Ueber den Casus Irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

Es ist meines Wissens noch nicht streng bewiesen worden, dass der *casus irreducibilis* die Eigenschaft besitzt, nach der er genannt ist. Ein solcher Beweis kann weiter und enger gefasst sein. Man kann sich auf die sogenannte *allgemeine* Gleichung dritten Grades beschränken, d. h. die Coefficienten der Gleichung

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

innerhalb gewisser Grenzen willkürlich lassen; dabei wird es sich jedenfalls nur um solche reelle Werthe p, q, r handeln, für welche die Discriminante

$$D = p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^2$$

positiv ist. Es ist dann zu zeigen, dass es keinen aus reellen Wurzeln gebildeten Ausdruck giebt, welcher für alle die in jenen Grenzen veränderlichen p, q, r der Gleichung genügt. Dieser Beweis kann dem Abel'schen für die Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades nachgebildet werden, wobei nur Reelles und Imaginäres sorgfältig geschieden werden muss. Einfacher gestaltet sich der folgende Beweisgang, der weiter reicht, indem er zugleich für jede *besondere* irreducible Gleichung vom dritten Grade gilt.

§ 1.

Man setze einen Rationalitätsbereich fest, d. h. bezeichne gewisse veränderliche oder unveränderliche Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ in endlicher Zahl und betrachte alle aus diesen Grössen durch die Operationen der vier Species ableitbaren als rational. Die Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ sollen jetzt ausserdem reell sein, so dass ein *reeller* Rationalitätsbereich vorliegt. In diesem Rationalitätsbereich sei eine gegebene Gleichung dritten Grades irreducibel und ihre Discriminante D sei positiv. Man hat dann eine Gleichung mit drei verschiedenen reellen Wurzeln; denn bei der gewöhnlichen Schreibart der Cardanischen Formel ist die unter der Quadratwurzel stehende Grösse gleich

$$-\frac{D}{4.27},$$

also im vorliegenden Falle negativ.

Ist nun nicht zufällig die Quadratwurzel aus der Discriminante selbst eine Grösse des Rationalitätsbereichs, so füge man sie nachträglich zu den Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ hinzu, d. h. man „adjungire“ $\sqrt{D}$. Der neue Rationalitätsbereich ist auch reell, weil die Discriminante positiv ist. Die erwähnten Eigenschaften der Gleichung bleiben bestehen; die Gleichung wird nicht reducibel, weil keine Gleichung vom dritten Grad durch Adjunction der Wurzel einer vom zweiten zerfällt, was im Folgenden noch begründet werden wird. Es gewinnt aber die Gleichung noch die Eigenschaft, dass jede ihrer Wurzeln, x_1, x_2, x_3, in jeder anderen rational ist. Es ist nämlich

$$x_1 - x_2 = \frac{\pm\sqrt{D}}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \frac{\pm\sqrt{D}}{\frac{r}{x_3} - p x_3 + 2x_3^2},$$

und

$$x_1 + x_2 = p - x_3,$$

woraus hervorgeht, dass x_1 und x_2 rational sind in x_3 und den Grössen des neuen Rationalitätsbereichs; es ist auch durch die vorausgesetzte Irreducibilität der Gleichung ausgeschlossen, dass die Ausdrücke illusorisch werden. So kann man immer 2 der Wurzeln in der dritten ausdrücken.

§ 2.

Ich nehme jetzt an, dass die Gleichung durch einen irgendwie aus Wurzelzeichen combinirten ohne Hilfe der Imaginären zu berechnenden Ausdruck befriedigt werde. Es soll also möglich sein, eine der Gleichungswurzeln dadurch zu bestimmen, dass man aus einer Grösse des Rationalitätsbereichs eine Wurzel von beliebigem Exponenten reell auszieht, diese adjungirt, aus einer Grösse des neuen Rationalitätsbereichs wieder eine Wurzel reell auszieht und so fortfährt, bis man zu einem Rationalitätsbereich gelangt, dem die Gleichungswurzel angehört. Die Wurzelexponenten können unbeschadet der Allgemeinheit als Primzahlen angenommen werden.

