Zur effektiven Stabilität des Mondes.

Von

Aurel Wintner in Leipzig, z. Z.*) in Kopenhagen.

Die Regularisierungstheorie des restringierten Dreikörperproblems ist von Thiele[1]) begründet, von den Herren Burrau[2]), Levi-Civita[3]),[4]) und Birkhoff[5]),[6]) näher ausgebaut worden und liegt — in der Thieleschen Fassung — den Strömgrenschen numerischen Untersuchungen[7]) über massennahe Bahnformen zugrunde[8]). In dieser Arbeit sollen zunächst gewisse Verallgemeinerungen der Transformationen von Thiele-Burrau bzw. Levi-Civita-Birkhoff untersucht werden. Auf Grund einer dieser verallgemeinerten und übrigens völlig expliziten Transformationen gelingt sodann der Nachweis, daß das restringierte Dreikörperproblem in einen Dirichletschen (konservativen) regulären Oszillator verwandelt werden kann, der zwei kanonische Freiheitsgrade und an Stelle der Massensingularität eine stabile Gleichgewichtslage hat. Die massennahen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems gehen dabei in Schwingungen um diese stabile Gleichgewichtslage über. — Es handelt sich nicht nur um periodische Lösungen, sondern um die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen, vor allem im Innern einer Hillschen Grenzkurve, wie im Falle des Erdmondes.

§ 1.

Die isotherme Transformation.

Die totale Differentiation nach der Zeit t soll mit einem Akzent, die totale Differentiation nach einer später einzuführenden Zeitvariable ψ mit einem Punkt, endlich die partielle Differentiation nach einer Variable x mit dem Zeiger $_x$ bezeichnet werden:

$$(1) \qquad x' = \frac{dx}{dt}, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{d\psi}, \qquad A_x = \frac{\partial A}{\partial x}.$$

*) Fellow of the Rockefeller Foundation.

1) N. Thiele, Astr. Nachr. 138 (1895), S. 1 ff. [für $\mu = \frac{1}{2}$].

2) C. Burrau, Vierteljahrsschr. d. Astr. Gesellsch. 41 (1906), S. 261 ff. [für beliebiges μ].

3) T. Levi-Civita, Acta Math. 30 (1906), S. 305 ff.

4) T. Levi-Civita, Rend. della R. Accad. dei Lincei (5) 24 II (1916), S. 553 ff.

5) G. D. Birkhoff, Rend. Circ. Mat. Palermo 39 (1915), S. 265 ff.

6) G. D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), S. 202 ff.

7) E. Strömgren, Tre Aartier Celest Mekanik paa Københavns Observatorium, Kopenhagen 1923, Kapitel V und Anhang.

8) Vgl. auch H. C. Plummer, Proc. of the Royal Irish Acad. 32 A (1914), Nr. 2, S. 7 ff.

Die Koordinaten des restringierten Planeten sollen auf das um den Schwerpunkt rotierende Achsenkreuz (ξ, η) bezogen sein, dessen ξ-Achse die Syzigienachse und dessen Ursprung der Schwerpunkt ist. Die Masseneinheit sei die Summe der beiden anziehenden Massen, die also mit μ und $1-\mu$ bezeichnet werden können $(0<\mu<1)$, und zwar sei die Bezeichnung derart gewählt, daß die Masse $1-\mu$ rechts, also die Masse μ links von dem Schwerpunkt liegt. Wird dann die Entfernung der beiden Massen (d. i. der Radius der Jupiterbahn in dem siderischen heliozentrischen Achsenkreuz) zur Längeneinheit gewählt, so sind die Koordinaten der beiden (in dem rotierenden Achsenkreuz ruhenden) Massen offenbar

$$\begin{array}{lll} 1-\mu: & \xi=\mu, & \eta=0 \\ \mu\ \ : & \xi=\mu-1, & \eta=0 \end{array} \qquad (0<\mu<1). \tag{2}$$

Wird endlich die Zeiteinheit dadurch festgelegt, daß die siderische Umlaufszeit dieser beiden Massen um den Schwerpunkt gleich 2π wird (d. h. die siderische Drehgeschwindigkeit der Syzigienachse gleich 1 ist), so ist nach dem dritten Keplerschen Gesetz auch die Gravitationskonstante gleich 1. Die Bewegungsgleichungen des restringierten Planeten sind dann unter Benutzung der Schreibweise (1) offenbar

$$\xi''=2\eta'+\xi+\Gamma_\xi, \qquad \eta''=-2\xi'+\eta+\Gamma_\eta \tag{3}$$

mit dem Jacobischen Integral

$$\tfrac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2)-\tfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)-\Gamma(\xi,\eta)=C, \tag{4}$$

wobei [vgl. (2)]

$$\Gamma=\Gamma(\xi,\eta)=\frac{1-\mu}{\left|\sqrt{(\xi-\mu)^2+\eta^2}\right|}+\frac{\mu}{\left|\sqrt{(\xi-\mu+1)^2+\eta^2}\right|} \tag{5}$$

das Gravitationspotential, $\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$ das Zentrifugalpotential bedeutet und die aus dem Energieintegral (4) herausfallende Corioliskraft $(2\eta', -2\xi')$ das „Scheringsche Potential" $\xi\eta'-\eta\xi'$ besitzt, so daß eine (von t unabhängige) Lagrangesche Funktion L existiert:

$$L=\tfrac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2)+(\xi\eta'-\eta\xi')+\tfrac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)+\Gamma(\xi,\eta), \tag{6'}$$

d. h.

$$L=L(\xi,\eta,\xi',\eta')=\tfrac{1}{2}[(\xi'-\eta)^2+(\eta'+\xi)^2]+\Gamma(\xi,\eta), \tag{6}$$

mit deren Hilfe (3) in der Gestalt [vgl. (1)]

$$(L_{\xi'})'-L_\xi=0, \qquad (L_{\eta'})'-L_\eta=0, \tag{7}$$

d. h. [9])

$$\delta\int_0^t L(\xi,\eta,\xi',\eta')\,d\tau=0, \tag{7a}$$

[9]) In (7a) (sowie in (34)) sind die Integrationsgrenzen sowie die Anfangs- und Endwerte der Koordinaten festzuhalten.

also auch in der Hamiltonschen kanonischen Form geschrieben werden kann[10]). Von (7) kann man nämlich zu einem kanonischen System

(8) $\xi' = H_X, \ X' = -H_\xi; \quad \eta' = H_Y, \ Y' = -H_\eta; \quad H = H(\xi, \eta, X, Y)$

mit dem Energieintegral

(9) $$H = H(\xi, \eta, X, Y) = C$$

bekanntlich dadurch übergehen, daß man an Stelle der Geschwindigkeiten ξ', η' die Impulse

(10) $$X = L_{\xi'}, \quad Y = L_{\eta'}$$

einführt, im Rahmen der Legendreschen Transformation

(11) $$H = \xi' L_{\xi'} + \eta' L_{\eta'} - L$$

setzt und die Funktion (11) der Koordinaten und der Geschwindigkeiten vermöge (10) als eine Funktion der Koordinaten und der Impulse ausdrückt. Zu diesem Ende braucht man aber nur zu beachten, daß nach (10) und (6)

(10)′ $$X = \xi' - \eta, \quad Y = \eta' + \xi,$$

also einerseits nach (10), (10)′

(11a) $$\xi' L_{\xi'} + \eta' L_{\eta'} = (X^2 + Y^2) - (\xi Y - \eta X),$$

und andererseits nach (6), (10)′

(11b) $$L = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \Gamma(\xi, \eta),$$

also endlich nach (11), (11a), (11b)

(12) $$H = H(\xi, \eta, X, Y) = \tfrac{1}{2}(X^2 + Y^2) - (\xi Y - \eta X) - \Gamma(\xi, \eta)$$

ist.

Wir wollen sagen, die Variablenvertauschung

(13) $$(\xi, \eta, X, Y) \longleftrightarrow (u, v, U, V)$$

sei eine konservative Liesche Punkttransformation, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Die Transformationsformeln, welche von den alten Variablen (ξ, η, X, Y) zu den neuen (u, v, U, V) überführen, enthalten weder t noch Differentiale, und drückt man $H = H(\xi, \eta, X, Y)$ vermöge der Transformationsformeln als Funktion der neuen Variablen aus und bezeichnet man die so entstehende Funktion der neuen Variablen mit $\overline{H}$, setzt man m. a. W.

(14) $$\overline{H}(u, v, U, V) = H(\xi, \eta, X, Y),$$

[10]) Die hier und später benutzten Methoden der analytischen Mechanik findet man z. B. in dem bekannten Lehrbuch von Whittaker.

so geht (8), auf die neuen Variablen umgerechnet, in

(15) $u' = \overline{H}_U, \quad U' = -\overline{H}_u; \quad v' = \overline{H}_V, \quad V' = -\overline{H}_v; \quad \overline{H} = \overline{H}(u, v, U, V),$

also (9) in

(16) $$\overline{H}(u, v, U, V) = C$$

über. Damit nun eine konservative Punkttransformation (13) eine solche Berührungstransformation ist, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die Pfaffsche Form

(17) $$X d\xi + Y d\eta - U du - V dv$$

vermöge der Transformationsformeln das vollständige Differential einer Funktion $S = S(\xi, \eta, u, v)$ der Koordinaten wird. Insbesondere ist also hinreichend, daß die Pfaffsche Form $X d\xi + Y d\eta$ eine Invariante der Transformation darstellt; denn gilt

(17)′ $$X d\xi + Y d\eta = U du + V dv,$$

so ist (17) das vollständige Differential der Funktion $S(\xi, \eta, u, v) \equiv 0$. Handelt es sich insbesondere um eine Transformation, welche die Koordinatenpaare (ξ, η), (u, v) auf eine von den Impulsen (X, Y) bzw. (U, V) unabhängige Weise aufeinander bezieht:

