Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten.

Von

F. K. G. Odqvist in Stockholm.

In dieser Arbeit werden wir die Randwertaufgaben des folgenden Systems von Differentialgleichungen, der sogenannten Navier-Stokesschen Gleichungen für die stationäre Bewegung einer zähen raumbeständigen Flüssigkeit, betrachten:

$$(0.01)\qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho \sum_{k=1}^{3} u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \sum_{k=1}^{3} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet u_i die Geschwindigkeitskomponenten, p den Druck, und X_i sind die Komponenten der äußeren Kräfte. μ und ϱ seien gegebene positive Konstanten. Es sind Lösungen des Systems (0.01) in einem gewissen räumlichen Gebiete aufzufinden, auf dessen Begrenzung u_i vorgegebene Werte annehmen.

Zwei Schwierigkeiten, die uns bei der Lösung dieser Randwertaufgabe nach bekannten Vorbildern entgegentreten, liegen auf der Hand. Es sind einerseits die drei ersten Gleichungen, wegen der linker Hand auftretenden Produktglieder, nicht linear, und andererseits müßte man, um p eliminieren zu können, die Ordnung der Gleichungen von zwei auf vier erhöhen. Unsere Methode wird sein, anfänglich die Produktglieder wegzulassen und die Lösungen der allgemeineren Gleichungen (0.01) durch Lösungen der so entstandenen „linearisierten" Gleichungen aufzubauen.

In einer Stockholmer Dissertation[1]) hat der Verfasser eine Theorie der linearisierten Gleichungen entwickelt, die mit derjenigen von Fredholm und Plemelj für die entsprechenden Probleme der Potentialtheorie aufgestellten

[1]) „Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten". Stockholm 1928, P. A. Norstedt o. Söner.

vollkommen analog ist. Für die Randwertaufgabe des nichtlinearen Gleichungssystems (0.01) wurde sodann mit Hilfe eines Greenschen Tensors ein System von quadratischen Integralgleichungen hergeleitet, von dem gezeigt wurde, daß es bei genügend kleiner Geschwindigkeit und genügend kleinen Abmessungen des betrachteten Raumgebietes eine wohlbestimmte Lösung besitzt.

Seit dem Erscheinen meiner Dissertation hat Herr L. Lichtenstein eine Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlicht[2]). Er stützt sich bezüglich der linearen Randwertaufgabe auf eine Arbeit von U. Crudeli und gewinnt sodann die Lösung des allgemeineren Problems durch sukzessive Approximationen. Es gelingt dadurch, die Randwertaufgabe der nichtlinearen Gleichungen (0.01) für jede Größe des betrachteten Gebietes zu lösen, falls nur die Geschwindigkeiten hinreichend klein sind.

Ferner hat Dr. H. Faxén neuerdings eine Arbeit bei der Schwedischen Akademie der Wissenschaften eingereicht[3]), in der unter anderem gezeigt wird, wie die in meiner Dissertation angewandte Methode zur Behandlung der Oseenschen Differentialgleichungen verallgemeinert werden kann. In dieser Arbeit, von der mir der Verfasser freundlichst die Korrekturbogen zur Verfügung stellte, wird auch ein Satz bewiesen, von dem wir im folgenden Gebrauch machen werden.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist einerseits zu zeigen, daß an meiner Lösung der Randwertaufgabe des Systems (0.01) nur eine kleine Abänderung erforderlich ist, um zum selben Grad der Allgemeinheit zu gelangen, wie es Lichtenstein mit seiner gänzlich verschiedenen Methode tut. Andererseits werde ich zeigen, wie meine Methode imstande ist, auf natürlichem Wege zum Studium der Verzweigungen der Lösungen der Randwertaufgabe zu führen. In meiner Dissertation waren bei Behandlung der linearen Probleme einige Irrtümer noch vorhanden, auf die mich Herr Dr. Faxén freundlichst aufmerksam machte. Diese werden hier berichtigt, und um Hinweise auf meine Dissertation und die obenerwähnte Faxénsche Arbeit möglichst zu vermeiden, wird übrigens die ganze Theorie hier neu dargestellt und teilweise mit neuen Beweisen versehen.

Es werden im allgemeinen die dreidimensionalen Aufgaben betrachtet. Gelegentlich werden wir am Ende von § 4 die für das entsprechende ebene Problem nötigen Modifikationen andeuten, wodurch unter anderem die Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe des Außenraumes einer geschlossenen Kurve erledigt wird.

---

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik, Dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 387–415; Grundlagen der Hydromechanik, Berlin 1929, S. 493–506.

[3]) Arkiv f. mat., astr. o. fys. 21 A, Nr. 14.

In den ersten vier Paragraphen werden die linearen Randwertaufgaben gelöst, und die Eigenschaften der Lösungen in dem Umfange studiert, wie sie für das Folgende nötig sind. In § 5 wird ein Greenscher Tensor konstruiert, und seine Eigenschaften näher untersucht. § 6 enthält die Lösung der Randwertaufgabe für das System (0.01). Die letzten zwei Paragraphen enthalten einige Bemerkungen über Verzweigung der Lösungen der Randwertaufgabe (0.01) sowie die Anwendung des Greenschen Tensors auf nichtstationäre Strömungen und auf das Stabilitätsproblem. Gelegentlich wird angedeutet, wie man die Lösung der folgenden, mit einem bekannten Problem von Oseen analogen, Randwertaufgabe bekommen kann: Man bestimme unter Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder" die von einem eingetauchten Körper in einer rotierenden Flüssigkeit hervorgerufene Strömung.

§ 1.

Definitionen. Bezeichnungen. Greensche Formeln.

Wir betrachten im folgenden räumliche Gebiete Q, die von endlich vielen, endlichen, stetigen Flächen begrenzt sein sollen. Die Punkte von Q werden auf ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 bezogen. Innere Punkte von Q mit den Koordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$, bzw. y_i, werden kurz (x), bzw. (y) bezeichnet. Raumelemente werden mit dQ bezeichnet. Der Bezugspunkt wird, wenn nötig, $d_x Q$, $d_y Q$ usw. angedeutet. Jedem Gebiete Q, als „Innengebiet" mit $Q_{(i)}$ bezeichnet, können wir ein Außengebiet $Q_{(e)}$ zuordnen, so daß $Q_{(i)} + Q_{(e)}$ den ganzen Raum ausmacht.

Die gesamte Begrenzungsfläche („Randfläche") eines Gebietes Q heiße T und besitze eine stetige Tangentialebene. Punkte auf T werden mit (ξ), (η), ..., und Flächenelemente mit dT, bzw. $d_\xi T$, ... bezeichnet. Die innere Flächennormale soll mit n_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet werden.

Funktionen von den Koordinaten x_i, ξ_i, ... eines Punktes werden wir kurz mit $f(x)$, $f(\xi)$, $f(x, \xi)$, ... usw. bezeichnen. Es gilt dann z. B. $n_i = n_i(\xi)$

Der Abstand zweier Punkte (x) und (x') soll $r_{xx'}$ bezeichnet werden.

Eine Funktion $f(x)$, von der wir wissen, daß für irgend zwei Punkte (x) und (x') eines Gebietes Q eine Ungleichung der Form

$$|f(x) - f(x')| < C r_{xx'}^h$$

besteht mit h reell, positiv und kleiner als eins, und C eine positive, nur von h abhängige Konstante, soll als *H-stetig* mit dem Exponenten h (Hölder) bezeichnet werden.

Eine Fläche T soll in der Umgebung eines jeden Punktes eine Darstellung der Form $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ gewährleisten, falls das Koordinatensystem passend gewählt wird. Besitzt die Funktion $f(\xi_1, \xi_2)$ erste Ableitungen, die H-stetig mit dem Exponenten h sind, so gehöre die Fläche der Klasse Ah. Sind darüber hinaus die zweiten Differentialquotienten von $f(\xi_1, \xi_2)$ vorhanden und H-stetig, so gehöre T der Klasse Bh. Die entsprechenden Gebiete Q gehören den Gebietsklassen Ah und Bh.[4]) Unsere endgültigen Ergebnisse in § 6 werden für Gebiete der Klasse Bh gewonnen. Trotzdem wird überall mit den geringeren Voraussetzungen der Klasse Ah so weit gearbeitet, wie dies möglich ist.

Im folgenden soll das zweimalige Vorkommen eines Index in irgendeinem Produkte, Differentialquotienten usw. zur Folge haben, daß in bezug auf diesen Index summiert werden soll. Es schreiben sich dann die Gleichungen (0.01) kurz

$$(1.01) \qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho u_k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Wir werden zunächst nur diejenigen Bewegungen einer zähen Flüssigkeit studieren, die den einfacheren Differentialgleichungen gehorchen, die man dadurch bekommt, daß man die sogenannten quadratischen Glieder

$$\varrho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

wegstreicht. Wir haben dann die „Stokesschen Gleichungen"

$$(1.02) \qquad \begin{cases} \mu \Delta u_i = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \varrho X_i, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases}$$

Wir werden als **erste Stokessche Randwertaufgabe** das folgende Problem bezeichnen:

Man bestimme in einem Raumgebiete Q der Klasse Ah die Funktionen u_i, p, so daß einerseits in Q

$$(1.03) \qquad \mu \Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

erfüllt ist, und andererseits die Funktionen $u_i(x)$ bei Heranrückung an die Randfläche T von Q vorgeschriebene Werte $u_i(\xi)$ annehmen.

Der in der Flüssigkeit wirkende Spannungstensor wird durch

$$T_{ik} = -p\,\delta_{ik} + \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

[4]) Man vergleiche L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Enzyklopädie der Math. Wissenschaften. II C 3. Teubner 1919.

dargestellt, wobei

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Die auf ein Flächenelement mit der Normalen n_k wirkende Spannung ist

$$T_{ik} n_k.$$

Die Aufgabe, die Gleichungen (1.03) in einem Gebiete Q so zu integrieren, daß die auf die Begrenzungsfläche T wirkenden Spannungen $T_{ik} n_k$ vorgegebene Werte annehmen, werden wir als **zweite Stokessche Randwertaufgabe** bezeichnen.

Die Gleichungen (1.03) werden wir die homogenen Stokesschen Gleichungen nennen.

Betrachten wir nun zwei beliebige, zweimal stetig differentiierbare Vektoren u_i und v_i und eine beliebige, stetig differentiierbare, skalare Größe p, dann gilt die „Greensche Identität"

$$(1.04) \quad \int\limits_{Q_{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_k}[T_{ik} v_i]\, dQ = \int\limits_{Q_{(i)}} \left\{ \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) - p\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right.$$
$$\left. + \left[\mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] v_i \right\} dQ$$
$$= \int\limits_{T} \left[p\,\delta_{ik} - \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right] n_k v_i\, dT.$$

Die ersten Integrale sind Raumintegrale über das Raumelement dQ von $Q_{(i)}$, und das letzte ist ein Flächenintegral über das Flächenelement dT von T.

