Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen.

Zweiter Theil.

Von

HEINRICH BURKHARDT in Göttingen.

Um die Stellung der folgenden Entwicklungen gegenüber denen des ersten Theils*) zu präcisiren, knüpfen wir an die Schlussbemerkungen desselben an. In denselben ist darauf hingewiesen, dass dort eine wesentliche Eigenschaft der Multiplicatorgleichung unberücksichtigt geblieben ist: die Eigenschaft, dass *die Quadratwurzeln aus ihren Wurzeln sich homogen und linear aus nur* $\frac{n^2+1}{2}$ *Grössen mit Hilfe von numerischen Coefficienten zusammensetzen lassen.* Solche Ausdrücke hat Herr Wiltheiss**) vermittelst gewisser Functionen, die er mit $\varphi(h_1, h_2)$ bezeichnet, für *die transformirten Thetafunctionen selbst* (nicht nur für ihre Nullwerthe) gegeben; diese Functionen $\varphi(h_1, h_2)$ sind denjenigen nachgebildet, welche seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Functionen zu entsprechendem Zweck benutzt zu werden pflegen. Nun hat Herr F. Klein***) aus den letzteren

---

*) Der in Bd. 36 dieser Ann. p. 371 ff. erschienene *erste Theil* dieser Untersuchungen soll im folgenden kurz mit I citirt werden, die „*Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung, nach Vorlesungen von F. Klein*" (diese Ann. Bd. 35, p. 198 ff.) wie in I mit Grundz. — Eine ungenaue Literaturangabe in I (p. 421, Fussnote) sei hier richtig gestellt: der Satz, um welchen es sich dort handelt, ist von Herrn Krause bereits in Bd. 20 dieser Ann. p. 58 (1882) bestimmt ausgesprochen worden.

**) *Zur Theorie der Transformation hyperelliptischer Functionen zweier Argumente*, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 96, p. 17 ff. (1883). Vgl. dort auch p. 27 die Notiz über nicht veröffentlichte Untersuchungen des Herrn Kronecker.

***) Vgl. die zusammenfassende Darstellung im 13. Bd. der Abhandl. der math.-phys. Cl. der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften: *Ueber die elliptischen Normalcurven der N^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der N^{ten} Stufe*, (1885), sowie die dort citirten älteren Arbeiten desselben.

durch Zufügung bestimmter Factoren andere Functionen X_α gewonnen, welche in mancher Beziehung sich einfacher erweisen. Nämlich bei linearer Transformation der Perioden erfahren die Functionen, um welche es sich handelt, selbst lineare homogene Substitutionen; die X_α sind dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen die Coefficienten dieser Substitutionen *rein numerisch* sind. Herr Klein hat dann weiter in seinen Vorlesungen angedeutet, wie die Ueberlegungen, welche zu den elliptischen X_α hingeleitet hatten, sich auf den hyperelliptischen Fall übertragen lassen und dort zu analogen Functionen $X_{\alpha\beta}$ führen. Näher ausgeführt wurde diese Untersuchung in zwei Arbeiten des Herrn Witting,*) welche jedoch von einzelnen Unrichtigkeiten nicht frei sind und auch abgesehen davon mehrfach Vereinfachungen und Ergänzungen zulassen. Es sei daher gestattet, die Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ hier nochmals im Zusammenhange darzustellen. (Damit treten wir allerdings über den Rahmen der Ueberschrift hinaus in das Gebiet der „eigentlichen"**) hyperelliptischen Functionen; indessen möge der einmal gewählte Titel beibehalten werden). Aus den $X_{\alpha\beta}$ werden dann andere Functionen $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ erhalten,***) von welchen die einen wie die anderen bei linearer Periodentransformation sich nur unter sich linear substituiren. Die Gruppe der linearen Substitutionen der $Z_{\alpha\beta}$ für $n=3$ ist von den Herren Witting†) und Maschke††) nach verschiedenen Richtungen hin eingehend untersucht worden; für die der $Y_{\alpha\beta}$ (ebenfalls für $n=3$) soll das Gleiche in der vorliegenden Arbeit geschehen. Es führt diese Untersuchung auf ein auch algebraisch interessantes Gleichungssystem, von welchem die im I. Theil untersuchte Multiplicatorgleichung als Resolvente eines Specialfalls betrachtet werden kann.

Demzufolge gliedert sich der vorliegende Theil dieser Untersuchungen wie folgt: die allgemeine Theorie der $X_{\alpha\beta}$ füllt den VIII. Abschnitt aus; der IX. handelt in geometrischer (wenn man will hypergeometrischer) Betrachtungsweise von der quinären Gruppe linearer Substitutionen, nach welcher sich die $Y_{\alpha\beta}$ im Falle $n=3$ umsetzen, sowie von der durch diese Gruppe bestimmten Configuration von 45

---

*) *Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler*, diese Ann. Bd. 29, p. 157 ff. (1886). — *Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen $(p=2)$ führt.* Göttinger Diss. (Dresden 1887).

**) Grundz. § 15 a. E.

***) Witting, diese Ann. Bd. 29, p. 167. Diss. p. 16.

†) In der Diss.

††) *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen*, diese Ann. Bd. 33, p. 317 ff.; vgl. auch den Auszug in den Göttinger Nachrichten v. J. 1888, p. 78 ff.

Punkten und 45 Räumen im vierdimensionalen Gebiet; der X. von den Invarianten dieser Gruppe; der XI. von dem „Problem der Y“ und von Resolventen desselben; der XII. Abschnitt endlich enthält die Anwendung der Resultate auf die Multiplicatorgleichung und kehrt damit in das Gebiet der Modulfunctionen zurück. Nur dieser letzte Abschnitt setzt die Kenntniss des I. Theils dieser Untersuchungen voraus; in den übrigen wird nur an ganz wenigen Stellen auf Resultate desselben Bezug genommen.

Dass die leitenden Ideen der Entwicklung aus den Veröffentlichungen des Herrn F. Klein stammen, wird einem mit der Literatur vertrauten Leser nicht entgehen und soll ausserdem an geeigneten Stellen durch Citate nachgewiesen werden; dass der Verf. Herrn Klein auch darüber hinaus für manchen Wink zu Dank verpflichtet ist, sei an dieser Stelle ausdrücklich beigefügt.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 10 der Göttinger Nachrichten v. J. 1890 erschienen u. d. T.: „*Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen* 40. *Grades, welche bei der Transformation* 3. *Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten.*“

VIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ für $p=2$.

§ 30.

Jacobi'sche Functionen von zwei Variabeln.*)

Als *Jacobi'sche Functionen von zwei Variabeln* bezeichnen wir, wie es bereits vielfach geschieht, *jede ganze transcendente Function* Θ *der beiden Argumente* u_1, u_2, *welche bei Vermehrung derselben um gewisse Grössen* ω (*„Perioden I. Art“*) *den Functionalgleichungen genügt:*

$$(1)\quad \Theta(u_1+\omega_{1i},\ u_2+\omega_{2i}) = e^{a_{1i}u_1+a_{2i}u_2+b_{2i}}\,.\,\Theta(u_1, u_2),\quad (i=1,2,3,4)$$

*) In diesem und den nächstfolgenden Paragraphen schliesst sich die Darstellung eng an einerseits an die von Herrn Hurwitz in Bd. 27 dieser Ann. p. 185 ff. (1885) für den elliptischen Fall gegebene Entwicklung (*Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten*), andererseits an die allgemeine Theorie des Herrn Frobenius (*Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobi'schen Functionen*, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 97, p. 16 ff., p. 188 ff., 1883/4). Dass ich, statt einfach auf beide Arbeiten zu verweisen, die Sache gerade für unseren Fall $p=2$ und unter angemessener Beschränkung der Voraussetzungen nochmals darstelle, ist vielleicht manchem Leser nicht unwillkommen. — Uebrigens vgl. man auch die Abhandlung des Herrn Appell: *Sur les fonctions quadruplement périodiques de troisième espèce* (Annales de l'école normale, sér. 3, t. 7, 1890).

in welchen die a, b von den u unabhängige Grössen bedeuten. Zwei Jacobi'sche Functionen, in welchen dieselben einzeln übereinstimmen, nennen wir *gleichändrig.* *)

Dass in dieser Definition die ω, a, b nicht ganz willkürlich angenommen werden dürfen, lehrt folgende Ueberlegung: Man bilde $\Theta(u_1 + \omega_{1i} + \omega_{1k}, u_2 + \omega_{2i} + \omega_{2k})$ auf zwei verschiedene Arten, indem man einmal zuerst ω_{1i}, ω_{2i}, dann ω_{1k}, ω_{2k} zufügt, das anderemal in umgekehrter Reihenfolge verfährt; durch Vergleichung der beiden so entstehenden Formeln erhält man als erstes Resultat, dass die sechs Ausdrücke:

$$n_{ik} = \frac{1}{2\pi i}(a_{1i}\omega_{1k} + a_{2i}\omega_{2k} - a_{1k}\omega_{1i} - a_{2k}\omega_{2i}) \tag{2}$$

ganze Zahlen sein müssen. Ferner multiplicire man, unter $(iklm)$ eine gerade Permutation der Zahlen (1 2 3 4) verstanden, jeden der sechs Ausdrücke (2) mit der entsprechenden Determinante:

$$p_{lm} = \omega_{1l}\omega_{2m} - \omega_{2l}\omega_{1m} \tag{3}$$

und addire die 6 Producte; in der Summe werden die Coefficienten der einzelnen a zu Null und es folgt: *die ω müssen die Relation:*

$$n_{12}p_{34} + n_{13}p_{42} + n_{14}p_{23} + n_{23}p_{14} + n_{34}p_{12} + n_{42}p_{13} = 0 \tag{4}$$

befriedigen, wenn eine Function der verlangten Art existiren soll. Werden statt der ω geeignete lineare Combinationen derselben eingeführt, so kann die in (4) auf der linken Seite stehende bilineare Form durch eine reducirte Form ersetzt werden. Für unsere Zwecke genügt es, anzunehmen, diese reducirte Form sei:**)

$$n(p_{13} + p_{24}). \tag{5}$$

Auf diese Form wird man sogleich geführt, wenn man voraussetzt (was wir später ja doch thun müssen), dass u_1, u_2 *zwei linear unabhängige Integrale I. Gattung auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 2 und die ω kanonische****) *Perioden derselben seien.* Denn alsdann hat die zwischen den ω bestehende Bilinearrelation die Form:

$$p_{13} + p_{24} = 0; \tag{6}$$

die in (2), (4) auftretenden ganzen Zahlen haben also in diesem Falle die Werthe:

$$n_{12} = n_{14} = n_{23} = n_{34} = 0, \quad n_{13} = n_{24}. \tag{7}$$

An der hiermit bezeichneten Voraussetzung soll im folgenden festgehalten werden. Den gemeinsamen Werth der beiden letzten Zahlen (7)

*) Frobenius, a. a. O. p. 39.

**) Der allgemeine Fall wird von Frobenius a. a. O. weiter verfolgt.

***) Grundz. § 2.

bezeichnen wir mit n und nennen ihn*) die *Ordnung* der betrachteten Jacobi'schen Function.

Durch Multiplication mit einem Exponentialfactor der Form:

$$e^{M_1 u_1^2 + 2M_{12}u_1 u_2 + M_{22}u_2^2 + N_1 u_1 + N_2 u_2} \tag{8}$$

(einer Jacobi'schen Function nullter Ordnung) gehen die zu einem bestimmten System der Grössen a, b gehörenden Jacobi'schen Functionen in andere über, welche zu andern Werthen a', b' dieser Grössen gehören; die letzteren bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a'_{1i} &= 2M_{11}\omega_{1i} + 2M_{12}\omega_{2i} + a_{1i}, \\ a'_{2i} &= 2M_{12}\omega_{1i} + 2M_{22}\omega_{2i} + a_{2i}, \qquad (i = 1,2,3,4) \\ b'_i &= M_{11}\omega_{1i}^2 + 2M_{12}\omega_{1i}\omega_{2i} + M_{22}\omega_{2i}^2 + N_1\omega_{1i} + N_2\omega_{2i} + b_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus diesen folgt zunächst, dass *die neuen Functionen von derselben Ordnung wie die ursprünglichen sind*; ferner aber der Satz:

Durch geeignete Wahl der M kann man von jedem den Bedingungen (2), (7) *genügenden Werthsysteme der a zu jedem andern gelangen, welches denselben Bedingungen für den gleichen Werth von n genügt; ist das geschehen, so kann man noch durch geeignete Wahl der N und Modification der u um additive Constante den b beliebige Werthe verschaffen.*

§ 31.

Der Hermite'sche Satz.

Das Fundament aller unserer weiteren Entwickelungen bildet der sogenannte Hermite'sche Satz,**) welcher folgendermassen lautet:

Alle gleichändrigen Jacobi'schen Functionen n^{ter} Ordnung setzen sich aus n^2 linear unabhängigen unter ihnen linear und homogen mit von den u unabhängigen Coefficienten zusammen.

Zum Beweise desselben führen wir statt der u „*Normalintegrale****) v" ein, für welche:

$$\begin{aligned} &\omega_{11} = 1, \quad \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \quad \omega_{22} = 1, \\ &\omega_{13} = \tau_{11}, \quad \omega_{14} = \omega_{23} = \tau_{12}, \quad \omega_{24} = \tau_{22} \end{aligned} \tag{1}$$

ist; ferner machen wir von dem letzten Satz des § 31 in der Weise Gebrauch, dass wir dafür sorgen, dass:

$$\begin{aligned} &a'_{11} = a'_{12} = a'_{21} = a'_{22} = b'_1 = b'_2 = 0, \\ &b'_3 = -n\pi i\tau_{11}, \quad b'_4 = -n\pi i\tau_{22} \end{aligned} \tag{2}$$

---

*) Uebereinstimmend mit Witting (der nur k statt n schreibt), aber abweichend von Frobenius, der das Quadrat der im Text n genannten Zahl als Ordnung einer solchen Jacobi'schen Function bezeichnet.

**) *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes*, n° X (Comptes rendus de l'acad. des sciences, t. 40, 1855).

***) Grundz. § 3.

wird. Wegen der Relationen (2), (7) des § 31 muss dann auch

(3) $$a'_{13} = a'_{24} = -2n\pi i, \quad a'_{23} = a'_{14} = 0$$

geworden sein; die Functionalgleichungen, welchen die so gewonnene Function $\varphi(v_1, v_2)$ genügt, lauten also:

(4) $$\begin{cases} \varphi(v_1+1, v_2) & = \qquad \varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1, v_2+1) & = \qquad \varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) & = e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}\varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) & = e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}\varphi(v_1, v_2), \end{cases}$$

Wir setzen ferner:

(5) $$e^{2\pi i v_1} = z_1, \quad e^{2\pi i v_2} = z_2, \quad e^{\pi i \tau_{11}} = p, \quad e^{\pi i \tau_{12}} = q, \quad e^{\pi i \tau_{22}} = r;$$

dann geht $\varphi(v_1, v_2)$ über in eine Function $f(z_1, z_2)$, welche in Folge der beiden ersten Gleichungen (4) und der zu Anfang des § 30 gemachten Voraussetzungen in eine Reihe der Form:

(6) $$f(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} A_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

entwickelt werden kann, und welche ferner in Folge der beiden letzten Gleichungen (4) den Functionalgleichungen genügt;

(7) $$\begin{aligned} f(p^2 z_1, q^2 z_2) &= p^{-n} z_1^{-n} f(z_1, z_2), \\ f(q^2 z_1, r^2 z_2) &= r^{-n} z_2^{-n} f(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Diese geben für die Coefficienten der Entwicklung (6) die Recursionsformeln:

(8) $$\begin{aligned} A_{m_1+n, m_2} &= p^{2m_1+n} q^{2m_2} A_{m_1, m_2}, \\ A_{m_1, m_2+n} &= q^{2m_1} r^{2m_2+n} A_{m_1, m_2}; \end{aligned}$$

mit Hülfe derselben lassen sich alle A_{m_1, m_2} aus denjenigen n^2 unter ihnen bestimmen, in welchen jeder der beiden Indices eine Zahl der Reihe:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ist. *So erhält man für die allgemeinste den Bedingungen genügende Function φ den folgenden mit n^2 willkürlichen Constanten behafteten Ausdruck:*

(9) $$\varphi(v_1, v_2) = \sum_{0}^{n-1}{}^{\alpha} \sum_{0}^{n-1}{}^{\beta} A_{\alpha\beta}\, \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2).$$

Die n^2 Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ sind dabei definirt durch die unendlichen Reihen:*)

*) Ueber die an und für sich noch willkürlich zu wählenden multiplicativen Constanten in der Definition der einzelnen $\varphi_{\alpha\beta}$ ist dabei in bestimmter Weise verfügt.

$$(10)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2} p^{\frac{(nm_1+\alpha)^2}{n}} q^{\frac{2(nm_1+\alpha)(nm_2+\beta)}{n}} r^{\frac{(nm_2+\beta)^2}{n}} z_1^{nm_1+\alpha} z_2^{nm_2+\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2);$$

sie lassen sich also, wie folgt, durch Thetafunctionen ausdrücken:

$$(11)\quad \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2)$$
$$= p^{\frac{\alpha^2}{n}} q^{\frac{2\alpha\beta}{n}} r^{\frac{\beta^2}{n}} z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \vartheta(nv_1+\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\, nv_2+\alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\, n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).^{*)}$$

Uebrigens convergiren die Reihen (10), sobald die τ den bekannten Ungleichheitsbedingungen genügen; und jede in der Form (9) enthaltene Function besitzt wirklich die verlangten Eigenschaften. Ferner geht aus der Form der Reihen (10) unmittelbar hervor, dass *zwischen ihnen keine lineare Relation mit von den u unabhängigen Coefficienten bestehen kann.*

Nachdem uns die speciellen Functionen φ soweit geführt haben, kehren wir wieder zu den ursprünglichen Variabeln und Functionen zurück, indem wir die zu Anfang des Paragraphen vorgenommenen Veränderungen rückgängig machen; dann erhalten wir den *Hermite'schen Satz* in der an die Spitze gestellten Form. Uebrigens haben uns unsere Ueberlegungen auf ein ganz bestimmtes**) Fundamentalsystem linear unabhängiger Jacobi'scher Functionen n^{ter} Ordnung geführt; mit der Discussion desselben müssen wir uns nunmehr beschäftigen.

§ 32.

Vorläufige Definition der $X_{\alpha\beta}$.

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen n^2 Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ sind für manche Zwecke bereits vollständig ausreichend; für andere aber wird es zweckmässig sein, sie noch durch Zufügung eines Exponentialfactors von der in § 30, 8 angegebenen Form zu modificiren. Im elliptischen Fall ist***) die Wahl dieses Factors durch die Forderung begründet worden, dass in dem zu betrachtenden Systeme Jacobi'scher Functionen auch eine solche „*der ersten Stufe*" vorkommen solle. Eine genau analoge Forderung kann in unserem hyperelliptischen Falle nicht gestellt werden, weil hier nicht für jede Ordnungszahl Jacobi'sche Functionen I. Stufe existiren. Somit werden wir wieder darauf hingewiesen, Anschluss an die Functionen zweiter Stufe zu suchen.

*) Vgl. Witting, Diss. p. 14. — Die Bezeichnung $\varphi_{\alpha\beta}$ läuft dem $X_{\alpha\beta}$ bei Witting parallel; bei Fortbildung der in den citirten Arbeiten von Klein und Hurwitz für den elliptischen Fall benutzten Bezeichnung müsste man die Function (11) $\varphi_{-\alpha\,-\beta}$ nennen.

**) Bis auf die in der Fussn. p. 166 erwähnten constanten Factoren.

***) Hurwitz, diese Ann. Bd. 27, p. 187 (1886).

Es bedingt dies, dass von nun an die Fälle eines geraden und eines ungeraden n verschiedenen Charakter zeigen; indem wir den ersteren ganz bei Seite lassen, beschränken wir uns im folgenden durchweg auf den Fall, dass *n eine ungerade Zahl ist.*

Wir fragen also zunächst nach Jacobi'schen Functionen zweiter Stufe. Solche sind die 16 Sigmafunctionen;*) und zwar sind sie im Sinne der § 30 benutzten Definition Jacobi'sche Functionen *erster* Ordnung. In der That, die Sigmafunction mit der Charakteristik

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}$$

genügt den Functionalgleichungen:

$$(2)\quad \sigma(u_1+\omega_{1i},\, u_2+\omega_{2i}) = (-1)^{g_i} e^{\eta_{1i}\left(u_1+\frac{1}{2}\omega_{1i}\right)+\eta_{2i}\left(u_2+\frac{1}{2}\omega_{2i}\right)}\, \sigma(u_1,\, u_2); \qquad (i=1,2,3,4)$$

und die „Perioden II. Gattung" η, welche hier in der Rolle der a des § 30 auftreten, erfüllen die bekannten Bilinearrelationen von der Form der Relationen (2), (7) des § 30 mit $n=1$. *Die n^{ten} Potenzen der Sigmafunctionen sind dann Jacobi'sche Functionen zweiter Stufe und n^{ter} Ordnung;* sie genügen den Functionalgleichungen:

$$(3)\quad f(u_1+\omega_{1i},\, u_2+\omega_{2i}) = (-1)^{g_i} e^{n\eta_{1i}\left(u_1+\frac{1}{2}\omega_{1i}\right)+n\eta_{2i}\left(u_2+\frac{1}{2}\omega_{2i}\right)} f(u_1,\, u_2). \qquad (i=1,2,3,4).$$

Die Forderung nun, welche wir an den zu Eingang dieses Paragraphen erwähnten Exponentialfactor**) stellen wollen, ist die folgende: *die durch Zufügung desselben aus den $\varphi_{\alpha\beta}$ erhaltenen Functionen — die $X_{\alpha\beta}$ — sollen mit einem bestimmten $\sigma^n(u_1\, u_2)$ gleichhändrig sein*, also der Functionalgleichung (3) genügen. Wir wollen solche mit dem σ^n einer bestimmten Charakteristik (1) gleichhändrige Functionen kurz *als Jacobi'sche Functionen n^{ter} Ordnung von der Charakteristik* (1) bezeichnen.

Statt nun solche Functionen aus den $\varphi_{\alpha\beta}$ des § 31 durch Zufügung eines Exponentialfactors abzuleiten, können wir sie auch auf folgende Weise gewinnen: Zufolge der in § 31, 11 gegebenen analytischen Darstellung der $\varphi_{\alpha\beta}$ ist:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}\left(v_1+\frac{1}{n},\, v_2\right) &= \varepsilon^{\alpha}\varphi_{\alpha\beta}(v_1,\, v_2), \\ \varphi_{\alpha\beta}\left(v_1,\, v_2+\frac{1}{n}\right) &= \varepsilon^{\beta}\varphi_{\alpha\beta}(v_1,\, v_2); \end{aligned}$$

---

*) Klein, diese Ann, Bd. 27, p. 435, 442 (1886).