(13*) $$(\xi, \eta) \leftrightarrow (u, v)$$

(während umgekehrt die Transformationsformeln der Impulse auch die Koordinaten enthalten dürfen), so geht (17)′ unter Benutzung der Schreibweise (1) in

(17*) $$X \xi_u + Y \eta_u = U, \quad X \xi_v + Y \eta_v = V$$

über. D. h. wird die Variablenvertauschung (13) nach (13*), (17*) vorgenommen, so geht (8) unter Benutzung von (14) in (15) über. Dabei soll die Abbildung der (u, v)-Ebene auf die (ξ, η)-Ebene stetig differentiierbar sein und einen höchstens in isolierten Punkten verschwindenden Abbildungsmodul

(18) $$D = D(u, v) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix}$$

haben. Wir wollen ein für allemal annehmen, daß die Abbildung der (u, v)-Ebene auf die (ξ, η)-Ebene eindeutig ist; die inverse Abbildung wird aber im allgemeinen nur „im kleinen", und auch „im kleinen" nur in der Umgebung derjenigen Punkte eindeutig sein, für welche (18) nicht verschwindet. — Nehmen wir nun mit Levi-Civita[4]) an, daß die stetig differentiierbare Abbildung der (u, v)-Ebene auf die (ξ, η)-Ebene konform ist, genauer, daß durchweg

(19) $$\xi_u = \eta_v, \quad \xi_v = -\eta_u$$

gilt, also die Abbildung durch eine ganze Funktion

(20) $$\xi + i\eta = f(u + iv), \quad \text{kurz } \zeta = f(w)$$

geleistet wird und demnach nur an den Nullstellen des Abbildungsmoduls (18), der nach (19), (20) in

(21) $$D = |f^{(1)}(u + iv)|^2 \qquad \left(f^{(1)} = \frac{df}{dw}\right)$$

übergeht, nicht winkeltreu ist. Die Auflösung von (17*) ist nach (18) allgemein

(17*)' $$X \cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u \\ V & \eta_v \end{vmatrix}, \quad Y \cdot D = \begin{vmatrix} \xi_u & U \\ \xi_v & V \end{vmatrix},$$

also in dem Cauchy-Riemannschen Falle (19)

(13**) $$X \cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u \\ V & \xi_u \end{vmatrix}, \quad Y \cdot D = \begin{vmatrix} U & -\xi_u \\ V & \eta_u \end{vmatrix}, \quad \text{also} \quad (X + iY) \cdot D = \begin{vmatrix} U & \eta_u - i\xi_u \\ V & -\xi_u - i\eta_u \end{vmatrix},$$

d. h. wegen $\xi_u + i\eta_u = f^{(1)}(u + iv)$

$$(X + iY) \cdot D = f^{(1)}(u + iv) \cdot \begin{vmatrix} U & -i \\ V & 1 \end{vmatrix},$$

also endlich nach (21)

(22) $$X + iY = \frac{f^{(1)}(u+iv)}{|f^{(1)}(u+iv)|^2}(U + iV).$$

[Herr Levi-Civita [1]) gibt

(22)' $$X + iY = \frac{1}{f^{(1)}(u - iv)}(U + iV)$$

an; dies steht im Einklang mit (22), da Herr Levi-Civita stillschweigend annimmt, daß

(23) $$f(u + iv)\, f(u - iv) = |f(u + iv)|^2$$

gilt, d. h. daß $f(w)$ in konjugiert komplexen Punkten konjugiert komplexe Werte besitzt. Die Betrachtung solcher Abbildungsfunktionen ist sowieso sinngemäß, da das Feld der konservativen, d. h. Gravitations- und Zentrifugalkräfte symmetrisch ist in bezug auf die Syzigienachse $\eta = 0$.] Zusammenfassend können wir sagen, daß die durch (20) und (22) definierte reelle Punkttransformation (13) des Phasenraumes eine Berührungstransformation ist, d. h. (8) in (15) überführt. Dabei ist nach (18), (21) und (22)

(24) $$|d\xi \cdot d\eta| : |du \cdot dv| = |f^{(1)}(u + iv)|^2, \quad |dX \cdot dY| : |dU \cdot dV| = |f^{(1)}(u + iv)|^2,$$

d. h. das Flächenelement sowohl der Koordinatenebene als auch der Impulsebene erhält durch den Übergang von den alten zu den neuen Variablen den Faktor $|f^{(1)}(u + iv)|^{-2}$, es liegt also nahe, auch das Zeitelement mit demselben Abbildungsmodul zu versehen, d. h. analog zu (24) an Stelle der alten Zeit t vermöge der Differentialgleichung $|dt|:|d\psi| = |f^{(1)}(u+iv)|^2$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{|f^{(1)}(u+iv)|^2} \tag{25}$$

eine neue Zeit ψ einzuführen; in (25) sind u und v selbstverständlich als durch (8) definierte Funktionen von t aufzufassen. Dann geht (15) in

$$\begin{aligned} \dot u &= |f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_U, & \dot U &= -|f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_u; \\ \dot v &= |f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_V, & \dot V &= -|f^{(1)}(u+iv)|^2 \overline{H}_v \end{aligned} \tag{26}$$

über, wobei der Punkt, wie bereits unter (1) angegeben, totale Differentiation nach ψ bedeutet. Der Übergang von (26) zu (15) geschieht dadurch, daß man in

$$\frac{dt}{d\psi} = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \tag{25'}$$

u und v diesmal als durch (26) definierte Funktionen von ψ auffaßt und t aus (25)′ als Funktion von ψ durch eine Quadratur bestimmt. Da das Integral (16) von (15) die Zeit t gar nicht enthält, so ist (16) auch für (26) ein Integral. Man kann diesen Umstand dazu benutzen, um (26) *bei gegebener Jacobischer Konstante* C, nämlich durch Einführung der Hamiltonschen Funktion

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}(u, v, U, V; C) = |f^{(1)}(u+iv)|^2 [\overline{H}(u, v, U, V) - C] \tag{27}$$

in der kanonischen Form

$$\dot u = \mathsf{H}_U, \quad \dot U = -\mathsf{H}_u; \quad \dot v = \mathsf{H}_V, \quad \dot V = -\mathsf{H}_v \tag{28}$$

zu schreiben, wie das Herr Levi-Civita [8]) bei seiner quadratischen Abbildung $f(w) = \mu + w^2$ und später bei der Thieleschen Kosinusabbildung [11]) getan hat. Bedeutet nämlich x irgendeine unter den vier Variablen u, v, U, V, so gilt nach (27) identisch

$$\mathsf{H}_x = |f^{(1)}(u+iv)^2|_x \cdot [\overline{H}(u,v,U,V) - C] + |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot \overline{H}_x(u,v,U,V),$$

also mit Rücksicht auf (16) einfach $\mathsf{H}_x = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot \overline{H}_x(u, v, U, V)$, wodurch (26) und (28), wie behauptet, ineinander übergehen. Nur ist zu beachten, daß die „Energiekonstante" $\mathsf{H} =$ konst. von (28) nicht willkürlich ist, sondern wegen (16) und (27) durch die Energiekonstante C von (26) eindeutig bestimmt wird zu

$$\mathsf{H}(u, v, U, V; C) = 0. \tag{29}$$

---

[11]) a. a. O. [4]). Zur Bequemlichkeit des Lesers sei erwähnt, daß Herr Levi-Civita nicht den Schwerpunkt zum Ursprung des rotierenden Achsenkreises wählt, was eine neue „Scheinkraft" und eine Abweichung von den Burrauschen Formeln bedingt (sobald $\mu \neq \frac{1}{2}$ ist).

§ 2.

Das Regularisierungsprinzip im kleinen.

Der Übergang von (8) oder (15) zu (28) bezweckt nun folgendes. Die Hamiltonsche Funktion H von (8), also nach (14) auch die Hamiltonsche Funktion $\overline{H}$ von (15) kann Unendlichkeitsstellen haben. Diese sind bei dem restringierten Dreikörperproblem mit Rücksicht auf (12), (5) die beiden Massen (2). Da nun diese, Singularitäten aufweisende Hamiltonsche Funktion mit Rücksicht auf (27) noch mit dem Abbildungsmodul $|f^{(1)}(u+iv)|^2$ zu multiplizieren ist, bevor man die Hamiltonsche Funktion H von (28) erhält, so kann man durch passende Wahl der Abbildungsfunktion $f(u+iv)$ erreichen, daß die Unendlichkeitsstellen von H bzw. $\overline{H}$ in Nullstellen des Abbildungsmoduls fallen, derart, daß (27) keine Singularitäten mehr besitzt. So setzt Herr Levi-Civita

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \mu + (u+iv)^2, \tag{30}$$

wodurch freilich die Regularisierung nur in einer der beiden Massen (2) erreicht wird, so daß (30) von Herrn Birkhoff durch

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \frac{(u+iv)^2 + \mu(1-\mu)}{2(u+iv)+1-2\mu} \tag{31}$$

ersetzt wurde, und so ist es bei der Kosinusabbildung, die von Euler (Zweizentrenproblem) und Thiele (restringiertes Dreikörperproblem) benutzt wurde und die in den numerischen Untersuchungen auf der Kopenhagener Sternwarte eine fundamentale Rolle spielt. — Allen diesen Transformationen ist es gemein, daß die Ableitung der Funktion $f(w)$ für die zu regularisierende Stelle, wo eine der beiden Massen liegt, nur in der ersten Ordnung verschwindet, d. h. daß in diesen Punkten die Abbildung derart aufhört winkeltreu zu sein, daß sie die Winkel halbiert. Dies ist, wie es sich in unserem allgemeineren Zusammenhang zeigen wird, für numerische Zwecke äußerst wesentlich, indem bereits eine Nullstelle zweiter Ordnung von $f^{(1)}(w)$ jede numerische Extrapolation mit Rücksicht auf eine dadurch bedingte allzu langsame zeitliche Änderung der Koordinaten (unter Zeit die Variable ψ verstanden) vereiteln müßte. Für unsere theoretischen Zwecke sind aber Nullstellen erster Ordnung von $f^{(1)}(w)$ noch ganz unbrauchbar (vgl. weiter unten), ich werde vielmehr, indem ich mich aus Bequemlichkeitsgründen auf Nullstellen ungerader Ordnung für $f^{(1)}(w)$ beschränke,

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \mu + (u+iv)^{2n} \qquad \text{[vgl. (30)]} \tag{32}$$

bzw.

$$\xi + i\eta = f(u+iv) \equiv \frac{\mu(u+iv+1-\mu)^{2n} + (1-\mu)(u+iv-\mu)^{2n}}{(u+iv+1-\mu)^{2n} - (u+iv-\mu)^{2n}} \qquad \text{[vgl. (31)]} \tag{33}$$

zu setzen haben und dabei die positive ganze Zahl n völlig beliebig, nur eben nicht gleich 1 wählen können, und entsprechend kann man auch die Thielesche Transformation von $n = 1$ auf $n \geqq 2$ übertragen.

