MÜLLER, W.
Math. Zeitschr. 78, 420–422 (1962)

Über eine Ungleichung zwischen den Normen von f, f' und f''

Von
WOLFGANG MÜLLER

Ziel der folgenden Arbeit ist der

SATZ. *Ist $f(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung*

$$(1)\quad \int_a^b f'(x)^2\,dx \leqq \varepsilon \int_a^b f''(x)^2\,dx + K(\varepsilon)\int_a^b f(x)^2\,dx \quad \text{mit} \quad K(\varepsilon) = \frac{24}{(b-a)^2} + \frac{48}{\varepsilon}.$$

Eine analoge Ungleichung wurde von NIRENBERG in [1] auch für den Fall des unendlichen Intervalles bewiesen. Seine Ungleichung ist für den Fall des endlichen Intervalles schwächer als (1), da in [1] nur hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ zugelassen sind und der entsprechende Koeffizient $K(\varepsilon)$ größer ausfällt. Der beste Koeffizient $K(\varepsilon)$ in (1) ist nicht bekannt. HALPERIN und PITT geben in [2] allgemeine Ungleichungen an, die (1) enthalten, allerdings wird dabei nicht auf die explizite Angabe des $K(\varepsilon)$ eingegangen.

Zum Beweis werden zwei elementare Ungleichungen benutzt:

I. Ist $f(x)$ in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ einmal stetig differenzierbar, so gilt mit der Setzung $|f'(x_1)| = \underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\mathrm{Min}} |f'(x)|$

$$(2)\qquad \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \geqq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} f'(x_1)^2.$$

II. Ist $f(x)$ in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt mit $|f'(x_1)| = \underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\mathrm{Min}} |f'(x)|$ und $|f'(x_2)| = \underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\mathrm{Max}} |f'(x)|$

$$(3)\qquad \int_\alpha^\beta f''(x)^2\,dx \geqq \frac{1}{\beta-\alpha}\left(f'(x_2) - f'(x_1)\right)^2.$$

Beweis zu I. Mit der Setzung $|f(x_3)| = \underset{\alpha \leqq x \leqq \beta}{\mathrm{Min}} |f(x)|$ folgt aus dem Mittelwertsatz

$$f(x) = f(x_3) + (x - x_3)\, f'(\xi), \qquad \xi = x_3 + \Theta(x - x_3), \qquad 0 \leqq \Theta \leqq 1,$$

daß $f(x_3)$ und $(x - x_3)\, f'(\xi)$ nicht verschiedenes Vorzeichen haben. Daher ist

$$f(x)^2 \geqq (x - x_3)^2 f'(\xi)^2 \geqq (x - x_3)^2 f'(x_1)^2$$

und

$$\int_\alpha^\beta f(x)^2\,dx \geqq f'(x_1)^2 \int_\alpha^\beta (x - x_3)^2\,dx \geqq f'(x_1)^2 \int_\alpha^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} f'(x_1)^2.$$

Beweis zu II. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f''(x)^2\,dx \geqq (x_2-x_1)\int_{x_1}^{x_2} f''(x)^2\,dx \geqq \left(\int_{x_1}^{x_2} f''(x)\,dx\right)^2 = \big(f'(x_2)-f'(x_1)\big)^2.$$

Beweis des Satzes. O. B. d. A. setze man $a=0$ und $b=1$. Denn die Substitution $\xi=\frac{x-a}{b-a}$ zeigt für alle in den betrachteten Intervallen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $g(\xi)=f(x)$:

$$(4)\quad \begin{cases} \text{Aus} & \int_0^1 g'(\xi)^2 d\xi \leqq c_1\int_0^1 g''(\xi)^2 d\xi + c_2\int_0^1 g(\xi)^2 d\xi \\ \text{folgt} & \int_a^b f'(x)^2\,dx \leqq c_1(b-a)^2\int_a^b f''(x)^2 dx + \frac{c_2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)^2\,dx. \end{cases}$$