**) Streng genommen müsste hier ausser von der Zufügung eines Exponentialfactors auch noch von Vermehrung der Argumente um additive Constante die Rede sein; es wird sich aber zeigen, dass dies letztere nicht erforderlich ist.

unter ε *ist dabei hier wie im Folgenden stets die* ***bestimmte*** n^{te} *Einheitswurzel:*

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{5}$$

verstanden. Hieraus und aus den beiden letzten Gleichungen (4) des § 31 ergiebt sich, dass $\varphi_{\alpha\beta}$ und demzufolge auch $X_{\alpha\beta}$ eine zu dem Periodensystem:

$$\overline{\omega}_{ik} = \frac{1}{n_k}\,\omega_{ik}, \quad (n_1 = n_2 = n, \quad n_3 = n_4 = 1), \tag{6}$$

gehörende Jacobi'sche Function *erster* Ordnung ist. Sie kann sich also von der zu denselben Perioden gehörenden Sigmafunction*) nur durch einen Exponentialfactor der mehrerwähnten Art und durch, zu den Argumenten tretende, additive Constante unterscheiden. M. a. W. wir dürfen ansetzen:

$$C \cdot e^{M_{11}u_1^2 + 2M_{12}u_1u_2 + M_{22}u_2^2 + N_1u_1 + N_2u_2}\, \sigma(u_1 + k_1,\; u_2 + k_2;\; \overline{\omega}_{ik}) \tag{7}$$
$$= X_{\alpha\beta}(u_1, u_2;\; \omega_{ik}),$$

und haben dann nur mehr die M, N, k in geeigneter Weise als Functionen der Perioden zu bestimmen, damit $X_{\alpha\beta}$ die Functionalgleichungen (3) befriedigt.

Wir werden die dabei sich ergebenden Resultate übersichtlicher darstellen können, wenn wir, analog wie es von Herrn Klein**) für den elliptischen Fall geschehen, *Sigmafunctionen mit Indices* einführen. Wir wollen nämlich setzen:

$$\sigma_{h_1h_2h_3h_4}(u_1, u_2) = e^{-\eta_1\left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_2\left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)}\, \sigma(u_1 + \omega_1,\; u_2 + \omega_2), \tag{8}$$

indem wir abkürzend:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_i \text{ für } & h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2} + h_3\omega_{i3} + h_4\omega_{i4} \\ \text{und ebenso: } \eta_i \text{ für } & h_1\eta_{i1} + h_2\eta_{i2} + h_3\eta_{i3} + h_4\eta_{i4} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2) \tag{9}$$

schreiben; Perioden und Charakteristik sind dabei in die Bezeichnung nicht mit aufgenommen, können aber, wo erforderlich, beigefügt werden.

Nach dieser Vorbemerkung kehren wir zurück zu Gleichung (7). Soll $X_{\alpha\beta}$ eine mit $\sigma^n(u_1, u_2;\; \omega_{ik})$ gleichändrige Function werden, so müssen zunächst die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} M_{11}\omega_{1i} + M_{12}\omega_{2i} = \frac{1}{2}\,(n\eta_{1i} - n_i\overline{\eta}_{1i}) \\ M_{12}\omega_{1i} + M_{22}\omega_{2i} = \frac{1}{2}\,(n\eta_{2i} - n_i\overline{\eta}_{2i}) \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

---

*) Die Erwähnung der Charakteristik kann hier wegbleiben, wie leicht zu sehen.

**) Abh. der sächsischen Gesellsch. der Wissenschaften (math. phys. Cl. Bd. VIII, p. 345). — Wegen der abweichenden Vorzeichen vgl Fussn. p. 167.

in welchen mit $\bar{\eta}$ die zu den $\bar{\omega}$ gehörenden Perioden II. Gattung bezeichnet sind. Aus ihnen folgen für die M die Werthe: *)

$$(11)\quad \begin{cases} M_{11} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[\quad n(\eta_{1i}\omega_{2k} - \eta_{1k}\omega_{2i}) - n_i n_k(\bar{\eta}_{1i}\bar{\omega}_{2k} - \bar{\eta}_{1k}\bar{\omega}_{2i})\right] \\ M_{12} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[-n(\eta_{1i}\omega_{1k} - \eta_{1k}\omega_{1i}) + n_i n_k(\bar{\eta}_{1i}\bar{\omega}_{1k} - \bar{\eta}_{1k}\bar{\omega}_{1i})\right] \\ \qquad = \frac{1}{2p_{ik}}\left[\quad n(\eta_{2i}\omega_{2k} - \eta_{2k}\omega_{2i}) - n_i n_k(\bar{\eta}_{2i}\bar{\omega}_{2k} - \bar{\eta}_{2k}\bar{\omega}_{2i})\right] \\ M_{22} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[-n(\eta_{2i}\omega_{1k} - \eta_{2k}\omega_{1i}) + n_i n_k(\bar{\eta}_{2i}\bar{\omega}_{1k} - \bar{\eta}_{2k}\bar{\omega}_{1i})\right]. \end{cases}$$

Die mit diesen M als Coefficienten gebildete ganze Function zweiten Grades:

$$(12)\qquad G_2^{(n)}(u_1, u_2) = M_{11}u_1^2 + 2M_{12}u_1u_2 + M_{22}u_2^2$$

lässt sich ausdrücken durch diejenige, welche in der den Uebergang von den Sigma zu den Theta vermittelnden Gleichung: **)

$$(13)\qquad \vartheta(v_i;\, \tau_{ik}) = c\sqrt{p_{12}}\,\sqrt[8]{D}\, e^{G_2(u_i;\,\omega_{ik})}\,\sigma(u_i;\,\omega_{ik})$$

im Exponenten auftritt; es ist nämlich:

$$(14)\qquad G_2^{(n)}(u_1, u_2) = -\,nG_2(u_i;\,\omega_{ik}) + G_2(u_i;\,\bar{\omega}_{ik}).$$

Mit Hilfe der angegebenen Werthe der M reduciren sich ferner die noch übrigen Bedingungsgleichungen auf:

$$(15)\quad N_1\bar{\omega}_{1i} + N_2\bar{\omega}_{2i} - k_1\bar{\eta}_{1i} - k_2\bar{\eta}_{2i} = \frac{2l_i\pi\sqrt{-1}}{n_i}\quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

unter den l_i sind dabei beliebige ganze Zahlen zu verstehen. Die Auflösung dieser Gleichungen geschieht leicht mit Hilfe der Bilinearrelationen und führt zu folgenden Werthen der Constanten N und k:

$$(16)\quad \begin{cases} N_1 = -\frac{1}{n}(l_1\bar{\eta}_{13} + l_2\bar{\eta}_{14}) + l_3\bar{\eta}_{11} + l_4\bar{\eta}_{12}, \\ N_2 = -\frac{1}{n}(l_1\bar{\eta}_{23} + l_2\bar{\eta}_{24}) + l_3\bar{\eta}_{21} + l_4\bar{\eta}_{22}; \\ k_1 = \quad\frac{1}{n}(l_1\bar{\omega}_{13} + l_2\bar{\omega}_{14}) - l_3\bar{\omega}_{11} - l_4\bar{\omega}_{12}, \\ k_2 = \quad\frac{1}{n}(l_1\bar{\omega}_{23} + l_2\bar{\omega}_{24}) - l_3\bar{\omega}_{21} - l_4\bar{\omega}_{22}. \end{cases}$$

Setzen wir die gefundenen Werthe der M, N, k in (7) ein und berücksichtigen dabei die in (8) enthaltene Definition der Sigma-

*) Die Gleichheit der beiden für M_{12} angegebenen Werthe, sowie die Unabhängigkeit der M von den Indices i, k ist eine Folge der Bilinearrelationen; vgl. die von Glchg. (19) zu (23) führende Rechnung.

**) Klein, diese Ann. Bd. 32, p. 359.

functionen mit Indices, so erhalten wir den folgenden Ausdruck für unsere Functionen:

$$C \cdot e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \sigma_{l_3 l_4 \frac{l_1}{n} \frac{l_2}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik});$$

statt dessen kann, da die Vermehrung der Indices um ganze Zahlen nur eine Aenderung der Constante C mit sich bringt, der folgende einfachere gesetzt werden:

$$C e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \cdot \sigma_{0 0 \frac{l_1}{n} \frac{l_2}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}).$$

Nunmehr suchen wir den Anschluss an die Resultate des vorigen Paragraphen; wir schreiben α, β statt l_1, l_2 und erhalten so folgende *vorläufige Definition der* $X_{\alpha\beta}$:

$$(17) \qquad X_{\alpha\beta}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}) = C_{\alpha\beta} e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \sigma_{0 0 \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}).$$

Die $C_{\alpha\beta}$ bedeuten dabei vorläufig noch ganz willkürliche Modulfunctionen, über die wir erst später (§ 33, Glchg. (3); § 34, Glchg. (13)) geeignete Festsetzung treffen wollen; die Charakteristik des $X_{\alpha\beta}$ ist dieselbe wie die des rechts auftretenden σ.

In diese Definition des $X_{\alpha\beta}$ führen wir nun Thetafunctionen ein. Wir haben zunächst:

$$(18) \qquad \sigma_{0 0 \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n}}(u_i; \omega_{ik}) =$$

$$\frac{1}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}} e^{-G_2(u_i+\omega_i;\, \omega_{ik}) - \eta_1\left(u_1+\frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_2\left(u_2+\frac{\omega_2}{2}\right)} \vartheta\left(v_i + \frac{\alpha\tau_{i1}+\beta\tau_{i2}}{n};\, \tau_{ik}\right).$$

Der Exponent kann noch zusammengezogen werden; es ist nämlich:

$$(19) \qquad G_2(u_i+\omega_i) = G_2(u_i) + \left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right)\left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1}\right)_{u_i=\omega_i} + \left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)\left(\frac{\partial G_2}{\partial u_2}\right)_{u_i=\omega_i},$$

ferner:

$$(20) \qquad \frac{\partial G_2}{\partial u_i} = -\eta_{i1} v_1 - \eta_{i2} v_2,$$

also:

$$(21) \quad \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_i}\right)_{u_i=\omega_i} = -\frac{1}{n}[\eta_{i1}(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}) + \eta_{i2}(\alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22})].$$

Damit wird der Exponent von e in (18):

$$-G_2(u_i) + \frac{1}{n}\left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right)[\alpha(\tau_{11}\eta_{11} + \tau_{12}\eta_{12} - \eta_{13}) + \beta(\tau_{12}\eta_{11} + \tau_{22}\eta_{12} - \eta_{14})]$$
$$+ \frac{1}{n}\left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)[\alpha(\tau_{11}\eta_{21} + \tau_{22}\eta_{22} - \eta_{23}) + \beta(\tau_{12}\eta_{21} + \tau_{22}\eta_{22} - \eta_{24})].$$

Zur weiteren Umformung desselben benutzen wir wieder die Bilinearrelationen; aus ihnen folgt:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11}\eta_{11}+\tau_{12}\eta_{12}-\eta_{13}= \\
(22)\quad &\frac{1}{p_{12}}[\omega_{22}(\omega_{13}\eta_{11}+\omega_{14}\eta_{12}-\omega_{11}\eta_{13})-\omega_{12}(\omega_{23}\eta_{11}+\omega_{24}\eta_{12}-\omega_{21}\eta_{13})] \\
&=2\pi i\,\frac{\omega_{22}}{p_{12}}
\end{aligned}
$$

und 3 analoge Ausdrücke, sodass der Exponent übergeht in:

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
&-G_2(u_i)+\frac{2\pi i}{np_{12}}\left[\left(u_1+\frac{\omega_1}{2}\right)(\alpha\omega_{22}-\beta\omega_{21})+\left(u_2+\frac{\omega_2}{2}\right)(-\alpha\omega_{12}+\beta\omega_{11})\right] \\
&=-G_2(u_i)+\frac{2\pi i}{n}\left[\alpha v_1+\beta v_2+\frac{1}{2n}(\alpha^2\tau_{11}+2\alpha\beta\tau_{12}+\beta^2\tau_{22})\right].
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir als den gesuchten *Ausdruck des* $X_{\alpha\beta}$ *durch eine Thetafunction* den folgenden:

$$
\begin{aligned}
(24)\quad X_{\alpha\beta}(u_i;\omega_{ik})=&\frac{C_{\alpha\beta}}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}}e^{-nG_2(u_i;\,\omega_{ik})+2\pi i\left[\alpha v_1+\beta v_2+\frac{1}{2n}(\alpha^2\tau_{11}+2\alpha\beta\tau_{12}+\beta^2\tau_{22})\right]} \\
&\times\vartheta(nv_1+\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\,nv_2+\alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\,n\tau_{11},n\tau_{12},n\tau_{22}).
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir denselben mit Glchg. (11) des § 31, so erhalten wir $X_{\alpha\beta}$ durch das dort benutzte $\varphi_{\alpha\beta}$ ausgedrückt in der Form

$$
(25)\qquad X_{\alpha\beta}=\frac{C_{\alpha\beta}}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}}\,e^{-nG_2(u_i;\,\omega_{ik})}\,\varphi_{\alpha\beta}.
$$

Endlich möge noch die folgende Formel notirt werden:

$$
\begin{aligned}
(26)\quad &\frac{X_{\alpha\beta}(u_i;\,\omega_{ik})}{\sigma^n(u_i;\,\omega_{ik})}= \\
&c^{n-1}C_{\alpha\beta}\,p_{12}^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[8]{\frac{D^n}{D}}\,e^{2\pi i\left[\alpha v_1+\frac{1}{2n}\alpha^2\tau_{11}+\cdots\right]}\,\frac{\vartheta(nv_i+\alpha\tau_{i1}+\beta\tau_{i2};\,\tau_{ik})}{\vartheta^n(v_i;\,\tau_{ik})};
\end{aligned}
$$

dieselbe stimmt im Wesentlichen überein mit derjenigen, welche Herr Witting (Diss. p. 12, 13) zum Ausgangspunkt seiner Entwicklungen genommen hat.

§ 33.

Eigenschaften der $X_{\alpha\beta}$.

Bevor wir die vollständige Bestimmung der Modulform $C_{\alpha\beta}$ vornehmen, wollen wir erst einige Eigenschaften der $X_{\alpha\beta}$ ableiten, welche von der Auswahl dieser Form unabhängig sind. Dabei werden in den Formeln die Elemente der Charakteristik (§ 32, 1) unserer Functionen fortwährend auftreten; wir wollen aber die Charakteristik selbst wie bisher unterdrücken.

I. Vermehren wir die Indices um Vielfache von n, so erhalten wir, (am einfachsten aus § 32, 17):

$$(1)\qquad X_{\alpha+an\;\beta+bn}=(-1)^{ag_3+bg_4}\,\frac{C_{\alpha+an\;\beta+bn}}{C_{\alpha\beta}}\,X_{\alpha\beta};$$

diese Gleichung reducirt sich auf:

$$(2)\qquad X_{\alpha+an\;\beta+bn}=X_{\alpha\beta},$$

wenn wir unter C eine von den Indices α,β unabhängige Modulfunction verstehen und:

$$(3)\qquad C_{\alpha\beta}=e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha+g_4\beta)}\cdot C$$

setzen. Das soll daher auch von jetzt an geschehen.

II. Für den Uebergang zu entgegengesetzten Werthen der u finden wir unter dieser Voraussetzung die Gleichung:

$$(4)\qquad X_{\alpha\beta}(-u_1,\,-u_2)=(-1)^{g_1g_3+g_2g_4}\,X_{n-\alpha\;n-\beta}(u_1,u_2).$$

III. Nunmehr wollen wir zusehen, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn wir ihre Argumente um Perioden-n^{tel} vermehren. Es wird dabei bequem sein, die erste und zweite Periode von der dritten und vierten getrennt zu behandeln und erst nachher die Resultate zusammenzufassen. Sei also *zunächst*

$$(5)\qquad \begin{aligned}\Omega_i'&=h_1\,\omega_{i1}+h_2\,\omega_{i2},\\ \overline{\Omega}_i'&=h_1\,\overline{\omega}_{i1}+h_2\,\overline{\omega}_{i2}=\frac{1}{n}\,\Omega_i',\\ \mathsf{H}_i'&=h_1\,\eta_{i1}+h_2\,\eta_{i2},\\ \overline{\mathsf{H}}_i'&=h_1\,\overline{\eta}_{i1}+h_2\,\overline{\eta}_{i2},\end{aligned}$$

so erhalten wir durch einfache Rechnung*) einerseits:

$$(6)\qquad \sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}\left(u_i+\frac{\Omega_i'}{n};\;\overline{\omega}_{ik}\right)=$$
$$=(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta}\,e^{\Sigma\overline{H}_i'\left(u_i+\frac{1}{2}\overline{\Omega}_i'\right)}\,\sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}(u_i;\;\overline{\omega}_{ik})$$

andererseits (vgl. § 32, Glchgn. (19)—(23)):

$$(7)\qquad G_2\left(u_i+\frac{\Omega_i'}{n};\;\omega_{ik}\right)-G_2(u_i;\;\omega_{ik})=-\frac{1}{n}\,\Sigma\mathsf{H}_i'\left(u_i+\frac{1}{2n}\,\Omega_i'\right),$$

$$(8)\qquad G_2\left(u_i+\overline{\Omega}_i';\;\overline{\omega}_{ik}\right)-G_2(u_i;\;\omega_{ik})=-\,\Sigma\overline{\mathsf{H}}_i'\left(u_i+\frac{1}{2}\,\overline{\Omega}_i'\right);$$

---

*) Bei derselben ist davon Gebrauch gemacht, dass aus den Bilinearrelationen zwischen den Perioden die Gleichung sich ergiebt:

$$\sum\left[\overline{\mathsf{H}}_i'\left(\alpha\,\overline{\omega}_{i3}+\beta\,\overline{\omega}_{i4}\right)-\overline{\Omega}_i'\left(\alpha\,\overline{\eta}_{i3}+\beta\,\overline{\eta}_{i4}\right)\right]=2\pi i(h_1\alpha+h_2\beta).$$

daraus folgt:

$$(9)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i'}{n}\right)=(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta}\,e^{\Sigma H_i'\left(u_i+\frac{1}{2}\Omega_i'\right)}\,X_{\alpha\beta}(u_i).$$

Sei *ferner:*

$$(10)\qquad \begin{aligned} \Omega_i'' &= h_3\omega_{i3}+h_4\omega_{i4}, & \overline{\Omega}_i'' &= h_3\overline{\omega}_{i3}+h_4\overline{\omega}_{i4}=\Omega_i'',\\ \mathrm{H}_i'' &= h_3\eta_{i3}+h_4\eta_{i4}, & \overline{\mathrm{H}}_i'' &= h_3\overline{\eta}_{i3}+h_4\overline{\eta}_{i4}, \end{aligned}$$

so haben wir einerseits:

$$(11)\qquad \sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n};\ \overline{\omega}_{ik}\right)=$$
$$=e^{\sum\frac{\overline{H}_i''}{n}\left(u_i+\frac{1}{2n}\overline{\Omega}_i''\right)}\,\sigma_{0,\,0,\,\frac{\alpha+h_3}{n},\,\frac{\beta+h_4}{n}}(u_i;\ \overline{\omega}_{ik}),$$

andererseits:

$$(12)\qquad G_2\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n};\ \omega_{ik}\right)-G_2(u_i;\ \omega_{ik})=-\sum\frac{\mathrm{H}_i''}{n}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n}\right)-$$
$$-\frac{i\pi}{n}\left(2h_3v_1+2h_4v_2+h_4^2\tau_{11}+2h_3h_4\tau_{12}+h_4^2\tau_{22}\right),$$

$$(13)\qquad G_2\left(u_i+\frac{\overline{\Omega}_i''}{n};\ \overline{\omega}_{ik}\right)-G_2(u_i;\ \omega_{ik})=-\sum\frac{\overline{\mathrm{H}}_i''}{n}\left(u_i+\frac{\overline{\Omega}_i''}{n}\right)-$$
$$-\frac{i\pi}{n}\left(2h_3nv_1+2h_4nv_2+h_3^2n\tau_{11}+2h_3h_4n\tau_{12}+h_4^2n\tau_{22}\right);$$

daraus folgt:

$$(14)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n}\right)=e^{\Sigma H_i''\left(u_i+\frac{1}{2n}\Omega_i''\right)}\,X_{\alpha+h_3\ \beta+h_4}(u_i)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3h_3+g_4h_4)}.$$

Um nun, wie oben in Aussicht genommen, die beiden Formeln (9) und (14) in eine zusammenzufassen, führen wir ein:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Omega_i=\Omega_i'+\Omega_i''=h_1\omega_{i1}+h_2\omega_{i2}+h_3\omega_{i3}+h_4\omega_{i4},\\ \mathrm{H}_i=\mathrm{H}_i'+\mathrm{H}_i''=h_1\eta_{i1}+h_2\eta_{i2}+h_3\eta_{i3}+h_4\eta_{i4}; \end{cases}$$

dann erhalten wir*):

$$(16)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i}{n}\right)=$$
$$(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta+\frac{1}{2}(h_1h_3+h_2h_4)}\,e^{\Sigma H_i\left(u_i+\frac{1}{2n}\Omega_i\right)}\,X_{\alpha+h_3\ \beta+h_4}(u_i)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3h_3+g_4h_4)}$$

($\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ steht für $e^{\frac{\pi i}{n}}$). Bemerkenswerth an dieser Formel ist, dass *der Exponentialfactor e^{Σ} sich linearer Transformation der Perioden gegen-*

*) Wegen: $\mathrm{H}_1'\Omega_1''-\mathrm{H}_1''\Omega_1'+\mathrm{H}_2'\Omega_2''-\mathrm{H}_2''\Omega_2'=2\pi i(h_1h_3+h_2h_4)$.

über invariant verhält; dadurch wird später (§ 34) ihre Benutzung einfacher, als die der 4 besonderen Formeln, welche Herr Witting (Diss. p. 15) an ihrer Stelle benutzt.

IV. Endlich fragen wir noch, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn man ihre Argumente um $(2n)^{te}$ Theile der Perioden ω vermehrt. Dazu benutzen wir am bequemsten den § 32, Gl. (24) gegebenen Ausdruck der $X_{\alpha\beta}$ durch Thetafunctionen. Auch ohne die Rechnung im einzelnen durchzuführen, erkennt man, dass das Resultat folgendes sein wird: Sei der zuzufügende Periodenbruchtheil:

$$\frac{\Omega_i}{2n} = \frac{h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2} + nh_3\omega_{i3} + nh_4\omega_{i4}}{2n} \tag{17}$$

und sei eine neue Charakteristik:

$$c' = \begin{vmatrix} g_1 + h_3 & g_2 + h_4 \\ g_3 + h_1 & g_4 + h_2 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

so kommt:

$$X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(u_i + \frac{\Omega_i}{2}\right) = \varrho \cdot \frac{C^{(c)}}{C^{(c')}} \cdot \sqrt[8]{\frac{D^{(c')}}{D^{(c)}}}\, e^{\Phi} \cdot X_{\alpha\beta}^{(c')}(u_i); \tag{19}$$

dabei bedeutet ϱ eine von den Indices α, β abhängige Einheitswurzel, Φ dagegen eine von ihnen unabhängige lineare Function der Argumente.

§ 34.

Lineare Transformation der $X_{\alpha\beta}$.