Es sei noch erwähnt[12]), daß (28) in der Lagrangeschen Form

$$(34) \qquad (\Lambda_{\dot u})^{\cdot} - \Lambda_u = 0, \quad (\Lambda_{\dot v})^{\cdot} - \Lambda_v = 0, \quad \text{d. h.}\ \delta \int_0^{\psi} \Lambda\, d\tau = 0$$

mit

$$(35) \qquad \Lambda = \Lambda(u, v, \dot u, \dot v; C),$$

die in dem Thieleschen Spezialfall den Kopenhagener Rechnungen in massennahen Fällen zugrunde liegt, bei beliebiger Abbildung von Herrn Plummer und von ihm unabhängig und mit ihm und mit den Untersuchungen von Herrn Levi-Civita ungefähr gleichzeitig von Herrn Birkhoff gefunden worden ist. Herr Plummer rechnet einfach (7) auf die neuen Variablen $u, v; \psi$ um, Herr Birkhoff benutzt zuerst die natürlichen Gleichungen und sodann das Hamiltonsche Prinzip (7a). Mit Rücksicht auf den involutorischen Charakter der Legendreschen Transformation, welche die Lagrangeschen Gleichungen in die Hamiltonschen überführt [vgl. S. 677], sind freilich (28) und (34) völlig äquivalente Schreibweisen. — Die explizite Gestalt von (34) ist bei beliebiger Abbildungsfunktion $f(w)$

$$(34\text{a})' \qquad \ddot u - 2\,|f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot \dot v = \Omega_u, \qquad \ddot v + 2\,|f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot \dot u = \Omega_v,$$

mit dem Jacobischen Integral

$$(34\text{b})' \qquad \tfrac{1}{2}(\dot u^2 + \dot v^2) - \Omega(u, v; C) = 0,$$

wobei das regularisierte Potential

$$(35)' \qquad \Omega = \Omega(u, v; C) \equiv |f^{(1)}(u + iv)|^2 \cdot [\tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \Gamma(\xi, \eta) - C]$$

der konservativen, d. h. Zentrifugal- und Gravitationskräfte vermöge (20) als Funktion der neuen Koordinaten u, v aufzufassen ist.

In der Literatur sind, wie erwähnt, nur die folgenden drei Abbildungen verwertet worden: 1. Die Levi-Civitasche Abbildung (30), die die Regularisierung nur in einer der beiden Massen (2), nämlich in

$$(36) \qquad 1 - \mu: \quad \xi = \mu, \quad \eta = 0$$

leistet; 2. die Birkhoffsche Abbildung (31), die auch die andere Masse berücksichtigt, ebenso wie 3. die Euler-Thielesche Kosinusabbildung, auf welche ich weiter unten ausführlich zurückkomme. Da bei allen diesen Abbildungen die erste Ableitung der Abbildungsfunktion in der zu regularisierenden Masse nur in der ersten Ordnung verschwindet, da ferner es auf die Werte der höheren Ableitungen von der ersten nicht verschwindenden Ableitung

[12]) Wegen Literatur vgl. weiter unten.

an gar nicht ankommt, da endlich die Umgebung der Masse

$$(37) \qquad \mu: \quad \xi = \mu - 1, \quad \eta = 0$$

durch die Abbildung

$$(38) \qquad \xi + i\eta = f(u + iv) = \mu - 1 + (u + iv)^2$$

genau so regularisiert wird wie die Umgebung von (36) durch (30), so können wir uns zunächst auf die Abbildung (32) beschränken, welche zu (36) gehört; die zu (37) gehörige Abbildung

$$(39) \qquad \xi + i\eta = f(u + iv) = \mu - 1 + (u + iv)^{2n}$$

braucht doch dann nicht besonders untersucht zu werden, und die Abbildung

$$(40) \qquad \frac{\xi + i\eta + 1 - \mu}{\xi + i\eta - \mu} = \left(\frac{u + iv + 1 - \mu}{u + iv - \mu}\right)^{2n},$$

die mit (33) identisch ist und in dem Spezialfall $n = 1$ in (31) übergeht, leistet gleichzeitig für die beiden Massen (36), (37) dasselbe, wie (32) für (36) oder (39) für (37), indem die ν-te Ableitung $f^{(\nu)}$ für beide Massen verschwindet, wenn $1 \leqq \nu \leqq 2n - 1$ ist, nicht aber für $\nu = 2n$. Nach demselben Prinzip können wir von (32) zu einer zu beliebigem $n \geqq 1$ gehörigen Abbildung übergehen, die durch eine ganze Funktion geliefert wird.

Zur Orientierung sei nur die Thiele-Burrausche Transformation

$$\xi + i\eta = f(u + iv) \equiv \mu - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(u + iv)$$

erwähnt, bei welcher also n noch $= 1$ ist und die offenbar nur eine Schreibweise für elliptische oder bipolare Koordinaten darstellt. Die Ableitung ist $-\frac{1}{2}\sin(u + iv)$, verschwindet also nur für $u = k\pi$, $v = 0$, und zwar von der ersten Ordnung, und für gerade k ist

$$\xi + i\eta = f(k\pi + i.0) = \mu, \qquad \text{d. h. } \xi = \mu, \ \eta = 0,$$

für ungerade k aber

$$\xi + i\eta = f(k\pi + i.0) = \mu - 1, \quad \text{d. h. } \xi = \mu - 1, \ \eta = 0$$

entsprechend den beiden Massen (37), (36), womit alles erreicht ist. — Es ist zu beachten, daß die Breite des Periodizitätsstreifens 2π, die Breite des Fundamentalstreifens, worauf die (ξ, η)-Ebene eineindeutig bezogen ist, nur π beträgt. Der räumlichen Periodizität zufolge braucht eine in der (ξ, η)-Ebene geschlossene Kurve, d. h. eine periodische Lösung, in der (u, v)-Ebene nicht notwendig geschlossen zu sein[13]). In den Punkten $\xi + i\eta = k\pi$, d. h. in den Massen, werden die Winkel halbiert (vgl. hierzu

[13]) Dies ist z. B. der Fall, wie man sich leicht überzeugt, bei den Kopenhagener Gruppen l und m (die in Betracht kommenden kreisähnlichen großen, also nicht massennahen Bahnen sind natürlich nicht in elliptischen Koordinaten, sondern in (ξ, η) berechnet worden).

S. 693 weiter unten), sonst ist die Abbildung konform. Über die Regularisierung im großen mittels der Thieleschen Transformation vgl. S. 689 bzw. S. 693 weiter unten. Bewegt sich das Thielesche ψ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die ganze t-Achse, was keinesfalls selbstverständlich ist, und ausschließlich darauf beruht, daß $n=1$ gewählt ist. Vgl. S. 696.

§ 3.
Die normierte Transformation.

Wir haben also zunächst die regularisierende Hamiltonsche Funktion H für den Fall der *normierten* Abbildung (32) auszurechnen, wobei n eine beliebig gewählte positive ganze Zahl ist (der Levi-Civitasche Grenzfall $n=1$ soll also nicht ausgeschlossen werden), die wir als einen irgendwie fest gewählten Parameter aufzufassen haben. Nach (27), (14), (12) ist

$$\text{(41)} \qquad \mathsf{H} = |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot [\tfrac{1}{2}(X^2+Y^2) - (\xi Y - \eta X) - \Gamma(\xi, \eta) - C],$$

und wir haben in (41) vermöge (32) und (22) [d. i. (22)′] die Variablenvertauschung (13) vorzunehmen, um die Funktion (27) zu erhalten. — Zunächst ist nach (32)

$$\text{(42)} \qquad f^{(1)}(u+iv) = 2n(u+iv)^{2n-1},$$

also

$$\text{(43)} \qquad |f^{(1)}(u+iv)|^2 = 4n^2(u^2+v^2)^{2n-1},$$

und nach (32) und (5)

$$\Gamma = \frac{1-\mu}{(u^2+v^2)^n} + \frac{\mu}{|1+u+iv|^{2n}},$$

d. h. nach (43)

$$\text{(44)} \quad \Gamma \cdot |f^{(1)}(u+iv)|^2 = 4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1} + 4n^2\mu(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{P}(u,v)$$

[unter

$$\text{(45)} \qquad \mathfrak{P}(u,v) = \frac{1}{|1+u+iv|^{2n}}; \qquad \mathfrak{P}(0,0) = 1$$

eine in der Umgebung

$$\text{(46)} \qquad -\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$$

der zu regularisierenden Masse

$$\text{(47)} \qquad 1-\mu: \quad u=0, \quad v=0 \qquad \text{(vgl. (32) mit (36))}$$

gewiß konvergente (reelle) Potenzreihe verstanden], ferner nach (22)

$$\text{(48)} \qquad |f^{(1)}(u+iv)|^2 \cdot \tfrac{1}{2}(X^2+Y^2) = \tfrac{1}{2}(U^2+V^2)$$

und, wenn in (22) [unter $\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}(u,v)$ und $\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}(u,v)$ zwei reelle binäre ganze Formen mit dem Homogenitätsgrad $2n-1$ verstanden] mit