Das Intervall $[0, 1]$ werde in n gleichlange Teile zerlegt. Für jedes Teilintervall $[\alpha, \beta]$ gilt

$$0 \leqq \left(\sqrt{c-1}\,f'(x_2) - \frac{c}{\sqrt{c-1}}\,f'(x_1)\right)^2, \qquad c>1$$

und daher

$$(\beta-\alpha)\,f'(x_2)^2 \leqq c(\beta-\alpha)\,\big(f'(x_2)-f'(x_1)\big)^2 + \frac{c}{c-1}\,(\beta-\alpha)\,f'(x_1)^2$$

$$\int_\alpha^\beta f'(x)^2\,dx \leqq c(\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta f''(x)^2 dx + \frac{12}{(\beta-\alpha)^2}\,\frac{c}{c-1}\int_\alpha^\beta f(x)^2\,dx \quad \text{nach (2) u. (3).}$$

Wegen $\beta-\alpha=1/n$ folgt durch Aufsummieren über alle Teilintervalle

$$\int_0^1 f'(x)^2\,dx \leqq \frac{c}{n^2}\int_0^1 f''(x)^2\,dx + 12n^2\frac{c}{c-1}\int_0^1 f(x)^2\,dx, \qquad c>1.$$

Setzt man $c/n^2=\varepsilon$, so ist

$$\int_0^1 f'(x)^2\,dx \leqq \varepsilon\int_0^1 f''(x)^2 dx + \frac{12}{\varepsilon}\,\frac{(n^2\varepsilon)^2}{n^2\varepsilon-1}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

und es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß es zu jedem $\varepsilon>0$ ein n gibt, so daß $n^2\varepsilon>1$ und

$$\frac{(n^2\varepsilon)^2}{n^2\varepsilon-1} \leqq 4+2\varepsilon$$

ist, oder

$$\frac{\gamma^2\varepsilon^2-4\gamma\varepsilon+4+2\varepsilon-2\gamma\varepsilon^2}{\gamma\varepsilon-1} \leqq 0$$

für mindestens ein $\gamma=n^2$. Für jedes feste ε ist das quadratische Polynom des Zählers und damit der Bruch für beliebig reelles γ zwischen den Nullstellen

$$\gamma_1 = 1+\frac{2}{\varepsilon}-\sqrt{1+\frac{2}{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = 1+\frac{2}{\varepsilon}+\sqrt{1+\frac{2}{\varepsilon}}$$

negativ, weil der Faktor von γ^2 positiv und

$$\gamma\,\varepsilon - 1 > 0$$

ist. Es genügt daher zu zeigen, daß zwischen den Nullstellen γ_1, γ_2 das Quadrat einer ganzen Zahl liegt, und dazu reicht hin, daß $\sqrt{\gamma_2} - \sqrt{\gamma_1} > 1$ ist. Die Nullstellen sind von der Form $x^2 - x$ bzw. $x^2 + x$ mit $x > 1$. Da $\frac{d}{dy}\sqrt{y}$ monoton fällt, ist

$$\sqrt{y_2 + a} - \sqrt{y_2} < \sqrt{y_1 + a} - \sqrt{y_1} \quad \text{für} \quad y_1 < y_2, \quad a > 0.$$

Also gilt für die Differenz der Wurzeln aus den Nullstellen

$$\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} > \sqrt{x^2 + x + \tfrac{1}{4}} - \sqrt{x^2 - x + \tfrac{1}{4}} = 1, \qquad x > 1.$$

Unter Beachtung von (4) ist damit der Satz für beliebige endliche Intervalle bewiesen.

Die gegebene Beweisführung läßt sich auf die Ungleichung

$$\int_a^b |f'(x)|^p\,dx \leqq \varepsilon \int_a^b |f''(x)|^p\,dx + K(\varepsilon, p) \int_a^b |f(x)|^p\,dx \qquad 1 \leqq p < \infty$$

ausdehnen.

Literatur

[1] Nirenberg, L.: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Appendix. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 649—675 (1955).

[2] Halperin, I., and H. R. Pitt: Integral inequalities connected with differential operators. Duke Math. J. **4**, 613—625 (1938).

Berlin-Tempelhof, Arnulfstr. 66

(Eingegangen am 11. November 1961)