Wofern die erste Adjunction die Gleichung nicht reducibel macht, bleiben alle die besprochenen Eigenschaften der Gleichung bestehen. Man schreitet in diesem Fall gleich zur nächsten Adjunction weiter und macht nöthigenfalls so fort, bis eine Wurzel adjungirt wird, welche die Gleichung reducibel macht. Der unmittelbar vor dieser Adjunction vorhandene Rationalitätsbereich ist reell, weil alle die adjungirten Wurzeln reell sind. Man hätte also den Fall, dass eine in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible Gleichung dritten Grades, bei der jede Wurzel reell und in jeder andern rational ist, reducibel würde bei der Adjunction einer reellen Wurzel mit Primzahlexponenten aus einer Grösse des Rationalitätbereichs.

§ 3.

Dass dies nicht möglich ist, ergiebt sich aus dem folgenden allgemeineren Satz: *Eine in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible Gleichung n^{ten} Grades mit einer reellen Wurzel und von der Eigenschaft, dass jede ihrer Wurzeln in jeder andern rational ist, kann nicht durch die Adjunction eines reellen Radicals mit Primzahlexponenten reducibel werden, es sei denn der Exponent gleich 2, in welchem Fall auch n durch 2 theilbar sein müsste.*

Hinsichtlich des Beweises dieses Satzes bedenke man zunächst, dass die vorausgesetzte Realität einer Gleichungswurzel die Realität der andern nach sich zieht, denn diese sind in jener einen rational, und die ausserdem in die Ausdrücke eingehenden Grössen des Rationalitätsbereichs sind gleichfalls reell. Ferner hat man die *reine* Gleichung

$$x^p - a = 0,$$

die das Radical definirt, ebenfalls als irreducibel zu denken. Wäre sie nämlich reducibel, so hätte sie, wie Herr Kronecker bewiesen hat*), eine rationale Wurzel. Nun ist hier für die Gleichung n^{ten} Grades ein reeller Rationalitätsbereich festgesetzt, dem natürlich auch die Grösse a angehören soll. Es müsste also, im Fall eines ungeraden Primzahlexponenten p, gerade die reelle Wurzel der reinen Gleichung die rationale sein. In allen Fällen würde also die Reducibilität der reinen Gleichung zur Folge haben, dass die adjungirte Grösse selbst rational gedacht werden müsste, wobei die Gleichung n^{ten} Grades nicht reducibel werden könnte.

§ 4.

Hat man überhaupt zwei in demselben Rationalitätsbereich irreducible Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grad, genügt eine Wurzel ξ der ersten nach Adjunction einer Wurzel η der zweiten einer irreduciblen Gleichung ν^{ten} Grades, und genügt η nach Adjunction von ξ einer ebensolchen Gleichung vom μ^{ten} Grad, so ist**)

$$n \,.\, \mu = m \,.\, \nu.$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass, wenn $\nu < n$ ist, auch $\mu < m$

---

*) Vergl. Monatsberichte der Berl. Akad., März 1879, p. 206.

**) Dieser Satz gehört meines Wissens Herrn Kronecker an, in dessen Vorlesungen ich ihn zuerst kennen gelernt habe; man findet ihn bewiesen in einer Abhandlung des Herrn Kneser: Math. Ann. Bd. XXX, p. 195. Der erwähnte Satz fällt unter besonderen Umständen mit einem Satz des Herrn C. Jordan zusammen: Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, p. 269. Théorème XIII.

sein muss, und m und n nicht relativ prim zu einander sein können. Wenn also die erste Gleichung durch die Adjunction von η reducibel wird, so gilt dasselbe von der zweiten bei der Adjunction von ξ, und die Grade haben einen gemeinsamen Theiler. Es ergiebt sich hieraus unmittelbar die schon früher benutzte Regel, dass eine Gleichung dritten Grades bei der Adjunction der Wurzel einer vom zweiten nicht reducibel werden kann.