Rücksicht auf (42)

$$f^{(1)}(u+iv)=\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}+i\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]} \tag{49}$$

gesetzt wird, offenbar auch

$$\begin{aligned} |f^{(1)}(u+iv)|^2\cdot X &= U\,\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}-V\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]},\\ |f^{(1)}(u+iv)|^2\cdot Y &= U\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}+V\,\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}, \end{aligned} \tag{50}$$

ferner nach (32) [unter $\mathfrak{G}_1^{[2n]}(u,v)$ und $\mathfrak{G}_2^{[2n]}(u,v)$ zwei ebensolche Formen mit dem Homogenitätsgrad $2n$ verstanden] ebenso

$$\xi=\mu+\mathfrak{G}_1^{[2n]},\qquad \eta=\mathfrak{G}_2^{[2n]}, \tag{51}$$

also endlich nach (50) und (51) [unter $\mathfrak{F}_1^{[4n-1]}(u,v)$ und $\mathfrak{F}_2^{[4n-1]}(u,v)$ zwei ebensolche Formen mit dem Homogenitätsgrad $4n-1$ verstanden] offenbar

$$|f^{(1)}(u+iv)|^2\cdot(\xi Y-\eta X)=\mu\,U\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}+\mu\,V\,\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}-U\,\mathfrak{F}_2^{[4n-1]}-V\,\mathfrak{F}_1^{[4n-1]}. \tag{52}$$

Setzt man nun (44), (48), (52), (43) in (41) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \mathsf{H}=\frac{1}{2}(U^2+V^2)-4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}-\\ -\{4n^2(u^2+v^2)^{2n-1}(C+\mu\mathfrak{P})+(\mu\,\mathfrak{G}_2^{[2n-1]}-\mathfrak{F}_2^{[4n-1]})\,U+(\mu\,\mathfrak{G}_1^{[2n-1]}-\mathfrak{F}_1^{[4n-1]})\,V\} \end{aligned} \tag{53}$$

wobei der $\{\,\}$-Ausdruck in bezug auf die Koordinaten u, v von höherer Ordnung ist als die in der ersten Zeile von (53) stehenden beiden Terme von H; denn was die (von den Impulsen U, V unabhängigen) mit deutschen Buchstaben bezeichneten fünf Funktionen der Koordinaten anlangt (C ist die Jacobische Konstante), so sind die beiden $\mathfrak{G}$ und die beiden $\mathfrak{F}$ binäre ganze Formen mit dem als oberer Zeiger angegebenem Homogenitätsgrad, und $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}(u,v)$ ist eine für absolut hinreichend kleine Werte der Koordinaten, nämlich in dem Gebiete (46), gewiß reguläre Potenzreihe. Für (53) können wir also

$$\mathsf{H}=\tfrac{1}{2}(U^2+V^2)-4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+\mathsf{P}^{(2n-1)}(u,v;U,V,C,\mu) \tag{54}$$

schreiben, wobei $\mathsf{P}^{(2n-1)}$ eine Potenzreihe von sechs Veränderlichen bedeutet, die in bezug auf U, V, C, μ linear ist, in bezug auf u, v aber mit Gliedern von der $(2n-1)$-ten Ordnung beginnt und in dem Gebiete (46) jedenfalls konvergiert; die beiden in (54) explizit angeschriebenen Hauptterme von H sind hingegen in bezug auf u, v nur von der nullten bzw. von der $(2n-2)$-ten Ordnung, also weniger hoch als $\mathsf{P}^{(2n-1)}$, so daß wir $\mathsf{P}^{(2n-1)}$ später (S. 698) ganz im Rahmen der klassischen Lagrangeschen Störungstheorie als eine Störungsfunktion auffassen werden:

$$\mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\mathsf{P};\quad \mathsf{H}_0=\tfrac{1}{2}(U^2+V^2)-\varkappa(u^2+v^2)^{n-1},\quad \varkappa=4n^2(1-\mu)>0, \tag{55}$$

wobei der Kürze halber

$$(55)' \qquad \mathsf{P} = \mathsf{P}^{(2n-1)}$$

gesetzt ist. — Mit den Bezeichnungen (55) geht übrigens das Energieintegral (29) in

$$(56) \qquad \mathsf{H}_0 \equiv \tfrac{1}{2}(U^2 + V^2) - \varkappa(u^2 + v^2)^{n-1} = -\mathsf{P}^{(2n-1)}(u, v; U, V, C, \mu)$$

über. Da die Potenzreihe $\mathsf{P}^{(2n-1)}(u, v; U, V, C, \mu)$ in dem Variablenpaar U, V nur linear ist, so hängt ihre nach U oder V genommene partielle Ableitung erster Ordnung weder von U noch von V ab, ist also eine in dem Gebiete (46) reguläre und mit Gliedern mindestens $(2n-1)$-ter Ordnung beginnende Potenzreihe ausschließlich in den Koordinaten u, v, enthält also nicht die Impulse, sondern nur die Konstanten C, μ (und auch diese nur linear), so daß mit der dritten Bezeichnung (1)

$$(57) \qquad \mathsf{P}_U^{(2n-1)} = \mathsf{P}_1^{(2n-1)}(u, v); \qquad \mathsf{P}_V^{(2n-1)} = \mathsf{P}_2^{(2n-1)}(u, v)$$

gilt, unter $\mathsf{P}_1^{(2n-1)}$, $\mathsf{P}_2^{(2n-1)}$ Potenzreihen in u, v verstanden, die nicht von den Impulsen, sondern nur von den sowieso fest zu wählenden linearen Parametern C, μ abhängen und mit Gliedern von der Ordnung $2n-1$ (in bezug auf u, v) beginnen. Aus (28), (55), (57) folgt nun

$$(58) \qquad \dot{u} = \mathsf{H}_U \equiv U + \mathsf{P}_1^{(2n-1)}(u, v), \qquad \dot{v} = \mathsf{H}_V \equiv V + \mathsf{P}_2^{(2n-1)}(u, v),$$

so daß der (auf ψ bezogene) Geschwindigkeitsvektor $(\dot{u}, \dot{v})$ sich von dem Impulsvektor (U, V) nur in einem additiven, lediglich von den Koordinaten u, v abhängigen und für $u^2 + v^2 \to 0$ stark gegen Null konvergierenden Vektor $(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2)$ unterscheidet, trotzdem $u^2 + v^2 \to 0$ mit Rücksicht auf (47) den Einsturz in die Masse (36) bedeutet. Da damit das Verhalten der Impulse U, V auf das Verhalten der Geschwindigkeiten $\dot{u}, \dot{v}$ zurückgeführt ist, haben wir noch das massennahe Verhalten von

$$(59) \qquad \sigma = \dot{u}^2 + \dot{v}^2$$

zu untersuchen, und da nach der Lagrangeschen Form (34b)′ des Jacobischen Integrals

$$(60) \qquad \tfrac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = \Omega(u, v; C)$$

ist, so handelt es sich nur darum, die Funktion (35)′ in u, v explizit darzustellen. Nun ist aber nach (32), wenn $\mathfrak{F}^{(2n)}$ die (reelle) Form

$$(61) \qquad \mathfrak{F}^{(2n)}(u, v) = (u + i v)^{2n} + (u - i v)^{2n}$$

$2n$-ten Grades bedeutet,

$$(62) \qquad \xi^2 + \eta^2 = \mu^2 + \mu\, \mathfrak{F}^{(2n)}(u, v) + (u^2 + v^2)^{2n},$$

und aus (35)′, (44), (43), (62) folgt mit Benutzung der unter (55) definierten Konstante $\varkappa$ offenbar

$$(63)\qquad \Omega = \varkappa(u^2+v^2)^{n-1} + (u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{p}(u, v; \mu, C),$$

wobei $\mathfrak{p}$ eine (von den Geschwindigkeiten ebenfalls unabhängige) in dem Gebiete (46) konvergente Potenzreihe bedeutet, so daß nach (60), (63) für $u^2+v^2 \to 0$

$$(64)\qquad \dot{u}^2+\dot{v}^2 = 2\varkappa\cdot(u^2+v^2)^{n-1} + O([u^2+v^2]^{2n-1}),$$

oder nach (58) auch

$$(65)\qquad U^2+V^2 = 2\varkappa\cdot(u^2+v^2)^{n-1} + O([u^2+v^2]^{2n-1})$$

gilt. Führt man noch analog zu dem Geschwindigkeitsquadrat (59) für das Quadrat der Entfernung und für das Impulsquadrat die Abkürzung

$$(66)\qquad \varrho = u^2+v^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (67)\qquad v = U^2+V^2$$

ein, so kann man hierfür kurz auch

$$(65)'\qquad \sigma = 2\varkappa\varrho^{n-1} + O(\varrho^{2n-1}) \qquad \text{bzw.} \qquad (66)'\qquad v = 2\varkappa\varrho^{n-1} + O(\varrho^{2n-1})$$

schreiben, wobei nach (55)

$$(68)\qquad 2\varkappa = 8n^2(1-\mu) > 0 \qquad\qquad (0<\mu<1)$$

ist und die Landauschen Zeichen sich auf $\varrho \to 0$, d. h. auf unbegrenzte *räumliche* Annäherung an die zu regularisierende Masse (36) [vgl. (47)] beziehen, so daß diese Beziehungen etwas ganz Merkwürdiges, nämlich folgendes aussagen:

Zu jedem ganz im Innern der Umgebung (46) der zu regularisierenden Masse $u=v=0$ gelegenen Bereiche, also z. B. zu dem ($u=v=0$ enthaltenden!) Kreisbereiche

$$(69)\qquad \varrho = u^2+v^2 \leqq \frac{1}{3}$$

gibt es eine Konstante A derart, daß, sobald die *Koordinaten* u, v der Ungleichung (69) genügen, die *Geschwindigkeiten* $\dot{u}$, $\dot{v}$ bzw. die *Impulse* U, V der Ungleichung

$$(70)\qquad \sigma \leqq A\cdot\varrho^{n-1}, \qquad \text{d. h.} \qquad \dot{u}^2+\dot{v}^2 \leqq A\cdot(u^2+v^2)^{n-1}$$

bzw.

$$(71)\qquad v \leqq A\cdot\varrho^{n-1}, \qquad \text{d. h.} \qquad U^2+V^2 \leqq A\cdot(u^2+v^2)^{n-1}$$

genügen müssen, d. h. aus der erdennahen *Lage* des Mondes kann auf seinen ganzen (zum selben Zeitpunkt gehörigen) *Geschwindigkeitszustand* geschlossen werden. Dabei hängt A allerdings noch von der Jacobischen Konstante C (und außerdem natürlich auch von dem Massenprozentsatz μ) ab, kann aber für jedes endliche C-Intervall gleichmäßig gewählt werden.