Nunmehr kommen wir zu derjenigen Frage, welche den Hauptgegenstand dieser Untersuchungen bildet: *wie verhalten sich die $X_{\alpha\beta}$ gegenüber linearer Transformation der Perioden?* Wir wollen zeigen, dass *sie dabei selbst lineare und homogene Substitutionen mit constanten Coefficienten erfahren*).*

Wir führen statt der Perioden ω andere ω' ein, welche durch eine lineare Transformation S aus jenen hervorgehen. Mit diesen neuen Perioden bilden wir Functionen $X'_{\alpha\beta}$ ebenso, wie wir mit den ω die $X_{\alpha\beta}$ gebildet hatten; wir setzen also:

$$X'^{(c)}_{\alpha\beta}(u) = X^{(c)}_{\alpha\beta}(u;\, \omega'). \tag{1}$$

Dieses $X'^{(c)}_{\alpha\beta}$ ist aber eine Jacobi'sche Function, gleichändrig mit der n^{ten} Potenz desjenigen Sigma, aus dessen Primcharakteristik c' c durch S hervorgeht; nach dem Hermite'schen Satz (§ 31) muss es sich also durch die zu dieser Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ in der Form ausdrücken lassen:

*) Witting, diese Ann. Bd. 29, p. 163; Diss. p. 18 f.

$$(2)\qquad X'^{(c)}_{\alpha\beta}(u) = \sum_{\gamma=0}^{n-1}\sum_{\delta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X^{(c')}_{\gamma\delta}(u),$$

in welcher die $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ den u gegenüber Constante bedeuten (die aber ev. noch Modulfunctionen sein können); und das ist die Formel, deren Existenz wir behauptet hatten.

Die in ihr auftretenden Coefficienten $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ lassen sich sofort auf eine von ihnen, etwa c_{0000} zurückführen, wenn wir Glchg. (16) des vorigen Paragraphen heranziehen. Zu diesem Zweck vermehren wir die Argumente in (2) beiderseits um entsprechende Perioden-n^{tel}, etwa:

$$(3)\qquad \frac{\Omega_i}{n} = \frac{1}{n}\,(h_1'\,\omega'_{i1} + h_2'\,\omega'_{i2} + h_3'\,\omega'_{i3} + h_4'\,\omega'_{i4}) = \frac{1}{n}\,(h_1\,\omega_{i1} + h_2\,\omega_{i2} + h_3\,\omega_{i3} + h_4\,\omega_{i4});$$

die h und h' sind dabei durch die Gleichungen (31) bezw. (31a) der Grundz. miteinander verbunden. Wenden wir dann beiderseits die eben citirte Gleichung an, so fallen die Exponentialfactoren vermöge ihrer dort hervorgehobenen Invarianz heraus und es bleibt:

$$(4)\qquad (-1)^{g_1h_1'+g_2h_2'}\,\varepsilon^{h_1'\alpha+h_2'\beta+\frac{1}{2}(h_1'h_3'+h_2'h_4')}\,X'^{(c)}_{\alpha+h_3'\,\beta+h_4'} = \sum_0^{n-1}{}_{\gamma}\sum_0^{n-1}{}_{\delta}\,(-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2}\,\varepsilon^{h_1\gamma+h_2\delta+\frac{1}{2}(h_1h_3+h_2h_4+g_3'h_3+g_4'h_4)}\,X^{(c')}_{\gamma+h_3\,\delta+h_4};$$

vermöge der Definition der $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ muss also:

$$(5)\qquad c_{\alpha+h_3'\,\beta+h_4'\,\gamma+h_3\,\delta+h_4} = (-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2-(g_1h_1'+g_2h_2')}\times \varepsilon^{h_1\gamma+h_2\delta-(h_1'\alpha+h_2'\beta)+\frac{1}{2}[(h_1h_3+h_2h_4)-(h_1'h_3'+h_2'h_4')]}\cdot c_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3'h_3+g_4'h_4-g_3h_3'-g_4h_4')}$$

sein. Von dieser Formel bildet einen speciellen Fall die folgende:

$$(6)\qquad c_{h_3'h_4'h_3h_4} = (-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2-(g_1h_1'+g_2h_2')}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}[h_1h_3+h_2h_4-(h_1'h_3'+h_2'h_4')]}\,c_{0000}\times \varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3'h_3+g_4'h_4-g_3h_3'-g_4h_4')};$$

diese reicht in allen Fällen aus, um sämmtliche c durch c_{0000} *auszudrücken.* Beim Beweis dieser Behauptung müssen wir 3 Fälle unterscheiden.

I. Die betrachtete Transformation S kann so beschaffen sein, dass sie gestattet den 4 Zahlen h_3, h_4, h_3', h_4' ganz beliebige Werthe mod. n beizulegen; das wird dann der Fall sein, wenn keine lineare ganzzahlige Verbindung von ω'_{i1} und ω'_{i2} allein einer solchen von ω_{i1} und ω_{i2} allein bis auf n-fache Perioden gleich ist. Alsdann werden *sämmtliche* $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch (6) gegeben; man hat nur:

$$\alpha = h_3', \quad \beta = h_4', \quad \gamma = h_3, \quad \delta = h_4$$

zu setzen und dazu h_1, h_2, h_1', h_2' aus den Transformationsformeln zu bestimmen, was in diesem Falle stets und nur auf eine Weise möglich ist.

II. Existirt aber *eine* (und *nur* eine) lineare ganzzahlige Verbindung von ω_{i1}' und ω_{i2}', welche bis auf n-fache Perioden einer solchen von ω_{i1} und ω_{i2} gleich ist*), so sind auch die Zahlen h_3, h_4, h_3', h_4' nicht ganz von einander unabhängig, sondern durch eine Relation der Form:

$$(8)\quad \begin{aligned} &a_4(h_3 - c_3 h_3' - d_3 h_4') - a_3(h_4 - c_4 h_3' - d_4 h_4') \equiv 0 \pmod{n} \\ \text{bezw.: }\ &b_4(h_3 - c_3 h_3' - d_3 h_4') - b_3(h_4 - c_4 h_3' - d_4 h_4') \equiv 0 \end{aligned}$$

verbunden. *Wir können also in diesem Fall aus* (6) *nur diejenigen c erhalten, deren Indices dieser Bedingung genügen.* Für diese erhalten wir dann allerdings nicht nur *ein* Werthsystem der h_1, h_2, h_1', h_2', sondern deren mehrere; aber eine einfache Rechnung zeigt, dass alle diese zu demselben Werth des betr. $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ führen.

Was aber die übrigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ betrifft, so soll gezeigt werden, dass diese alle $= 0$ *zu setzen sind.* Man kann nämlich in diesem Falle:

$$h_3 \equiv h_4 \equiv h_3' \equiv h_4' \equiv 0 \pmod{n}$$

setzen, ohne dass damit gleichzeitig auch h_1, h_2, h_1', h_2' durch n theilbar werden; man erhält so aus (5):

$$(9)\qquad c_{\alpha\beta\gamma\delta} = (-1)^{g_1 h_1' + g_2 h_2' - g_1' h_1 - g_2' h_2}\, \varepsilon^{h_1\gamma + h_2\delta - h_1'\alpha - h_2'\beta}\, c_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Diese Gleichung aber verlangt, dass $h_1\gamma + h_2\delta - h_1'\alpha - h_2'\beta$ oder, was dasselbe ist:

$$(10)\quad h_1(\gamma - c_3\alpha - d_3\beta) + h_2(\delta - c_4\alpha - d_4\beta) \equiv 0 \pmod{n}$$

sei, wenn nicht $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ aus ihr folgen soll. Nun sind aber hier h_1 und h_2 nur durch die *eine* Relation:

$$(11)\qquad a_3 h_1 + a_4 h_2 \equiv 0, \quad \text{bezw.}\quad b_3 h_1 + b_4 h_2 \equiv 0 \pmod{n}$$

verbunden; wir können also h_1, h_2 immer noch so annehmen, dass die Congruenz (10) *nicht* erfüllt ist, ausser wenn (10) und (11) identisch sind. Im letzteren Fall aber erfüllen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für h_3', h_4', h_3, h_4 eingesetzt, die Congruenz (8) und das betr. $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bestimmt sich aus (6). Alle anderen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind also gleich Null zu setzen, wie behauptet war.

II. Sind endlich $\omega_{i1}', \omega_{i2}'$ beide durch ω_{i1}, ω_{i2} bis auf n-fache Perioden ganzzahlig ausdrückbar, so findet man auf demselben Wege wie unter (II), dass nur diejenigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von Null verschieden sind, für welche:

$$(12)\qquad \left.\begin{aligned} \gamma &\equiv c_3\alpha + d_3\beta \\ \delta &\equiv c_4\alpha + d_4\beta \end{aligned}\right\} \pmod{n},$$

*) m. a. W. ist $a_3 b_4 - a_4 b_3 \equiv 0 \pmod{n}$.

dass aber diese wieder durch die Formel (6) aus c_{0000} erhalten werden können.

Zusammenfassend können wir sagen:

In jedem Falle sind alle diejenigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *gleich Null zu setzen, welche nicht durch die Formel* (6) *erhalten werden können.*

Im Falle I. ist jedes $X'_{\alpha\beta}$ *eine lineare Function der sämmtlichen* $X_{\gamma\delta}$, *im Falle II. von nur je n unter ihnen; im Falle III. ist jedes* $X'_{\alpha\beta}$ *nur durch einen constanten Factor von einem bestimmten* $X_{\gamma\delta}$ *verschieden.*

Es bleibt noch übrig die Bestimmung von c_{0000}. Diese Grösse wird natürlich wesentlich davon abhängen, wie die in der Definition der $X_{\alpha\beta}$ noch unbestimmt gelassene Modulfunction C (§ 32, Glchg. (25), resp. § 33, Glchg. (3)) gewählt wird. Insbesondere wird man*) fragen, ob es nicht möglich ist, C so zu wählen, dass c_{0000} sich auf eine numerische Constante reducirt. Dass das für eine einzelne Transformation immer geschehen kann, sieht man sofort ein; dass es aber gleichzeitig für alle Transformationen erzielt werden kann, scheint a priori nicht leicht bewiesen werden zu können. Es soll daher hier einfach das Resultat angegeben werden, dass *die Reduction von* c_{0000} *auf eine Constante in der That eintritt für:*

$$C = \sqrt[8]{\frac{\overline{D}}{D^n}}; \tag{13}$$

dabei bedeutet (wie in I, § 21ff.) D das zu der betrachteten Sigmafunction gehörende Discriminantenproduct**) und $\overline{D}$ die durch die Transformation (6) des § 32 aus D hervorgehende Grösse. Der Beweis für diese Behauptung wird im folgenden Paragraphen geführt werden; hier sei nur noch einmal im Interesse der Uebersichtlichkeit die volle Definition von $X_{\alpha\beta}$ sowohl durch σ- als durch ϑ-Functionen wiederholt:

$$X_{\alpha\beta}(u) = e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha+g_4\beta)} \sqrt[8]{\frac{\overline{D}}{D^n}}\, e^{G_2^{(n)}(u_i)}\, \sigma_{00\frac{\alpha}{n}\frac{\beta}{n}}(u_i;\, \overline{\omega}_{ik}) \tag{14}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha+g_4\beta)}\, c^{n-1}\, p_{12}^{\frac{n-1}{2}}\, p^{\frac{\alpha^2}{n}}\, q^{\frac{2\alpha\beta}{n}}\, r^{\frac{\beta^2}{n}}\, z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \times \tag{15}$$

$$e^{-n G_2(u_i;\, \omega_{ik})} \frac{\vartheta(v_i + \alpha\tau_{i1} + \beta\tau_{i2};\, n\tau_{ik})}{\vartheta^n(0;\, \tau_{ik})}.$$

Dabei ist die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}$$

*) Vgl. Klein, Abh. der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Cl., Bd. 13, p. 385.

**) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 32, p. 359.

beiderseits weggelassen; die Function $G_2^{(n)}$ ist § 32, Glchg. (14), die Sigmafunction mit Indices ebenda Glchg. (8) erklärt; p_{12} ist die Periodendeterminante $\big($§ 30, Glchg. (3)$\big)$, c die beim Uebergang von σ zu den ϑ auftretende numerische Constante $\big($§ 32, Glchg. (13)$\big)$.

§ 35.

Ueberführung der zu einer bestimmten Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ in die zu einer andern Charakteristik gehörenden.

Während im vorigen Paragraphen das Verhalten der $X_{\alpha\beta}$ bei linearen Periodentransformationen ganz im allgemeinen angegeben worden ist, müssen wir nun noch weitere Unterscheidungen machen. Entsprechend der Art, wie die $X_{\alpha\beta}$ aus Functionen zweiter Stufe durch Transformation n^{ter} Ordnung abgeleitet sind, wird es dabei hauptsächlich auf die Charakterisirung der betreffenden Transformationen einerseits modulo 2, andererseits modulo n ankommen; und die weitere Ueberlegung wird erleichtert, wenn wir uns des Grundz. §§ 30, 54 gestreiften Satzes erinnern, dass *jede Transformation aufgefasst werden kann als das Product von zwei andern, von welchen die eine modulo* 2, *die andere modulo n zur Identität congruent ist.* Es genügt also, wenn wir das Verhalten unserer $X_{\alpha\beta}$ gegenüber diesen beiden Classen von Periodentransformationen untersuchen; und wir wollen mit denjenigen der zweiten Classe beginnen. Diese gehören sämmtlich zu dem Falle III. des vorigen Paragraphen; wir erhalten für jede derselben:

$$X'^{(c)}_{\alpha\beta} = c_{0000}\, X^{(c')}_{\alpha\beta}; \tag{1}$$

und zwar ist aus der ersten Form für X_{00} $\big($§ 34, Glchg. (14)$\big)$ sofort zu entnehmen, dass c_{0000} eine rein numerische Constante, nämlich eine achte Einheitswurzel ist. Wir können daher sagen:

Bei solchen linearen Periodentransformationen, welche modulo n zur Identität congruent sind, gehen die zu einer bestimmten Charakteristik c gehörenden $X_{\alpha\beta}$, bis auf achte Einheitswurzeln in die entsprechenden $X_{\alpha\beta}$ über, welche zu der transformirten Charakteristik c' gehören; dabei sind natürlich c, c' entweder beide gerade oder beide ungerade.

Bei denjenigen Periodentransformationen aber, welche mod. 2 zur Identität congruent sind, bleibt die Charakteristik aller $X_{\alpha\beta}$ ungeändert. Wir werden so auf *Gruppen linearer Substitutionen* geführt,

---

*) Nähere Angaben über diese Einheitswurzeln finden sich bei **Witting**, dieser Ann. Bd. 29, p. 165.

welche die zu einer bestimmten Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ nur unter sich umsetzen. Von diesen Gruppen gilt der Satz:

Die zu verschiedenen Charakteristiken gehörenden Gruppen linearer Transformationen der $X_{\alpha\beta}$ sind identiseh.

Für zwei Charakteristiken, welche beide gerade oder beide ungerade sind, kann diese Uebereinstimmung der beiderseitigen linearen Substitutionen auf Grund des vorhergehenden Satzes dadurch gezeigt werden, dass man die eine in die andere transformirt mit Hilfe einer modulo n zur Identität congruenten Operation*). Ist aber die eine Charakteristik gerade, die andere ungerade, so versagt diese Methode; man muss dann auf Glchg. (19) des § 33 zurückgreifen, welche in allen Fällen den erforderlichen Schluss zu machen gestattet, wie im III. Theil dieser Untersuchungen noch im einzelnen zu zeigen sein wird.

Die Untersuchung dieser Gruppen linearer Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ ist nun unsere nächste Aufgabe; sie erfordert aber einige Vorbemerkungen über die Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche eine bestimmte (gerade) Charakteristik festlassen.

§ 36.

Erzeugende der Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche eine gerade Charakteristik unverändert lassen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die zu untersuchende gerade Charakteristik:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

sei. Wir fragen dann nach der Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche diese Charakteristik in sich überführen, insbesondere nach *erzeugenden Operationen* dieser Gruppe. Diese Frage ist bereits in I., § 22 aufgeworfen und zum Theil beantwortet; dort ist gezeigt, dass die Gruppe entsteht, wenn man zu der Hauptcongruenzgruppe**) zweiter Stufe noch die 3 Operationen B, C, D hinzunimmt. Da die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe ihrerseits 5 Erzeugende (Grundz. § 22, Glchgen 65) besitzt, so hätten wir es zunächst mit 8

*) In dieser Art beweist Herr Witting diesen Satz (diese Ann. Bd. 29 p. 167); p. 44 der Diss. beruft er sich aber auf diesen Beweis auch in einem Falle, in welchem die eine Charakteristik gerade, die andere ungerade ist.

**) Diesen Ausdruck gebrauche ich im Folgenden (statt des bisher von mir benutzten „Principaluntergruppe") im Anschluss an „*F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. R. Fricke*". I. Bd. Leipzig, Teubner, 1890; vgl. daselbst p. 388.

Erzeugenden zu thun; wir können aber 4 von diesen jedenfalls entbehren. Denn man verificirt sofort, dass sich S_1, S_3, S_4, S_5 wie folgt durch die übrigen ausdrücken*):

(2) $S_1 = B^3 S_2 B, \quad S_3 = D S_1 D, \quad S_4 = D S_2 D, \quad S_5 = C^{-2},$

sodass wir als erstes Resultat erhalten:

Die Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristik (1) *in sich überführen, kann erzeugt werden aus den vier Operationen*

(3) $B, \; \omega_1' = -\omega_3, \; \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3, \; \omega_4' = \omega_4;$

(4) $C, \; \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \; \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3, \; \omega_4' = \omega_4 - \omega_3;$

(5) $D, \; \omega_1' = \omega_2, \; \omega_2' = \omega_1, \; \omega_3' = \omega_4, \; \omega_4' = \omega_3;$

(6) $S_2, \; \omega_1' = \omega_1, \; \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3 - 2\omega_1, \; \omega_4' = \omega_4.$

Dies genügt für unsere Zwecke; in der That scheint eine weitere Reduction der Zahl der Erzeugenden nur unter Verzicht auf ihre Einfachheit möglich zu sein. Unter solchem Verzicht aber ist sie in der That möglich, z. B. auf folgende Weise: Zunächst kann die Gruppe derjenigen Vertauschungen der Verzweigungspunkte, (I, § 22) welche die Zerlegung derselben in die beiden Tripel (024), (135) fest lassen, statt wie a. a. O. aus B, C, D, auch schon aus B und irgend einer Operation erzeugt werden, welche alle 6 Verzweigungspunkte in geeigneter Weise in einem Cyklus vertauscht, z. B. der folgenden:

$$\mathsf{A} = DCBDB = (012345)^{**});$$

ihr entspricht u. a. die Periodentransformation:

(7) $\mathsf{A} : \omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = -\omega_3 - \omega_4, \quad \omega_3' = \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_4' = \omega_2.$

In der That drücken sich die *Verzweigungspunktvertauschungen* C, D wie folgt durch A und B aus:

(8) $$C = \mathsf{A}^2 B \mathsf{A}^3 B,$$

(9) $$D = B^3 \mathsf{A}^3 B.$$

Dieselben Gleichungen gelten aber auch von den gleichbezeichneten *Periodentransformationen,* wie man ohne Mühe verificirt; *unsere Gruppe kann also auch von den drei Operationen* A, B, S_2 *erzeugt werden.*

§ 37.

Die Gruppe linearer Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ einer bestimmten Charakteristik.

Nunmehr kehren wir zurück zur Untersuchung der Gruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche die $X_{\alpha\beta}$ einer bestimmten

---

*) Die Zusammensetzung der Transformationen ist wie in I, § 10 so geschrieben, dass aus $\omega'' = R(\omega')$, $\omega' = S(\omega)$ folgt $\omega'' = RS(\omega)$.

**) D. h. es soll 0 durch 1 ersetzt werden, 1 durch 2 etc.

Charakteristik erfahren, wenn man die Perioden in der Weise linear transformirt, dass die Charakteristik in sich übergeht. Den Resultaten des § 35 zufolge wird es dabei der Allgemeinheit keinen Eintrag thun, wenn wir voraussetzen, die Charakteristik sei:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir wollen zunächst die Ordnung der Gruppe bestimmen, d. h. die *Anzahl* der verschiedenen linearen Substitutionen, welche die zu dieser Charakteristik gehörenden*) $X_{\alpha\beta}$ unter sich umsetzen; dazu müssen wir wissen, welche Transformationen jedes $X_{\alpha\beta}$ in sich überführen. Wir wollen daher zeigen:

Alle linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristik in sich überführen und modulo n zur Identität congruent sind, — und nur diese — führen jedes einzelne $X_{\alpha\beta}$ in sich über.

Es geht nämlich aus § 34, III zunächst hervor, dass bei allen solchen Transformationen die $X_{\alpha\beta}$ bis auf einen allen gemeinsam zutretenden Factor ungeändert bleiben. Aber dieser Factor muss $= 1$ sein, die $X_{\alpha\beta}$ müssen also völlig ungeändert bleiben. Denn das wird allgemein der Fall sein müssen, wenn es für den Nullwerth von X_{00}, also für

$$\sqrt[8]{\frac{\bar{D}}{D^n}}$$

gilt; und von diesem kann es ebenso gezeigt werden, wie es in I, § 22 von seinem Quadrat gezeigt ist. Andererseits aber folgt aus den Congruenzen (12) des § 34, dass auch bei keiner andern Transformation jedes $X_{\alpha\beta}$ in sich übergehen kann. Damit sind beide Theile des ausgesprochenen Satzes bewiesen; aus ihm folgt mit Rücksicht auf bekannte Entwicklungen des Herrn C. Jordan:**)

Die Anzahl der verschiedenen homogenen linearen Substitutionen, welche die $X_{\alpha\beta}$ erfahren, beträgt:

$$N = (n^4 - 1)\, n^3\, (n^2 - 1)\, n. \tag{1}$$

Darüber hinaus aber ergiebt sich noch:

Ebensogross ist auch die Anzahl der linearen Substitutionen, welche die Verhältnisse der $X_{\alpha\beta}$ erfahren.

Als *Erzeugende dieser Gruppe* benutzen wir die B, C, D, S_2 des § 36; wir wollen für jede dieser Operationen noch die zugehörigen linearen Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ angeben und zugleich die rückständige Constantenbestimmung erledigen.

*) Wo im folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, ist immer nur von solchen $X_{\alpha\beta}$ die Rede.

**) Traité des Substitutions p. 176 (1870). Vgl. Grundz. § 17, sowie die Ergänzungen Grundz. § 54 und I, § 10, 11.

Für B sind die Transformationsformeln der Elementarcharakteristiken:

$$h_1 = h_3', \quad h_2 = h_2', \quad h_3 = -h_1', \quad h_4 = h_4';$$

also substituiren sich die $X_{\alpha\beta}$ nach der Formel:

(2) $$X'_{\alpha\beta} = c \sum_{0}^{n-1}{}_{\gamma} \, \varepsilon^{\alpha\gamma} X_{\gamma\beta}.$$

Für die Constante c findet man den Werth:*)

(3) $$c = -\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

unter $\sqrt{n}$ den positiven Werth verstanden.

