = f(1)$ gilt.

⁵⁾ Vgl. etwa G. Polya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, S. 66. Springer 1925. Die Polynome $p(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) wurden von S. Bernstein eingeführt.

Nun seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei beliebige vollmonotone Funktionen, und es werde

$$p(x) = \sum_0^n f_v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}, \quad f(x) - p(x) = f_1(x)$$

$$q(x) = \sum_0^n g_v \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v}, \quad g(x) - q(x) = g_1(x)$$

gesetzt, so daß, wenn nur n genügend groß ist,

$$|f_1(x)| < \varepsilon, \quad |g_1(x)| < \varepsilon \text{ gilt für } 0 \leq x \leq 1.$$

Dann ist

$$D(f, g) = D(p + f_1, q + g_1) = D(p, q) + D(f_1, q) + D(p, g_1) + D(f_1, g_1)$$

also

$$(29) \quad |D(f, g)| \leq |D(p, q)| + |D(f_1, q) + D(p, g_1) + D(f_1, g_1)|.$$

Wenn nun

$$M_f = \max(\Phi, -\varphi) = |f| \max \quad | \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$M_g = \max(\Gamma, -\gamma) = |g| \max \quad | \quad 0 \leq x \leq 1$$

gesetzt wird, gilt für genügend großes n

$$(30) \quad |D(f_1, q) + D(p, g_1) + D(f_1, g_1)| \leq 2\varepsilon(M_f + M_g + 3\varepsilon).$$

Weiter ist nach (27) und weil $f(0) = p(0)$, $f(1) = p(1)$, $g(0) = q(0)$, $g(1) = q(1)$ gilt

$$|D(p, q)| \leq \frac{1}{45} |p(1) - p(0)| |q(1) - q(0)| = \frac{1}{45} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma),$$

also nach (29) und (30)

$$|D(f, g)| \leq \frac{1}{45} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma) + 2\varepsilon(M_f + M_g + 3\varepsilon),$$

und da der zweite Summand rechterhand beliebig verkleinert werden kann, gilt auch

$$(25) \quad |D(f, g)| \leq \frac{1}{45} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma),$$

was bewiesen werden sollte.

Die in der letzten Ungleichheit für $|D(f, g)|$ gegebene Schranke läßt sich durch keine kleinere ersetzen, wenn $f(x)$ und $g(x)$ beliebige vollmonotone Funktionen bedeuten; denn für $f(x) = g(x) = x^2$ ist $D(f, g) = \frac{1}{45}$.

Zum Schluß mögen noch zwei einfache Anwendungen der Ungleichung

$$(18) \quad |D(f, g)| \leq \frac{1}{4} (\Phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$$

gezeigt werden. Die erste liefert einen Beweis für die allerdings schon bekannte Tatsache, daß für die Koeffizienten a_n und b_n der Fourierreiheentwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt. Es ist nämlich

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_{\lambda \frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1) \frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, dx,$$

also

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left| \int_{\lambda \frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1) \frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, dx \right|.$$

Andererseits folgt aus der Ungleichung (18)

$$\left| \frac{n}{2\pi} \int_{\lambda \frac{2\pi}{n}}^{(\lambda+1) \frac{2\pi}{n}} f(x) \cos n x \, dx - 0 \right| \leq \frac{1}{4} (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda) \cdot 2,$$

wenn für

$$\frac{\lambda 2\pi}{n} \leq x \leq (\lambda + 1) \frac{2\pi}{n} \quad \varphi_\lambda \leq f(x) \leq \Phi_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n - 1)$$

erfüllt ist. Also ergibt sich

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda),$$

und da $\sum (\Phi_\lambda - \varphi_\lambda) \leq \sigma$ gilt, wenn $f(x)$ von beschränkter Schwankung ist, erhält man $|a_n| \leq \frac{\sigma}{n}$ und ganz entsprechend $|b_n| \leq \frac{\sigma}{n}$.

Zweitens betrachte man ein beliebiges, im Grundbereich $a \leq x \leq b$ normiertes und orthogonales Funktionensystem $f_n(x)$

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) \, dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Die Ungleichung (18) liefert

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f_n^2 \, dx - \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_a^b f_n(x) \, dx \right)^2 \leq \frac{1}{4} (\Phi_n - \varphi_n)^2,$$

wenn Φ_n und φ_n obere und untere Grenze von $f_n(x)$ im Grundbereich bedeuten. Nun folgt aber aus der Besselschen Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = 0;$$

also erhält man

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\Phi_n - \varphi_n) \geq \frac{2}{\sqrt{b-a}},$$

d. h. die Funktionen eines im Grundbereich $a \leq x \leq b$ normierten Orthogonalsystems oszillieren fast alle zwischen Grenzen, deren Abstand größer ist als $\frac{2}{\sqrt{b-a}} - \alpha$, wie klein auch die Konstante α sein mag. Der asymptotische Minimalabstand von oberer und unterer Grenze der Funktionen des Systems hängt also nur von der Größe des Grundbereiches ab. Wenn übrigens eine der Funktionen $f_n(x)$, etwa f_0 , eine Konstante ist, dann folgt ja aus der Orthogonalitätsbedingung $\int_a^b f_n(x) dx = 0$ für $n = 1, 2, \dots$, so daß auch

$$\Phi_n - \varphi_n \geq \frac{2}{\sqrt{b-a}}$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Jetzt liefert die Ungleichung (12 b) sogar

$$-\varphi_n \Phi_n \geq \frac{1}{b-a} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

(Eingegangen am 30. Dezember 1933.)