Bisher durfte n sowohl $=1$ als auch >1 sein (vgl. den Anfang von § 3). Jetzt zeigt sich aber der grundverschiedene Charakter dieser beiden Fälle. Ist nämlich $n > 1$, d. h. $n-1 > 0$, so gilt nach (70), (71)

$$(72) \qquad \dot{u}^2 + \dot{v}^2 = o(u^2+v^2), \qquad U^2 + V^2 = o(u^2+v^2),$$

d. h. die Geschwindigkeit oder der Impuls konvergiert bei unbegrenzter Annäherung an die Masse gegen Null: die Regularisierung ist so stark, daß sie aus der Masse eine Gleichgewichtslage macht. Ist aber $n = 1$, d. h. $n-1 = 0$, so folgt aus (70), (71) nur die Beschränktheit der Geschwindigkeit bzw. des Impulses, und mehr, insbesondere (72), gilt jetzt nicht mehr, das Quadrat der Geschwindigkeit bzw. des Impulses konvergiert vielmehr nach (65)′ bzw. (66)′ bei unbegrenzter Annäherung an die Masse gegen den von Null verschiedenen (von den Integrationskonstanten allerdings unabhängigen) Grenzwert[5])

$$(68^*) \qquad 2\varkappa = 8(1-\mu) > 0 \qquad (0 < \mu < 1),$$

die Masse ist also keine Gleichgewichtslage mehr. Man kann deshalb den Fall $n > 1$ stationär, den Fall $n = 1$ nichtstationär nennen.

§ 4.

Das Hauptlemma der Regularisierungstheorie im großen: die lückenhafte Verteilung der stoßnahen Zeitgebiete.

Vorübergehend müssen wir jetzt zu dem ursprünglichen Variablensystem $\xi, \eta; t$, also zu den Gleichungen (3), (5) zurückkehren, wobei wir die Entfernung des kleinen Planeten ξ, η von den beiden Massen (2), d. h. seine zu dem Punktpaar (2) gehörigen bipolaren Koordinaten mit

$$(73) \qquad r_\mu = \left|\sqrt{(\xi-\mu)^2+\eta^2}\right|, \qquad r_{1-\mu} = \left|\sqrt{(\xi-\mu+1)^2+\eta^2}\right|,$$

und die als Integrationskonstanten für $t = t_0$ vorgeschriebenen reellen Anfangswerte mit

$$(74) \qquad \xi^0, \eta^0, \xi'^0, \eta'^0,$$

endlich die aus (73), (74) berechneten Anfangswerte (> 0) der bipolaren Koordinaten mit $r_\mu^0, r_{1-\mu}^0$ bezeichnen wollen; die Jacobische Integrationskonstante C ist eine durch (4) festgelegte Funktion der Anfangswerte (74). — Es gilt nun — der Einfachheit halber bei irgendwie *fest* gewähltem Massenprozentsatz μ — das folgende

Hauptlemma. Es gibt bei jedem C zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß, sobald

$$(75), (76) \qquad \varepsilon < r_\mu^0 < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon < r_{1-\mu}^0 < \frac{1}{\varepsilon}$$

ist, die Funktionen

$$(77) \qquad \xi = \xi(t), \quad \eta = (t), \qquad \text{also auch} \quad \xi' = \xi'(t), \quad \eta' = \eta'(t)$$

auf dem reellen t-Intervall $|t-t_0|<\delta$ regulär und derart sind, daß

$$(78), (79) \quad 2\varepsilon < r_\mu < \frac{2}{\varepsilon}, \quad 2\varepsilon < r_{1-\mu} < \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{gilt für} \quad |t-t_0|<\delta.$$

Dieser Satz ist, wie Weierstraß[14]) gezeigt hat, eine unmittelbare Folgerung aus dem Cauchyschen „Existenzsatz im kleinen", sobald man das Energieintegral (4) berücksichtigt. Das Wesentliche ist dabei, daß $\delta=\delta(\varepsilon;C)$ nicht von allen vier Werten (74) abhängt (und von t_0 selbstverständlich völlig unabhängig ist). Der eigentliche Inhalt des Hauptlemmas ist schon in der Paragraphenüberschrift angegeben. In der Tat folgt aus dem Hauptlemma, daß die Thielesche Transformation, die an sich nur eine (zu $n=1$ gehörige) formale „Regularisierung im kleinen" liefern würde, in Wirklichkeit eine „Regularisierung im großen" herbeiführt, die zu $-\infty<t<+\infty$ gehört; aus dem Hauptlemma folgt nämlich unter Benutzung der Thieleschen Transformation (aber auch nur der Thieleschen Transformation und nicht auch einer *im kleinen* schärferen, d. h. zu $n>1$ gehörigen Abbildung), daß diejenigen (eventuellen) t-Werte, für welche ein Stoß stattfindet, sich nur für $t\to\infty$ häufen können. Das Thielesche ψ erledigt so — abgesehen von einem Entwicklungssatz — die auf das restringierte Problem übertragene Sundmansche Fragestellung, das sich den sich auf das eigentliche Dreikörperproblem beziehenden Sundmanschen Untersuchungen[15]) an sich nicht unterordnet, obwohl bei Benutzung der Thieleschen Transformation mutatis mutandis die Schlußweisen selbst aus der Sundmanschen Theorie übernommen werden können. Der von Herrn Sundman ausgeschlossene Fall eines ternären Stoßes ist in dem restringierten Dreikörperproblem natürlich unmöglich. — Das Weierstraßsche Hauptlemma erlaubt ferner, die Sundmansche Beweisanordnung für den Painlevéschen Stoßsatz[16]), der sich auf das eigentliche Dreikörperproblem bezieht, auf das restringierte Dreikörperproblem ohne jede Änderung zu übertragen, so daß es genügt, den Satz ohne Beweis anzugeben, und zwar wie folgt.

Setzt man

$$(80) \qquad R(t)\begin{cases} = r_\mu(t) & , \quad \text{wenn} \quad r_\mu(t) < r_{1-\mu}(t), \\ = r_{1-\mu}(t) & , \quad \text{wenn} \quad r_{1-\mu}(t) < r_\mu(t), \\ = r_\mu(t) = r_{1-\mu}(t), & \quad \text{wenn} \quad r_\mu(t) = r_{1-\mu}(t), \end{cases}$$

so sind mit Rücksicht auf das Weierstraßsche Hauptlemma nach Herrn Painlevé nur die folgenden beiden Fälle möglich:

---

[14]) K. Weierstraß, Acta Math. **35** (1912), S. 37 ff.

[15]) K. F. Sundman, Acta Math. **36** (1912), S. 105 ff.

[16]) P. Painlevé, Stockholmer Vorlesung (1897, lith.), S. 582 ff. Vgl. K. F. Sundman, a. a. O. [15]), S. 113 ff., insb. S. 119–121 sowie T. Levi-Civita, Acta Math. 42 (1918), S. 110–114.

I. Der stoßfreie Fall, wobei Funktionen (76) für $t_0 \leqq t < +\infty$ regulär sind und

(81) $$R(t) > 0 \quad \text{ist für} \quad t_0 \leqq t < +\infty.$$

[Dabei sind noch die beiden Unterfälle

(81a) $\liminf\limits_{t \to +\infty} R(t) > 0$ bzw. (81b) $\liminf\limits_{t \to +\infty} R(t) = 0$

zu unterscheiden; in dem Unterfalle (81a) soll die Bewegung regulär heißen, während der ebenfalls stoßfreie Unterfall (81b) als der Fall des Pseudostoßes bezeichnet werden kann.]

II. Liegt nicht der stoßfreie Fall I vor, so gibt es einen Zeitpunkt t^* mit $t_0 < t^* < +\infty$ derart, daß die Funktionen (76) für $t_0 \leqq t < t^*$ regulär sind und

(82) $$R(t) > 0 \quad \text{ist für} \quad t_0 \leqq t < t^*,$$

aber es gilt dabei

(84) $\lim\limits_{t \to t^*-0} R(t) = 0$ [also nicht nur (84)' $\liminf\limits_{t \to t^*-0} R(t) = 0$;

(84) *folgt* vielmehr nach dem Hauptlemma aus (84)' sobald $t^* < +\infty$ ist!]; nun kann (84) mit Rücksicht auf (80) in der Gestalt

(84*) $$\lim_{t \to t^*-0} r_\mu(t) \cdot r_{1-\mu}(t) = 0$$

geschrieben werden, und aus (84*) folgt, daß im Falle II zur Zeit t^* ein effektiver Stoß mit *einer* der beiden Massen (2) stattfinden muß, d. h. daß nicht nur (84*), sondern auch die folgende Alternative richtig ist:

(85) entweder ist $\lim\limits_{t \to t^*-0} r_\mu(t) = 0$ oder $\lim\limits_{t \to t^*-0} r_{1-\mu}(t) = 0$; $t^* < +\infty$

[was übrigens mit Rücksicht auf (73) auch in der Form

(85)' entweder $\lim\limits_{t \to t^*-0} r_{1-\mu}(t) = 1$ oder $\lim\limits_{t \to t^*-0} r_\mu(t) = 1$

geschrieben werden kann]; würde nämlich (85) aus (84*) *nicht* folgen, so müßte es [mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Funktionen $r_\mu(t)$, $r_{1-\mu}(t)$ für $t_0 \leqq t < t^*$] offenbar eine Folge $\{t_n\}$ geben derart, daß

$$r_\mu(t_n) = r_{1-\mu}(t_n), \qquad \lim_{n \to +\infty} t_n = t^* - 0,$$

also nach (84*) auch $r_\mu(t_n) = r_{1-\mu}(t_n) \to 0$, $n \to +\infty$ gilt, was aber im Widerspruch steht mit der aus (73) unmittelbar folgenden, für alle t gültigen Ungleichheit $r_\mu(t) + r_{1-\mu}(t) \geqq 1$.