Für die drei übrigen Erzeugenden reducirt sich die rechte Seite der Umsetzungsformel jedesmal auf ein Glied, und die Constante lässt sich daher durch directe Untersuchung von X_{00} bestimmen, am bequemsten auf Grund der Darstellung durch ϑ-Reihen (§ 34, Glchg. 14). Dabei tritt nur eine Umordnung der letzteren ein; ausserdem ist noch die Aenderung von p_{12} zu beachten. Man erhält so:

(4) $$C: \quad X'_{\alpha\beta} = X_{\alpha-\beta,\beta};$$

(5) $$D: \quad X'_{\alpha\beta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} X_{\beta\alpha};$$

(6) $$S_2: \quad X'_{\alpha\beta} = e^{-\alpha^2} X_{\alpha\beta}.$$

Die Constante c_{0000} *ist also bei der getroffenen Wahl von* C (§ 34, Glchg. 13) *bei allen Erzeugenden, folglich überhaupt bei allen Operationen unserer Gruppe rein numerisch.* **)

§ 38.

Die Functionen $Y_{\alpha\beta}$ und $Z_{\alpha\beta}$.

Ganz wie im elliptischen Fall können wir nunmehr***) aus den $X_{\alpha\beta}$ auf Grund der Formel § 33, (4) *gerade* und *ungerade* Jacobi'sche Functionen bilden; nämlich die $\frac{1}{2}(n^2+1)$ Functionen:

---

*) Vgl. die Rechnung des Herrn Witting, Diss. p. 19, 20; es ist beim Vergleich nur zu beachten, dass W.'s M und unser B reciproke Operationen sind. — Die Angaben für P und Q bei Witting müssen auf einem Irrthum beruhen; lediglich eine Folge dieses Irrthums ist es, wenn Herr Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 320) aus W.'s Erzeugenden eine Operation $z_0' = iz_0$, $z_1' = iz_1$ etc. ableiten konnte. Eine solche ist in unserer Gruppe keineswegs enthalten; M. hat sie daher mit Recht für seine weiteren Entwicklungen bei Seite geschoben.

**) Man sieht, dass jede dieser Substitutionen die Determinante 1 besitzt; was auch a priori ebenso gezeigt werden kann, wie p. 694 des oben p. 180 Fussn. genannten Buches von Klein und Fricke.

***) Vgl. Witting, dieser Ann. Bd. 29, p. 167. Im Falle ungerader Charakteristik nenne ich Y, was er Z nennt und umgekehrt, um mit der von Herrn Klein

(1) $$Y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{-\alpha-\beta})$$
und die $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Functionen:

(2) $$Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{-\alpha-\beta},$$
für welche:

(3) $$Y_{\alpha\beta} = Y_{-\alpha-\beta},\quad Z_{\alpha\beta} = -Z_{-\alpha-\beta}\quad (Z_{00}=0)$$
ist. Es sind dann im Falle einer *geraden* Charakteristik die $Y_{\alpha\beta}$ *gerade*, die $Z_{\alpha\beta}$ *ungerade* Functionen der u; im Falle einer *ungeraden* Charakteristik ist es umgekehrt.

Jeder linearen Transformation der $X_{\alpha\beta}$ entspricht eine solche der $Y_{\alpha\beta}$ unter sich und eine solche der $Z_{\alpha\beta}$ unter sich. Um die Zahl der verschiedenen unter diesen festzustellen, müssen wir diejenigen Periodentransformationen aufsuchen, welche $X_{\alpha\beta}$ in $cX_{-\alpha-\beta}$ überführen. Aus § 34, III geht hervor, dass alle diese modulo n zu der einen:

(4) $$\omega'_{i1} = -\omega_{i1},\quad \omega'_{i2} = -\omega_{i2},\quad \omega'_{i3} = -\omega_{i3},\quad \omega'_{i4} = -\omega_{i4}$$
(d. i. B^2DB^2D) congruent sind. Für diese aber ergiebt sich:*)

(5) $$X'_{\alpha\beta} = +X_{-\alpha-\beta}$$
also:

(6) $$Y'_{\alpha\beta} = Y_{-\alpha-\beta} = +Y_{\alpha\beta},\quad Z'_{\alpha\beta} = Z_{-\alpha-\beta} = -Z_{\alpha\beta};$$
und hieraus folgt ohne weiteres:

Bei linearen Periodentransformationen erfahren die Y $\frac{1}{2}N$, die Z dagegen N lineare Substitutionen;

und ferner:

Die homogene Substitutionsgruppe der Y ist zu der zugehörigen Collineationsgruppe holoedrisch, die der Z hemiedrisch isomorph.

Die Gruppe der Z-Substitutionen für $n=3$ ist von den Herren Witting und Maschke in den mehrfach citirten Abhandlungen ausführlich untersucht worden; die entsprechende Untersuchung der Gruppe der Y, gleichfalls für $n=3$, bildet den Gegenstand der folgenden Abschnitte.

---

im elliptischen Fall (Abh. der sächs. Ges. d. W., math.-phys. Cl., Bd. 13, p. 370) gewählten Bezeichnung in Uebereinstimmung zu bleiben. Damit stimmt auch die Bezeichnung von Klein in Liouville's Journal, sér. 4, t. 4, p. 172 (1888), wenn auch dort auf W. verwiesen ist. Den Factor $\frac{1}{2}$ in (1) setze ich bei, um spätere Formeln (§ 57) bequemer zu haben.

*) Man beachte den in dieser Formel liegenden Unterschied gegenüber dem elliptischen Fall, in welchem die entsprechende Formel (Klein a. a. O. p. 387): $X'_\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} X_{-\alpha}$ lautet. Aus diesem Grunde bietet in den folgenden Sätzen der Charakter der Zahl n modulo 4 nicht wie im elliptischen Fall (a. a. O. p. 392) Anlass zur Unterscheidung.

IX. Abschnitt.

Die endliche Gruppe von 25920 linearen Substutionen im quinären Gebiet, welche durch die Theorie der hyperelliptischen Functionen $Y_{\alpha\beta}$ geliefert wird.

§ 39.

Zusammenstellung der erzeugenden Substitutionen.

Für $n = 3$ erhalten wir $\frac{n^2+1}{2} = 5$ Functionen $Y_{\alpha\beta}$, welche wir zur Ersparung der Doppelindices wie folgt schreiben wollen:

$$Y_0 = Y_{00} = X_{00},$$

(1) $$Y_1 = Y_{10} = \frac{1}{2}(X_{10} + X_{20}), \qquad Y_3 = Y_{11} = \frac{1}{2}(X_{11} + X_{22}),$$

$$Y_2 = Y_{01} = \frac{1}{2}(X_{01} + X_{02}), \qquad Y_4 = Y_{12} = \frac{1}{2}(X_{12} + X_{21}).$$

Bei denjenigen linearen Transformationen der Perioden, welche die Charakteristik in sich überführen, erfahren diese 5 Grössen Y eine Gruppe von

(2) $$\frac{1}{2} N = 25920$$

linearen homogenen Substitutionen, zu deren Untersuchung wir uns nunmehr wenden. Es wird sich diese Untersuchung besonders nach zwei Richtungen zu bewegen haben, indem wir einmal nach *Unter-Gruppen* von G fragen, dann aber auch nach *Invarianten* von G, d. h. nach solchen rationalen ganzen Functionen der Y, welche bei allen Operationen von G in sich übergehen. Beide Untersuchungsrichtungen werden wir übrigens in nahen Zusammenhang bringen, indem wir die Invarianten von G aus den Invarianten ihrer Untergruppen aufbauen werden. Eine Einkleidung der Untersuchung in das Gewand einer geometrischen (wenn man will hypergeometrischen) Redeweise wird sich vielfach als fördernd erweisen: wir werden die Y als homogene Coordinaten eines Punktes in einem vierdimensionalen Raume deuten, die linearen Substitutionen der Y als Collineationen dieses Raumes auffassen u. s. w. Eine lineare Gleichung zwischen den Y stellt dann einen (dreidimensionalen, linearen) „*Raum*" dar, zwei solche Gleichungen eine „*Ebene*", drei eine „Gerade". Dass diese geometrische Deutung die analytischen Beziehungen nicht vollständig umfasst, indem sie nur den *Verhältnissen* der Y ein geometrisches Bild zur Seite stellt, ist gerade für unsere Aufgabe von sehr geringer Bedeutung, da zwischen der homogenen und nicht-homogenen Substitutionsgruppe der Y holoedrischer Isomorphismus stattfindet, vgl. p. 184.

Vor allem müssen wir die Erzeugenden unserer Gruppe in ausführlich geschriebener Form zusammenstellen. Wir haben für die X:

(3)

	B	C	D	S_2
$X'_{00} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00} + X_{10} + X_{20})$	X_{00}	$-X_{00}$	X_{00}
$X'_{10} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00} + \varepsilon X_{10} + \varepsilon^2 X_{20})$	X_{10}	$-X_{01}$	$\varepsilon^2 X_{10}$
$X'_{20} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00} + \varepsilon^2 X_{10} + \varepsilon X_{20})$	X_{20}	$-X_{02}$	$\varepsilon^2 X_{20}$
$X'_{01} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01} + X_{11} + X_{21})$	X_{21}	$-X_{10}$	X_{01}
$X'_{01} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01} + \varepsilon X_{11} + \varepsilon_2 X_{21})$	X_{01}	$-X_{11}$	$\varepsilon^2 X_{11}$
$X'_{21} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01} + \varepsilon^2 X_{11} + \varepsilon X_{21})$	X_{11}	$-X_{12}$	$\varepsilon^2 X_{21}$
$X'_{02} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02} + X_{12} + X_{22})$	X_{12}	$-X_{20}$	X_{02}
$X'_{12} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02} + \varepsilon X_{12} + \varepsilon^2 X_{22})$	X_{22}	$-X_{21}$	$\varepsilon^2 X_{12}$
$X'_{22} =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02} + \varepsilon^2 X_{12} + \varepsilon X_{22})$	X_{02}	$-X_{22}$	$\varepsilon^2 X_{22}$

und also für die Y:

(4)

	B	C	D	S_2
$Y_0' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 + 2Y_1)$	Y_0	$-Y_0$	Y_0
$Y_1' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1)$	Y_1	$-Y_2$	$\varepsilon^2 Y_1$
$Y_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2 + Y_3 + Y_4)$	Y_4	$-Y_1$	Y_2
$Y_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2 + \varepsilon Y_3 + \varepsilon^2 Y_4)$	Y_2	$-Y_3$	$\varepsilon^2 Y_3$
$Y_4' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2 + \varepsilon^2 Y_3 + \varepsilon Y_4)$	Y_3	$-Y_4$	$\varepsilon^2 Y_4$

Die Substitution A (§ 36, Glchg. 7) sei noch beigefügt, da gelegentlich von ihr Gebrauch zu machen sein wird; sie lautet:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
Y_0' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0+2Y_1+2Y_2+2Y_3+2Y_4),\\
Y_1' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0-\;Y_1-\;Y_2+2Y_3-\;Y_4),\\
Y_2' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0+2Y_1-\;Y_2-\;Y_3-\;Y_4),\\
Y_3' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0-\;Y_1+2Y_2-\;Y_3-\;Y_4),\\
Y_4' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0-\;Y_1-\;Y_2-\;Y_3+2Y_4).
\end{aligned}
$$

Bei der Aufsuchung der *Untergruppen* von G kommt uns der Umstand zu Statten, dass wir G nunmehr in doppelter Gestalt vor uns haben: einmal in den modulo 3 betrachteten linearen Periodentransformationen (sofern simultane Vorzeichenänderungen sämmtlicher vier Perioden als irrelevante Operationen aufgefasst werden), dann in den linearen Substitutionen der Y. Für die erste Darstellung sind drei Arten von Untergruppen von Herrn C. Jordan angegeben worden (und zwar für beliebige n)*); diese wollen wir zunächst untersuchen. Zwei weitere bemerkenswerthe Untergruppen ergaben sich aus der Eigenschaft unserer Gruppe, dass sie isomorph ist mit der des Problems der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung**); einmal gefunden konnten sie dann leicht auch an der Gruppe der Y definirt werden, während ihre Definition an den Periodentransformationen schwieriger zu sein scheint. Die ersten 4 von diesen 5 Arten von Untergruppen sind übrigens für die Gruppe der Z bereits von Herrn Witting untersucht worden.

Endlich möge noch der folgende Satz des Herrn C. Jordan (a. a. O. p. 176) hervorgehoben werden:

Die Gruppe G ist einfach.

§ 40.

Die erste Art Untergruppen vom Index 40.

Eine erste im folgenden mit G_0 zu bezeichnende Untergruppe unserer Gruppe G ist dadurch charakterisirt, dass *bei allen ihren Operationen ω_{i3}' und ω_{i4}' sich (bis auf n-fache Perioden) durch ω_{i3} und ω_{i4} allein ausdrücken;* ihre Ordnung ist $= 648$, ihr Index $= 40$. Die angegebene Eigenschaft kommt von unseren Erzeugenden den folgenden 3: C, D, S_2 zu, wir wollen zunächst zeigen, dass diese 3 Opera-

*) Traité des substitutions p. 365, 606; vgl. Grundz. § 39, wo die dritte Art Untergruppen und dieses Citat nachzutragen sind.

**) Wie ebenfalls von Herrn C. Jordan gefunden worden ist, a. a. O. p. 369. Ich hoffe auf diesen Isomorphismus im 3. Theil dieser Untersuchungen noch näher eingehen zu können.

tionen gerade zur Bildung der Untergruppe G ausreichen, und zwar knüpfen wir dabei an die Transformationen der Y an. In der That: aus C und D zusammen kann jede Vertauschung der vier Functionen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 erhalten werden (wobei nur mit jeder ungeraden Vertauschung ein Wechsel der Vorzeichen aller fünf Y zu verbinden ist). Daraus folgt, dass S_2 und diejenigen Operationen, welche aus S_2 durch Transformation vermittelst C, D und ihrer Verbindungen hervorgehen, *irgend drei* jener vier Y mit ε^2 zu multipliciren gestatten; durch Zusammensetzung von S_2 mit diesen seinen Transformirten kann dann jede Substitution der folgenden Form erhalten werden:

$$(1)\quad Y_0' = Y_0, \quad Y_1' = \varepsilon^{\varkappa} Y_1, \quad Y_2' = \varepsilon^{\lambda} Y_2, \quad Y_3' = \varepsilon^{\mu} Y_3, \quad Y_4' = \varepsilon^{\nu} Y_4,$$

wenn $\varkappa$, λ, μ, ν beliebige ganze Zahlen bezeichnen, die nur der Bedingung:

$$(2)\qquad \varkappa + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod{3}$$

zu genügen haben. Die Anzahl dieser Substitutionen ist 27; combiniren wir sie mit jenen 24 Vertauschungen, so erhalten wir gerade 648 verschiedene Substitutionen, welche alle zu G_0 gehören; G_0 kann daher keine weiteren Operationen enthalten, w. z. b. w.

Durch diese Betrachtung ist zugleich die Frage nach der Zusammensetzung von G_0 erledigt: man sieht, dass die 27 Operationen der Form (1) innerhalb G_0 eine *ausgezeichnete* Untergruppe bilden, welche ihrerseits in mannigfacher Weise aus 3 Gruppen von je 3 Operationen aufgebaut werden kann. Reducirt wird G auf diese ausgezeichnete Untergruppe vermittelst einer „Factorgruppe“ *), welche mit der Gruppe der Vertauschungen von 4 Dingen isomorph, deren Zusammensetzung also bekannt ist. Die Factoren der Zusammensetzung von G_0 sind sonach:

$$(3)\qquad 2;\ 3;\ 2,2;\ 3,3,3.$$

Auch die *Invarianten* dieser Untergruppe G_0 (d. h. diejenigen rationalen ganzen homogenen Functionen der Y, welche bei allen Substitutionen von G_0 bis auf einen vortretenden Factor ungeändert bleiben) lassen sich sofort angeben. Sie setzen sich nämlich rational und ganz zusammen aus:

I) Y_0;

II) dem Product $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$;

III) den symmetrischen und den alternirenden Functionen von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3.

Die *absoluten Invarianten* von G_0, d. h. diejenigen, für welche jener vortretende Factor sich stets auf 1 reducirt, setzen sich rational und ganz zusammen aus:

*) Vgl. Hölder, diese Ann. Bd. 34, p. 30.

I) dem Quadrat von Y_0;

II) dem Product $Y_1\,Y_2\,Y_3\,Y_4$ (dessen absolute Invarianz daraus hervorgeht, dass die Exponenten von ε in den Substitutionen (1) an die Bedingung (2) geknüpft sind);

III) den symmetrischen Functionen geraden und den alternirenden Functionen ungeraden Grades von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3;

IV) den Producten von Y_0 in symmetrische Functionen ungeraden und alternirende Functionen geraden Grades dieser vier Grössen.

Setzen wir eine Invariante von G_0 gleich Null, so erhalten wir die Gleichung eines dreidimensionalen Raumes, der bei allen Collineationen von G_0 an seiner Stelle bleibt, bei allen Collineationen von G also in höchstens 40 verschiedene Lagen übergeführt wird. Von diesen invarianten Räumen interessirt uns besonders der *lineare* Raum:

$$Y_0 = 0, \tag{4}$$

von dem wir in der That 40 verschiedene Lagen sofort angeben können. Denn aus Y_0 entstehen durch B und seine Transformirten vermöge G_0 die 2 . 12 paarweise entgegengesetzten Werthe:*)

$$\pm \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_\alpha), \qquad \begin{aligned} \lambda &= 0, 1, 2, \\ \alpha &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{5}$$

und durch A und seine Transformirten vermöge G_0 die 2 . 27 paarweise entgegengesetzten Werthe:

$$\pm \frac{1}{3}(Y_0 + \varepsilon^\varkappa Y_1 + \varepsilon^\lambda Y_2 + \varepsilon^\mu Y_3 + \varepsilon^{-\varkappa-\lambda-\mu} Y_4) \quad \varkappa, \lambda, \mu = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Keine dieser 39 neuen Lagen des Raumes Y_0 bleibt bei allen Operationen von G_0 an ihrer Stelle; daraus folgt, dass 40 mit G_0 gleichberechtigte Untergruppen existiren, dass also G_0 in keiner grösseren Untergruppe von G ausgezeichnet enthalten ist.

Wir wollen das System der 5 Räume

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0 \tag{7}$$

als ein *Pentatop erster Art***) bezeichnen und ebenso auch die 39 andern Systeme nennen, in welche dasselbe bei den Operationen von G übergeführt wird. Seine fünf Räume sind übrigens keineswegs alle gegenüber G gleichberechtigt; vielmehr steht $Y_0 = 0$ für sich als *Hauptraum erster Art* und nimmt nur 40 verschiedene Lagen an, die 4 andern „*Nebenräume*" sind unter sich gleichberechtigt, und jeder derselben kann 160 verschiedene Lagen annehmen, nämlich:
die 4 Lagen:

$$Y_\alpha = 0; \tag{8}$$

---

*) Pentatope zweiter Art werden in § 43 eingeführt werden.

**) Vgl. Wiltheiss, Journ. f. d. r. u. a. Mathem. Bd. 96, p. 21.

die 12 Lagen:

(9) $$Y_0 - \varepsilon^{\lambda} Y_{\alpha} = 0;$$

die 36 Lagen:

(10) $$Y_{\alpha} + \varepsilon^{\varkappa} Y_{\beta} + \varepsilon^{\lambda} Y_{\gamma} = 0;$$

die 198 Lagen:

(11) $$Y_0 + 2\varepsilon^{\varkappa} Y_{\alpha} - \varepsilon^{\lambda} Y_{\beta} - \varepsilon^{\mu} Y_{\gamma} - \varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_{\delta} = 0$$

(α, β, γ, δ bedeuten von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4; λ, μ, ν gleiche oder verschiedene aus der Reihe 0, 1, 2). Die *Form* Y_0 nimmt übrigens 80, die Form Y_1 960 verschiedene Werthe an.

Dem Hauptraum I. Art $Y_0 = 0$ entspricht dual der *Hauptpunkt I. Art*:

(12) $$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = 1 : 0 : 0 : 0 : 0;$$

auch dieser wird bei den Collineationen von G in nur 40 verschiedene Lagen übergeführt. Ebenso entsprechen den 160 Nebenräumen ebensoviele Nebenpunkte.

Durch einen Hauptpunkt I. Art gehen 40 Nebenräume, dagegen *kein Hauptraum I. Art;* durch einen Nebenpunkt 10 Haupträume I. Art und 21 Nebenräume.

§ 41.

Die zweite Art Untergruppen vom Index 40.

Eine zweite Untergruppe*), die im folgenden mit H bezeichnet werden möge, ist im Gebiete der Periodentransformationen dadurch charakterisirt, dass *sich bei allen ihren Operationen* ω'_{i1}, ω'_{i2}, ω'_{i3} *bis auf n-fache Perioden durch* ω_{i1}, ω_{i2}, ω_{i3} *allein ausdrücken.* Auch die Ordnung dieser Gruppe ist $= 648$, ihr Index $= 40$. Von unseren erzeugenden Operationen gehören B, C, S_2 zu ihr; wir zeigen wieder an den Substitutionen der Y, dass diese drei Operationen zur Bildung von H ausreichen. In der That: bei allen diesen drei Operationen substituiren sich Y_0 und Y_1 unter sich *binär*, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich *ternär*. Die ternäre Gruppe in Y_2, Y_3, Y_4, welche auf diese Weise zu Stande kommt, ist keine andere als die bekannte**) „*Hesse'sche*"

*) Vgl. p. 187, Fussnote.

**) Gruppentheoretisch zuerst wohl von Herrn C. Jordan behandelt, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 84, p. 206ff. (1877); ferner von den Herren Witting (Diss. p. 28ff.) und Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 322ff.). Bei Maschke handelt es sich um eine Gruppe von 1296 Substitutionen, die ausser den auch hier auftretenden noch Vorzeichenwechsel aller Coordinaten enthält. Seine A, D, E (p. 324) sind der Reihe nach gleich unseren C, S_2^{-1}, B, das letzte abgesehen von

Gruppe von 648 *linearen Substitutionen, welche ein syzygetisches Büschel von Curven dritter Ordnung in sich überführen;* wir erhalten also aus B, C, S_2 bereits die für H erforderliche Anzahl von Operationen, w. z. b. w.

Die *binäre* Gruppe, nach welcher sich Y_0, Y_1 bei H umsetzen, ist eine *homogene Tetraedergruppe;**) in diesem binären Gebiet reducirt sich nämlich C auf die Identität, während B, S_2, BS_2 bezw. die Perioden 4, 3, 3 besitzen. Die Art, wie diese Tetraedergruppe mit der ternären Hesse'schen Gruppe sich zu unserer quinären Gruppe H vereinigt, können wir folgendermassen schildern: Die Parameter $\varkappa : \lambda$ des syzygetischen Formenbüschels:

(1) $$\varkappa\varphi + \lambda\psi$$

(wo:

(2) $$\varphi = Y_2 Y_3 Y_4, \qquad \psi = Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3$$

gesetzt ist) substituiren sich binär nach einer Tetraedergruppe, wenn die Y den Substitutionen der *Hesse'schen* Gruppe unterworfen werden;**) und nun ist die Sache einfach die, dass sich bei jeder einzelnen Operation von H $6\,Y_1$ und Y_0 genau so wie $\varkappa$ und λ substituiren, sodass:

(3) $$u = Y_0\psi + 6\,Y_1\varphi$$

eine absolute Invariante unserer quinären Gruppe H ist. Es vereinigt sich daher jede der 648 Operationen der ternären Gruppe nur mit *einer* der binären, wie es sein muss.