Vertauscht man in (1.04) u_i und v_i, setzt man $-q$ für p und subtrahiert man die so gewonnene Gleichung von (1.04), so ergibt sich die „Greensche Reziprozitätsformel"

$$(1.05) \quad \int\limits_{Q_{(i)}} \left\{ \left[\mu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] v_i - q\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right.$$
$$\left. - \left[\mu \Delta v_i + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)\right] u_i - p\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right\} dQ$$
$$= -\int\limits_{T} \{T_{ik}(u)\, n_k v_i - T'_{ik}(v)\, n_k u_i\}\, dT,$$

worin

$$(1.06) \quad \begin{cases} T_{ik}(u) = -p\,\delta_{ik} + \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \\[2ex] T'_{ik}(v) = q\,\delta_{ik} + \mu\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Setzt man nun in (1.04) $u_i = v_i$ und wählt man für u_i, p Funktionen, die den Gleichungen (1.02) gehorchen, so ergibt sich die „Greensche Energieformel"

$$(1.07)\qquad \int_{Q_{(i)}} \frac{\partial}{\partial x_i}[T_{ik}(u)\,u_k]\,dQ = -\int_T T_{ik}(u)\,n_k\,u_i\,dT$$
$$= \int_{Q_{(i)}} \left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 - \varrho\,X_k\,u_k\right\}dQ,$$

worin die physikalische Tatsache zum Ausdruck kommt, daß die von den Oberflächenkräften geleistete Arbeit gleich ist der Reibungsarbeit vermindert um die Arbeit der äußeren Kräfte. Der Verfasser erblickt in der heuristischen Bedeutung dieser, keineswegs einzig möglichen[5]), Greenschen Formeln die wahre Ursache, daß es später gelingt, analoge Bildungen der Potentiale von doppelten Flächenbelegungen zu konstruieren, aus denen Integralgleichungen mit „regulärem" Kern hergeleitet werden können, was mit den bisher bekannten, ähnlichen Methoden nicht möglich war[6]).

§ 2.
Hydrodynamische Potentiale.

Um eine partikulare Lösung von (1.02) zu bekommen, kann man sich bekanntlich des Fundamentaltensors bedienen. Hierunter verstehen wir die Ausdrücke

$$(2.01)\qquad \begin{cases} v_{ik}(x,y) = \dfrac{1}{8\pi\mu}\left\{\dfrac{\delta_{ik}}{r_{xy}} + \dfrac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r_{xy}^3}\right\} \\ q_k(x,y) = \dfrac{x_k-y_k}{4\pi\,r_{xy}^3}, \end{cases}$$

und die fragliche Lösung lautet[7]):

$$(2.02)\qquad \begin{cases} U_i(x) = \varrho \displaystyle\int_Q v_{ik}(x,y)\,X_k(y)\,dQ, \\ P(x) = \varrho \displaystyle\int_Q q_k(x,y)\,X_k(y)\,dQ. \end{cases}$$

Der Fundamentaltensor entspricht bekanntlich vollkommen der Funktion $1/r_{xy}$ der Potentialtheorie, und wir können den Inbegriff der Funktionen U_i, P als *hydrodynamisches Raumpotential* bezeichnen. Es gelten für $(x) \neq (y)$ die wichtigen Beziehungen

$$(2.03)\qquad \mu\,\Delta_x\,v_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_i} = 0, \quad \Delta_x\,q_k = 0,$$

$$(2.04)\qquad \mu\,\Delta_y\,v_{ik} = -\frac{\partial q_k}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial v_{ik}}{\partial y_i} = 0, \quad \Delta_y\,q_k = 0,$$

$$(2.05)\qquad v_{ik}(x,y) = v_{ki}(y,x).$$

---

[5]) Man vergleiche a. a. O. [1]), S. 49.

[6]) Man vergleiche C. W. Oseen, Hydrodynamik. Leipzig 1927.

[7]) Dabei müssen $X_k(y)$ gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen. Vgl. unten, Satz I, S. 337.

Ferner haben wir, falls wir mit v_{ij}, q_j nach (1.06) die Ausdrücke $T_{ik}(v)_x$ und $T'_{ik}(v)_y$ bilden,

$$- T_{ik}(v)_x = T'_{ik}(v)_y = \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{4\pi r_{xy}^5}. \tag{2.06}$$

Der letzte Ausdruck wird auch mit $T'_{ik}(v; x, y)$ bezeichnet, um die Abhängigkeit zweier Punkte anzudeuten. Die bei den Differentiationsoperatoren angebrachten Indizes deuten den betreffenden Bezugspunkt an.

In Verfolgung eines aus der Potentialtheorie her wohlbekannten Verfahrens betrachten wir nun dasjenige Teilgebiet Q_0 unseres Gebietes Q, das zwischen der Begrenzungsfläche T und der Fläche einer kleinen Kugel T_0 vom Radius r_0 rings um einen festen inneren Punkt (x) von Q liegt, und wenden auf Q_0 die Formel (1.05) an, indem wir für v_i, q die Funktionen v_{ik}, q_k als Funktionen von (y) wählen. Für u_i, p denken wir uns eine im Bereiche $Q + T$ stetige Lösung der Gleichungen (1.02), für die der Ausdruck $T_{ik}(u)$ am Rande stetig bleibt. Lassen wir dann r_0 gegen Null streben, so gibt nur der $T'_{ik}(v)$ enthaltende Teil des über T_0 erstreckten Integrals einen von Null verschiedenen Beitrag, und wir bekommen

$$\left\{\begin{aligned} u_i(x) = {} & \varrho \int_{Q_{(i)}} v_{ik}(x, y) X_k(y)\, dQ \\ & - \int_T T_{jk}(u)\, n_k(\eta)\, v_{ij}(x, \eta)\, dT \\ & + \int_T T'_{ik}(v; x, \eta)\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, dT, \end{aligned}\right. \tag{2.07}$$

wobei wir den Quellpunkt von T mit (η) bezeichnet haben, und also $T'_{ik}(v; x, \eta)$ nach (2.06) zu bilden ist, indem man η für y einsetzt. Um den entsprechenden Ausdruck für $p(x)$ aufschreiben zu können, bemerken wir, daß gemäß (1.06), (2.03) und (2.06)

$$\begin{aligned} & \Delta_x T'_{ik}(v; x, \eta) \\ \equiv {} & \Delta_x T'_{ik}(v)_\eta = \Delta_x q_j \delta_{ik} - \mu \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_x v_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_x v_{kj}\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left[2 \frac{\partial q_j}{\partial x_k}\right], \end{aligned}$$

und bekommen somit

$$\left\{\begin{aligned} p(x) = {} & \varrho \int_{Q_{(i)}} q_k(x, y) X_k(y)\, dQ \\ & - \int_T T_{jk}(u)\, n_k(\eta)\, q_j(x, \eta)\, dT \\ & - 2\mu \int_T \frac{\partial q_j}{\partial x_k} n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, dT. \end{aligned}\right. \tag{2.08}$$

Falls der Punkt (x) in $Q_{(e)}$ außerhalb der geschlossenen Fläche T liegt, so kommt links in (2.07) und (2.08) die Zahl Null. Die in (2.07) und (2.08) auftretenden Integrale sind offenbar die zweckmäßigen Analoga der gewöhnlichen Potentiale. In der ersten Zeile der beiden Formeln steht das schon e ıgeführte hydrodynamische Raumpotential, in der zweiten und dritten entsprechend die *hydrodynamischen Potentiale einfacher* bzw. *doppelter Flächenbelegungen*.

Wir wollen nun, unter Zugrundelegung beliebiger stetiger Flächenbelegungsvektoren $2\psi_j(\eta)$ und $2\varphi_j(\eta)$, die Eigenschaften der hydrodynamischen Potentiale einfacher und doppelter Belegungen einer geschlossenen Fläche T der Klasse Ah studieren. Wir führen für diese Funktionenkomplexe die Bezeichnungen $V_i(x)$, $\Omega(x)$ bzw. $W_i(x)$, $\Pi(x)$ ein und bekommen mit Rücksicht auf (2.01) und (2.06)

$$(2.09)\qquad \begin{cases} V_i(x) = \dfrac{1}{4\pi\mu}\displaystyle\int_T \left\{\frac{\delta_{ij}}{r_{x\eta}} + \frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)}{r_{x\eta}^3}\right\}\psi_j(\eta)\,dT, \\ \Omega(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\displaystyle\int_T \frac{\psi_j(\eta)}{r_{x\eta}}\,dT, \end{cases}$$

$$(2.10)\qquad \begin{cases} W_i(x) = \dfrac{3}{2\pi}\displaystyle\int_T (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\,\varphi_j(\eta)\,\frac{dT}{r_{x\eta}^5}, \\ \Pi(x) = -\dfrac{\mu}{\pi}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\displaystyle\int_T (x_k-\eta_k)\,n_k(\eta)\,\varphi_j(\eta)\,\frac{dT}{r_{x\eta}^3}. \end{cases}$$

Für die letzteren Funktionen werden wir auch die abgekürzte Bezeichnung

$$(2.11)\qquad \begin{cases} W_i(x) = \displaystyle\int_T K_{ij}(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \\ \Pi(x) = \displaystyle\int_T k_j(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT \end{cases}$$

gebrauchen.

Die Funktionenkomplexe $V_i(x)$, $\Omega(x)$ und $W_i(x)$, $\Pi(x)$ sind im ganzen Raume außer der Fläche T selbst analytisch. Aus der Herleitung folgt, daß sie, jeder für sich, den Gleichungen (1.03) gehorchen. $V_i(x)$ durchsetzt die Fläche T stetig. Hingegen weist $W_i(x)$ einen Sprung, ähnlich wie das gewöhnliche Potential einer Doppelbelegung, auf, d. h. es gilt

$$(2.12)\qquad \begin{cases} W_i(\xi)_{(i)} = \varphi_i(\xi) + W_i(\xi) = \varphi_i(\xi) + \displaystyle\int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \\ W_i(\xi)_{(e)} = -\varphi_i(\xi) + W_i(\xi) = -\varphi_i(\xi) + \displaystyle\int_T K_{ij}(\xi,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT, \end{cases}$$

indem wir mit $W_i(\xi)_{(i)}$ und $W_i(\xi)_{(e)}$ die Grenzwerte von $W_i(x)$ bei Annäherung von (x) gegen (ξ) von der inneren bzw. äußeren Seite her verstehen.