Alles in allem sagt also der (auf das restringierte Dreikörperproblem übertragene) Painlevésche Satz folgendes aus:

Es gilt entweder (81) oder (85).

§ 5.

Das Oszillatormodell.

Es seien nun zu $t = 0$ die vier Anfangswerte (74) vorgeschrieben, derart, daß die aus (73) berechneten Anfangswerte der bipolaren Koordinaten von Null verschieden sind, d. h. es sei

$$(86) \qquad (\xi^0, \eta^0) \neq (\mu, 0), \quad (\xi^0, \eta^0) \neq (\mu - 1, 0).$$

Dann werden durch (3) die Funktionen (76) für $0 \leqq t < t^*$ als eindeutig bestimmte reguläre Funktionen definiert, wobei t^* im Falle II den an $t = 0$ (für $t > 0$) nächstliegenden Stoßmoment bedeutet, in dem stoßfreien Fall I aber $t^* = +\infty$ gesetzt werden soll, und zwar der Bequemlichkeit halber auch dann, wenn nicht einmal ein Pseudostoß (81b) vorliegt, sondern der durchaus reguläre Unterfall (81a) des Falles (81), d. h. des Falles I. Dann ist t^* ausnahmslos erklärt und es gilt nach (81) und (82)

$$(87) \qquad R(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < t^*(\leqq +\infty).$$

Nehmen wir nun die lokale Regularisierungstransformation (32) vor, wobei n zunächst beliebig ist, d. h. eine willkürlich (aber fest) gewählte positive ganze Zahl bedeutet, die also auch $= 1$ sein darf. Da die Funktionen (76) für $0 \leqq t < t^*$ regulär und derart sind, daß $r_\mu(t)$ und $r_{1-\mu}(t)$ nach (80) und (87) beide von Null verschieden sein müssen, so daß also der Punkt $(\xi(t), \eta(t))$ nicht in einen der beiden Punkte (36), (37) hineinfällt, und da andererseits die Ableitung (42) der Abbildungsfunktion mit Rücksicht auf (32) nur in dem Punkte (36), d. h. im Punkte (47) verschwindet, so werden durch (32)

$$(88) \qquad u = u(t), \quad v = v(t),$$

also vermöge (88) auch

$$(89) \quad \frac{1}{|f^{(1)}(t)|} = \frac{1}{|f^{(1)}(u+iv)|} \quad \text{sowie} \quad (89)' \quad \psi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{|f^{(1)}(\tau)|^2}$$

als für $0 \leqq t < t^*$ reguläre Funktionen erklärt, und zwar ist dabei die Ableitung (89) von $\psi(t)$ durchweg > 0, so daß ψ für $t \to t^* - 0$ gegen einen Grenzwert ψ^* konvergiert, der allerdings auch $= +\infty$ sein darf. Damit ist schon die durch (25) festgelegte neue Zeitvariable ψ eingeführt, indem die beiden Gebiete $0 \leqq t < t^*$, $0 \leqq \psi < \psi^*$ aufeinander eineindeutig und auf eine beliebig oft differentiierbare Weise bezogen sind: es gilt nach (89), (89)'

$$0 < \psi'(t) < +\infty \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < t^*,$$

also wegen $\psi' = \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\dot{t}}$ auch $0 < \dot{t}(\psi) < +\infty$ für $0 \leqq \psi < \psi^*$ so daß $t = t(\psi)$ eine für $0 \leqq \psi < \psi^*$ eindeutig erklärte reguläre Funktion ist. Führt man $t = t(\psi)$ in (88) ein, so folgt, daß $u = u(t(\psi))$, $v = v(t(\psi))$ oder kurz

(90) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, also auch $\dot{u} = \dot{u}(\psi)$, $\dot{v} = \dot{v}(\psi)$

für $0 \leqq \psi < \psi^*$ reguläre Funktionen sind.

Ich behaupte zunächst, daß in dem stoßfreien Fall I die Funktion $\psi = \psi(t)$ für $t \to t^*$ bei *jedem* n (also auch für $n = 1$) über alle Grenzen wächst. Mit anderen Worten:

(91) Aus $t^* = +\infty$ folgt $\psi^* = +\infty$ bei jedem $n \geqq 1$

Zwecks Zurückführung ad absurdum nehmen wir an, daß $\psi^* < +\infty$ ist. Dann ist die Lösung (90) des regularisierten Differentialsystems für $0 \leqq \psi < \psi^*$ nicht nur regulär, sondern auch beschränkt. Dies folgt nach einem bekannten Satz über reguläre Differentialsysteme, welcher auch ergibt, daß die Funktionen (90) auch noch über $\psi = \psi^*$ hinaus, also etwa für $0 \leqq \psi < \psi^* + \varepsilon^* (> \psi^*)$, eine reguläre Lösung darstellen. Dann ist aber auch $|f^{(1)}(\psi)|^2 \equiv |f^{(1)}(u + iv)|^2$, also nach (25)' auch $t = \int_0^\psi |f^{(1)}(\varphi)|^2 d\varphi$ eine für $0 < \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ reguläre Funktion von ψ, und zwar ist die Ableitung $\dot{t} = |f^{(1)}(\psi)|^2$ jedenfalls $\geqq 0$ und höchstens in isolierten Punkten ($\geqq \psi^*$) gleich Null, da $\dot{t}$ für $0 < \psi < \psi^*$ positiv und für $0 < \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ regulär analytisch ist. Es liegt also eine stetige und eineindeutige Abbildung des Intervalles $0 \leqq \psi < \psi^* + \varepsilon^*$ auf ein Intervall $0 \leqq t < t^* + \delta^*$ vor, wobei $\delta^* > 0$ ist. Dies enthält aber einen Widerspruch, da nach Voraussetzung bereits zu $\psi = \psi^*$ der Wert $t = t^* = +\infty$ gehört. Damit ist (91) bewiesen.

Betrachten wir jetzt den Fall $t^* < +\infty$, d. h. den Fall eines effektiven Stoßes (Fall II, S. 690) mit einer der beiden Massen (36), (37). Es kann angenommen werden, daß der Stoß mit der Masse (36) stattfindet [vgl. S. 683], also mit Rücksicht auf (32), (47) darin besteht, daß $u^2 + v^2$ für $\psi < \psi^*$ positiv ist und für $\psi \to \psi^*$ gegen Null konvergiert. Wenn wir nun, im Gegensatz zu (91), den Fall $n = 1$ ausschließen, so gilt (aber auch *nur* unter dieser Voraussetzung) die Abschätzung (72), d. h. alle vier Funktionen

(92) $u(\psi)$, $v(\psi)$, $\dot{u}(\psi)$, $\dot{v}(\psi)$ $(0 < \psi \leqq \psi^*)$

konvergieren für $\psi \to \psi^*$ gegen Null, und andererseits ist dann

(93) $u(\psi) = 0$, $v(\psi) = 0$, $\dot{u}(\psi) = 0$, $\dot{v}(\psi) = 0$

eine Lösung der regularisierten Bewegungsgleichungen, indem im Falle $n > 1$ (aber auch nur in diesem Falle) die Abbildung eine so starke Regularisierung herbeiführt, daß die Masse eine Gleichgewichtslage wird (vgl. S. 688). Daraus folgt nun, daß

(94) auch aus $t^* < +\infty$ folgt $\psi^* = +\infty$ bei jedem $n \neq 1$.

Gesetzt nämlich, daß $\psi^* < +\infty$ ist; dann können zu $\psi = \psi^*$ willkürliche Integrationskonstanten vorgeschrieben werden. Wir schreiben die Anfangswerte

$$u(\psi^*) = 0, \quad v(\psi^*) = 0, \quad \dot{u}(\psi^*) = 0, \quad \dot{v}(\psi^*) = 0$$

vor, die nach dem Eindeutigkeitssatz der regulären Differentialsysteme nur eine Lösung der regularisierten Differentialgleichungen festlegen können. Da (92) für $\psi \to \psi^*$ verschwindet, müßten daher die beiden Lösungen (92), (93) auch für $0 \leqq \psi < \psi^*$ identisch sein, im Widerspruch damit, daß $u^2 + v^2$ für $0 \leqq \psi < \psi^*$ von Null verschieden ist, indem der Stoß erst für $\psi \to \psi^*$ zustande kommt. — Damit ist (94) bewiesen.