Diejenigen Substitutionen unserer Gruppe H, bei welchen jede einzelne Form des Büschels (1) absolut invariant bleibt, bilden eine aus 27 Operationen bestehende *ausgezeichnete Untergruppe* derselben. Diese ihrerseits hat wieder zur ausgezeichneten Untergruppe eine solche von 9 Operationen, bei welchen Y_2, Y_3, Y_4 nur mit Einheitswurzeln multiplicirt werden; alle Operationen dieser letzteren Gruppe sind untereinander vertauschbar. Reducirt wird H auf die erstgenannte Untergruppe durch eine Factorgruppe, welche mit der homogenen Tetraedergruppe isomorph ist. Die *Factoren der Zusammensetzung* von H sind daher:

(4) $$3;\ 2,\, 2;\ 2;\ 3;\ 3,\, 3.$$

---

den Vorzeichen; sein B ist, ebenfalls abgesehen von den Vorzeichen gleich seinem E^2, daher zwar für ihn unentbehrlich (vgl. seine Fussn. p. 331), aber nicht für uns; sein C kann aus seinen A, B, D abgeleitet werden. — Einzelne Angaben auch bei Muth, *Ueber ternäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.* Diss. Giessen 1890, insbes. p. 15ff.

*) Vgl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884), p. 50ff. Zu beachten ist übrigens, dass S_2 im *binären* Gebiet nicht die Determinante 1 hat.

**) Maschke a. a. O. p. 327.

Die beiden Gruppen G_0 und H sind daher keineswegs isomorph (vgl. § 40, 3).

Die Ebenen, welche aus:

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0 \tag{5}$$

und die Geraden, welche aus:

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0 \tag{6}$$

durch die Operationen von G erhalten werden, sollen *Hauptebenen* und *Hauptgerade* heissen. Die Anzahl der einen wie der andern kann höchstens 40 betragen; dass sie auch nicht kleiner ist, folgt aus den sogleich aufzustellenden Sätzen über ihre Lage zu den Haupträumen I. Art. Man findet nämlich:

Jeder Hauptraum I. Art wird von jeder der vier zugehörigen Nebenräume in einer Hauptebene geschnitten; die drei andern zugehörigen Nebenräume schneiden sich jedesmal in der jener Hauptebene entsprechenden Hauptgeraden.

Umgekehrt gehen durch jede Hauptebene vier Haupträume erster Art, sammt je einem zugehörigen Nebenraum, durch jede Hauptgerade vier Tripel zusammengehöriger Nebenräume.

Wir fügen noch die beiden folgenden Sätze bei:

In Bezug auf einen Hauptraum I. Art (§ 37, 4) *spalten sich die* 39 *übrigen in* 12 (§ 37, 5), *welche mit ihm zu je dreien je eine seiner* 4 *Hauptebenen gemein haben, und in* 27 (§ 37, 6), *deren Schnittebenen mit ihm keine Hauptebenen sind.*

In Bezug auf eine Hauptebene spalten sich die 39 *übrigen in* 12, *welche mit ihr je eine Gerade, und in* 27, *welche mit ihr nur je einen Punkt gemein haben.*

Dass jedem dieser Sätze ein dualistischer gegenübersteht, bedarf wohl keiner näheren Ausführung.

Es bleiben noch die *Invarianten* der Gruppe H aufzuzählen. Zu ihnen gehören *erstens* die Invarianten der binären Tetraedergruppe, nach welcher sich Y_0, Y_1 substituiren, nämlich:*)

die Tetraederform:

$$\Phi = Y_0^4 + 8\,Y_0\,Y_2^3; \tag{7}$$

die Gegentetraederform:

$$\Psi = Y_0^3\,Y_1 - Y_1^4; \tag{8}$$

die Oktaederform:

$$t = Y_0^6 - 20\,Y_0^3\,Y_1^3 - 8\,Y_1^6; \tag{9}$$

---

*) Klein, Ikosaeder p. 51.

sie sind verbunden durch die Relation:

$$\Phi^3 - 64\Psi^3 = t_3^2. \tag{10}$$

Von ihnen sind Φ und t_3 absolut invariant*), Ψ aber geht bei Anwendung von S_2 in $\varepsilon^2\Psi$ über, sodass erst Ψ^3 absolut invariant ist.

Zweitens gehören hierher die Invarianten der ternären Gruppe, nach welcher sich $Y_2\,Y_3\,Y_4$ umsetzen; dieselben sind von Herrn Maschke in der mehrfach erwähnten Abhandlung (p. 326) angegeben worden und sollen von dort mit ihren Bezeichnungen:

$$C_6,\ C_9,\ C_{12},\ \mathfrak{C}_{12},\ C_{18} \tag{11}$$

einfach herübergenommen werden.

Drittens endlich können wir auch diejenigen Invarianten von H ohne Schwierigkeit gewinnen, in welchen beide Reihen von Grössen vorkommen. Denn auch diese können, wie die Betrachtung der Operationen B^2, C, S_2 lehrt, die Y_2, Y_3, Y_4 nur in den von Maschke (a. a. O. p. 325) mit φ, ψ, χ, C_9 bezeichneten Verbindungen enthalten; und von diesen wieder kann C_9 als einzige alternirende Form nur als Factor auftreten. Eine invariante Form aber, welche Y_2, Y_3 Y_4 nur in den Verbindungen φ, ψ, χ enthält, kann nach dem von Maschke (a. a. O. p. 327) angegebenen Verfahren in eine Reihe der Form:

$$J = \sum{}^{\lambda} C_6^{\lambda} J_\lambda$$

entwickelt werden, in welcher die J_λ selbst wieder Invarianten unserer Gruppe sind, aber Y_2, Y_3, Y_4 nur mehr in den Verbindungen φ und ψ enthalten, ausserdem natürlich eventuell noch Y_0 und Y_1. *Die J_λ sind also Invarianten mit den beiden cogredienten binären Variabelnreihen 6φ, $-\psi$ und Y_0, Y_1; als solche drücken sie sich rational und ganz aus durch die identische Invariante u* (s. o. Glchg. 3) *und durch Polaren der Formen mit nur einer Variabelnreihe.* Der Polarisationsprocess, welcher dabei in Frage kommt, ist durch den Operator:

$$-\psi\frac{\partial}{\partial Y_1} + 6\varphi\frac{\partial}{\partial Y_0} \tag{13}$$

definirt. Für spätere Benutzung (in § 46) seien von diesen Formen insbesondere die folgenden notirt:

$$\text{(14)}\quad \Psi_1 = \psi(-Y_0^3 + 4Y_1^3) + 18\varphi Y_0^2 Y_1; \qquad (6)$$

$$\text{(15)}\quad \Psi_2 = -\psi^2 Y_1^2 - 3\varphi\psi Y_0^2 + 18\varphi^2 Y_0 Y_1; \qquad (8)$$

$$\text{(16)}\quad \Phi_3 = -\psi^3 Y_0 + 18\varphi\psi^2 Y_1 + 108\varphi^3 Y_0; \qquad (10)$$

$$\text{(17)}\quad t_3 = \psi^3(Y_0^3 + 8Y_1^3) - 54\varphi\psi^2 Y_0^2 Y_1 + 324\varphi^2\psi Y_0 Y_1^2 + 216\varphi^3(Y_0^3 - Y_1^3). \qquad (12)$$

*) Die hierin liegende Abweichung von den Angaben bei Klein findet ihren Grund in dem p. 191, Fussn. erwähnten Umstand.

Dabei ist durch den angehängten Index bezeichnet, wie oft die betreffende Form „polarisirt“ worden ist; überflüssige Zahlenfactoren sind beseitigt und der Gesammtgrad in den Y ist in Klammern beigefügt.

Zwischen diesen Formen und Φ, Ψ, t selbst bestehen die Relationen:

(18) $$\Psi_1^2 = 16\Psi\Psi_2 + u^2\Phi;$$

(19) $$\Psi_1^3 = 2\Phi^2\Phi_3 - tt_3 - 3u^2\Phi\Psi_1 - u^3t.$$

Die erste derselben wird erhalten, indem man auf Ψ_1^2 und $\Psi\Psi_2$ Gordan'sche Reihenentwicklungen anwendet und das in beiden auftretende Glied $(\Psi^2)_1$ eliminirt; ebenso folgt die zweite aus den Reihenentwicklungen von Ψ_1^3, $\Phi^2\Phi_3$, tt_3, $\Phi\Psi_1$ durch Elimination von $(\Phi^3)_3$, $(t^2)_3$, $(\Phi\Psi)_1$. Bei der Aufstellung dieser Relationen erschien es übrigens als zweckmässig, nur ihre Existenz und Gestalt auf diesem Wege zu erschliessen; die numerischen Coefficienten sind durch wirkliches Einsetzen der expliciten Ausdrücke berechnet und controllirt.

§ 42.

Untergruppen vom Index 45.

Eine dritte Untergruppe) K unserer Gruppe G wird gebildet, wenn wir zu allen denjenigen Operationen, welche ω_{i1} und ω_{i3} unter sich, ω_{i2} und ω_{i4} unter sich substituiren, noch die Operation D hinzunehmen, welche beide Paare (ω_{i1}, ω_{i3} und ω_{i2}, ω_{i4}) vertauscht;* sodass also K auch noch diejenigen Operationen enthält, welche ω'_{i1} und ω'_{i3} durch ω_{i2} und ω_{i4}, ω'_{i2} und ω'_{i4} durch ω_{i1} und ω_{i3} ausdrücken. Die Anzahl dieser Operationen beträgt 1152; ihnen entspricht eine Gruppe von 576 Substitutionen der Y, deren Index also 45 ist.

Von unsern erzeugenden Operationen gehören zu dieser Untergruppe B, D, S_2; wir wollen zeigen, dass sie zur Bildung von K ausreichen. In der That, B und S_2 erzeugen, wie aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt ist, die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche ω_1 und ω_3 nur unter sich umsetzen, ω_2 und ω_4 ungeändert lassen; durch Transformation vermöge D entsteht aus ihr die Gruppe derjenigen, welche ω_2 und ω_4 unter sich umsetzen, ω_1 und ω_3 ungeändert lassen; beide vereinigt mit D geben die Gruppe K.

Im Gebiete der Y stellt sich diese Gruppe übersichtlich dar, wenn wir ein neues Coordinatensystem durch die Gleichungen einführen:

(1) $$\eta_0 = Y_0,\ \eta_1 = Y_1,\ \eta_2 = Y_2,\ \eta_3 = \tfrac{1}{2}(Y_3 + Y_4),\ \eta_4 = \tfrac{1}{2}(Y_3 - Y_4);$$

die Erzeugenden lauten dann:

---

*) Vgl. p. 187, Fussn.

(2)

	B	D	S_2
$\eta_0' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_0+2\eta_1)$	$-\eta_0$	η_0
$\eta_1' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_0-\eta_1)$	$-\eta_2$	$\varepsilon^2\eta_1$
$\eta_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_2+2\eta_3)$	$-\eta_1$	η_2
$\eta_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_2-\eta_3)$	$-\eta_3$	$\varepsilon^2\eta_3$
$\eta_4' =$	η_4	$-\eta_4$	$\varepsilon^2\eta_4$

Bei allen diesen Operationen bleibt also der Raum:

(3) $$\eta_4 = 0$$

an seinem Platze; wir nennen ihn und die durch Transformation vermöge G aus ihm hervorgehenden Räume *Haupträume zweiter Art.* Ihm entspricht dual der *Hauptpunkt zweiter Art:*

(4) $$\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = 0 : 0 : 0 : 0 : 1.$$

(Absolut invariant gegenüber K bleibt übrigens erst $\eta_4{}^6$). Die vier andern η substituiren sich quaternär in der Weise, dass die *Fläche II. Ordnung*

(5) $$F \equiv \eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2 = 0$$

in sich übergeht, während ihre beiden Geradenschaaren sowohl jede unabhängig von der andern*) nach einer Tetraedergruppe in sich linear transformirt, als auch mit einander vertauscht werden können (Absolut invariant ist dabei wieder erst F^3).

Die *Anzahl der Haupträume zweiter Art* kann höchstens 45 betragen; in der That findet man so viele, nämlich:

die 18 Räume:

(6) $$Y_\alpha - \varepsilon^\varkappa Y_\beta = 0$$

und die 27 Räume:

(7) $$Y_0 - \varepsilon^\varkappa Y_1 - \varepsilon^\lambda X_2 - \varepsilon^\mu Y_3 - \varepsilon^{-\varkappa-\lambda-\mu} Y_4 = 0$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4; \quad \varkappa, \lambda, \mu = 0, 1, 2).$$

Diesen Formeln entnehmen wir folgende Sätze:

*) Diese Unabhängigkeit besteht vollständig nur für die nichthomogenen Substitutionen; für die homogenen ist sie dadurch eingeschränkt, dass mit $\eta_0' = \eta_0$, $\eta_1' = \eta_1$ nur $\eta_0' = \eta_0$, $\eta_2' = \eta_2$, nicht $\eta_0' = -\eta_0$, $\eta_2' = -\eta_2$ verbunden werden kann. In Folge dessen kann jede Substitution von η_0, η_1 (oder η_2, η_3) auch nur mit 12, nicht mit 24 Substitutionen von η_0, η_2 (oder η_1, η_3) verbunden werden.

Die Haupträume und Hauptpunkte zweiter Art bilden eine Configuration 45_{12}, *m. a. W. jeder dieser Räume enthält* 12 *dieser Punkte, durch jeden dieser Punkte gehen* 12 *dieser Räume.*

Gegenüber einem Hauptraum I. Art spalten sich die 45 *Haupträume II. Art in* 18, *welche zu dreien je zwei der zu dem ersteren gehörenden* 4 *Hauptgeraden enthalten, und* 27, *für welche das nicht der Fall ist.*

Gegenüber einer Hauptgeraden spalten sich die 45 *Haupträume II. Art in* 9, *welche sie enthalten, und* 36, *welche sie nicht enthalten.*

Durch die beiden letzten Sätze ist die Verschiedenheit des Verhaltens unserer Untergruppe K gegenüber den beiden Untergruppen vom Index 40 charakterisirt.

§ 43.

Untergruppen vom Index 27.

Während wir bei der Aufstellung der bisher untersuchten Untergruppen (§ 40—42) von bekannten Eigenschaften der modulo 3 betrachteten linearen Periodentransformationen ausgingen und diese auf unsere quinäre Substitutionsgruppe übertrugen, wollen wir für die noch folgenden direct an die letztere anknüpfen. Zu diesem Zweck fragen wir zunächst nach der gegenseitigen Gruppirung der Haupträume II. Art des § 42. Aus dem Schlusssatz desselben folgt:

Jeder Hauptraum II. Art enthält:

$$(1)\qquad \frac{9\,.\,40}{45}=8 \quad \textit{Hauptgerade;}$$

so z. B. der Hauptraum II. Art:

$$(2)\qquad Y_1-Y_2=0$$

die 8 Geraden:

$$(3)\qquad \begin{cases} Y_1=0,\\ Y_2=0,\\ Y_3=0; \end{cases} \begin{cases} Y_1=0,\\ Y_2=0,\\ Y_4=0; \end{cases} \begin{cases} Y_0-\varepsilon^\lambda Y_3=0,\\ \varepsilon\;Y_1+\varepsilon^2Y_2+Y_4=0,\\ \varepsilon^2Y_1+\varepsilon\;Y_2+Y_4=0; \end{cases} \begin{cases} Y_0-\varepsilon^\lambda Y_4=0,\\ \varepsilon\;Y_1+\varepsilon^2Y_2+Y_3=0,\\ \varepsilon^2Y_1+\varepsilon\;Y_2+Y_3=0. \end{cases}$$
$$(\lambda=0,\,1,\,2).$$

Jede dieser 8 Geraden liegt noch (§ 42a. E) in weiteren Haupträumen II. Art, z. B. die erste in:

$$(4)\qquad Y_\alpha-\varepsilon^\lambda Y_\beta \qquad (\lambda=0,1,2;\ \alpha,\beta=1,2,3):$$

Die 8 Geraden liefern so 64 weitere Haupträume, welche aber paarweise identisch sind; so z. B. wird $Y_1-\varepsilon Y_2=0$ sowohl von der ersten, als von der zweiten Geraden (3) geliefert. Daraus schliessen wir:

Einem Hauptraum II. Art gegenüber zerfallen die 45 *anderen in* 32, *welche mit ihm je zwei Hauptgerade gemein haben, und* 12, *welche mit ihm keine solche gemein haben.*

Nehmen wir nun weiter zwei Haupträume II. Art, welche keine Hauptgerade gemein haben, z. B. (2) und:

$$(5) \qquad Y_3 - Y_4 = 0,$$

so haben von den 11 Haupträumen II. Art, welche mit (2) keine Hauptgerade gemein haben, noch 8 mit (5) je zwei solche gemein; es bleiben also noch 3, welche weder mit (2), noch mit (5) eine Hauptgerade gemein haben, nämlich:

$$\begin{aligned}
&(6) \qquad && Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 = 0,\\
&(7) \qquad && Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4 = 0,\\
&(8) \qquad && Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4 = 0.
\end{aligned}$$

Da man sich nun leicht überzeugt, dass auch je zwei von diesen keine Hauptgerade gemein haben, so kann man den Satz aussprechen:

Man kann auf verschiedene Weisen fünf Haupträume II. Art so auswählen, dass keine zwei derselben eine Hauptgerade gemein haben.

Ein solches System von fünf Haupträumen wollen wir ein *Pentatop II. Art* nennen. Die *Anzahl* dieser Pentatope bestimmt sich folgendermassen: der erste Seitenraum eines solchen kann auf 45 Arten gewählt werden, der zweite auf 12, die 3 andern sind dann bestimmt. Jedes Pentatop wird so 20 mal erhalten; *also ist die gesuchte Anzahl:*

$$(9) \qquad \frac{45 \,.\, 12}{20} = 27.$$

Das zuerst betrachtete Pentatop II. Art muss demnach in sich übergehen bei allen Operationen einer Untergruppe L vom Index 27*), also von der Ordnung 960; einer von 27 gleichberechtigten Untergruppen, deren jede eines der 27 Pentatope in sich überführt. Um uns in die Natur dieser Untergruppe L Einsicht zu verschaffen, führen wir die Seitenräume unseres Pentatops als neue Coordinatenräume ein durch die Gleichungen:**)

$$(10) \qquad \begin{aligned}
\eta_2 &= Y_1 - Y_2,\\
\eta_3 &= - Y_3 + Y_4,\\
\eta_4 &= \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4),\\
\eta_5 &= \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4),\\
\eta_6 &= \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 + \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4).
\end{aligned}$$

*) Dieser Schluss würde natürlich nicht zutreffen, wenn alle Substitutionen, welche ein bestimmtes Pentatop II. Art in sich überführen, auch noch ein zweites in sich überführten; man sieht aber aus den sogleich aufzustellenden Formeln, dass das nicht der Fall ist.

**) Die η haben also hier eine andere Bedeutung, als § 42.

Alsdann können wir aus unseren Erzeugenden (§ 39) sofort die folgenden 4 Operationen ableiten, welche diese neuen Coordinaten η, von multiplicativ zutretenden Einheitswurzeln abgesehen, nur unter sich vertauschen; nämlich:

(11)

	B	D	E	F
$\eta_2' =$	η_4	η_2	$\varepsilon\,\eta_2$	η_3
$\eta_3' =$	$-\eta_3$	$-\eta_3$	$\varepsilon^2\eta_3$	η_2
$\eta_4' =$	$-\eta_2$	$-\eta_4$	η_5	η_4
$\eta_5' =$	$-\varepsilon^2\eta_6$	$-\eta_5$	η_6	η_5
$\eta_6' =$	$+\varepsilon\,\eta_5$	$-\eta_6$	η_4	η_6

Dabei ist:

(12) $$E = (D S_2^{\,2})^2; \qquad F = (D C^2)^2.$$

Aus diesen 4 Substitutionen lässt sich nun eine Gruppe von *mindestens* 960 Operationen ableiten, welche alle das Pentatop II. Art in sich überführen. Denn sieht man für den Augenblick von den zutretenden Einheitswurzeln ab, so kann man aus B, E, F jede der 60 geraden Vertauschungen der 5 Grössen η erhalten. Transformirt man D durch diese Operationen, so erhält man Vorzeichenänderungen von irgend vier der η und damit auch von irgend zwei derselben, also eine Gruppe von 16 Operationen, welche mit jenen 60 combinirt gerade 960 Operationen liefern. Alle diese lassen das Pentatop II. Art (10) ungeändert, und es giebt kein zweites Pentatop II. Art, welches sie alle ungeändert lassen. *Sie bilden also in der That die gesuchte Gruppe L vom Index 27 und der Ordnung* 960.

Es ist mir nicht gelungen, ein einfaches Kriterium zu finden, welches entscheidet, ob eine vorgelegte *lineare Periodentransformation* dieser Untergruppe L angehört. —

Was *Invarianten* von L betrifft, so ist eine einfach zu bildende absolute Invariante das Product aller fünf η:

(13) $$J_5 = \eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6.$$

Von noch niedrigerem Grade ist die folgende:

(14) $$\begin{aligned} J_4 &= \eta_2^2\eta_3^2 + \eta_2^2\eta_4^2 + \eta_4^2\eta_5^2 + \eta_4^2\eta_6^2 + \eta_5^2\eta_6^2 \\ &\quad + \varepsilon(\eta_2^2\eta_5^2 + \eta_3^2\eta_6^2) + \varepsilon^2(\eta_2^2\eta_6^2 + \eta_3^2\eta_5^2) \\ &= \tfrac{1}{3}\,[Y_0^4 + 8\,Y_0(Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3) + 48\,Y_1\,Y_2\,Y_3\,Y_4]; \end{aligned}$$

diese bleibt jedoch, wie wir später (§ 47) sehen werden, nicht nur bei L, sondern überhaupt bei allen Operationen von G absolut invariant. Mit ihrer Hülfe kann übrigens, wenn eine gerade Permutation der η vorgegeben ist, sofort entschieden werden, welche dritte Einheitswurzeln man beizufügen hat, um eine Operation von L zu erhalten.

§ 44.

Untergruppen vom Index 36.

Wir untersuchen nunmehr die gegenseitige Gruppirung unserer 27 Pentatope II. Art. Gehen wir aus von einem derselben, das etwa A_1 heissen möge, so sehen wir, dass sich ihm gegenüber die 26 andern spalten *in* 10, *welche mit ihm je einen Hauptraum II. Art gemein haben, und* 16, *für welche das nicht der Fall ist.* Greifen wir eines der letzteren heraus — es heisse A_2 — so sind unter den 15 übrigen noch 10 enthalten, welche auch mit A_2 keinen Hauptraum gemein haben. Sei A_3 eines von diesen, so bleiben 6, welche mit A_1, A_2, A_3; sei A_4 eines von diesen, so bleiben zwei — A_5, A_6 —, welche mit A_1, A_2, A_3, A_4 und wie sich herausstellt, auch unter sich keinen Hauptraum II. Art gemein haben. So gelangen wir zu *einem System von* 6 *Pentatopen II. Art, welche zusammen* 30 *verschiedene Haupträume II. Art enthalten.* Solcher Systeme giebt es, wie aus der eben beschriebenen Art ihrer Herleitung hervorgeht:

$$(1) \qquad \frac{27\,.\,16\,.\,10\,.\,6}{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3} = 72;$$

eines derselben ist z. B. das folgende:

$$(2) \qquad A_1 \begin{cases} 2) & Y_1 - Y_2, \\ 3) & -Y_3 + Y_4, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \varepsilon\, Y_4); \end{cases}$$

$$A_2 \begin{cases} 1) & \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon\, Y_4, \\ 3) & -\varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon\, Y_2, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4); \end{cases}$$

$$A_3 \begin{cases} 1) & \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon^2 Y_2, \\ 2) & \varepsilon\, Y_3 - \varepsilon^2 Y_4, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4); \end{cases}$$

$$A_4 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 5) & \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_3, \\ 6) & \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_4; \end{cases}$$

$$A_5 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 4) & Y_2 - Y_4, \\ 6) & \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_3; \end{cases}$$

$$A_6 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 4) & Y_1 - Y_3, \\ 5) & \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_4. \end{cases}$$

Die den einzelnen Haupträumen beigesetzten Zahlen sollen sogleich erklärt werden.