Weiter bestätigt man leicht die folgende Eigenschaft, die derjenigen des Gaußschen Integrals in der Potentialtheorie analog ist: Es sei $\varphi_j(\eta) = c_j$

ein konstanter Vektor; alsdann gilt

$$(2.13)\qquad W_i(x)=\begin{cases} 2c_i & \text{für } (x) \text{ in } Q_{(i)}, \\ c_i & \text{„} \quad (x) \text{ auf } T, \\ 0 & \text{„} \quad (x) \text{ in } Q_{(e)}. \end{cases}$$

Berechnen wir den Spannungstensor $T_{ik}(V)$ der von $V_i(x)$, $\Omega(x)$ dargestellten Strömung, so ergibt sich nach (2.06)

$$(2.14)\qquad T_{ik}(V)=-\frac{3}{2\pi}\int_T (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\,\psi_j(\eta)\frac{dT}{r^5_{x\eta}}.$$

Speziell ergibt sich dann für die auf die Innen- bzw. Außenwände wirkenden Spannungen $T_{ik}(V)_{(i)}n_k$ und $-T_{ik}(V)_{(e)}n_k$

$$(2.15)\qquad \begin{cases} T_{ik}(V)_{(i)}n_k=-\psi_i(\xi)+\int_T K_{ji}(\eta,\xi)\,\psi_j(\eta)\,dT, \\ T_{ik}(V)_{(e)}n_k=\quad\psi_i(\xi)+\int_T K_{ji}(\eta,\xi)\,\psi_j(\eta)\,dT. \end{cases}$$

§ 3.
Eigenschaften der hydrodynamischen Potentiale.

Wir widmen diesen Paragraphen dem Studium der Ableitungen der hydrodynamischen Potentiale und ihrer Stetigkeitseigenschaften.

Um die Gültigkeit einer auf S. 334 gemachten Aussage zu beweisen, hat man auf das hydrodynamische Analogon eines bekannten potentialtheoretischen Satzes von O. Hölder[8]) zurückzugreifen. Wir betrachten die durch eine stetige Funktion $X_k(y)$ nach (2.02) erzeugten Funktionen $U_i(x)$ und $P(x)$ und haben dann:

Satz I. *Ist die Funktion $X_k(y)$ in einem Gebiete Q H-stetig, so existieren die zweiten Ableitungen der Funktion $U_i(x)$ und die ersten Ableitungen der Funktion $P(x)$, und* (2.02) *im besonderen stellt eine Lösung der Gleichungen* (1.02) *dar.*

Will man den einem hydrodynamischen Potentiale einer einfachen Flächenbelegung entsprechenden Spannungstensor $T_{ik}(V)$, bzw. beliebige, erste Ableitungen $\partial V_i/\partial x_k$ im Gebiete $Q_{(i)}$ studieren, so zeigt sich, daß die im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen hinsichtlich der Belegungsfunktion nicht ausreichen, um die Stetigkeit am Rande der betreffenden Funktionen zu sichern. Wir beweisen den folgenden Satz, der zugleich $T_{ik}(V)$ und $\partial V_i/\partial x_k$ umfaßt[9]).

[8]) Man vergleiche L. Lichtenstein a. a. O. [4]), wo sich die zugehörige potentialtheoretische Literatur verzeichnet findet.

[9]) Der Beweis des entsprechenden potentialtheoretischen Satzes ist in unserem Beweis enthalten. Vgl. a. a. O. [4]), S. 201, Fußnote [60]).

Satz II. *Der Spannungstensor $T_{ik}(V)$ eines hydrodynamischen Potentials $V_i(x)$ einer mit dem Exponenten h' H-stetigen Belegung $\psi_j(\eta)$ der Fläche T (der Klasse Ah) ist im Gesamtbereiche $Q+T$* [10]) *H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der beiden Zahlen h' und h ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird für viele ähnliche Untersuchungen dieser Arbeit grundlegend sein. Die späteren Beweise werden zweckmäßige Varianten dieses Beweises sein und können deshalb oft kurz skizziert werden.

Wir beweisen zunächst, daß die Funktion $T_{ik}(V)$ am Rande bestimmte Grenzwerte besitzt. Es genügt dabei das Integral

$$J(x)=\int\limits_{\Sigma_1}\frac{(x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)}{r^5_{x\eta}}\psi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2\equiv\int\limits_{\Sigma_1}H(x,\eta)\,\psi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu betrachten, wobei Σ_1 derjenige Teil der Fläche ist, der von einem Kreiszylinder vom Radius ϱ_1 um die Flächennormale N als Achse herausgeschnitten wird. N soll dabei durch denjenigen Flächenpunkt (ξ) gehen, gegen welchen wir (x) konvergieren lassen wollen. Wir nehmen (ξ) als Ursprung unseres Koordinatensystems und N als x_3-Achse. Falls ϱ_1 hinreichend klein fixiert wird, so wird sicher $\psi(\eta)$ eine auf Σ_1 eindeutige Funktion von η_1 und η_2 sein, die H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$ ist.

Man sieht nun, daß man alle vorkommenden Fälle behandeln kann, falls nur die den folgenden fünf Indexkombinationen i, j, k entsprechenden Integrale erledigt sind:

i	j	k
1	1	1
1	1	3
1	3	3
3	3	3
1	2	3.

Wir haben uns zuerst davon zu überzeugen, daß der Hauptwert von

$$\overline{H}(x)=\int\limits_{\Sigma_1}H(x,\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 \tag{3.01}$$

existiert, auch wenn (x) gegen (ξ) strebt. Zudem beachten wir die Identitäten $(r\equiv r_{x\eta})$

[10]) Unter der Ausdrucksweise „Stetigkeit usw. in $Q+T$", die wohl als eingebürgert anzusehen ist, verstehen wir, daß die betreffende Funktion in $Q_{(i)}$ stetig sein soll und darüber hinaus bestimmte Grenzwerte am Rande T besitzen möge. Vgl. a. a. O. [4]), S. 183.

$$
(3.02)\quad \begin{cases}
\dfrac{(x_1-\eta_1)^3}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\left[\dfrac{2}{r}+\dfrac{(x_1-\eta_1)^2}{r^3}\right], \\[2mm]
\dfrac{(x_1-\eta_1)^2(x_3-\eta_3)}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\partial}{\partial\eta_3}\dfrac{1}{r}+\dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)}{r^3}\right], \\[2mm]
\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)^2}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\dfrac{(x_3-\eta_3)^2}{r^3}, \\[2mm]
\dfrac{(x_3-\eta_3)^3}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{\partial}{\partial\eta_3}\dfrac{1}{r}-\dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_3-\eta_3)}{r^3}-\dfrac{\partial}{\partial\eta_2}\dfrac{(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^3}\right], \\[2mm]
\dfrac{(x_1-\eta_1)(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^5} \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial\eta_1}\dfrac{(x_2-\eta_2)(x_3-\eta_3)}{r^3}.
\end{cases}
$$

In denjenigen Gliedern von (3.01), wo Ableitungen nach η_1 und η_2 vorkommen, läßt sich partiell integrieren, und es entstehen Kurvenintegrale über die Randkurve L_1 von Σ_1. Diese Kurvenintegrale sind außerhalb der Belegungskurve L_1 selbst analytisch. Die übrigen Glieder haben die Form

$$
(3.03)\qquad i(x) = \int\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r}\,d\eta_1\,d\eta_2 .
$$

Wir untersuchen den Hauptwert dieses Integrals, wenn (x) gegen (ξ) strebt. Wir setzen $(x_1-\eta_1)^2+(x_2-\eta_2)^2+x_3^2 = r_0^2$ und haben somit

$$
(3.04)\qquad i(x) = \int\limits_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right]d\eta_1\,d\eta_2 + \int\limits_{\Sigma_1}\frac{x_3}{r_0^3}\,d\eta_1\,d\eta_2 \equiv i_1(x)+i_2(x).
$$

Es gilt nun unabhängig von der Lage des Punktes (x)

$$
\left|\frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right| = \left|(x_3-\eta_3)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_0^3}\right)-\frac{\eta_3}{r_0^3}\right| < \frac{C\,|\eta_3|}{r_0^3} < \frac{C\,|\eta_3|}{\varrho^3},
$$

falls wir $\eta_1^2+\eta_2^2=\varrho^2$ setzen und den Punkt (x) auf das Innere eines geraden Kreiskegels Kg mit der Spitze in (ξ) um N als Achse vom Öffnungswinkel $2\alpha<\pi$ beschränken. C soll hier und später eine Konstante bedeuten, die in den verschiedenen Ungleichungen verschieden sein kann. Nun gilt für Flächen der Klasse Ah

$$
|\eta_3| < C\varrho^{1+h},
$$

also

$$
\left|\frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right| < \frac{C}{\varrho^{2-h}},
$$

und folglich konvergiert das erste Integral $i_1(x)$ in (3.04) absolut und gleichmäßig, auch wenn (x) gegen (ξ) rückt. Speziell gilt

$$
(3.05)\qquad \int\limits_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r}-\frac{x_3}{r_0^3}\right)d\eta_1\,d\eta_2 = O(\sigma^h),
$$

falls Σ_0 irgendein Teilgebiet von Σ_1 ist, dessen lineare Abmessung σ ist.

Der Hauptwert des zweiten Integrals in (3.04) existiert bekanntlich und ist gleich dem körperlichen Winkel, unter welchem der Kreis $\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varrho_1^2$ in der $\eta_1 \eta_2$-Ebene von (x) aus beobachtet werden kann.

Betrachten wir nun wieder $J(x)$, so gilt

$$(3.06)\quad J(x) = \psi(\xi) \int_{\Sigma_1} H(x,\eta)\, d\eta_1\, d\eta_2 + \int_{\Sigma_1} H(x,\eta)\,[\psi(\eta) - \psi(\xi)]\, d\eta_1\, d\eta_2,$$

und das erste Integral besitzt hier, nach der eben durchgeführten Betrachtung, einen wohlbestimmten Grenzwert, wenn (x) gegen (ξ) konvergiert. Unter Benutzung der Abschätzungen

$$(3.07)\quad \begin{cases} |H(x,\eta)| < \dfrac{C}{\varrho^3}, \\ |\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C\varrho^{h} \end{cases}$$

ersieht man, daß auch das zweite Integral in (3.06) absolut und gleichmäßig konvergiert, und daß somit $J(x)$ einen wohlbestimmten *Grenzwert besitzt, wenn (x), immer in Kg, auf beliebige Weise gegen den Randpunkt (ξ) heranrücken darf.*

Wir bilden nun die Differenz der Funktionswerte $J(x)$ für zwei Punkte (x) und (x') im Abstande σ und in beliebiger Orientierung in der Nähe der Randfläche. Wir verbinden die Punkte (x) und (x') durch eine geradlinige Strecke, deren Mittelpunkt $(\bar{x})$ sei, und ziehen die Flächennormale N durch $(\bar{x})$. Diese möge die Fläche T in $(\bar{\xi})$ durchsetzen. Wir nehmen $(\bar{\xi})$ als Ursprung unseres Koordinatensystems und N als x_3-Achse. Σ_1 sei derjenige Teil der Fläche T, der von einem Kreiszylinder K vom Radius ϱ_1 um N als Achse herausgeschnitten wird. Gleichfalls sei Σ_0 der vom koaxialen Kreiszylinder vom Radius $\sigma < \varrho_1$ herausgeschnittene Teil von T. Die Lote von den Punkten (x) und (x') auf die $\eta_1 \eta_2$-Ebene mögen die Fläche T in (ξ) bzw. (ξ') durchschneiden. Die Tangentenebenen der Fläche in (ξ) und (ξ') mögen E bzw. E' heißen. Der Kreiszylinder K soll dann aus E und E' die Ellipsen E_k und E_k' herausschneiden.