Nimmt man von der Gleichung n^{ten} Grades wieder an, dass jede ihrer Wurzeln in jeder anderen rational ist, und dass sie wirklich bei der Adjunction von η reducibel wird, so zerfällt die Gleichung m^{ten} Grades bei der Adjunction in Factoren von demselben Grad. Nennt man nämlich diese Gleichung $F(x) = 0$, ist $f(x, \xi)$ einer der nach Adjunction von ξ irreducibeln Factoren von $F(x)$, und sind $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-1)}$ die übrigen Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades, so sind $f(x, \xi)$, $f(x, \xi')$, $f(x, \xi'')$, ..., $f(x, \xi^{(n-1)})$ lauter in demselben Rationalitätsbereich $[\xi, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots]$ irreducible Functionen. Zwei dieser Functionen werden also entweder übereinstimmen oder gar keinen gemeinsamen Theiler haben. Keine der Functionen enthält einen Linearfactor doppelt, keine einen Linearfactor, der nicht der Function $F(x)$ angehörte, und das Product

$$f(x, \xi) \cdot f(x, \xi') \cdot f(x, \xi'') \ldots f(x, \xi^{(n-1)}),$$

das rational ist, muss alle Linearfactoren der im ursprünglichen Rationalitätsbereich irreducibeln Function $F(x)$ enthalten. $F(x)$ ist also das Product aus einem Theil der Functionen $f(x, \xi^{\alpha})$, zerfällt somit in Factoren gleichen Grades.

Wenn nun m eine Primzahl ist, so zerlegt sich die Gleichung $F(x) = 0$ in Factoren ersten Grades, jede ihrer Wurzeln wird durch die Adjunction von ξ rational. Ist ausserdem ξ reell, und der ursprüngliche Rationalitätsbereich auch, so muss die Gleichung m^{ten} Grades $F(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln haben.

Man hat dies jetzt bloss auf den Fall anzuwenden, dass

$$F(x) = x^p - a$$

gesetzt wird. Die Gleichung

$$x^p - a = 0$$

hat nur im Fall $p = 2$ lauter reelle Wurzeln, und da auch in diesem Fall p und n einen gemeinsamen Theiler haben müssen, kann n keine ungerade Zahl sein, womit der früher in § 3 aufgestellte Satz bewiesen ist.

§ 5.

Für die Gleichung vom dritten Grad, die den Ausgangspunkt gebildet hat, ist damit Alles erledigt. Man könnte noch die Frage anknüpfen, welche Eigenschaften überhaupt eine Gleichung mit lauter reellen Wurzeln besitzen muss, damit auch nur eine von diesen durch reelle Radicale ausgedrückt werden kann. Bei der Behandlung dieser Frage benutze ich die Galois'sche Theorie, die ich um des elementaren Gegenstandes willen im Vorhergehenden vermieden habe.

Es sei eine Gleichung $G(x) = 0$ mit lauter reellen, von einander verschiedenen Wurzeln gegeben, die im Uebrigen ganz beliebig ist. Ein reeller Rationalitätsbereich sei zu Grunde gelegt. Man bilde die Galois'sche Resolvente, von der dann alle Wurzeln reell sind. Der Grad N der Resolvente ist die Ordnung der Gruppe der gegebenen Gleichung. Nun denke man sich die Reihe der reellen Radicale, die nach und nach adjungirt werden, damit schliesslich die eine Wurzel x_1 der Gleichung $G = 0$ rational wird. Die Exponenten der Radicale werden wieder als Primzahlen angenommen. Das erste Radical, durch dessen Adjunction die Gruppe der gegebenen Gleichung reducirt wird, ist auch das erste, welches die Resolvente zum Zerfallen bringt. Es kommt nun der in § 3 aufgestellte Satz zur Geltung; der betreffende Wurzelexponent muss gleich 2 sein. Man hat also eine Quadratwurzel, nach deren Adjunction eine beliebig gewählte Wurzel ξ der Resolvente einer irreducibeln Gleichung ν^{ten} Grades genügt, während nach dem in § 4 erwähnten Satz die Quadratwurzel selbst in ξ rational ist, und die Relation