Die 30 vorstehend in $A_1, A_2, \ldots, A_6$ enthaltenen Räume lassen sich aber noch auf eine andere Art zu 6 Pentatopen II. Art anordnen, nämlich wie folgt:

$$(3) \qquad B_1 \begin{cases} 2) & \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4, \\ 3) & -\varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4); \end{cases}$$

$$B_2 \begin{cases} 1) & Y_1 - Y_2, \\ 3) & \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4); \end{cases}$$

$$B_3 \begin{cases} 1) & -Y_3 + Y_4, \\ 2) & -\varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon Y_2, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4); \end{cases}$$

$$B_4 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) & Y_2 - Y_4, \\ 6) & Y_1 - Y_3; \end{cases}$$

$$B_5 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 4) & \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_3, \\ 6) & \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_4; \end{cases}$$

$$B_6 \begin{cases} 1) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 2) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 3) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4), \\ 4) & \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_4, \\ 5) & \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_3; \end{cases}$$

und zwar hängen, wie man sieht, diese beiden Systeme von je 6 Pentatopen in der Weise zusammen, dass jedes A_i mit jedem B_k für $i \gtrless k$ je einen Hauptraum, dagegen mit B_i keinen Hauptraum gemein hat. (In den Tabellen (2) und (3) ist jeder einzelne Hauptraum mit der Nummer desjenigen Pentatops bezeichnet, zu welchem er im andern System gehört).

Untersuchen wir nunmehr näher die Beziehung zwischen A_1 und B_1 (d. h. also zwischen irgend zwei Pentatopen II. Art, welche keinen Hauptraum gemein haben). Benutzen wir wieder (wie § 43) für die Räume von A_1 die Bezeichnung η, für die von B_1 in analoger Weise die Bezeichnung ζ, so erhalten wir durch Elimination der Y die Relationen:

$$(4)\qquad \begin{aligned}
\zeta_2 &= \tfrac{1}{2}(\qquad\quad \eta_3 + \eta_4 + \varepsilon\,\eta_5 + \varepsilon^2\eta_6),\\
\zeta_3 &= \tfrac{1}{2}(\ \eta_2 \qquad\quad + \eta_4 + \varepsilon^2\eta_5 + \varepsilon\,\eta_6),\\
\zeta_4 &= \tfrac{1}{2}(\ \eta_2 + \ \eta_3 \qquad\ + \ \eta_5 + \ \eta_6),\\
\zeta_5 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \eta_4 \qquad\quad + \ \eta_6),\\
\zeta_6 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon\,\eta_3 + \eta_4 + \ \eta_5 \qquad\quad),
\end{aligned}$$

deren Umkehrungen sind:

$$(5)\qquad \begin{aligned}
\eta_2 &= \tfrac{1}{2}(\qquad\quad \zeta_3 + \zeta_4 + \varepsilon^2\zeta_5 + \varepsilon\,\zeta_6),\\
\eta_3 &= \tfrac{1}{2}(\ \zeta_2 \qquad\quad + \zeta_4 + \varepsilon\,\zeta_5 + \varepsilon^2\zeta_6),\\
\eta_4 &= \tfrac{1}{2}(\ \zeta_2 + \ \zeta_3 \qquad\ + \ \zeta_5 + \ \zeta_6),\\
\eta_5 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2\zeta_2 + \varepsilon\,\zeta_3 + \zeta_4 \qquad\quad + \ \zeta_6),\\
\eta_6 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + \zeta_4 + \ \zeta_5 \qquad\quad).
\end{aligned}$$

Aus dem Fehlen der Diagonalglieder in beiden Gleichungssystemen folgt zunächst:

Die beiden Pentatope II. Art A_1 und B_1 sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben.

Ferner aber folgt aus der Symmetrie der Coefficientensysteme gegen die Hauptdiagonale:

Die beiden Pentatope A_1 und B_1 sind einander conjugirt in Bezug auf den quadratischen Raum:

$$(6)\qquad \eta_2\zeta_2 + \eta_3\zeta_3 + \eta_4\zeta_4 + \eta_5\zeta_5 + \eta_6\zeta_6 = 0$$

oder:

$$(7)\quad \eta_2\eta_3+\eta_2\eta_4+\eta_3\eta_4+\eta_4\eta_5+\eta_4\eta_6+\eta_5\eta_6+\varepsilon(\eta_2\eta_5+\eta_3\eta_6)$$
$$+\varepsilon^2(\eta_2\eta_6+\eta_3\eta_5)=0$$

oder endlich:

$$(8)\qquad q\equiv Y_0^2+4\varepsilon Y_1 Y_4+4\varepsilon^2 Y_2 Y_3=0.$$

Die letzte Form der Gleichung dieses Raumes zeigt, dass derselbe ungeändert bleibt, sowohl wenn man Y_1 mit Y_4 vertauscht, als auch, wenn man Y_1 und Y_3 mit ε, Y_2 und Y_4 mit ε^2 multiplicirt. Bei diesen Operationen und den aus ihrer Combination sich ergebenden werden die 6 Paare $(A_1B_1), (A_2B_2), \ldots, (A_6B_6)$ transitiv vertauscht; daraus folgt, dass die beiden Pentatope *jedes* solchen Paares in Bezug auf $q=0$ einander conjugirt sind. Zusammenfassend können wir also sagen:

Von unseren 27 *Pentatopen II. Art ordnen sich* 36 *mal je* 12 *zu einer „Doppelsechs“ wie:*

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6, \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{matrix}$$

zusammen. Jedes Pentatop der einen Hälfte einer solchen Doppelsechs ist dem entsprechenden (mit gleichem Index bezeichneten) der anderen Hälfte gleichzeitig ein- und umbeschrieben und in Bezug auf einen quadratischen Raum conjugirt; dieser Raum ist für alle 6 *Paare der Doppelsechs derselbe.*

Eine solche Doppelsechs — und damit auch die Form q — geht in sich über bei allen Operationen einer bestimmten Untergruppe unserer Hauptgruppe G; dieselbe möge mit M bezeichnet werden. Sie besteht aus:

$$(9)\qquad \frac{25920}{36}=720$$

Operationen: die sechs Paare können nämlich auf alle möglichen Arten mit einander vertauscht werden. Jede *ungerade* Vertauschung der 6 Paare ist dabei mit einer gleichzeitigen Vertauschung der beiden Hälften verbunden. Die Gruppe ist also *holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Vertauschungen von sechs Dingen.*

§ 45.

Andere Darstellung dieser Untergruppe M.

Eine mit der Gruppe der Vertauschungen von 6 Dingen isomorphe Gruppe P von 720 Collineationen wird im quinären Gebiet auch erhalten, wenn man überzählige, durch die Relation:

$$(1)\qquad \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5+\xi_6=0$$

verbundene Punktcoordinaten ξ einführt und die durch die Vertauschungen der ξ dargestellten Collineationen ins Auge fasst. Es liegt die Frage nahe, ob die Gruppe M des vorigen Paragraphen in dieser Weise dargestellt werden kann, und wir wollen zeigen, dass das in der That möglich ist. Angenommen nämlich, es existirten 6 solche lineare Räume $\xi_i = 0$, so muss der *einzelne* derselben bei 120 von den 720 Operationen von M in sich übergehen. Nun enthält aber die Gruppe der Vertauschungen von 6 Dingen (hier der 6 Paare von Pentatopen) *zweierlei* Untergruppen von je 120 Operationen; nämlich einmal die Gruppen der Vertauschungen von je fünfen, dann die von Cauchy u. a. untersuchten zweifach transitiven Gruppen, über welche man etwa Serret's Handbuch der Algebra art. 452 vergleichen möge. Wir wollen nun zeigen, dass zwar nicht bei einer Untergruppe der ersten dieser beiden Arten, wohl aber bei einer solchen der zweiten ein linearer Raum in sich übergeht.

Was den ersten Theil dieser Behauptung betrifft, so wird es genügen, den Beweis für die in der betreffenden Untergruppe enthaltenen *geraden* Operationen zu führen. Werden aber unter Festhaltung von A_1 und B_1 die übrigen Paare auf alle möglichen geraden Arten unter sich vertauscht, so erleiden auch die Seitenräume von A_1, also die η, alle möglichen geraden Vertauschungen; dabei tritt nur zu jedem η eine bestimmte dritte Einheitswurzel*). Dass kein linearer Raum bei allen diesen Operationen in sich übergeht, ist sofort zu sehen.

Anders verhält sich die Sache bei den Untergruppen der zweiten Art. Fassen wir auch bei einer solchen zunächst nur diejenigen ihrer Operationen ins Auge, welche A_1 und B_1 ungeändert lassen; diese vertauschen die fünf übrigen Paare, also auch die η, *halbmetacyklisch* (wieder abgesehen von den zu den η tretenden dritten Einheitswurzeln). Eine solche Gruppe wird z. B. erzeugt von den beiden Operationen:

$$(2) \qquad \eta_2' = \varepsilon\eta_3, \quad \eta_3' = \varepsilon^2\eta_4, \quad \eta_4' = \varepsilon\eta_5, \quad \eta_5' = \varepsilon^2\eta_6, \quad \eta_6' = \eta_2$$

und:

$$(3) \qquad \eta_2' = \eta_2, \quad \eta_3' = \varepsilon^2\eta_6, \quad \eta_4' = \varepsilon\eta_5, \quad \eta_5' = \varepsilon^2\eta_4, \quad \eta_6' = \varepsilon\eta_3;$$

bei beiden geht der lineare Raum:

$$(4) \qquad \varepsilon^2\eta_2 + \eta_3 + \varepsilon^2\eta_4 + \eta_5 + \varepsilon^2\eta_6 \equiv Y_0 - 2\varepsilon^2 Y_2 - 2 Y_3 = 0$$

in sich über. Er geht aber auch in sich über bei der zu M gehörenden Operation:

$$(5) \qquad Y_0' = -Y_0, \quad Y_1' = -Y_4, \quad Y_2' = -Y_2, \quad Y_3' = -Y_3; \quad Y_4' = -Y_1,$$

welche A_1 mit B_4, A_2 mit B_5, A_3 mit B_6 und ebenso B_1 mit A_4, B_2 mit A_5, B_3 mit A_6 vertauscht. Die 3 Operationen (2), (3), (5) erzeugen aber in der That eine aus 120 Operationen bestehende

*) *Welche* dritte Einheitswurzeln zuzusetzen sind, bestimmt sich daraus, dass q in sich übergeht (Gl. 7).

Untergruppe von M. Die übrigen Operationen von M können dann den Raum (4) nur in noch 5 andere Lagen überführen. Auf diese Weise gelangen wir zu folgendem Satze:

Die 720 linearen Substitutionen unserer Gruppe M lassen sich darstellen als die 720 Vertauschungen der sechs neuen, durch die Relation:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 = 0$$

verbundenen Coordinaten:

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_1 = Y_0 - 2\varepsilon^2 Y_2 - 2 Y_3, & \xi_4 = - Y_0 + 2\varepsilon\, Y_1 + 2 Y_4, \\ \xi_2 = Y_0 - 2\varepsilon\, Y_2 - 2\varepsilon\, Y_3, & \xi_5 = - Y_0 + 2\varepsilon^2 Y_1 + 2\varepsilon^2 Y_4, \\ \xi_3 = Y_0 - 2 Y_2 - 2\varepsilon^2 Y_3, & \xi_6 = - Y_0 + 2 Y_1 + 2\varepsilon\, Y_4. \end{cases}$$

Dabei ist mit jeder ungeraden Vertauschung ein Zeichenwechsel sämmtlicher ξ zu verbinden.)*

Die *Invarianten* von M sind nichts anderes als die symmetrischen bez. alternirenden Functionen dieser ξ; so ist z. B. die in § 44 bereits aufgestellte Invariante 2. Grades:

$$(7)\qquad q = \frac{1}{6}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2).$$

Obwohl noch verschiedene naheliegende Fragen zu erörtern sein würden, brechen wir doch die Untersuchung der Untergruppen hier ab, um uns der Aufstellung der Invarianten von G zuzuwenden.

X. Abschnitt.

Invarianten der Gruppe G.

§ 46.

Methode zur Ableitung der Invarianten.

Wir können die Invarianten unserer Hauptgruppe G ohne Schwierigkeit aufstellen, wenn wir die Resultate der §§ 40, 41 combiniren: es sind diejenigen ganzen Functionen der Formen des § 41, welche zugleich symmetrisch oder alternirend in Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sind und diese Y nur im Product oder in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten enthalten. Wegen der in der letztgenannten Bedingung enthaltenen Beschränkung kommen von den Formen des § 41 nur:

$$(1)\qquad \Phi,\ u;\ t,\ \Psi_1,\ C_6;\ C_9;\ \Phi_3;\ t_3,\ C_{12};\ C_{18}$$

in Betracht; nämlich die Producte und Potenzen wie Ψ^3, $\mathfrak{C}_{18}^3$, $\Psi\mathfrak{C}_{12}$, $\Psi\Psi_2$, $\Psi\Phi_1$ u. s. w. lassen sich durch die 10 Formen (1) mit Hilfe

*) Hiernach ist die entgegenstehende Angabe in dem in den Göttinger Nachrichten erschienenen Auszug zu berichtigen.

Gordan'scher Reihenentwicklungen rational und ganz ausdrücken.*) Dadurch ist der Weg zur Berechnung der Invarianten vorgeschriebenen Grades von G vorgezeichnet: *man bilde aus den Formen* (1) *die allgemeinste Function dieses Grades mit unbestimmten Coefficienten und bestimme die letzteren durch die Forderung, dass die entstehende Invariante in* Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 *symmetrisch, bezw. alternirend ausfallen soll.*

Der Gang der Rechnung möge am Beispiel der Invarianten 12. Grades erläutert werden. Die allgemeinste Verbindung dieses Grades aus den Formen (1) ist:

$$\alpha\Phi^3 + \beta t^2 + \gamma t\Phi_1 + \delta u\Phi^2 + \varepsilon\Psi\Psi_2 + \zeta u^2\Phi + \eta C_6 t + \vartheta t_3 \\ + \iota u^3 + \varkappa C_6\Psi_1 + \lambda C_{12} + \mu C_6^2;$$

soll diese die verlangten Symmetrieeigenschaften besitzen, so müssen ihre Coefficienten den Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 24\alpha - 40\beta & = & -\gamma + \delta, \\
(2) & 192\alpha + 384\beta & = & \zeta + \eta, \\
(3) & 24\gamma + 16\delta & = & 2\zeta - 10\eta, \\
(4) & -360\gamma + 96\delta & = & -3\varepsilon + 12\zeta, \\
(5) & 512\alpha + 320\beta & = & \vartheta + \iota - \varkappa, \\
(6) & -72\gamma + 64\delta & = & -\varepsilon + 8\zeta - 20\eta \\
(6a) & & = & 3\vartheta + 3\iota + 9\varkappa, \\
(7) & -2\varepsilon + 16\zeta + 200\eta & = & 222\vartheta + 6\iota + 30\varkappa, \\
(8) & -144\gamma + 384\delta & = & -54\vartheta + 18\iota + 18\varkappa, \\
(9) & -18\varepsilon + 288\zeta & = & 324\vartheta + 108\iota, \\
(10) & 3\varepsilon + 96\zeta & = & -108\vartheta + 36\iota - 180\varkappa, \\
(11) & 64\beta & = & \lambda + \mu, \\
(12) & -32\gamma & = & 8\vartheta + 4\varkappa \\
(12a) & & = & 4\lambda - 20\mu, \\
(13) & \varepsilon - 8\eta & = & 6\lambda + 102\mu, \\
(14) & 2\varepsilon + 80\eta & = & 24\vartheta - 36\varkappa \\
(14a) & & = & 228\lambda + 180\mu.
\end{array}$$

Wir setzen in denselben:

$$\gamma = \quad 40\beta + 3\gamma'$$

dann liefert (1):

$$\delta = 24\alpha \quad + 3\gamma';$$

hierauf folgt aus (2), (3), (4)

*) In den folgenden Rechnungen ist stellenweise Ψ^3 statt t^2 und $\Psi\Psi_2$ statt Ψ_1^2 benutzt; vgl. § 41, Glchgen (10) und (18).

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 6400\beta + 304\gamma', \\ \zeta &= 192\alpha + 400\beta + 10\gamma', \\ \eta &= - 16\beta - 10\gamma', \end{aligned}$$

und diese Werthe befriedigen gleichzeitig (6), was auch α, β, γ' sein mögen; dann folgt aus (5), (6a), (8):

$$\begin{aligned} \vartheta &= - 11\gamma', \\ \iota &= 512\alpha + 9\gamma', \\ \varkappa &= - 320\beta - 2\gamma' \end{aligned}$$

und (7), (9), (10), (14) sind von selbst befriedigt; endlich aus (11) und (12):

$$\begin{aligned} \lambda &= - 4\gamma', \\ \mu &= 64\beta + 4\gamma' \end{aligned}$$

und damit sind auch die allein noch übrigen Gleichungen (13) und (14a) erfüllt. Es existiren also 3 unabhängige Lösungen unseres Gleichungssystems, d. h. 3 linear unabhängige Invarianten 12. Grades. Wir können als solche etwa wählen:

I. $\Phi^3 + 24u\Phi^2 + 192u^2\Phi + 512u^3 = (\Phi + 8u)^3$;

II. $t^2 + 40t\Psi_1 + 400\Psi_1^2 - 16tC_6 - 320C_6\Psi_1 + 64C_6^2$
$= (t + 20\Psi_1 - 8C_6)^2$;

III. $3t\Psi_1 + 3u\Phi^2 + 19\Psi_1^2 - 9u^2\Phi - 10C_6t - 11t_3 + 9u^3$
$- 2C_6\Psi_1 - 4C_{12} + 4C_6^2$.

In gleicher Weise gestaltet sich die Rechnung in jedem Falle: das System linearer Gleichungen, aus welchem die Coefficienten zu berechnen sind, zerfällt jedesmal in Theilsysteme, welche ein successives Vorgehen gestatten.

§ 47.

Zusammenstellung der Resultate.

Auf dem im vorigen Paragraphen erläuterten Wege gelangt man nun zu einer Reihe von Invarianten unserer Gruppe. Die Werthe derselben sind im folgenden in dreifacher Form zusammengestellt: einmal ausgedrückt durch die Formen des § 41, dann explicite in den Y, endlich ausgedrückt durch die symmetrischen Functionen von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3 (§ 40), nämlich:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_1 &= -Y_1^3 - Y_2^3 - Y_3^3 - Y_4^3, \\ a_2 &= Y_1^3Y_2^3 + Y_1^3Y_3^3 + Y_1^3Y_4^3 + Y_2^3Y_3^3 + Y_3^3Y_4^3 + Y_4^3Y_2^3, \\ a_3 &= -Y_1^3Y_2^3Y_3^3 - Y_1^3Y_2^3Y_4^3 - Y_1^3Y_3^3Y_4^3 - Y_2^3Y_3^3Y_4^3, \\ a_4 &= Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3. \end{aligned}$$

In den an zweiter Stelle stehenden Ausdrücken sind die Summenzeichen auszudehnen über alle *verschiedenen* Glieder, welche aus dem jedesmal darunterstehenden Ausdruck durch Vertauschung von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 hervorgehen. Die Formen sind:

eine Invariante *vierten* Grades*):

$$(1)\quad \begin{aligned} J_4 &= \Phi + 8u \\ &= Y_0^4 + 8Y_0 \Sigma Y_1^3 + 48 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &= Y_0^4 - 8a_1 Y_0 + 48\sqrt[3]{a_4}; \end{aligned}$$

eine Invariante *sechsten* Grades:

$$(2)\quad \begin{aligned} J_6 &= t + 20\Psi_1 - 8C_6 \\ &= Y_0^6 - 20Y_0^3\Sigma Y_1^3 + 360 Y_0^2 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 + 80\Sigma Y_1^3 Y_2^3 \\ &\quad - 8\Sigma Y_1^6 \\ &= Y_0^6 - 20a_1 Y_0^3 + 96a_2 - 8a_1^2 + 360\sqrt[3]{a_4}\, Y_0^2; \end{aligned}$$

eine Invariante *zehnten* Grades:

$$(3)\quad \begin{aligned} J_{10} &= \frac{1}{24}(\Phi\Psi_1 + ut + 2\Phi C_6 + 2u\Psi_1 - 2\Phi_3 - 2uC_6) \\ &= Y_0^6 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 - Y_0^4 \Sigma Y_1^3 Y_2^3 + Y_0^3 \Sigma Y_1^4 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 9Y_0^2 Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 + Y_0 \Sigma Y_1^6 Y_2^3 - 6Y_0 \Sigma Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 \\ &\quad - 2\Sigma Y_1^7 Y_2 Y_3 Y_4 + 2\Sigma Y_1^4 Y_2^4 Y_3 Y_4 \\ &= -a_2 Y_0^4 + (9a_3 - a_1 a_2) Y_0 + \sqrt[3]{a_4}\,[Y_0^6 - a_1 Y_0^3 + 6a_2 - 2a_1^2] \\ &\quad + 9\sqrt[3]{a_4^2}\, Y_0^2; \end{aligned}$$

eine Invariante *zwölften* Grades:

$$(4)\quad \begin{aligned} J_{12} &= \frac{1}{24}(3t\Psi_1 + 3u\Phi^2 + 19\Psi_1^2 - 9u^2\Phi - 10C_6 t - 11t_3 + 9u^3 \\ &\qquad - 2C_6\Psi_1 - 4C_{12} + 4C_6^2) \\ &= 3Y_0^8 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 + 5Y_0^6 \Sigma Y_1^3 Y_2^3 - 33 Y_0^5 \Sigma Y_1^4 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 243 Y_0^4 Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 - Y_0^3 \Sigma Y_1^6 Y_2^3 \\ &\quad - 102 Y_0^3 \Sigma Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 + 30 Y_0^2 \Sigma Y_1^7 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 78 Y_0^2 \Sigma Y_1^4 Y_2^4 Y_3 Y_4 - 108 Y_0 \Sigma Y_1^5 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 \\ &\quad - 4\Sigma Y_1^9 Y_2^3 + 16\Sigma Y_1^6 Y_2^6 - 8\Sigma Y_1^6 Y_2^3 Y_3^3 \\ &\quad + 168 Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 Y_4^3 \\ &= 5a_2 Y_0^6 + (99a_3 + a_1 a_2) Y_0^3 + 216a_4 - 36a_1 a_3 + 24a_2^2 - 4a_1^2 a_2 \\ &\quad + \sqrt[3]{a_4}\,[3Y_0^8 - 33a_1 Y_0^5 + (18a_2 + 30a_1^2) Y_0^2] \\ &\quad + \sqrt[3]{a_4^2}\,[243 Y_0^4 - 108 a_1 Y_0]; \end{aligned}$$