Um zuerst eine Schätzung des Hauptwertes von $\bar{H}(x) - \bar{H}(x')$ zu bewirken, können wir uns nach dem oben Gesagten damit begnügen, die Differenz

$$(3.08)\quad i(x) - i(x') = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r}\, d\eta_1\, d\eta_2 - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'}\, d\eta_1\, d\eta_2$$

zu betrachten, wo r für $r_{x\eta}$ und r' für $r_{x'\eta}$ steht. Im ersten Integral von (3.08) schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0}\right]$$

und im zweiten

$$\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'} = \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'}\right].$$

Hier soll r_0 der Abstand von (x) zur Projektion (ζ) des Punktes (η) auf die Ebene E bedeuten, und r_0' eine ähnliche Bedeutung in bezug auf (x') und (ζ') auf E' besitzen. Die Integrale

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0} d\eta_1 d\eta_2 \quad \text{und} \quad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'} d\eta_1 d\eta_2$$

können nun durch Drehung des Koordinatensystems, so daß die neue η_3-Achse auf E bzw. E' senkrecht steht, nach Abspaltung von Kurvenintegralen über die Randkurve von Σ_1, die mit Faktoren von der Größenordnung σ^h multipliziert sind, wiederum als körperliche Winkel gedeutet werden. Die Differenz der Integrale wird bis auf Größen der Ordnung σ^h gleich der Differenz derjenigen körperlichen Winkel, unter welchen E_k von (x) und E_k' von (x') aus beobachtet werden können. Jene Differenz wird also selbst von der Ordnung σ^h sein, da der Winkel zwischen den Ebenen E und E' von dieser Ordnung ist. Wir können also schreiben

$$(3.09) \quad i(x) - i(x') = \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0} \right) d\eta_1 d\eta_2 - \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'} \right) d\eta_1 d\eta_2$$
$$+ \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} \left[\frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'} \right] d\eta_1 d\eta_2 + O(\sigma^h).$$

Man beweist nun leicht, ähnlich wie bei (3.05), daß die beiden ersten Integrale in (3.09) von der Größenordnung σ^h sind. Es gilt ferner identisch

$$(3.10) \quad \frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \eta_3} \frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial \zeta_3'} \frac{1}{r_0'}$$
$$\equiv \frac{x_3 - \eta_3}{r^3} - \frac{x_3 - \zeta_3}{r_0^3} - \frac{x_3' - \eta_3}{r'^3} + \frac{x_3' - \zeta_3'}{r_0'^3} \equiv (x_3 - x_3') \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right)$$
$$- (x_3' - \eta_3) \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r_0'^3} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_0^3} \right) + \eta_3 \left(\frac{1}{r_0'^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) + \frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}$$
$$\equiv \sum_{\substack{m+n=4 \\ m,n>0}} \left[(x_3 - x_3') \frac{r_0 - r}{r^m r_0^n} - (x_3' - \eta_3) \left(\frac{r_0' - r'}{r'^m r_0'^n} - \frac{r_0 - r}{r^m r_0^n} \right) + \eta_3 \frac{r_0 - r_0'}{r_0'^m r_0^n} \right]$$
$$+ \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3} \right].$$

Es ist

$$(3.11) \quad \frac{r_0' - r'}{r'^m r_0'^n} - \frac{r_0 - r}{r^m r_0^n} \equiv [(r_0' - r) - (r_0 - r)] \frac{1}{r'^m r_0'^n}$$
$$+ (r_0 - r) \left[\frac{1}{r'^m r_0'^n} - \frac{1}{r^m r_0^n} \right],$$

und

$$(3.12) \quad \frac{1}{r'^m r_0'^n} - \frac{1}{r^m r_0^n} \equiv \left(\frac{1}{r'^m} - \frac{1}{r^m} \right) \frac{1}{r_0'^n}$$
$$+ \left(\frac{1}{r_0'^n} - \frac{1}{r_0^n} \right) \frac{1}{r^m} \equiv \frac{r - r'}{r_0'^n} \sum_{\substack{p+q=m+1 \\ p,q>0}} \frac{1}{r'^p r^q} + \frac{r_0 - r_0'}{r^m} \sum_{\substack{p+q=n+1 \\ p,q>0}} \frac{1}{r_0'^p r_0^q}.$$

Nun gelten, wie dies sofort eine geometrische Betrachtung lehrt, auf $\Sigma_1 - \Sigma_0$ die folgenden Ungleichungen, unabhängig von der Größe von σ, auch wenn (x) und (x') sich beliebig der Fläche T herannahen $(\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varrho^2)$

$$(3.13)\qquad \begin{cases} |x_3 - x_3'| < \sigma, \\ |\eta_3| < C\varrho^{1+h}, \\ |x_3' - \eta_3| < r', \\ \dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r_0}, \dfrac{1}{r'}, \dfrac{1}{r_0'} < \dfrac{C}{\varrho}, \\ |r - r'| < \sigma, \\ |r_0 - r| < C\varrho^{1+h}, \\ |r_0' - r_0| < C(\sigma + \varrho\sigma^h), \\ |(r_0' - r') - (r_0 - r)| < C(\varrho^{1+h}\sigma^h + \varrho^h\sigma). \end{cases}$$

Mit Hilfe von (3.10), (3.11), (3.12) und (3.13) gewinnen wir die Abschätzung

$$(3.14)\qquad \left| \frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial\zeta_3}\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial\eta_3}\frac{1}{r'} + \frac{\partial}{\partial\zeta_3'}\frac{1}{r_0'} - \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}\right] \right| \leqq C\left(\frac{\sigma}{\varrho^{3-h}} + \frac{\sigma^h}{\varrho^{2-h}}\right),$$

gleichmäßig gültig, auch wenn (x) und (x') an T heranrücken würden.

Nun ist

$$\int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} \left[\frac{\zeta_3}{r_0^3} - \frac{\zeta_3'}{r_0'^3}\right] d\eta_1\, d\eta_2$$

als ein Sonderfall des oben auf S. 341 behandelten Integrals von der Größenordnung σ^h. Führen wir die Abschätzung (3.14) in das letzte Integral von (3.09) ein, so zeigt sich, daß der übrigbleibende Teil dieses Integrals absolut und gleichmäßig konvergent und von der Größenordnung σ^h wird. Damit haben wir bewiesen, daß eine Ungleichung der Form

$$(3.15)\qquad |\overline{H}(x) - \overline{H}(x')| < C r_{xx'}^h$$

gilt, gleichmäßig in $Q + T$, wobei h der Exponent der Fläche (der Klasse Ah) und C eine Konstante ist, die nur von h und von der Fläche selbst abhängt. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu der Abschätzung von $\delta J = J(x) - J(x')$ zurück.

Es gilt nach (3.06) bei zweckmäßiger Zerlegung der Integrale

$$\begin{aligned}(3.16)\qquad \delta J &= \int_{\Sigma_1} [H(x, \eta) - H(x', \eta)]\, \psi(\eta)\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ &\equiv \int_{\Sigma_0} \{H(x, \eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi)] - H(x', \eta)[\psi(\eta) - \psi(\xi')]\}\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ &\quad + [\psi(\xi) - \psi(\xi')] \int_{\Sigma_0} H(x', \eta)\, d\eta_1\, d\eta_2 + \psi(\xi)[\overline{H}(x) - \overline{H}(x')] \\ &\quad + \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0} [H(x, \eta) - H(x', \eta)][\psi(\eta) - \psi(\xi)]\, d\eta_1\, d\eta_2 \\ &\equiv \delta J_0 + \delta J_1 + \delta J_2 + \delta J_3,\end{aligned}$$

und wir führen die Abschätzung für die einzelnen Teile von δJ jedes für sich aus.

Der Symmetrie wegen genügt es bei der Schätzung von δJ_0, das Integral

$$\delta J_0' = \int_{\Sigma_0} H(x, \eta)\left[\psi(\eta) - \psi(\xi)\right] d\eta_1\, d\eta_2$$

allein zu betrachten. Hier gilt wie bei (3.07)

$$|H(x, \eta)| < \frac{C}{r^2} < \frac{C}{\varrho_0^2},$$

$$|\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C \varrho_0^{\bar{h}},$$

falls wir $\varrho_0^2 = (\eta_1 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \xi_2)^2$ setzen. Dann ist

$$|\delta J_0'| < C \int_0^{2\sigma} \frac{\varrho_0^{\bar{h}} \varrho_0\, d\varrho_0}{\varrho_0^2} = O(\sigma^{\bar{h}}),$$

und daher auch

$$\delta J_0 = O(\sigma^{\bar{h}}). \tag{3.17}$$

Da $\bar{H}(x')$, unabhängig von der Lage von (x'), beschränkt bleibt, so gilt ferner

$$\delta J_1 = O(\sigma^{\bar{h}}). \tag{3.18}$$

Aus (3.15) folgt

$$\delta J_2 = O(\sigma^{h}). \tag{3.19}$$

Schließlich gelten auf $\Sigma_1 - \Sigma_0$ die Ungleichungen

$$|H(x, \eta) - H(x', \eta)| < C \frac{\sigma}{\varrho^3},$$

$$|\psi(\eta) - \psi(\xi)| < C \varrho^{\bar{h}},$$

falls wir $\varrho^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$ setzen, und damit erhält man

$$|\delta J_3| < C \int_\sigma^{\varrho_1} \frac{\sigma \varrho^{\bar{h}} \varrho\, d\varrho}{\varrho^3} = O(\sigma^{\bar{h}}), \tag{3.20}$$

und endlich aus (3.16) bis (3.20)

$$\delta J = O(\sigma^{\bar{h}}),$$

was zu beweisen war.

Es gelten die folgenden beiden Spezialfälle des Satzes II:

Satz II A. *Der Hauptwert des Integrals* (vgl. (2.11))

$$\int_T K_{ij}(x, \eta)\, d_\eta T$$

existiert und ist eine in $Q + T$ mit dem Exponenten h der Fläche T (der Klasse $A h$) H-stetige Funktion von (x).