$$N \,.\, 1 = 2 \,.\, \nu$$

besteht. Jene Galois'sche Resolvente zerfällt also in zwei irreducible Factoren vom Grade $\frac{1}{2} N$, und die Gruppe der Gleichung $G = 0$ reducirt sich auf eine Untergruppe von halb so viel Substitutionen*). Eine Untergruppe, die aus der Hälfte der Substitutionen der sie umfassenden Gruppe besteht, ist in dieser stets ausgezeichnet enthalten**). Wenn nun nach der Adjunction der Quadratwurzel die Wurzel x_1 der Gleichung $G = 0$ nicht etwa rational ist, hat man dieselbe Betrachtungsweise fortzusetzen; man hat dieselbe Gleichung vor sich mit Rücksicht auf einen neuen Rationalitätsbereich, und als Galois'sche Resolvente der Gleichung ist jetzt nur einer der Theiler vom Grad $\frac{1}{2} N$ anzusehen, in welche die frühere Resolvente zerfiel. Schliesslich muss das Verfahren auf eine Gruppe $\Gamma_\varkappa$ führen, deren Substitutionen den Buchstaben x_1 nicht mehr versetzen. Man erhält so eine Reihe von Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varkappa$, die mit der ursprünglichen Gleichungsgruppe Γ beginnt, und in der jedes Glied ausgezeichnete Untergruppe vom vorhergehenden ist mit halb so viel Substitutionen.

---

*) Cf. Kneser: a. a. O. p. 201, Nr. 2.

**) Man vergl. auch: C. Jordan, a. a. O. p. 268 und 269, Théorème XII und Th. XIII.

Ich will jetzt die Annahme hinzufügen, dass die Gleichung $G = 0$ irreducibel sein soll, dann ist Γ eine *transitive* Gruppe von Buchstabenvertauschungen. Man kann desshalb mittelst einer passend gewählten Substitution von Γ die Reihe $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varkappa$ in eine Reihe $\Gamma, \Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_\varkappa'$ transformiren, derart, dass die Gruppe $\Gamma_\varkappa'$ irgend eine andere Wurzel der Gleichung $G = 0$, etwa x_2, ungeändert lässt.

Es zeigt eine nähere Ueberlegung, dass nun jede Wurzel dieser Gleichung durch *blosse Quadratwurzelausziehung* und zwar, da die Grössen $x_1, x_2, \ldots$ alle reell sind, durch reelle Quadratwurzeln gefunden werden kann. Die Gleichung lässt sich durch Quadratwurzeln vollständig auflösen; die Ordnung ihrer Gruppe muss dabei eine Potenz von 2 sein, und dies ist umgekehrt auch hinreichend*). Wegen der Transitivität der Gruppe ist der Grad der Gleichung $G = 0$ ein Theiler von der Ordnungszahl der Gruppe, also auch eine Potenz von 2.

Unter den in einem reellen Rationalitätsbereich irreducibeln Gleichungen mit reellen Wurzeln sind also die einzigen, bei denen eine Wurzel durch reelle Radicale dargestellt werden kann, die durch Quadratwurzeln auflösbaren.

§ 6.

Es sei jetzt wieder $G(x) = 0$ eine Gleichung mit reellen, von einander verschiedenen Wurzeln, die auch reducibel sein kann und auf Grund eines reellen Rationalitätsbereichs betrachtet wird. Adjungirt man der Galois'schen Resolvente dieser Gleichung eine Wurzel einer in demselben Rationalitätsbereich irreducibeln Gleichung von Primzahlgrad, so führen die Betrachtungen von § 4 zu dem Resultat: *Die Gruppe der Gleichung $G(x) = 0$ kann durch die Adjunction einer Wurzel einer irreducibeln Gleichung von Primzahlgrad sich nur dann reduciren, wenn die letztere lauter reelle Wurzeln hat.* Dieser Satz, der weiter reicht als der in § 3 auseinandergesetzte, ist übrigens eine directe Folge von einem Theorem des Herrn Kneser (a. a. O. p. 201).

Stuttgart, December 1890.

*) Vergl. Netto: Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882, p. 277 Lehrsatz VII und Sylow: Math. Ann. Bd. 5, p. 589.