*) Dieselbe, welche uns bereits § 43, Glchg (14) begegnete. — Unter $\sqrt[3]{a_4}$ ist natürlich $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ zu verstehen.

eine Invariante *achtzehnten* Grades:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad J_{18} = \frac{1}{864}&(72t\Psi\Psi_2 + 9u\Phi^2\Psi_1 + 9u^2\Phi t + 288C_6\Psi^3 \\
&+ 4\Phi^2\Phi_3 - 18tt_3 - 42u^2\Phi\Psi_1 - 20u^3t - 18C_6t\Psi_1 \\
&- 18C_6\Phi^2u + 84C_{12}t - 72u\Phi\Phi_3 + 162u^3\Psi_1 \\
&- 240C_6\Psi\Psi_2 + 12C_6u^2\Phi - 6C_6^2t + 24\Psi_1C_{12} - 36u^2\Phi_3 \\
&- 6C_6t_3 - 18C_6u^3 - 12C_6^2\Psi_1 - 4C_{18} + 6C_6C_{12} - 2C_6^3) \\
= 3&Y_0^{10}Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4Y_0^9\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 + 12Y_0^8\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4 \\
&- 36Y_0^7\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3^2Y_4^3 - Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^6 + 10Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3 \\
&+ 96Y_0^6Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3 - 12Y_0^5\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3Y_4 \\
&- 90Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4 + 27Y_0^4\Sigma Y_1^8Y_2^2Y_3^2Y_4^2 \\
&+ 108Y_0^4\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^2Y_4^2 + 2Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^6 - 8Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^3Y_3^3 \\
&+ 4Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3 - 168Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3 \\
&+ 6Y_0^2\Sigma Y_1^{10}Y_2^4Y_3Y_4 - 24Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^7Y_3Y_4 \\
&+ 12Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3^4Y_4 + 315Y_0^2Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4^4 \\
&+ 12Y_0\Sigma Y_1^{11}Y_2^2Y_3^2Y_4^2 + 18Y_0\Sigma Y_1^8Y_2^5Y_3^2Y_4^2 \\
&- 27Y_0\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^5Y_4^2 - \Sigma Y_1^{12}Y_2^6 + 2\Sigma Y_1^{12}Y_2^3Y_3^3 \\
&+ 2\Sigma Y_1^9Y_2^9 - 2\Sigma Y_1^9Y_2^6Y_3^3 - 8\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3 \\
&+ 6\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^6 + 8\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3Y_4^3 \\
= 4&a_3Y_0^9 + (54a_4 + 12a_1a_3 - a_2^2)Y_0^6 + (162a_1a_4 - 18a_2a_3 \\
&+ 12a_1^2a_3 - 2a_1a_2^2)Y_0^3 + (27a_3^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 \\
&+ 4a_2^3 - a_1^2a_2^2) \\
&+ \sqrt[3]{a_4}\,[12a_2Y_0^8 + (54a_3 + 12a_1a_2)Y_0^5 + (243a_4 + 54a_1a_3 \\
&\qquad - 36a_2^2 + 6a_1^2a_2)Y_0^2] \\
&+ \sqrt[3]{a_4^2}\,[3Y_0^{10} + 36a_1Y_1^7 + (54a_2 + 27a_1^2)Y_0^4 \\
&\qquad + (45a_3 + 18a_1a_2 - 12a_1^3)Y_0].
\end{aligned}
$$

Die hier aufgeführten J_{10}, J_{12}, J_{18} sind vor andern Invarianten desselben Grades, die sich von ihnen um Verbindungen der niedrigeren Invarianten unterscheiden, dadurch ausgezeichnet, dass sie an der Stelle:

$$Y_1 = 0,\quad Y_2 = 0,\quad Y_3 = 0,\quad Y_4 = 0$$

und also in sämmtlichen Hauptpunkten I. Art (§ 40) von möglichst hoher Ordnung Null werden.

Ausser den aufgeführten Invarianten *geraden* Grades besitzt unsere Gruppe noch eine Invariante *ungeraden*, nämlich *fünfundvierzigsten* Grades: das Product der 45 Linearformen (§ 42, (6), (7)), welche gleich Null gesetzt *Haupträume II. Art* darstellen.

§ 48.

Die Functionaldeterminante der fünf Invarianten geraden Grades.

Für den in § 50 zu führenden Beweis der Vollständigkeit unseres Formensystems ist es nothwendig zu zeigen, dass die 5 *Formen* $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ *von einander unabhängige Functionen der* Y *sind*, m. a. W. dass ihre Functionaldeterminante nicht identisch Null ist. Das aber wird bewiesen sein, sobald wir ein specielles Werthsystem der Y anzugeben im Stande sind, für welches sie einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Zu diesem Zwecke setzen wir (mit der bekannten Bezeichnungsweise der Functionaldeterminanten):

$$(1)\quad \begin{pmatrix} J_4 & J_6 & J_8 & J_{10} & J_{12} \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_4 & J_6 & J_8 & J_{10} & J_{12} \\ Y_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

und berechnen die beiden Factoren rechts für:

$$Y_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Der erste Factor wird dabei:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 a_4^{-\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 96 & 0 & 0 \\ 9 a_3 & 0 & 6\sqrt[3]{a_4} & 0 & 0 \\ 0 & -36 a_3 & 0 & 0 & 216 \\ 45 a_3 \sqrt[3]{a_4^2} & 0 & 0 & 54 a_3 & 0 \end{vmatrix} = 2^{12}\, 3^8\, a_3^3\, a_4^{-\frac{2}{3}}.$$

Der zweite Factor wird gleich dem Product aus $3^4 a_4^{\frac{2}{3}}$ in das Differenzenproduct der Y^3; das letztere aber reducirt sich für $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ auf:

$$(3)\quad \frac{1}{4}\sqrt{256 a_4^3 - 27 a_3^4},$$

sodass wir schliesslich erhalten:

Unsere Functionaldeterminante reducirt sich für $Y_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ *auf:*

$$(4)\quad 2^{10}\, 3^{12}\, a_3^3 \sqrt{256 a_4^3 - 27 a_3^4},$$

ist also sicher nicht identisch Null.

Ist aber das erst bewiesen, so kann man, wie folgt, weiter schliessen: Wegen des zweiten Factors in (1) ist die Functionaldeterminante durch $Y_1 - Y_2$ theilbar; wegen ihrer invarianten Natur muss sie also durch J_{45} theilbar sein; da sie aber selbst vom 45. Grad ist, *kann sie sich von* J_{45} *nur durch einen rein numerischen Factor unterscheiden.*

§ 49.

Eine besondere Invariante 40. Grades.

Das Product der 40 Linearformen (§ 40, (4), (5), (6)), welche $=0$ gesetzt Haupträume I. Art darstellen, ist ebenfalls eine Invariante unserer Gruppe. Wir wollen dieselbe mit F_{40} bezeichnen und ihre Beziehungen zu den Formen des § 47 untersuchen. Zu diesem Zwecke verschaffen wir uns eine ganze Function von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, welche durch Y_0 theilbar ist; vermöge ihrer Invarianteneigenschaft muss sie dann durch F_{40} theilbar sein, und es wird sich herausstellen, dass sie sich von F_{40} nur durch einen Zahlenfactor unterscheidet.

Diese Rechnung gestaltet sich nun folgendermassen: Für $Y_0=0$ reduciren sich unsere Invarianten J_n auf gewisse Terme, die wir für den Augenblick ihre „*Leitglieder*" nennen und mit L_n bezeichnen wollen. Da diese 5 Grössen L nur von den 4 Grössen a abhängen, so muss zwischen ihnen eine Relation bestehen, welche auf folgendem Wege durch Elimination der a erhalten werden kann. Wir eliminiren zunächst a_4, indem wir:

$$L_6' = \frac{24 L_{10}}{L_4} = 3a_2 - a_1^2, \tag{1}$$

$$L_{12}' = 2^9 L_{12} - L_4^3 = 2^{11}(-9a_1a_3 + 6a_2^2 - a_1^2a_2) \tag{2}$$

einführen. Hierauf bestimmen wir die von L_6' freien Glieder des Resultats*), indem wir überall $3a_2$ durch a_1^2 ersetzen; dadurch reducirt sich:

$$L_6 \text{ auf } M_6 = 24a_1^2, \tag{3}$$

$$L_{12}' \text{ auf } M_{12} = 2^{11}\left(-9a_1a_3 + \frac{1}{3}a_1^4\right), \tag{4}$$

$$L_{18} \text{ auf } M_{18} = 27a_3^2 - 2a_1^3a_3 + \frac{1}{27}a_1^6. \tag{5}$$

Zwischen diesen Formen M besteht die Relation

$$M_{12}^2 - 2^{19}M_6M_{18} = 0,$$

daraus folgt, dass $L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18}$ durch L_6' theilbar sein muss. In der That findet man:

$$\begin{aligned} L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18} &= 2^{24}L_6'(a_1^3a_3 + 9a_1a_2a_3 - a_2^3 - 27a_3^2) \\ &= 2^{24}L_6'L_{18}'. \end{aligned} \tag{7}$$

Die hierdurch definirte Function L_{18}' wird für $a_1^2 = 3a_2$ mit $-L_{18}$ identisch; daraus folgt dass $L_{18}' + L_{18}$ durch L_6' theilbar sein muss. So fortschliessend findet man:

$$L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18} = -2^{24}L_6'L_{18} + \frac{2^{13}}{3}L_6'^2L_{12}' - \frac{2^{21}}{3^3}L_6'^3L_6 + \frac{2^{24}}{3^3}L_6'^4. \tag{8}$$

---

*) Diese werden uns ohnehin später besonders interessiren, vgl. § 57 a. E.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die gesuchte *Relation zwischen den Leitgliedern* L, wenn wir für L_6' und L_{12}' ihre Werthe setzen und mit L_4^4 multipliciren, in folgender Form:

$$(9)\qquad L_4^4[(2^9 L_{12} - L_4^3)^2 - 2^{19} L_6 L_{18}] + 3\cdot 2^{27} L_4^3 L_{10} L_{18} - 3\cdot 2^{19} L_4^2 L_{10}^2 (2^9 L_{12} - L_4^3) + 2^{30} L_4 L_{10}^3 L_6 - 3\cdot 2^{36} L_{10}^4 = 0$$

oder:

$$(10)\qquad [L_4^2(2^9 L_{12} - L_4^3) - 3\cdot 2^{18} L_{10}^2]^2 - 2^{19}[L_4 L_6 - 3\cdot 2^8 L_{10}]\,[L_4^3 L_{18} - 2^{11} L_{10}^3] = 0.$$

Setzen wir hier in dem auf der linken Seite stehenden Aggregat statt der L wieder die J, so wird der entstehende Ausdruck durch Y_0, also wegen seiner Invariantennatur durch F_{40} theilbar sein müssen. Da er aber selbst vom Grade 40 in den Y ist, so kann er sich von F_{40} nur um einen numerischen Factor unterscheiden; diesen bestimmt man sofort aus dem (rechts nur in J_4^{10} vorkommenden) Glied mit Y_0^{40}. So erhält man*):

$$(11)\qquad 3^{33} F_{40} = [J_4^2(2^9 J_{12} - J_4^3) - 3\cdot 2^{18} J_{10}^2]^2 - 2^{19}[J_4 J_6 - 3\cdot 2^8 J_{10}]\,[J_4^3 J_{18} - 2^{11} J_{10}^3].$$

§ 50.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems.

Nach den in den beiden letzten Paragraphen getroffenen Vorbereitungen kann nunmehr der Beweis für die Vollständigkeit unseres Formensystems ganz ebenso geführt werden, wie ihn Herr Maschke**) für das Formensystem der z geführt hat. Denn zunächst folgt aus dem Ergebniss von § 48, dass für hinlänglich allgemeine Werthe a, b, c, d, e das Gleichungssystem:

$$(1)\qquad J_4 = a,\quad J_6 = b,\quad J_{10} = c,\quad J_{12} = d,\quad J_{18} = e$$

weder zusammenfallende Lösungen besitzen kann, noch unendlich viele. Ferner kann wie folgt bewiesen werden, dass dieses Gleichungssystem auch nicht durch unendlich grosse Werthe der Y befriedigt werden kann: Angenommen, das sei möglich, so müsste es auch möglich sein, das Gleichungssystem:

$$(2)\qquad J_4 = 0,\quad J_6 = 0,\quad J_{10} = 0,\quad J_{12} = 0,\quad J_{18} = 0$$

durch Werthe der Y zu befriedigen, welche nicht sämmtlich 0 sind. Aber für ein Werthsystem der Y, welches den Gleichungen (2) genügt, ist wegen Glchg. (11) des § 49 auch:

---

*) Im Auszug in den Gött. Nachrichten ist Glchg. (8) dementsprechend zu corrigiren.

**) Dieser Ann. Bd. 33, p. 340 ff.

(3) $$F_{40}=0,$$

also muss für ein solches Werthsystem auch mindestens einer der 40 Factoren von F_{40} verschwinden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir annehmen, dieser verschwindende Factor sei Y_0. Aber wenn $Y_0=0$ ist, kann J_4 nicht 0 sein, wenn nicht zugleich eines der 4 andern Y Null ist. Sei etwa neben $Y_0=0$ noch $Y_1=0$, so wird auch $J_{10}=0$, während die 3 andern Gleichungen (2) sich auf:

(4) $$C_6=0,\quad C_6^2-C_{12}=0,\quad C_6^3-3C_6C_{12}+2C_{18}=0$$

reduciren. Diese aber lassen*) keine anderen Lösungen zu als:

(5) $$Y_2=0,\quad Y_3=0,\quad Y_4=0.$$

Es können also die Gleichungen (2) nicht durch von 0 verschiedene und folglich die Gleichungen (1) nicht durch unendlich grosse Werthe der Y befriedigt werden. Halten wir dieses Resultat mit dem zu Beginn des Paragraphen ausgesprochenen zusammen, so ergiebt sich:

Das Gleichungssystem (1) *besitzt für allgemeine Werthe der a, b, c, d, e:*

(4) $$4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 18=51840$$

endliche und von einander verschiedene Lösungen.

Von diesen Lösungen gehen durch die Substitutionen unserer Gruppe G 25920 aus einer von ihnen hervor; die übrigen 25920 erhält man aus diesen durch Anwendnng der Substitution:

(5) $$Y_0'=-Y_0,\quad Y_1'=-Y_1,\quad Y_2'=-Y_2,\quad Y_3'=-Y_3,\quad Y_4'=-Y_4,$$

welche unserer Gruppe G nicht angehört, aber J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18} ungeändert lässt. Hieraus folgt nach dem von Herrn Klein angegebenen, von Herrn Maschke a. a. O. mitgetheilten Schlussverfahren:

Jede rationale Invariante geraden Grades unserer Gruppe G ist eine rationale Function von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, jede rationale Invariante ungeraden Grades das Product einer solchen Function in eine bestimmte Invariante ungeraden Grades — z. B. die § 47 a. E. erwähnte J_{45}.

Beachtet man ferner, dass die sämmtlichen J als rationale Functionen von unabhängig veränderlichen Grössen — eben den Y — dargestellt sind, und dass, wie oben gezeigt, endlichen Werthen der J immer nur endliche Werthe der Y entsprechen, so kann man neben den letzten Satz noch den folgenden stellen:

Jede rationale g a n z e *Invariante geraden Grades unserer Gruppe G ist eine rationale* g a n z e *Function von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, jede*

*) Vgl. Maschke, a. a. O. p. 340 unten.

rationale ganze Invariante ungeraden Grades das Product einer solchen Function in J_{45}.

Insbesondere folgt, dass das Quadrat von J_{45} eine ganze Function:

(6) $$J_{45}^2 = G(J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18})$$

von $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ sein muss.

XI. Abschnitt.

Das Problem der Y und seine Resolventen*).

§ 51.

Einleitende Erörterungen.

Bereits in § 50 war gelegentlich von der Aufgabe die Rede, die Werthe der Y zu berechnen, wenn die Werthe der Invarianten:

(1) $$J_4 = a, \quad J_6 = b, \quad J_{10} = c, \quad J_{12} = d, \quad J_{18} = e$$

gegeben sind. Ist ausserdem noch:

(2) $$J_{45} = f$$

gegeben — natürlich in Uebereinstimmung mit der Relation (6) des § 50 — so besteht das „*Formenproblem der* Y“ eben in der Aufgabe, die Y aus den Gleichungen (1) und (2) zu berechnen. Mit diesem Problem wollen wir uns nunmehr beschäftigen.

Wir fragen zunächst nach der *Anzahl der Lösungen*, welche dieses Problem besitzen mag; dabei betrachten wir natürlich die rechten Seiten von (1), (2) als unbestimmte, nur durch die erwähnte Relation verbundene Grössen. Dann folgt aus den Entwicklungen von § 50:

Das Problem der Y besitzt 25920 *Lösungen. Sie gehen sämmtlich aus einer von ihnen hervor durch Anwendung der* 25920 *linearen Substitutionen der im vorigen Abschnitt discutirten Gruppe* G.

Es repräsentirt also diese Gruppe die *Monodromiegruppe* unseres Problems in Bezug auf a, b, c, d, e, f als Parameter. Die in unsern Formeln (§ 39, (4)) auftretende dritte Einheitswurzel ε**) ist dabei als

*) Für diesen ganzen Abschnitt sind die Begriffsbildungen und Methoden massgebend, welche Herr F. Klein in seinen „*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*“ (Leipzig, Teubner, 1884) niedergelegt hat. Insbesondere vgl. man dort das IV. Cap. des I., sowie das II. und III. Cap. des II. Abschnitts; ferner, was die Weiterführung dieser Ideen betrifft, den Aufsatz: *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen* 6. *und* 7. *Grades* in Bd. 28 dieser Ann., p. 499 ff. (1886).

**) $i\sqrt{3}$ bedarf als dem Rationalitätsbereich von ε angehörig keiner besonderen Erwähnung.

adjungirt vorausgesetzt; sehen wir von dieser Adjunction ab, fragen also nach der *arithmetischen* Gruppe des Problems, so haben wir es mit 51840 Operationen zu thun. Es ist übrigens dies ε für unser Problem eine „natürliche“ Irrationalität.

An die *Einfachheit* der Monodromiegruppe G, auf die bereits § 39 a. E. hingewiesen ist, sei hier abermals erinnert.

§ 52.

Das Gleichungssystem der Y; Reduction des Formenproblems auf dasselbe.

Wir können uns die Bestimmung der Y in der Weise vorgenommen denken, dass zunächst aus den Gleichungen:

(1) $$\frac{J_{10}}{J_4 J_6} = \alpha, \quad \frac{J_{12}}{J_6^2} = \beta, \quad \frac{J_{12}}{J_4^3} = \gamma, \quad \frac{J_{18}}{J_6^3} = \delta$$

(die sich noch in mannigfacher Weise durch andere ersetzen liessen) die *Verhältnisse* der Y bestimmt werden. Diese Aufgabe hat 25920 Lösungen, denn die vier Räume:

(2) $$J_{10} - \alpha J_4 J_6 = 0, \quad J_{12} - \beta J_6^2 = 0, \quad J_{12} - \gamma J_4^3 = 0, \quad J_{18} - \delta J_6^3 = 0$$

schneiden sich in:

$$10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 = 25920$$

Punkten. Aus den Lösungen dieses *Gleichungssystems* müssen*) sich nun die Lösungen des ursprünglich vorgelegten *Formenproblems* — die Werthe der Y selbst — *rational* erhalten lassen, da die homogene Substitutionsgruppe der Y mit der zugehörigen Collineationsgruppe *holoedrisch* isomorph ist (vgl. § 38). Diese Bestimmung wird ermöglicht, wenn wir noch die Form J_{45} mit heranziehen: mit ihrer Hilfe können wir gebrochene Invarianten bilden, welche in den Y vom *ersten* Grad sind, z. B. die folgende:

(4) $$\zeta = \frac{J_{45}}{J_4^{11}}.$$

Ist dann ausser $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch der Werth von ζ gegeben, so können wir die Y selbst folgendermassen berechnen:

Sei eine Lösung des *Gleichungssystems* in der Form bekannt:

(5) $$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4,$$

so wird die entsprechende Lösung des Formenproblems sein:

(6) $$Y_0 = \varrho\eta_0, \quad Y_1 = \varrho\eta_1, \quad Y_2 = \varrho\eta_2, \quad Y_3 = \varrho\eta_3, \quad Y_4 = \varrho\eta_4,$$

wo nur der Factor ϱ noch zu bestimmen ist. Für diesen aber erhalten wir aus (4):

(7) $$\varrho = \zeta \cdot \frac{J_4^{11}(\eta)}{J_{45}(\eta)}.$$

---

*) Vgl. Ikosaeder, p. 124, 220.

Die bei dieser Auflösung benutzten Grössen α, β, γ, δ, ε, ζ sind definirt als rationale Functionen der J; umgekehrt sind aber auch die J rational durch jene Grössen ausdrückbar; wie man unter Benutzung der Relation (6) des § 50 erkennt*).

§ 53.

Resolventen des Problems der Y.

Die Auflösung eines Gleichungs*systems* galt früher wohl als eine wesentlich zusammengesetztere Aufgabe, als die Auflösung einer *einzelnen* Gleichung. Dem entsprechend pflegte man die Untersuchung eines vorgelegten Gleichungssystems damit zu beginnen, dass man aus demselben durch Eliminationsprocesse eine geeignet scheinende Einzelresolvente herausschälte; an diese hatten dann die weiteren Entwicklungen anzuknüpfen. Man war sich zwar darüber klar, dass man auch anders vorgehen könne; aber man hielt dieses Verfahren für das im Allgemeinen zweckmässigste**). In den letzten Jahrzehnten hat sich diese Auffassung geändert; es ist vielleicht nicht überflüssig, das einmal ausdrücklich hervorzuheben, wenn damit auch den speciell algebraischen Untersuchungen Nahestehenden sicherlich nichts neues gesagt ist***). In der That: diejenigen Fragen, welche gegenwärtig im Vordergrund des Interesses stehen: gruppentheoretische Natur der Probleme, Reduction von Problemen mit isomorphen Gruppen auf einander, bezw. auf typische Fundamentalirrationalitäten, Beziehung zu transcendenten Functionen — alle diese lassen sich für ein vorgelegtes Gleichungssystem direct angreifen, ohne dass man dasselbe erst durch eine Einzelresolvente zu ersetzen brauchte.†) Man wird vielmehr††) „zunächst untersuchen, mit welcher kleinsten Variabelnzahl man eine Gruppe homogener linearer Substitutionen construiren kann, die mit der Gruppe des vorgelegten Problems isomorph ist; dann wird man das Formenproblem oder Gleichungssystem aufstellen, welches zu dieser Gruppe gehört, und nun versuchen, jenes Problem auf dieses zu reduciren“. Ist diese kleinste Variabelnzahl *zwei*, so führt dieses Princip in der That auf Einzelresolventen; ist sie grösser, so wird man wohl zu „resolvirenden Gleichungssystemen“ geführt, hat aber

*) Vgl. Ikosaeder, p. 220, Glchgen. (20), (21).