Satz II B. *Das hydrodynamische Potential $W_i(x)$ der mit dem Exponenten h' H-stetigen Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ ist im Gesamtbereiche $Q+T$ (der Klasse Ah) H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen h und h' ist.*

Wir führen weiter ein paar Sätze an, deren Beweise ähnlich oder gar einfacher als derjenige des eben bewiesenen sind.

Satz III. *Die Funktionen*

$$W_i(\xi) = \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT$$

und

$$\overline{W}_i(\xi) = \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \varphi_j(\eta)\, dT$$

sind auf der Fläche T (der Klasse Ah) H-stetig mit dem Exponenten h der Fläche, falls $\varphi_j(\eta)$ auf T schlechthin stetig ist.

Satz III A. *Falls die Fläche T der Klasse Bh angehört, so gilt für irgend zwei Punkte (ξ) und (ξ') eine Ungleichung der Form*

$$|W_i(\xi) - W_i(\xi')| < C r_{\xi\xi'} |\log r_{\xi\xi'}| \tag{3.21}$$

und eine entsprechende für $\overline{W}_i(\xi)$.

Satz IV. *Die Funktionen $W_i(\xi)$ und $\overline{W}_i(\xi)$ besitzen, falls die Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ H-stetig mit dem Exponenten h' ist, auf der Fläche T (der Klasse Bh) erste Ableitungen, die ebenfalls H-stetig mit dem Exponenten h' sind.*

Die Beweise der Sätze III und IV unterscheiden sich von demjenigen des Satzes II daran, daß man bei den partiellen Integrationen, die zum Existenzbeweis des Hauptwertes nötig sind, den Aufpunkt (ξ) (der nunmehr im Integrationsgebiet liegt) durch einen kleinen Kreis ausschließen muß. Der Beitrag dieses kleinen Kreises zum Hauptwert verschwindet.

Wir betrachten nun die ersten Ableitungen von $W_i(x)$ in $Q+T$ und behaupten den

Satz V. *Die ersten Ableitungen der Funktion $W_i(x)$ oder aber die Funktionen $T_{ik}(W)$ sind im Bereiche $Q+T$ (der Klasse Bh) H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, falls die ersten Ableitungen der Belegungsfunktion $\varphi_j(\eta)$ auf T H-stetig mit dem Exponenten h' sind, und $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen h und h' ist.*

Es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß (x) in der Nähe eines Randpunktes (ξ) liegt, den wir als Ursprung unseres Koordinatensystems wählen, wobei die x_3-Richtung mit der Flächennormale in (ξ) zusammenfallen soll. Nach einer ähnlichen Zerlegung der Fläche T wie oben beim Beweise des Satzes II sieht man sofort, daß es darauf ankommt, die ersten Ableitungen der Funktion

$$(3.22)\quad \int_{\Sigma_1} K_{ij}(x,\eta)\,\varphi_j(\eta)\,dT = \int_{\Sigma_1} (x_i-\eta_i)(x_j-\eta_j)(x_k-\eta_k)\frac{\varphi(\eta)}{r^5}\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu studieren, worin $\varphi(\eta)$ eine mit dem Exponenten $\bar{h}$ H-stetig differentiierbare Funktion von η_1 und η_2 ist. Es genügt dabei, dieselben Indexkombinationen i, j, k zu betrachten, wie beim Beweise des Satzes II. Dann können wir die Identitäten (3.02) gebrauchen und überall dort, wo nach η_1 und η_2 differentiiert ist, partiell integrieren. Die entstehenden Kurvenintegrale über die Randkurve L_1 von Σ_1 sind außer auf L_1 selbst analytisch, und für die bei der partiellen Integration rückbleibenden Glieder sind wir auf den Beweis des Satzes II zurückgeführt worden. Ähnlich können wir auch mit den übrigen Gliedern von (3.22) verfahren, wofern es sich um die Ableitungen in die Richtungen x_1 oder x_2 handelt. Es sind nur noch die Glieder vom Typus

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial^2}{\partial\eta_3^2}\frac{1}{r}\,\varphi(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2$$

zu betrachten. Hier benutzen wir die Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta_3^2}\frac{1}{r} \equiv -\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right]\frac{1}{r}$$

und können dann auch diese Glieder auf die eben auseinandergesetzte Art behandeln. Somit ist der Satz bewiesen.

Satz VA. *Für Flächen der Klasse Bh existiert der Hauptwert von*

$$\int_T \frac{\partial K_{ij}(x,\eta)}{\partial x_m}\,d_\eta T$$

in $Q+T$ und ist dort H-stetig mit dem Exponenten h der Fläche.

Beim Durchgang der Fläche T werden die Funktionen $T_{ik}(V)$, $\frac{\partial V_i}{\partial x_m}$, $\frac{\partial W_i}{\partial x_m}$ usw., falls sie in $Q+T$ stetig sind, im allgemeinen gewisse Sprünge erleiden. Wir gehen hierauf nicht weiter ein und beschränken uns darauf, den folgenden von Faxén herrührenden Satz zu erwähnen[11]). Wir betrachten die Werte des Ausdruckes $T_{ik}(W_i(x))\,n_k(\xi)$ für Punkte (x), die auf der Flächennormalen durch den Flächenpunkt (ξ) von T liegen, und behaupten den

Satz VB. *Es gilt, falls die Belegungsfunktion φ_j der Fläche T (der Klasse Bh) H-stetig differentiierbar ist, die Limesgleichung*

$$T_{ik}(W)_{(i)}\,n_k(\xi) = T_{ik}(W)_{(e)}\,n_k(\xi).$$

[11]) Arkiv f. mat., astr. o. fys. 21 A.

Für die Flächen der Klasse Ah gilt als Analogon eines bekannten Satzes der Potentialtheorie von A. Korn[12]) der folgende

Satz V C. *Für die Werte des Ausdruckes* $T_{ik}[W_i(x)]\, n_k(\xi)$ *in Punkten* (x) *auf der Flächennormale* $n_k(\xi)$ *durch den Flächenpunkt* (ξ) *gilt eine Abschätzung der Form*

$$|r_{x\xi}\, T_{ik}[W_i(x)]\, n_k(\xi)| < C\, r_{x\xi}^{h'}$$

gleichmäßig gültig für (ξ) *auf* T, *wobei die Belegungsfunktion* φ_j *von* $W_i(x)$ *H-stetig mit dem Exponenten* h' *sein soll.*

§ 4.

Die Stokesschen Randwertaufgaben.

Zur Lösung der ersten Stokesschen Randwertaufgabe für ein Innengebiet $Q_{(i)}$ der Klasse Ah setzen wir an

$$\begin{cases} u_i = W_i(x) \\ p = \Pi(x), \end{cases}$$

und bekommen alsdann bei Benutzung von (2.12) in gewohnter Weise

$$\varphi_i(\xi) + \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT = u_i(\xi), \tag{4.01}$$

eine „reguläre" Fredholmsche Integralgleichung zur Bestimmung des unbekannten Belegungsvektors $\varphi_i(\xi)$.[13])

Falls wir in (4.01) vor dem Integralzeichen ein Parameter λ einführen, so erkennen wir nach (2.12) und (2.15), daß die Gleichung

$$\varphi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT = u_i(\xi) \tag{4.02}$$

der Aufgabe entspricht, eine Funktion W_i so zu bestimmen, daß auf T die Gleichung

$$W_i(\xi)_{(i)} - W_i(\xi)_{(e)} + \lambda [W_i(\xi)_{(i)} + W_i(\xi)_{(e)}] = 2 u_i(\xi) \tag{4.03}$$

gilt, wogegen die transponierte Gleichung

$$\psi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \psi_j(\eta)\, dT = T_{ik}(\xi)\, n_k(\xi) \tag{4.04}$$

der Aufgabe gleichkommt, eine Funktion V_i so zu bestimmen, daß auf T die Gleichung

$$\begin{aligned} T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k - T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k + \lambda [T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k + T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k] \\ = 2 T_{ik}(\xi)\, n_k(\xi) \end{aligned} \tag{4.05}$$

---

[12]) A. Korn, Potentialtheorie I, S. 392. Dümmler 1899.

[13]) „Regulär", weil der Kern $K_{ij}(\xi, \eta)$ für $(\xi) \neq (\eta)$ stetig ist und für $(\xi) \to (\eta)$ wie $r_{\xi\eta}^{2-h}$ unendlich wird.

erfüllt ist. Wir haben also ein vollkommenes Analogon zum Problem von Poincaré in der Potentialtheorie.

Man sieht, daß man mit der Gleichung (4.02) für $\lambda = +1$ und -1 die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innen- bzw. Außengebiet lösen kann, und daß man entsprechend die zweite Randwertaufgabe durch Gleichung (4.04) für $\lambda = -1$ und $+1$ für das Innen- bzw. Außengebiet beherrscht. Zur vollständigen Erledigung der Randwertprobleme gehört eine Diskussion der Lösungen von (4.02) und (4.04) für die Parameterwerte $\lambda = \pm 1$. Wir werden die Eigenschaften der Resolvente in derselben Art herleiten, wie dies Plemelj im potentialtheoretischen Falle gemacht hat.

Falls wir die Formel (1.07) auf die durch ein hydrodynamisches Potential V_i, Ω einer einfachen Belegung ψ_i der Fläche T dargestellte Strömung anwenden, so ergibt sich einerseits

$$(4.06)\qquad \int\limits_{Q_{(i)}} \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right]^2 dQ = -\int\limits_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k\, V_i\, dT,$$

andererseits, falls wir die Formel (1.07) auf den Raum zwischen T und einer großen Kugel vom Radius R anwenden und dabei das Verhalten der Funktionen V_i, $T_{ik}(V)$ für $R \to \infty$ berücksichtigen,

$$(4.07)\qquad \int\limits_{Q_{(e)}} \frac{\mu}{2}\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right]^2 dQ = \int\limits_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k\, V_i\, dT.$$

Weiter ergibt sich, falls wir die Formel (1.05) auf die hydrodynamischen Potentiale V_i, Ω und V_i', $-\Omega'$ der Belegungsfunktionen ψ_i bzw. ψ_i' der Fläche T anwenden,

$$(4.08)\qquad \int\limits_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k\, V_i'\, dT = \int\limits_T T_{ik}(V')_{(i)}\, n_k\, V_i\, dT,$$

und ähnlicherweise für das Außengebiet

$$(4.09)\qquad \int\limits_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k\, V_i'\, dT = \int\limits_T T_{ik}(V')_{(e)}\, n_k\, V_i\, dT.$$

Es gelten nun die Sätze:

Satz VI. *Alle Pole der Resolvente sind reell.*

Mit Hilfe der Formeln (4.05) ... (4.09) schließt man, genau so wie bei Plemelj [14]), daß der Ausdruck

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

bei nicht identisch verschwindender Nullösung der Gleichung (4.04) reell sein muß, und also muß auch λ reell sein.