Was endlich das Verhalten des effektiven Stoßfalles II $(t^* < +\infty)$ bei den von Thiele-Burrau, Levi-Civita und Birkhoff betrachteten Abbildungen anlangt, bei welchen der Abbildungsmodul in der Masse zwar verschwindet, aber nur in der ersten Ordnung verschwindet $(n = 1)$, so daß die Geschwindigket $(\dot{u}, \dot{v})$ bei unbegrenzter Annäherung an die Masse zwar endlich bleibt, aber nicht gegen Null konvergiert und daher keine Verwandlung des restringierten Dreikörperproblems in ein konservatives Oszillatorenproblem mit Gleichgewichtslage herbeiführt (vgl. S. 688 und S. 692), so gilt, wie man sich leicht überzeugt,

$$(95) \qquad \psi^* < +\infty \quad \text{für} \quad t^* < +\infty, \quad n = 1$$

[so daß in (94) tatsächlich alles auf der Annahme $n > 1$ beruht]. Da das Quadrat der Geschwindigkeit, nämlich $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$, für $\psi = \psi^*$ nicht verschwindet, sondern nach (68) gleich $8(1-\mu) > 0$ ist, so kann die Kurve $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, d. h. die regularisierte Bahnkurve, beim Übergang von $\psi = \psi^* - 0$ zu $\psi = \psi^* + 0$ keine Spitze haben, und da andererseits die in der Masse gelegenen Winkel beim Übergang von der (ξ, η)-Ebene zur (u, v)-Ebene wegen $n = 1$ halbiert werden (vgl. S. 683), so muß die Kurve $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, d. h. die nicht regularisierte Bahnkurve, für $t = t^* - 0$ eine Tangente haben, die mit ihrer zu $t = t^* + 0$ gehörigen Tangente zusammenfällt[17]).

§ 6.

Anwendung auf das Mondproblem.

Wir wollen zunächst unsere Resultate über den Fall $n > 1$ zusammenstellen.

---

[17]) Zusatz bei der Korrektur (26. 6. 1930). Ich benutze die Gelegenheit, um ein Versehen von mir [Sitzber. der sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 1930, S. 105—119] zu berichtigen: Aus der allgemeinen Gültigkeit von (15) a. a. O. folgt (11) mit (13) a. a. O. dann und nur dann, wenn eine ganzzahlige Kommensurabilität stattfindet, wie das Herr Moulton in seiner a. a. O. zitierten Untersuchung vollständig richtig angegeben hatte. Meine, sich auf (11) stützenden Bemerkungen sind also hinfällig. Leider habe ich dies erst jetzt nachträglich bemerkt.

Zu $t=0$ seien die Anfangswerte (74) vorgeschrieben, für welche die Bedingung (86) erfüllt ist. Kommt dann für $0<t<+\infty$ bei einem $t=t^*$ ($<+\infty$) ein effektiver Stoß zustande (wobei das Gebiet $0<t<t^*$ noch stoßfrei ist), so können wir annehmen, daß dieser Stoß mit der Masse (36) stattfindet, da die andere Masse, nämlich (37), ebenso behandelt werden kann. Dem stoßfreien Fall I sei hingegen $t^*=+\infty$ zugeordnet, und zwar auch dann, wenn nicht (81b), sondern (81a) gilt. — An Stelle des Variablensystems

$$(96)' \qquad \xi,\ \eta,\ X,\ Y;\ t.$$

führen wir mittels

$$\xi+i\eta=\mu+(u+iv)^{2n},\quad X+iY=\frac{U+iV}{2n(u-iv)^{2n-1}},\quad \psi=\frac{1}{4n^2}\int\limits_0^t\frac{dt}{(u^2+v^2)^{2n-1}}$$

neue Variable

$$(96) \qquad u,\ v,\ U,\ V;\ \psi$$

ein, wodurch die zu $t=0$ gehörigen Anfangswerte (74) in zu $\psi=0$ gehörige Anfangswerte

$$(97) \qquad u^0,\ v^0,\ \dot u^0,\ \dot v^0;\quad (u^0)^2+(v^0)^2>0 \qquad (\psi=0)$$

und die Bewegungsgleichungen in

$$(98) \qquad \dot u=\mathsf{H}_U,\quad \dot U=-\mathsf{H}_u,\quad \dot v=\mathsf{H}_V,\quad \dot V=-\mathsf{H}_v$$

übergehen, wobei

$$(99) \qquad \dot x=\frac{dx}{d\psi},\quad \mathsf{H}_x=\frac{\partial\mathsf{H}}{\partial x}$$

gesetzt ist und, unter C die aus (74), (4), (5) eindeutig berechnete Jacobische Integrationskonstante und unter $\mathsf{P}^{(2n+1)}(u,v;U,V,C)$ eine in bezug auf das Argumentsystem U, V, C lineare, etwa in dem Bereiche $u^2+v^2\leqq\frac13$ gewiß reguläre reelle Potenzreihe verstanden, die in bezug auf das Variablenpaar (u,v) mit Gliedern $(2n-1)$-ter Ordnung beginnt,

$$(100) \quad \mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\mathsf{P}^{(2n+1)},\qquad \mathsf{H}_0=\tfrac12(U^2+V^2)-4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}$$

ist und das Jacobische Integral, unter $\mathfrak{p}(u,v;C)$ eine von den Geschwindigkeiten oder Impulsen unabhängige, für $u^2+v^2\leqq\frac13$ wieder reguläre Potenzreihe verstanden, in der Gestalt

$$(101) \quad \tfrac12(\dot u^2+\dot v^2)=4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{p}(u,v;C)$$

oder auch $\mathsf{H}_0=-\mathsf{P}^{(2n-1)}$, d. h. $\mathsf{H}=0$ geschrieben werden kann, d. h. der Energiekonstante $\mathsf{H}=h$ darf nur der Wert $h=0$ erteilt werden (da H bereits die Integrationskonstante C enthält, also analog zu dem Prinzip der kleinsten Wirkung). — Die zu den Anfangswerten (97) gehörige Lösung

$$(102) \qquad u(\psi),\quad v(\psi),\quad U(\psi),\quad V(\psi)$$

von (98) genügt den Bedingungen

$$(103)\quad \dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2\to 0,\quad U(\psi)^2+V(\psi)^2\to 0 \text{ für } u(\psi)^2+v(\psi)^2\to 0,$$

ist für $0 \leqq \psi < +\infty$ regulär und derart, daß $u(\psi)^2+v(\psi)^2>0$ ist. Und zwar gehört $\psi=+\infty$ zu $t=t^* < +\infty$ oder zu $t=t^*=+\infty$, je nach dem Fall II oder Fall I vorliegt. Die Koordinaten der Masse (36), mit welcher im Falle II zur Zeit $t=t^*<+\infty$, d. h. $\psi=+\infty$ ein effektiver Stoß zustande kommt (im Falle I gibt es überhaupt keinen Stoß), sind $u=0$, $v=0$, so daß die Prämisse von (103), nämlich $u(\psi)^2+v(\psi)^2\to 0$, *die natürlich nicht zeitlich, sondern räumlich gemeint ist, d. h. nicht*

$$(104)\quad \lim_{\psi\to+\infty}[u(\psi)^2+v(\psi)^2]=0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\psi\to+\infty}[\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2]=0,$$

sondern nur

$$(105)\quad \liminf_{\psi\to+\infty}[u(\psi)^2+v(\psi)^2]=0 \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{\psi\to+\infty}[\dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2]=0$$

verlangt bzw. zu behaupten gestattet, räumlich unbegrenzte, zeitlich aber nicht notwendig auf einem zusammenhängenden ψ-Gebiet erfolgende Annäherung an die Masse (36) bedeutet:

$$(103')\quad \begin{aligned} \dot{u}(\psi)^2+\dot{v}(\psi)^2 &= o(u(\psi)^2+v(\psi)^2),\\ U(\psi)^2+V(\psi)^2 &= o(u(\psi)^2+v(\psi)^2). \end{aligned}$$

Dies besagt aber, daß der Punkt

$$(106)\qquad u=0,\quad v=0,$$

d. h. die Masse (36), eine Gleichgewichtslage des regulären Oszillators (98) ist. In der Tat ist

$$(107)\qquad u(\psi)\equiv 0,\quad v(\psi)\equiv 0,\quad U(\psi)\equiv 0,\quad V(\psi)\equiv 0$$

mit Rücksicht auf (100) wegen $n>1$ eine Lösung des Differentialsystems (98). Die Hillsche Nullgeschwindigkeitskurve [vgl. (101)]

$$0=4n^2(1-\mu)(u^2+v^2)^{n-1}+(u^2+v^2)^{2n-1}\mathfrak{p}(u,v;C)$$

ist nach bekannten Sätzen bei hinreichend großem C eine reelle Kurve in der (u,v)-Ebene, die einen kreisähnlichen Zweig hat, der für $C\to+\infty$ auf die Masse (106), die er umschließt, zusammenschrumpft und die Eigenschaft hat, daß wenn der Planet — bei gegebenem Werte von C — zur Zeit $\psi=0$ in dem Innengebiete der Ovale war, dies für alle ψ der Fall sein muß, d. h. das Außengebiet der Ovale ist dann ein für $0<\psi<+\infty$ verbotenes Gebiet. Bei hinreichend großem C ist die andere Masse außerhalb der „Ovale" gelegen. Der Erdmond befindet sich im Innern einer solchen Ovale, d. h. der numerische Wert von C ist im Falle des Erdmondes „hinreichend groß". Ich will hier auf die Rechnung nicht eingehen, da die Sache mit Rücksicht auf die Hillschen Rechnungen ohne weiteres einleuchtet. — Betrachten wir nun die beiden Fälle I, II (d. h. $t^* = +\infty$, $t^* < +\infty$) gesondert, und zwar zunächst den zweiten Fall.