**) Man vgl. die in dieser Hinsicht charakteristischen Bemerkungen in Serret's Handbuch der Algebra, art. 64 a. E.

***) Vgl. etwa Kronecker, Monatsber. der Berliner Acad. 1861, p. 609 und Klein, Ikosaeder p. 86, p. 95.

†) Wie steht es in dieser Hinsicht mit der Absonderung der Wurzeln und ihrer näherungsweisen Berechnung bei Problemen mit numerischen Daten?

††) Klein, Ikosaeder p. 220; vgl. auch die dort citirten früheren Arbeiten desselben, namentlich Bd. 15 dieser Ann., p. 257 (1879).

keine Veranlassung, die Betrachtung einer *einzelnen* resolvirenden Function und der Resolventengleichung, der sie genügt, in den Mittelpunkt der Untersuchung zu stellen. Wenn im Folgenden gleichwohl einige Resolventen des Problems der Y herangezogen werden, so geschieht dies nur, um an frühere Arbeiten Anschluss zu gewinnen; eine weitergehende Bedeutung soll denselben damit nicht zugesprochen werden.

Die explicite Aufstellung der Gleichung, welcher eine bestimmte resolvirende Function genügt, wird im Allgemeinen ziemlich ausgedehnte Rechnungen verlangen. Noch verhältnissmässig am wenigsten wird das der Fall sein, wenn einmal die *Anzahl der Werthe*, welche die Resolventenfunction bei den Operationen der Gruppe annimmt, (der Index der zugehörigen Untergruppe) möglichst klein ist, und wenn zugleich der *Grad der Function in den* Y möglichst niedrig ist; wir mögen etwa das Product beider Werthe als annäherndes Mass der zu erwartenden Weitläufigkeiten betrachten. Sehen wir zu, wie sich in dieser Beziehung bei unserm Problem der Y die Verhältnisse gestalten.

Die Untergruppe von niedrigstem Index, welche uns begegnet ist, war die Gruppe L des § 43, vom Index 27. Dieselbe besass eine Invariante 4. Grades, von der sich aber herausstellte, dass sie zugleich Invariante der Hauptgruppe, also für unsere jetzigen Zwecke nicht geeignet ist. Die nächst höhere Invariante von L war das Product $\eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6$, vom Grade 5; die Coefficienten der Resolventengleichung, welcher dasselbe genügt, steigen also bis zum Grade 135 in den Y an. Ferner hatten wir die Gruppe M des § 44 vom Index 36, und die Gruppe G_0 des § 40, vom Index 40, jede mit einer absoluten Invariante 2. Grades; die Coefficienten der zugehörigen Gleichungen steigen also bis zum Grade 72, bezw. 80. Ueber die beiden letzten Resolventen mögen dementsprechend noch einige Angaben gemacht werden; doch sei nicht unerwähnt gelassen, dass die vorher genannte Resolvente 27. Grades vor ihnen sich dadurch auszeichnet, dass unter ihren Coefficienten auch J_{45} vorkommt, was bei jenen nicht der Fall ist.

§ 54.

Die Resolvente 36. Grades der q.

Von den Wurzeln q unserer Resolvente 36. Grades gehen (vgl. § 44, Glchg. (8)) 9 aus

(1) $$Y_0^2 + 4\varepsilon^\lambda Y_1 Y_2 + 4\varepsilon^{2\lambda} Y_3 Y_4$$

dadurch hervor, dass man Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich vertauscht und für λ jedesmal 0, 1, 2 setzt, die 27 andern aus:

(2) $$-\frac{1}{3}(Y_0^2 + 4 Y_0 \Sigma Y_1 + 4 \Sigma Y_1^2 - 4 \Sigma Y_1 Y_2)$$

dadurch, dass man

$$\begin{array}{llll} Y_1, & Y_2, & Y_3, & Y_4, \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{llll} \varepsilon^\lambda Y_1, & \varepsilon^\mu Y_2, & \varepsilon^\nu Y_3, & \varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_4 \end{array}$$

ersetzt und nun λ, μ, ν unabhängig von einander die Werthe 0, 1, 2 durchlaufen lässt. In den symmetrischen Functionen dieser Grössen fallen dann alle diejenigen Glieder weg, welche von λ, μ, ν abhängen; es bleiben also nur diejenigen Glieder übrig, in welchen nach Herausnahme einer geeigneten Potenz des Products $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ alle Exponenten von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 durch 3 theilbar sind. Die übrigen Glieder braucht man nicht zu berechnen. Es müssen dann diese symmetrischen Functionen *ganze* Functionen von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18} sein (§ 50), sich also aus denjenigen Verbindungen dieser Grössen, welche den entsprechenden Grad in den Y haben, mit Hilfe rein numerischer Coefficienten linear zusammensetzen. So findet man zunächst für die Potenzsummen:

$$(4)\quad \begin{aligned} \Sigma q &= 0, \\ \Sigma q^2 &= 12 J_4, \\ \Sigma q^3 &= 8 J_6, \\ \Sigma q^4 &= \frac{28}{3} J_4^2, \\ \Sigma q^5 &= \frac{80}{9} J_4 J_6 - \frac{1600}{3} J_{10} \end{aligned}$$

und hieraus mit Hilfe der Newton'schen Formeln folgende Gestalt der Anfangsterme der q-Gleichung:

$$(4)\quad q^{36} - 6 J_4 q^{34} - \frac{8}{3} J_6 q^{33} + \frac{47}{3} J_4^2 q^{32} + \left(\frac{128}{9} J_4 J_6 + \frac{320}{3} J_{10}\right) q^{31} + \cdots = 0.$$

§ 55.

Die Resolvente 40. Grades der Y_0^2.

In ganz ähnlicher Weise berechnen sich die Anfangsterme derjenigen Resolvente, deren eine Wurzel Y_0^2 ist. Von den 39 übrigen Wurzeln haben 12 die Form:

$$(1)\quad -\frac{1}{3}\left(Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_\alpha\right)^2,$$

die 27 andern die Form

$$(2)\quad \frac{1}{9}\left(Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_1 + 2\varepsilon^\mu Y_2 + 2\varepsilon^\nu Y_3 + 2\varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_4\right)^2$$

(für $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2$). Für die Wurzelsummen ergiebt sich hier:*)

*) Die Summenzeichen sind wie in § 47 zu verstehen.

$$
\begin{aligned}
&(3) & \Sigma Y_0^2 &= 0;\\
&(4) & 3\Sigma Y_0^4 &= 8Y_0^4 + 64Y_0\Sigma Y_1^3 + 384Y_1Y_2Y_3Y_4\\
&&&= 8J_4;\\
&(5) & 27\Sigma Y_0^6 &= 16Y_0^6 - 320Y_0\Sigma Y_1^3 - 128\Sigma Y_1^6 + 1280\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
&&&\quad + 5760\Sigma Y_0^2Y_1Y_2Y_3Y_4\\
&&&= 16J_6;\\
&(6) & 243\Sigma Y_0^8 &= 280Y_0^8 + 4480Y_0^5\Sigma Y_1^3 + 26880Y_0^4Y_1Y_2Y_3Y_4\\
&&&\quad + 17920Y_0^2\Sigma Y_1^6 + 35840Y_0^2\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
&&&\quad + 215040Y_0\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 + 645120Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2\\
&&&= 280J_4^2;\\
&(7) & 2187\Sigma Y_0^{10} &= 2080Y_0^{10} - 2^3\cdot 3120Y_0^7\Sigma Y_1^3\\
&&&\quad + 2^4\cdot 5040Y_0^6Y_1Y_2Y_3Y_4 - 2^6\cdot 5460Y_0^4\Sigma Y_1^6\\
&&&\quad + 2^6\cdot 4200Y_0^4\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 2^7\cdot 25200Y_0^3\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4\\
&&&\quad + 2^8\cdot 113400Y_0^2Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 2^9\cdot 260Y_0\Sigma Y_1^9\\
&&&\quad + 2^9\cdot 840Y_0\Sigma Y_1^6Y_2^3 + 2^9\cdot 16800Y_0\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3\\
&&&\quad + 2^{10}\cdot 720\Sigma Y_1^7Y_2Y_3Y_4 + 2^{10}\cdot 6300\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4\\
&&&= 2080J_4J_6 + 768000J_{10};\\
&(8) & 19683\Sigma Y_0^{12} &= 20008Y_0^{12} + 144320Y_0^9\Sigma Y_1^3 + 190080Y_0^8Y_1Y_2Y_3Y_4\\
&&&\quad + 4849152Y_0^6\Sigma Y_1^6 + 1182720Y_0^6\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
&&&\quad + 21288960Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 + \cdots\\
&&&= 14760J_4^3 + 5248J_6^2 - 1904640J_{12}.
\end{aligned}
$$

(Die Ausdrücke für ΣY_0^4, ΣY_0^6, ΣY_0^8, ΣY_0^{10} geben zugleich eine Controle der Richtigkeit der in § 47 für J_4, J_6, J_{10} angegebenen Werthe. Für J_{12}, J_{18} würde die Berechnung auf diesem Wege nicht zu empfehlen sein, da man diese Invarianten dabei mit unbequem grossen Zahlencoefficienten multiplicirt erhalten würde, wie schon Formel (8) erkennen lässt).

Aus diesen Werthen der Potenzsummen der Wurzeln ergeben sich die *Anfangsglieder unserer Gleichung* in folgender Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & Y_0^{80} - \frac{4}{3}J_4Y_0^{76} - \frac{16}{81}J_6Y_0^{74} + \frac{146}{243}J_4^2Y_0^{72}\\
& + \frac{1}{2187}(160J_4J_6 - 153600J_{10})\,Y_0^{70}\\
& + \frac{1}{59049}(-8028J_4^3 - 1472J_6^2 + 952320J_{12})\,Y_0^{68}\\
& + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

Was das *absolute Glied* unserer Gleichung betrifft, so ist dasselbe, wie aus den Erörterungen von § 49 hervorgeht, *gleich dem Quadrat der dort in Glchg.* (11) *angegebenen Form* F_{40}. —

Es bleibt noch die Frage übrig, ob die vollständige Lösung einer der Resolventen dieses oder des vorhergehenden Paragraphen eine mit der Lösung „des Problems der Y“ vollkommen äquivalente Aufgabe ist oder nicht. In dieser Beziehung erkennt man ohne Schwierigkeit folgendes: Ist das Problem der Y vorgelegt und hat man dasselbe durch eine der genannten Resolventen ersetzt, so kann man nach Lösung der letzteren auch die einzelnen Y rational bestimmen, indem man zunächst die Verhältnisse der Y als rationale Functionen der Wurzeln der Resolvente und aus diesen die Y selbst wie in § 52 findet. Gehen wir aber von der Gleichung der Y^2 oder der q als gegeben aus, so können diese erst dann auf das Problem der Y^2 zurückgeführt werden, wenn man noch J_{45}, d. h. die Quadratwurzel aus einer bestimmten Funtion ihrer Coefficienten, adjungirt*). Diese Adjunction muss also vorgenommen werden, wenn die beiden Aufgaben als vollkommen äquivalent angesehen werden sollen. Bei der in § 53 a. E. erwähnten Resolvente 27. Grades ist das anders: dort braucht J_{45} nicht erst adjungirt zu werden, da es unter ihren Coefficienten bereits vorkommt**).

XII. Abschnitt.

Beziehungen zur Multiplicatorgleichung.

§ 56.

Allgemeine Erläuterungen.

In den 3 letzten Abschnitten sind die Y als unabhängige Veränderliche betrachtet und als solche den linearen Substitutionen des § 37 unterworfen worden. Wir kehren jetzt zur ursprünglichen Auffassung zurück, indem wir die Y wieder als Functionen der v, τ, p_{12}, ihre Substitutionen als durch lineare Periodentransformationen hervorgebracht ansehen. Auch möge zunächst unter n wieder irgend eine ungerade Primzahl verstanden werden.

Insbesondere wollen wir, um Anschluss an den I. Theil dieser Untersuchungen zu gewinnen, die specielle Voraussetzung:

$$v_1 = v_2 = 0 \tag{1}$$

eintreten lassen. Dabei reducirt sich $Y_0{}^2 = X_{00}^2$ auf:

$$y_0{}^2 = \sqrt[4]{\frac{D}{D^n}} = c^{2(n-1)}\, p_{12}^{n-1}\, \frac{\vartheta^2(0;\, n\tau_{ik})}{\vartheta^{2n}(0;\, \tau_{ik})}, \tag{2}$$

*) Die Sache liegt also hier ganz ebenso, wie bei dem „Problem der A“ und der Jacobi'schen Gleichung 6. Grades. (Ikosaeder p. 224).

**) Vgl. das Verhalten der Resolvente 5. Grades des Problems der A (Ikosaeder p. 226).

also von dem Factor n abgesehen auf eine derjenigen Grössen, welche in I., § 21 ff. als Wurzeln von Multiplicatorgleichungen betrachtet worden sind. Daher muss unsere „Resolvente der Y^2“ (§ 55) für $v_1 = v_2 = 0$ mit jener Multiplicatorgleichung identisch werden; diese Uebereinstimmung wollen wir nun noch im Einzelnen nachweisen.

Zu diesem Zwecke multipliciren wir zunächst alle y mit dem gemeinsamen Nenner und schreiben:

$$(3)\quad (y_{\alpha\beta}) = y_{\alpha\beta}\sqrt[8]{\Delta^n} = c^{-1} p_{12}^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\ \alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\ n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22});$$

die Invarianten, welche aus diesen (y) ebenso gebildet sind, wie die J aus den Y, bezeichnen wir mit (i). Von diesen Invarianten (i) gelten dann ganz dieselben Entwicklungen, welche in I., § 24—26 für die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{D}$ durchgeführt worden sind. Führt man daher wieder die beiden cubischen binären Formen φ, ψ ein, welche in der algebraischen Definition der zur Bildung der $X_{\alpha\beta}$ benutzten (ursprünglichen) Sigma-, resp. Thetafunctionen auftreten*), so kann man folgenden Satz aussprechen:

Jede Invariante (i) ist ein Product aus einer rationalen ganzen symmetrischen Invariante von φ und ψ in eine Potenz von $\sqrt[8]{D}$, deren Exponent β mit dem Grade α der Invariante in den (y) durch die Congruenz

$$\alpha + 5\beta \equiv 0 \pmod{8}$$

verbunden ist. Beim Zusammenrücken der Nullstellen von φ und ψ werden die (i) in der a. a. O. p. 429, 430 näher angegebenen Weise unendlich klein.

Es folgt hieraus und aus den Entwicklungen von (I), dass sich (i_4), (i_6), (i_{10}) bezw. von $D^{\frac{1}{2}}$, $BD^{\frac{1}{4}}$, $BD^{\frac{3}{4}}$ nur je um einen Zahlenfactor unterscheiden können, während (i_{12}) von der Form

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha D + \beta E + \gamma B^2)$$

sein muss. Für (i_{18}) würden wir einen analogen Schluss machen können, wenn in (I) die Entwicklung weit genug durchgeführt wäre.

Zu bemerken ist übrigens, dass die 5 Grössen (i_4), (i_6), (i_{10}), (i_{12}), (i_{18}) nur von den 4 unabhängigen Veränderlichen p_{12}, τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} abhängen; es muss also zwischen ihnen eine Relation bestehen, und es geht aus dem eben Gesagten hervor, dass diese die Form:

$$(4)\qquad \lambda(i_4)(i_6) + \mu(i_{10}) = 0$$

haben muss.

---

*) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 27, p. 437; Grundz. § 24—27.

§ 57.

Reihenentwicklungen der Invarianten.

Um die im vorigen Paragraphen noch unbestimmt gebliebenen numerischen Coefficienten zu bestimmen, bedienen wir uns der Reihenentwicklungen nach Potenzen von p, q, r; die Potenzen von $c\sqrt{p_{12}}$, welche überall noch beizufügen wären, mögen dabei wie in (I) als selbstverständlich weggelassen werden. Man erhält zunächst folgende Entwicklungen der (y):

$$(y_0) = 1 + 2(p^3 + r^3) + \cdots;$$
$$(y_1) = p^{\frac{1}{3}} \{1 + p + r^3(q^2 + q^{-2}) + \cdots\};$$
$$(1) \qquad (y_2) = r^{\frac{1}{3}} \{1 + r + p^3(q^2 + q^{-2}) + \cdots\};$$
$$(y_3) = p^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left\{q^{\frac{2}{3}} + pq^{-\frac{4}{3}} + rq^{-\frac{4}{3}} + prq^{\frac{8}{3}} + \cdots\right\};$$
$$(y_4) = p^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \left\{q^{-\frac{2}{3}} + pq^{\frac{4}{3}} + rq^{\frac{4}{3}} + prq^{-\frac{8}{3}} + \cdots\right\}.$$

(Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind in p, r von höherer als der dritten, bei (y_0) von höherer als der 4. Ordnung). Aus diesen Werthen erhält man für die Invarianten die Entwicklungen:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
(i_4) &= 1 + 8(p + r) + 24(p^2 + r^2) + 32pr + 32(p^3 + r^3) \\
&\quad + 0(p^2r + pr^2) + 24(p^4 + r^4) - 128(p^3r + pr^3) \\
&\quad - 192p^2r^2 + 8prs^2 + \cdots; \\
(i_6) &= 1 - 20(p + r) - 68(p^2 + r^2) + 480pr - 96(p^3 + r^3) \\
&\quad - 400(p^2r + pr^2) - 260(p^4 + r^4) + 0(p^3r + pr^3) \\
&\quad + 784p^2r^2 - 20prs^2 + \cdots; \\
(i_{12}) &= 8pr - 32(p^2r + pr^2) - 32(p^3r + pr^3) + 768p^2r^2 + \cdots; \\
(i_{18}) &= 6p^2r^2 + \cdots;
\end{aligned}
$$

(hier sind die nur durch Punkte angedeuteten Glieder von höherer als der 4. Ordnung in p, r und $s = q + q^{-1}$). Für (i_{10}) dagegen findet man, dass es keine Glieder von vierter oder niedrigerer Ordnung enthält; daraus folgt zunächst:

Die Relation $\big(§ 56, (4)\big)$, *welche zwischen den* 5 *Grössen* (y) *bestehen muss, ist einfach:*

$$(3) \qquad (i_{10}) = 0.$$

Ausserdem aber ergiebt die Vergleichung der Entwicklungen (2) mit den in (I), § 17 enthaltenen die folgenden Gleichungen:

$$(4) \qquad (i_4) = 3^3 D^{\frac{1}{2}}; \quad (i_6) = 3^{\frac{5}{2}} BD^{\frac{1}{4}}; \quad (i_{12}) = 3^4 2^{-5} ED^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man diese Werthe und ausserdem x für $(y_0)^2\sqrt{3}$ in die Gleichung (9) von § 55 ein, so erhält man:

$$(5)\quad \begin{aligned} &x^{40}+*-108D^{\frac{1}{2}}x^{38}-16BD^{\frac{1}{4}}x^{37}+3942Dx^{36}+480BD^{\frac{3}{4}}x^{35}\\ &+D^{\frac{1}{2}}(-216756D-13248B^2+90280E)x^{34}+\cdots=0.\end{aligned}$$

Die 6 ersten Glieder stimmen hier mit der Schlussgleichung von I, § 28 überein, das folgende tritt neu hinzu. Setzt man ferner noch*):

$$(6)\qquad (i_{18})=\frac{3^4\sqrt{3}}{2^{10}}ZD^{\frac{3}{4}},$$

so erhält man für das absolute Glied der x-Gleichung aus § 49, (11) den Werth:

$$(7)\qquad \frac{1}{3^8}D^6\left(3(3^5D-2^4E)^2-2^9BZ\right)^2,$$

was wegen $B=2J^2-9T$ mit dem in (I), § 29 angegebenen Werth übereinstimmt**). Damit ist also auch der oben (4) noch fehlende Werth von (i_{18}) bestimmt.

Durch diese Entwicklungen sind die Resultate von I aufs neue bestätigt.

§ 58.

Die Invariante (i_{45}).

Es bleibt noch übrig, die Invariante (i_{45}) durch die Simultaninvarianten von φ und ψ auszudrücken. Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, dass für $\tau_{11}=\tau_{22}$ $(y_1)-(y_2)$, also auch $(i_{45})=0$ wird. Aus den Entwicklungen von Herrn Bolza***) geht aber hervor, dass für $\tau_{11}=\tau_{22}$ die sechs Grundpunkte von $f=\varphi\psi$ in Involution liegen müssen, und zwar so, dass jedes Paar der Involution sowohl von φ, als von ψ einen Grundpunkt enthält. Nun ist die Bedingung hiefür das Verschwinden einer *alternirenden* Invariante sechsten Grades; die einzige alternirende Invariante sechsten Grades von φ und ψ ist aber nach (I), § 12:

$$(1)\qquad G_6=PS^2-R\Sigma^2.$$

Dieses G_6 (zu irgend einer Potenz erhoben) muss also jedenfalls ein

*) Im Auszug in den Gött. Nachr. steht fälschlich 3^5 statt 3^4.

**) In (I) § 20, Glchg. (5) ist das Vorzeichen von DE zu ändern.

***) *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves*, American Journ. of Mathem. Bd. 10, p. 47 ff. (1887); vgl. insbes. p. 64, 66. (Ein Auszug aus dieser Abhandlung findet sich in Bd. 30 dieser Ann.). — Die Bezeichnung der Verzweigungspunkte und Querschnitte ist in (I) dieselbe wie bei Bolza, nur steht in (I) α_0 für B's α_6.

Factor von (i_{45}) sein; und aus der Irreducibilität dieser letzteren Form im Rationalitätsbereich der Invarianten J folgt, dass sie ausserdem nur noch Potenzen von $\mathfrak{R}$ und D zu Factoren haben kann. Mit Rücksicht auf den Satz von § 56 folgt hieraus, dass (i_{45}) von der Form sein muss:

$$(i_{45}) = c \cdot G_6^{\alpha} \cdot \mathfrak{R}^{\beta} \cdot D^{\gamma + \frac{7}{8}}, \tag{2}$$

unter α, β, γ ganze Zahlen verstanden, die der Gleichung

$$12\alpha + 6\beta + 8\gamma = 38 \tag{3}$$

genügen müssen. Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen, die in Betracht kommen könnten, nämlich:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1$$

und:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

Von diesen kann aber nur die erste hier statthaben; denn aus der zweiten würde sich für (i_{45}) ein Ausdruck ergeben, dessen Quadrat nicht rational und ganz durch (i_4), (i_6), (i_{12}), (i_{18}) ausdrückbar wäre, wie es doch nach § 50 a. E. sein muss. *Es ist also, bis auf einen numerischen Factor,* (i_{45}) *gleich:*

$$(PS^2 - R\Sigma^2) \cdot \mathfrak{R}^3 \cdot D^{\frac{15}{8}}. \tag{4}$$

Damit seien diese Betrachtungen vorläufig abgeschlossen; in einem dritten Theil soll noch die Gruppe der Z behandelt werden.

Göttingen, November 1890.