---

[14]) Monatshefte f. Math. u. Physik, 15 (1904); vgl. insbesondere die Darstellung bei Goursat, a. a. O. [15]), S. 510.

Satz VII. $\lambda = +1$ *ist ein Pol der Resolvente.*

Es folgt dies einfach daraus, daß die homogene Gleichung (4.04) für $\lambda = 1$ mit der zweiten Gleichung (2.13) identisch ist, falls wir $\psi_i = n_i$ setzen.

Satz VIII. $\lambda = -1$ *ist ein Pol der Resolvente.*

Dies folgt daraus, daß für $\lambda = -1$ die homogene Gleichung (4.02) für $\varphi_i = c_i =$ konst. mit der zweiten Gleichung (2.13) identisch wird.

Satz IX. *Alle Pole der Resolvente sind dem absoluten Betrage nach größer oder gleich eins.*

Aus der homogenen Gleichung (4.05) erschließen wir

$$\int_T T_{ik}(V)_{(e)} n_k V_i \, dT = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \int_T T_{ik}(V)_{(i)} n_k V_i \, dT,$$

und nach (4.06) und (4.07) müssen die Integrale verschiedene Vorzeichen besitzen und also für $-1 < \lambda < +1$ beide identisch verschwinden. Dann muß nach (4.06) und (4.07) der Ausdruck

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$$

im ganzen Raume identisch verschwinden, und also V_i die Bewegung eines starren Körpers darstellen. Da indessen V_i im Unendlichen verschwindet, so folgt daraus, daß V_i im ganzen Raume verschwinden muß. Nun gilt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \mu \Delta V_i \equiv 0$$

für Punkte, die nicht auf der Fläche T liegen. Also muß Ω konstante Werte in $Q_{(i)}$ bzw. $Q_{(e)}$ behalten. Da Ω jedenfalls im Unendlichen verschwindet, so muß Ω und damit $T_{ik}(V)$ in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden. In $Q_{(i)}$ muß $T_{ik}(V)$ die Form $C\,\delta_{ik}$ mit C konstant haben. Nach (2.15) wäre dann die einzige Möglichkeit einer Nullösung für diese λ

$$\psi_i = n_i.$$

Da aber diese Lösung dem Parameterwert $\lambda = +1$ gehört, so muß sein: $\psi_i \equiv 0$, d. h. zwischen -1 und $+1$ existieren keine Pole der Resolvente.

Satz X. *Für $\lambda = +1$ besitzen die homogenen Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *je eine einzige Lösung.*

Nach (4.05) und (4.07) muß der Ausdruck

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \tag{4.10}$$

in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden, und V_i also die Bewegung eines starren Körpers darstellen. Da aber V_i im Unendlichen verschwindet, so muß V_i

in $Q_{(e)}$ identisch verschwinden. Nun bleibt V_i beim Durchgang der Fläche T stetig. Also muß der Ausdruck (4.10) auch in $Q_{(i)}$ identisch verschwinden, und V_i auch in $Q_{(i)}$ einerseits die Bewegung eines starren Körpers darstellen, andererseits wegen des Verschwindens am Rande in $Q_{(i)}$ identisch verschwinden. Es muß ferner Ω in $Q_{(e)}$ verschwinden und in $Q_{(i)}$ konstant bleiben, so daß der Spannungstensor die Form $T_{ik} = C\,\delta_{ik}$ mit C konstant haben muß. Hieraus folgt unmittelbar, daß die homogene Gleichung (4.04) für $\lambda = +1$ nur die einzige nicht triviale Lösung $\psi_i = n_i$ haben kann, denn gesetzt, es gäbe deren zwei linear unabhängige, ψ_i und ψ_i', dann würden die Spannungstensoren T_{ik} und T_{ik}' dieser Lösungen in $Q_{(i)}$ die Werte $C\,\delta_{ik}$ und $C'\,\delta_{ik}$ besitzen, wobei C und C' beide Konstante sein würden. Dann würde man aber zwei Konstanten α und α' derart bestimmen können, daß

$$\alpha C + \alpha' C' = 0$$

und der Spannungstensor $\alpha T_{ik} + \alpha' T_{ik}'$ würde nach (2.15) einer Strömung entsprechen, für die

$$\alpha \psi_i + \alpha' \psi_i' = 0$$

wäre, entgegen der Voraussetzung.

Hierdurch ist in der Tat bewiesen, daß *die erste Stokessche Randwertaufgabe bei Innengebieten der Klasse Ah für alle stetigen Randvektoren* u_i, *die der Bedingung*

$$\int_T u_i n_i \, dT = 0 \tag{4.11}$$

genügen, lösbar ist. Die Lösung ist durch ein hydrodynamisches Potential einer Doppelbelegung dargestellt, und die betreffende Doppelbelegungsfunktion durch die Fredholmsche Auflösungsformel der Gleichung (4.01) geliefert.

Satz XI. *Alle Pole mit möglicher Ausnahme von* $\lambda = +1$ *sind einfach.*

Denn gesetzt, es sei λ ein mehrfacher Pol. Dann würde es zwei nicht identisch verschwindende Funktionen ψ_i und ψ_i' geben[15]), für die

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_i(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \psi_j(\eta)\, dT = 0, \\ &\psi_i(\xi) + \psi_i'(\xi) + \lambda \int_T K_{ji}(\eta, \xi)\, \psi_j'(\eta)\, dT = 0 \end{aligned}\right. \tag{4.12}$$

gelten würde. Die Plemeljsche Schlußweise ergibt für das der Funktion ψ_i entsprechende hydrodynamische Potential V_i die Bedingung

$$\int_T T_{ik}(V)_{(e)}\, n_k V_i \, dT = \int_T T_{ik}(V)_{(i)}\, n_k V_i \, dT.$$

---

[15]) Vgl. z. B. E. Goursat, Cours d'Analyse 3, 2. Aufl., S. 511.

Da aber diese Integrale nach (4.06) und (4.07) verschiedenes Vorzeichen haben müssen, so verschwinden sie beide, und dieser Bedingung kann nur die Nullösung $\psi_i = n_i$ entsprechen. Also muß für $\lambda \neq +1$ ψ_i identisch verschwinden und die Annahme (4.12) führt zum Widerspruch. Ob der Pol $\lambda = +1$ einfach ist oder nicht, läßt sich auf Grund dieses Beweises nicht entscheiden. An dem speziellen Beispiel, wo T ein Kugelkörper ist, wird der Kern unserer Integralgleichung symmetrisch und also auch der Pol $\lambda = +1$ einfach sein. Vergleiche weiter unten, Satz XVII.

Satz XII. *Für $\lambda = -1$ besitzen die homogenen Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *je sechs linear unabhängige Lösungen.*

Zunächst bemerken wir, daß die Gleichung (4.02) für $\lambda = -1$ mit derjenigen Integralgleichung identisch ist, die das Problem des elastischen Gleichgewichts bei gegebenen Oberflächenkräften beherrscht[16]).

Die entsprechende homogene Gleichung lautet

$$(4.13)\qquad \varphi_i(\xi) - \frac{3}{2\pi}\int\limits_T (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)(\xi_k - \eta_k)\, n_k(\eta)\frac{\varphi_j(\eta)}{r_{\xi\eta}^5}\, dT = 0,$$

und wir haben beim Satze VIII bewiesen, daß sie durch $\varphi_i = c_i =$ konst. befriedigt wird. Da es im dreidimensionalen Raume möglich ist, drei linear unabhängige Vektoren anzugeben, so haben wir hier drei linear unabhängige Lösungen φ_{ij} $(j = 1, 2, 3)$ der Gleichung (4.13). Weiter gilt, wie man sich durch Einführung eines Polarkoordinatensystems um den Punkt (ξ) vergegenwärtigt, daß die drei Vertikalvektoren des Tensors

$$\Phi_{ij} = \begin{pmatrix} 0, & -(\xi_3 - x_3), & \xi_2 - x_2 \\ \xi_3 - x_3, & 0, & -(\xi_1 - x_1) \\ -(\xi_2 - x_2), & \xi_1 - x_1, & 0 \end{pmatrix}$$

der Gleichung (4.13) befriedigt, wobei (x) ein beliebiger Punkt des Raumes ist.

Man sieht nun, daß die sechs Orthogonalitätsbedingungen

$$(4.14)\qquad \begin{cases} \int\limits_T \varphi_{ij} T_{jk} n_k\, dT = 0 & (i = 1, 2, 3), \\ \int\limits_T \Phi_{ij} T_{jk} n_k\, dT = 0 & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

die dafür notwendig sind, daß die inhomogene Gleichung (4.04) für $\lambda = -1$ eine Lösung besitzt, den sechs Gleichgewichtsbedingungen des auf die Oberfläche wirkenden Kräftesystems $T_{jk} n_k$ gleichkommt. Wir erhalten also das Ergebnis:

[16]) Vgl. H. Weyl, Rend. Pal. 39 (1915), S. 24, wo ohne Beweis behauptet wird, daß die homogene Gleichung (4.02) für $\lambda = -1$ *wenigstens* die sechs hier mitgeteilten Lösungen besitzt.

Die zweite Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet einer geschlossenen Fläche T ist nur für solche Kräftesysteme lösbar, die die Resultante Null und das resultierende Moment Null haben.

Aber noch mehr: Wir werden beweisen, daß die Gleichung (4.13) außer den sechs Funktionen φ_{ij}, Φ_{ij} keine weiteren linear unabhängigen Lösungen besitzt. Denn nach (4.06) besitzt das einer Lösung ψ_i der homogenen Gleichung (4.04) entsprechende hydrodynamische Potential V_i die Eigenschaft

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = 0$$

in $Q_{(i)}$, und V_i stellt mithin dort die Bewegung eines starren Körpers dar. Das gilt also im besonderen für unsere sechs gefundenen Lösungen ψ_{ij} und Ψ_{ij}, die den Nullösungen φ_{ij} und Φ_{ij} der Gleichung (4.02) entsprechen. Daß die den Funktionen ψ_{ij} und Ψ_{ij} entsprechenden hydrodynamischen Potentiale, V_{ij} $(j = 1 \ldots 6)$, linear unabhängig sein müssen, ersieht man daraus, daß man sonst durch lineare Kombination aus ihnen ein Potential V_i herleiten könne, das in $Q_{(i)}$ und auf T identisch Null wäre und für das die entsprechende Belegungsfunktion folglich nach (4.06), (4.07) und (2.15) verschwände, was eine lineare Kombination unter unseren sechs linear unabhängigen Lösungen ψ_{ij}, Ψ_{ij} bedeuten würde. Da aber *jede Funktion* V_j, die einer Nullösung von (4.04) entspricht, in $Q_{(i)}$ die Bewegung eines starren Körpers darstellt, so muß sie sich aus den Funktionen V_{ij} linear kombinieren lassen, und die entsprechende Nullösung läßt sich aus den Funktionen ψ_{ij}, Ψ_{ij} linear zusammensetzen, was zu beweisen war.