Ist $t^* < +\infty$, so konvergiert der Mond für $t \to t^* - 0$ gegen die Masse, d. h. es gilt

$$\lim_{t \to t^* - 0} [u(\psi)^2 + v(\psi)^2] = 0,$$

oder da $t \to t^* - 0$ zu $\psi \to +\infty$ gehört (S. 692), einfach (104), und daher mit Rücksicht auf (103) oder (103)'

$$(107^*) \quad \lim_{\psi \to +\infty} u(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} v(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} U(\psi) = 0, \quad \lim_{\psi \to +\infty} V(\psi) = 0,$$

d. h. der Stoß besteht darin, daß die Lösung gegen die Gleichgewichtslösung (107) konvergiert. *Die effektiven Stoßlösungen* (Fall II) *erscheinen also als asymptotische Lösungen im Sinne von Poincaré* [18]), sie konvergieren für $\psi \to +\infty$ gegen die Gleichgewichtslage, d. h. die Masse, und zwar mit einer gegen Null konvergierenden Geschwindigkeit. Die Bewegung wird bei wachsendem ψ so langsam (also das Formelsystem für numerische Zwecke ebenso unbrauchbar wie vor der Transformation, wobei die Geschwindigkeit für $t \to t^*$ unendlich wird), daß für $\psi \to +\infty$ nur der erste Stoßmoment $t = t^* < +\infty$ erreicht wird, während im Thieleschen Fall $(n = 1)$ zu $\psi \to +\infty$ stets $t \to +\infty$ gehört, d. h. man kann die Bewegung über den Stoß hinaus fortsetzen und zwar bis $t = +\infty$, wobei sich auf jedem endlichen t-Intervall nur endlich viele Stöße ergeben; vgl. S. 683, S. 689, S. 693.

Da es Stoßlösungen tatsächlich gibt, so existieren auch unsere asymptotischen Lösungen. Sie bilden aber in dem Phasenraume eine „Ausnahme“. Bezeichnet nämlich R den vierdimensionalen (reellen) Raum der zu $\psi = 0$ vorgeschriebenen Anfangswerte (97) und S diejenige Teilmenge von R, deren Punkte Anfangswerte von effektiven Stoßlösungen, d. h. von asymptotischen Lösungen der Gleichgewichtslösung darstellen, so folgt aus einem von Herrn Painlevé vermuteten, von Herrn Levi-Civita [19]) sichergestellten Satz, daß S auf einer dreidimensionalen analytischen Fläche des vierdimensionalen Phasenraumes R (also in R erst recht nicht überall dicht) liegt, so daß das Nichtvorliegen einer effektiven Stoßbahn in kon-

[18]) Dieser Umstand wirft, mit Rücksicht auf die Untersuchungen der Herren K. F. Sundman [Acta Soc. Scient. Fennicae **34** (1907), Nr. 6, S. 18ff.] und J. Chazy [Bull. Astr. 35 (1918), S. 321 ff.], ein neues Licht auf das zur Zeit durchaus ungelöste funktionentheoretische Problem bei einem ternären Stoß in dem eigentlichen Dreikörperproblem: es wäre denkbar, daß die Schwierigkeiten nur durch die Benützung einer nicht sinngemäßen Zeitvariable bedingt werden, in welcher die Bewegung asymptotisch ist. Die exakten Lagrangeschen Lösungen des Dreikörperproblems, die zugleich ternäre Stoßlösungen sind, zeigen, daß eine analytische Fortsetzung sehr wohl möglich ist, trotzdem die Sundman-Chazysche Zeitvariable versagt, d. h. eine asymptotische Bewegung ergibt.

[19]) T. Levi-Civita, Annali di Mat. (3) 9 (1903), S. 1 ff.

kreten Fällen prinzipiell beweisbar ist. Es hat also einen guten Sinn zu sagen, daß der Fall II eines effektiven Stoßes ein Ausnahmefall ist. Nun ist aber für die effektive Stabilität einer festen Lösung noch nicht hinreichend, daß sie einerseits im Innern eines geschlossenen massennahen Ovals (108) liegt und andererseits keine effektive Stoßlösung ist.

Betrachten wir nämlich den stoßfreien Fall I, d. h. die Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$. Hier sind zwei Unterfälle möglich, nämlich eine vollständig reguläre Bewegung mit (81a) und eine Pseudostoßbewegung mit (81b), d. h. mit (105) [ohne (104)]. Die entsprechenden Teilmengen von $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$ sollen bzw. mit $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ bezeichnet werden, so daß also $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ ist. Die durch die vier Integrationskonstanten (97) definierte Bewegung kann nur dann effektiv stabil genannt werden, wenn (97) nicht nur nicht auf $\boldsymbol{S}$, sondern nicht einmal auf der Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{Q}$ des Pseudostoßes gelegen ist. Nun weiß man aber von $\boldsymbol{Q}$ gar nichts, man weiß nicht, ob $\boldsymbol{Q}$ nicht leer ist, man weiß aber auch nicht, ob $\boldsymbol{Q}$ in $\boldsymbol{R}$ nicht überall dicht liegt, man weiß nicht einmal, ob $\boldsymbol{P}$ im Innern einer Grenzkurve nicht lauter periodische Lösungen und keine weiteren Bahnen darstellt.

Beschränken wir uns nun auf Punkte (97) von $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$, bei welchen der Punkt (u^0, v^0) innerhalb der zugehörigen Ovale (108) liegt, welche die Masse $u=v=0$ umschließt, die andere Masse aber ausschließt. Da $u=v=0$ die Gleichgewichtslage eines konservativen kanonischen Oszillators ist, müßte man dann nach den (zur Zeit weder bewiesenen noch widerlegten) Prinzipien der statistischen Mechanik annehmen, daß diejenigen Punkte von $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}$, bei welchen die abgeschlossene Hülle der zugehörigen Bahnkurve in der (u, v)-Ebene nicht ein die Gleichgewichtslage $u=v=0$ in seinem Innern enthaltendes Flächenstück ist, die Regel, d. h. eine Menge mit einer vierdimensionalen Nullmenge als Komplementärmenge oder wenigstens eine überall dichte Menge bilden, womit der Umstand, daß die Levi-Civitasche Theorie der adiabatischen Invarianten von Herrn Geppert auf einem von der statistischen Mechanik unabhängigen Wege, einfach aus der Theorie der Integralinvarinten hergeleitet werden konnte, in gutem Einklang steht. Mit Rücksicht auf unser Korrespondenzprinzip, das das Mondproblem in ein reguläres Oszillatorenproblem verwandelt, wäre also im *Rahmen der statistischen Mechanik* folgendes zu behaupten: Die Pseudostoßmannigfaltigkeit $\boldsymbol{Q}$ liegt, *im Gegensatz zu der effektiven Stoßmannigfaltigkeit* $\boldsymbol{S}$, überall dicht in der Phasenmannigfaltigkeit $\boldsymbol{R}$. Es ist aber nicht zu vergessen, daß die Jacobische Konstante fest vorgeschrieben ist, also es sich von vornherein um isoenergetische Mannigfaltigkeiten handelt[20]).

---

[20]) Wegen der in Frage kommenden Hypothese vgl. insb. H. Kneser, Math. Annalen 84 (1921), S. 294.

Unser Korrespondenzprinzip, welches dieser Betrachtung zugrunde liegt, war früher nicht bekannt, da es, wie wir wissen, erst durch den Übergang von $n = 1$ zu $n > 1$ ermöglicht wird. — Herr Levi-Civita vertrat jedenfalls die Ansicht, daß Q ebenso abgegrenzt („lokalisiert") werden kann wie S, und hat hierfür auch einen Beweis in Aussicht gestellt[21]). Genauer handelt es sich dabei um „kreisähnliche" massennahe Bahnen und um eine Benützung einer auf Poincaré[22]) zurückgehenden Reduktion auf einen Freiheitsgrad, die von Herrn Levi-Civita[23]) näher untersucht worden ist; einem alle Einzelheiten durchführenden Beweise stehen aber zur Zeit noch manche Schwierigkeiten im Wege. Ich stütze mich dabei auf freundliche mündliche Mitteilungen von Herrn Levi-Civita. — Mehr kann man heute jedenfalls nicht behaupten, als daß das Mondproblem mit dem Problem der Bahnformen eines regulären Oszillators äquivalent ist; genauer haben wir bei jedem C einen Oszillator mit der Energie $h = 0$ zu betrachten.

So hat man auch einen bequemen Störungsapparat zur Behandlung von massennahen Bahnen in der Hand. Da nämlich H in (100) in H_0 und P additiv zerfällt und H_0 von der Ordnung $n - 1\,(> 0)$, P aber nur von der Ordnung $2n - 1$ ist, so kann man P als eine Störungsfunktion auffassen, also in (98) H zunächst durch H_0 ersetzen. Die zugehörige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung $\mathsf{H}_0 = 0$ ist mit Rücksicht auf (100) in den Polarkoordinaten der kartesischen (u, v)-Ebene offenbar separierbar, die „ungestörte" (der Keplerschen entsprechende) Bewegung ist bei beliebigen Werten der massennahen Integrationskonstanten periodisch, sind ferner α, β, A, B die bei der Integration der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung $\mathsf{H}_0 = 0$ erhaltenen kanonischen Integrationskonstanten, so kann (98) nach der Theorie der Variation der Konstanten in der Gestalt

$$(98)' \qquad \dot{\alpha} = \mathsf{P}_{\mathrm{A}}, \quad \dot{\mathrm{A}} = -\mathsf{P}_{\alpha}, \quad \dot{\beta} = \mathsf{P}_{\mathrm{B}}, \quad \dot{\mathrm{B}} = -\mathsf{P}_{\beta}$$

von Lagrangeschen Störungsgleichungen geschrieben werden, womit aber, was ein Verhalten für $\psi \to +\infty$ anlangt, wegen der diophantischen kleinen Divisoren[24]) genau so wenig gewonnen ist wie in der klassischen Theorie. (Damit dürfte auch die eigentliche Quelle der Schwierigkeiten aufgewiesen sein, auf welche Herr Levi-Civita gestoßen ist.)

Kopenhagen, den 28. Mai 1930.

---

[21]) T. Levi-Civita, Comptes Rendus du 2$^{\text{me}}$ Congr. Intern. de Méc. Appl., Zürich (1926).

[22]) H. Poincaré, Méth. nouv. 2 (1893), S. 365 ff.

[23]) T. Levi-Civita, Annali di Mat. (3) 5 (1901), S. 221–308.

[24]) Vgl. J. Horn, Journ. f. reine u. angew. Math 126 (1903), S. 219 ff.

(Eingegangen am 3. Juni 1930.)