Hat man somit einmal die Funktionen ψ_{ij} und Ψ_{ij} bestimmt, *so kann man direkt durch die entsprechenden Potentiale V_{ij}, Ω_j jede stationäre Bewegung eines starren Körpers in einer unendlichen ruhenden Flüssigkeit darstellen.* Es wird die Bewegung durch

$$(4.15) \qquad \begin{cases} V_i = c_j V_{ij}, \\ \Omega = c_j \Omega_j \end{cases}$$

mit c_j konstant dargestellt. Die für eine solche Bewegung erforderliche Kraft, d. h. der Widerstand, wird wegen (2.15) proportional sein dem Integrale

$$(4.16) \qquad c_j \int_T \varphi_{ik} \psi_{kj} \, dT,$$

und das Widerstandsmoment um den Punkt (x) wird proportional sein

$$(4.17) \qquad c_j \int_T \Phi_{ik} \Psi_{kj} \, dT.$$

Da nach Satz XI $\lambda = -1$ ein einfacher Pol der Resolvente ist, *so ist das in* (4.16) *auftretende Integral immer, und das in* (4.17) *auftretende im allgemeinen von Null verschieden*[17]).

Wir weisen darauf hin, daß, durch die obige Bemerkung, daß im Falle eines Kugelkörpers der Kern unserer Integralgleichung symmetrisch wird, es sofort möglich ist, dort die Funktionen ψ_{ij} und Ψ_{ij} aufzuschreiben, wodurch die in (4.15)...(4.17) auftretenden Ausdrücke explizite angebbar sind.

Nunmehr läßt sich leicht beweisen, *daß die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Außengebiet für beliebige stetige Randwerte lösbar ist.* Denn durch Subtraktion eines passenden Vielfachen der Potentiale V_{ij} lassen sich die Randwerte auf ψ_{ij} und Ψ_{ij} orthogonalisieren, und das ist nach der Fredholmschen Theorie die Bedingung dafür, daß die entsprechende inhomogene Integralgleichung (4.02) für $\lambda = -1$ lösbar sein soll.

Die so dargestellte Lösung verschwindet im Unendlichen. Falls die Bewegung der Flüssigkeit dort irgendwie anders (als Rotation und Translation) gegeben ist, so ist die Lösung leicht durch Addition eines in V_{ij}, Ω_j linearen Ausdruckes zu modifizieren. Es ist klar, daß das Verhalten im Unendlichen bekannt sein muß, damit die Aufgabe eindeutig lösbar sein soll, genau so, wie dies bei dem entsprechenden Probleme der Potentialtheorie ist.

Durch die bisherigen Überlegungen dieses Paragraphen dürften die Randwertaufgaben der homogenen Stokesschen Differentialgleichungen für Gebiete der Klasse Ah gelöst sein. Die Sätze II bis V gestatten uns nun, folgende Schlüsse über unsere Lösungen der ersten Stokesschen Randwertaufgabe des Gebietes $Q_{(i)}$ zu ziehen, die für das Folgende wichtig sind. Wir beweisen:

Satz XIII. *Die Nullösungen der Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *sind auf der Fläche T (der Klasse Ah) H-stetig mit dem Exponenten h der Fläche.*

Es läßt sich z. B. die homogene Gleichung (4.02) schreiben:

$$\varphi_i(\xi) = -\lambda \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT. \tag{4.18}$$

Ihre Lösungen sind sicher nach der Fredholmschen Theorie auf T stetig. Dann folgt aus unserem Satze III, daß das Integral rechts in (4.18) und somit auch die linke Seite auf T H-stetig sein muß.

Satz XIV. *Die Nullösungen der Gleichungen* (4.02) *und* (4.04) *sind auf der Fläche T (der Klasse Bh) H-stetig differentiierbar mit dem Exponenten h der Fläche.*

---

[17]) Vgl. a. a. O. [15]), S. 405.

Aus dem vorigen Satze folgt die H-Stetigkeit der Lösungen auf T, oder sogar, nach Satz III A, daß sie eine Ungleichung der Form (3.21) erfüllen. Sodann folgert man den jetzigen Satz aus dem Satze IV oben. Es würde übrigens leicht sein, einen etwas weiterreichenden Satz zu beweisen.

Satz XV. *Das mit einer Nullösung φ_i gebildete hydrodynamische Potential $W_i(x)$ besitzt im Bereiche $Q_{(i)} + T$ (der Klasse Bh) erste Ableitungen, die H-stetig mit dem Exponenten h sind. Auch der Ausdruck $T_{ik}(W)$ bleibt in $Q_{(i)} + T$ H-stetig mit dem Exponenten h.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen XIV und V.

Satz XVI. *Falls die Randfunktion $u_i(\xi)$[18]) auf T (der Klasse Bh) erste Ableitungen besitzt, die H-stetig mit dem Exponenten h' sind, so sind die ersten Ableitungen der Lösung $u_i(x)$ der ersten Stokesschen Randwertaufgabe in $Q_{(i)} + T$ H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen h und h' ist.*

Zuerst schreibt man die Integralgleichung (4.02)

$$\varphi_i(\xi) = -\lambda \int_T K_{ij}(\xi, \eta)\, \varphi_j(\eta)\, dT + u_i(\xi)$$

und bekommt dann, ähnlich wie beim Beweise des Satzes XIV, daß $\varphi_i(\xi)$ auf T erste Ableitungen besitzt, die H-stetig mit dem Exponenten h' sind. Dann folgt unser Satz unmittelbar aus dem Satze V.

Falls die Randfläche der Klasse Bh angehört, beweisen wir leicht den

Satz XVII. *Der Pol $\lambda = +1$ ist ein einfacher Pol der Resolvente.*

Es genügt zu zeigen, daß das Integral

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT$$

für jede Nullösung der Gleichung (4.01) einen von Null verschiedenen Wert hat. Es gilt nach (2.12)

$$2\varphi_i(\xi) = W_i(\xi)_{(i)} - W_i(\xi)_{(e)} = - W_i(\xi)_{(e)}$$

und somit

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT = -\frac{1}{2} \int_T n_i(\xi)\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT.$$

Nun hat der Spannungstensor $T_{ik}(W)$ in $Q_{(i)}$ notwendig die Form $C\delta_{ik}$ mit C konstant $\neq 0$, und dann ist nach Satz V B

$$T_{ik}(W)_{(i)}\, n_k = C\, n_i(\xi) = T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k$$

[18]) Die Randfunktion muß natürlich, falls λ ein Eigenwert ist, die für die Lösbarkeit erforderlichen Orthogonalitätsbedingungen erfüllen.

und somit nach (4.20)

$$\int_T \varphi_i(\xi)\, n_i(\xi)\, dT$$

$$= -\frac{1}{2C}\int_T T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT = -\frac{\mu}{4C}\int_{Q_{(e)}} \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\right)^2 dQ \neq 0,$$

was zu beweisen war.

Eindeutigkeit der Lösungen. Es könnte gegen unsere Lösung der ersten Stokesschen Randwertaufgabe der folgende Einwand erhoben werden. Zwar wird die Lösung der Gleichung (4.02) durch die modifizierte Fredholmsche Resolvente geleistet, aber es würde möglich sein, eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung hinzuzufügen, und die Lösung würde demnächst als nicht eindeutig bestimmt erscheinen. Um diesen Einwand zu entkräften, hat man auf die Greensche Energieformel (1.07) zurückzugreifen. Es gelten, analog zu (4.06) und (4.07), die Formeln

$$(4.19)\qquad \int_{Q_{(i)}} \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\right)^2 dQ = -\int_T T_{ik}(W)_{(i)}\, n_k(\xi)\, W_i(\xi)_{(i)}\, dT,$$

$$(4.20)\qquad \int_{Q_{(e)}} \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x_k} + \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\right)^2 dQ = \int_T T_{ik}(W)_{(e)}\, n_k(\xi)\, W_i(\xi)_{(e)}\, dT,$$

unter der Voraussetzung, daß die Integrale einen Sinn haben. Für die mit den Nullösungen der Gleichung (4.02) gebildeten hydrodynamischen Potentiale $W_i(x)$, $\Pi(x)$ wird dies, nach den Sätzen V und XV sicher der Fall sein, falls die Randfläche der Klasse $B\,h$ angehört. Aber es läßt sich dies tatsächlich auch unter allgemeineren Voraussetzungen erschließen. Betrachten wir z. B. dasjenige Teilgebiet $Q'_{(i)}$ von $Q_{(i)}$, das von einer Parallelfläche T' von T im Abstande l dieser Fläche begrenzt wird. Dann gilt für $Q'_{(i)}$ sicher eine der Gleichung (4.19) entsprechende Gleichung, die wir mit (4.195) bezeichnen mögen. Es sind nun auch für Flächen der Klasse $A\,h$ die Nullösungen φ_j der homogenen Integralgleichungen nach dem Satze XIII H-stetig mit dem Exponenten h. Da die entsprechende Funktion $W_i(x)$ auf T verschwindet, gilt aber nach den Sätzen II B und V C für den Integranden des über die Fläche T' erstreckten Integrals in (4.195) eine Abschätzung der Form

$$C\cdot l^h\cdot l^{h-1}$$

mit C konstant, und somit strebt das über T' erstreckte Integral für Flächen der Klasse $A\,h$ jedenfalls dann mit l gleichmäßig gegen Null, wenn

$$h > \frac{1}{2}$$

ist. Somit gelten die Gleichungen (4.19) und (4.20) als Limesgleichungen auch für diesen Fall und wir folgern aus dem Verschwinden von $W_i(\xi)_{(i)}$

oder $W_i(\xi)_{(e)}$ auf dem Rande das identische Verschwinden von $W_i(x)$ in $Q_{(i)}$ bzw. $Q_{(e)}$, und die Lösungen der ersten Stokesschen Randwertaufgabe sind somit eindeutig bestimmt worden.

Es ist zu bemerken, daß die Ausnützung einer Maximum-Minimum-Eigenschaft der Lösungen auf dem Rande des Gebietes, die sich bei skalaren Randwertaufgaben so fruchtbar bewährt hat[19]), bei diesen vektoriellen Randwertaufgaben nicht möglich ist.

Bemerkungen über den zweidimensionalen Fall. Wir fügen schließlich ein paar Bemerkungen über den zweidimensionalen Fall zu. Bekanntlich läßt sich dort die erste Stokessche Randwertaufgabe durch Einführung der Strömungsfunktion φ auf die biharmonische Randwertaufgabe zurückführen ($\Delta\Delta\varphi = 0$ im Innern einer geschlossenen Kurve, auf welche φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ vorzuschreiben sind).

Bei der hier gewählten Darstellung bekommen wir zwischen den räumlichen und ebenen Problemen eine Analogie, die derjenigen zwischen den Funktionen $\frac{1}{r}$ und $\log\frac{1}{r}$ der Potentialtheorie vollkommen parallel läuft. Zunächst lautet der Fundamentaltensor

$$\left\{\begin{aligned} v_{ij}(x, y) &= \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\delta_{ij}\log\frac{1}{r_{xy}} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{r_{xy}^2}\right\}, \\ q_j(x, y) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\log\frac{1}{r_{xy}}. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die entsprechende Greensche Reziprozitätsformel ein, so gewinnen wir die analogen zweidimensionalen Bildungen zu den früher eingeführten hydrodynamischen Potentialen. Das hydrodynamische logarithmische Potential einer Doppelbelegung (φ_1, φ_2) der Kurve L (der Klasse Ah)[20]) mit dem Elemente dL lautet:

$$(4.21)\quad \left\{\begin{aligned} W_i(x) &= \frac{2}{\pi}\int_L (x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)\, n_k(\eta)\frac{\varphi_j(\eta)}{r_{x\eta}^4}\, dL, \qquad (i = 1, \\ \Pi(x) &= -\frac{2\mu}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_L (x_k - \eta_k)\, n_k(\eta)\frac{\varphi_j(\eta)}{r_{x\eta}^2}\, dL. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke eignen sich zur Herleitung einer regulären Fredholmschen Integralgleichung, ähnlich wie im dreidimensionalen Falle. Wenn es sich um die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet $(\lambda = 1)$

[19]) Man vgl. L. Lichtenstein, Neuere Entwickl. d. Th. part. Differential-Gleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Enc. Math. Wiss. II C 12, S. 1297 (Leipzig, Teubner 1919); sowie W. Sternberg, Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 291.

[20]) Das heißt endliche stetige Kurven mit H-stetig variierender Normale.

handelt, so besitzt die homogene, transponierte Gleichung

$$(4.22)\qquad \psi_i(\xi) - \lambda \frac{2}{\pi}\int_L (\xi_i - \eta_i)(\xi_j - \eta_j)(\xi_k - \eta_k)\, n_k(\xi)\, \frac{\psi_j(\eta)}{r_{\xi\eta}^4}\, d_\eta L = 0$$

als einzige Lösung den Normalvektor (n_1, n_2) der Kurve L.

Dagegen lassen sich nicht diejenigen Schlüsse aus den vorigen Seiten unmittelbar übertragen, bei denen von dem Umstande Gebrauch gemacht wurde, daß das hydrodynamische Potential einer einfachen Belegung, das hier lautet:

$$(4.23)\qquad \begin{cases} V_i(x) = \int_L v_{ij}(x, \eta)\, \psi_j(\eta)\, d_\eta L, \\ \Omega(x) = \int_L q_j(x, \eta)\, \psi_j(\eta)\, d_\eta L, \end{cases}$$

im Unendlichen verschwindet, was ja jetzt nicht mehr zutrifft. Betrachten wir indessen die Gleichung (4.22) für beliebige λ, multiplizieren wir sie mit $d_\xi L$ und integrieren, so ergibt sich bei Benutzung einer mit (2.13) analogen Formel

$$(4.24)\qquad (1 + \lambda)\int_L \psi_i(\xi)\, d_\xi L = 0.$$

Also muß das Integral für $\lambda \neq -1$ verschwinden, und dies ist tatsächlich die Bedingung dafür, daß sich $V_i(x)$ nach (4.23) für große R $(x_1^2 + x_2^2 = R^2)$ wie $\frac{1}{R}$ verhalten soll. Dann aber läßt sich der Beweis für $\lambda \neq -1$ genau so wie im dreidimensionalen Falle führen. Speziell ist also die erste Stokessche Randwertaufgabe für das Innengebiet einer geschlossenen Kurve der Klasse Ah stets lösbar für stetige Randfunktionen u_i, die der Bedingung

$$(4.25)\qquad \int_L u_i\, n_i\, dL = 0$$

genügen. Falls wir dieses Resultat mit Hilfe der Strömungsfunktion φ interpretieren, so ergibt sich, daß die biharmonische Randwertaufgabe bei Innengebieten stets lösbar ist bei Randkurven der Klasse Ah, falls φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ eindeutig und stetig und darüber hinaus φ stetig differentiierbar auf der Randkurve vorgegeben sind.

Für $\lambda = -1$ besitzt die homogene Integralgleichung genau drei linear unabhängige Lösungen, und die erste Stokessche Randwertaufgabe wird beim Außengebiete nur für solche Randfunktionen lösbar sein, die auf den drei Lösungen $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ der Gleichung (4.22) für $\lambda = -1$ orthogonal sind, wofern man verlangt, daß die Lösung im Unendlichen regulär sein soll. Es wird aus ähnlichen Gründen wie im dreidimensionalen Falle das in (4.24) auftretende Integral im allgemeinen nicht verschwinden, und die hydrodynamischen logarithmischen Potentiale der Belegungsvektoren

$\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3}$ werden im Unendlichen logarithmisch unendlich. Es ist dies die mathematische Aufklärung des Paradoxon von Stokes[21]). Seine physikalische Ursache kennen wir nach Lamb, der sie auf die nicht zulässige Vernachlässigung der Oseenschen „halbquadratischen" Glieder in den Differentialgleichungen zurückgeführt hat.

Man sieht, daß unsere Theorie *für die Lösbarkeit der biharmonischen Randwertaufgabe für das Außengebiet einer geschlossenen Kurve drei Integralbedingungen für die Randfunktionen fordert.*

Die zweite Randwertaufgabe für das Innengebiet wird nur dann lösbar sein, falls die Randfunktionen auf zwei beliebige, linear unabhängige, konstante Vektoren und auf den Vektor

$$[-(\xi_2 - x_2), \ (\xi_1 - x_1)]$$

orthogonal sind, was den drei Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik entspricht.

§ 5.

Der Greensche Tensor und seine Eigenschaften.

Betrachten wir die Differentialgleichungen (1.02) und versuchen wir dem Problem, diejenige Strömung u_i, p in $Q_{(i)}$ zu bestimmen, die am Rande T (der Klasse Ah) verschwindet, durch den Ansatz

$$(5.01) \qquad \begin{cases} u_i(x) = \varrho \int\limits_{Q_{(i)}} G_{ij}(x, y) X_j(y)\, dQ, \\ p(x) = \varrho \int\limits_{Q_{(i)}} g_j(x, y) X_j(y)\, dQ \end{cases}$$

zu genügen. Dabei setzen wir

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y) &= v_{ij}(x, y) - A_{ij}(x, y), \\ g_j(x, y) &= \ q_j(x, y) - \ a_j(x, y), \end{aligned}$$

und müssen nach Satz I, um die in (1.02) enthaltenen Differentialoperationen ausführen zu können, zum mindesten voraussetzen, daß die Funktionen X_j in $Q_{(i)}$ H-stetig bleiben, falls wir nicht die betreffenden Operationen im Petrinischen Sinne modifizieren wollen. Um die Funktionen A_{ij}, a_j angeben zu können, haben wir die folgende erste Stokessche Randwertaufgabe zu lösen:

$$\text{in } Q_{(i)}: \quad \begin{cases} \mu \Delta_x A_{ij} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

$$\text{auf } T: \quad A_{ij}(\xi, y) = v_{ij}(\xi, y),$$

[21]) Siehe Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1916, S. 604.

und diese Aufgabe ist stets lösbar, wofern

$$\int_T v_{ij}(\xi, y)\, n_i(\xi)\, d_\xi T = 0$$

erfüllt ist. Die letzte Bedingung ist aber sicher erfüllt, was sich sofort aus (2.03) durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Gebiet zwischen T und einer ganz in $Q_{(i)}$ gelegenen Kugel um (y) als Zentrum ergibt. Damit ist die Existenz der Funktionen G_{ij}, g_j für innere Punkte (y) des Gebietes $Q_{(i)}$ erwiesen. Wir bezeichnen diesen aus $9+3=12$ Elementen bestehenden Funktionenkomplex als ***hydrodynamischer Greenscher Tensor*** der ersten Randwertaufgabe.

Fassen wir nun zwei Punkte (y) und (y') des Gebietes $Q_{(i)}$ ins Auge, und schalten wir diese Punkte durch kleine Kugeln Γ und Γ' mit den Radien ϱ und ϱ' aus. Das Gebiet zwischen den Kugeln und der Randfläche T nennen wir $Q_{(\Gamma)}$. Dann genügen die Funktionen $G_{il}(x, y)$, $g_l(x, y)$ bzw. $G_{il'}(x, y')$, $g_{l'}(x, y')$ den homogenen Stokesschen Gleichungen als Funktionen von (x) im Gebiete $Q_{(\Gamma)}$. Wenden wir jetzt die Reziprozitätsformel (1.05) auf das Gebiet $Q_{(\Gamma)}$ an, und nehmen wir für u_i, p die erste und für v_i, $-q$ die zweite unserer Lösungen, so ergibt sich wegen $G_{il}(\xi, y) = G_{il'}(\xi, y') = 0$ auf T

$$0 = \int_{\Gamma+\Gamma'} \{T_{ik}[G_{il}(\eta, y)]_\eta\, n_k\, G_{il'}(\eta, y') - T'_{ik}[G_{il'}(\eta, y')]_\eta\, n_k\, G_{il}(\eta, y)\}\, d_\eta T.$$

Bei der Bildung von T_{ik} bzw. T'_{ik} genügt es jetzt, nur v_{il} und q_l zu berücksichtigen, so daß wir haben

$$0 = \int_{\Gamma+\Gamma'} \{T_{ik}[v_{il}(\eta, y)]_\eta\, n_k\, G_{il'}(\eta, y') - T'_{ik}[v_{il'}(\eta, y')]_\eta\, n_k\, G_{il}(\eta, y)\}\, d_\eta T.$$

Man sieht, daß für Γ nur das erste und für Γ' nur das zweite Glied des Integranden, wenn ϱ und ϱ' gegen Null konvergieren, einen Beitrag liefern. Eine ähnliche Rechnung wie diejenige, die uns zur Formel (2.07) führte, ergibt

$$G_{ll'}(y, y') = G_{l'l}(y', y), \tag{5.02}$$

wodurch die Symmetrie des Greenschen Tensors zum Ausdruck kommt.

Falls wir mit den Funktionen G_{ij}, g_j dieselbe Rechnung ausführen wie diejenige, die uns zu den Formeln (2.07) und (2.08) führte, so ergibt sich bei Benutzung von (5.02) die folgende Darstellung für die Lösung der homogenen ersten Stokesschen Randwertaufgabe:

$$\left\{\begin{aligned} u_i(x) &= \int_T T'_{ik}(G)_\eta\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, d_\eta T, \\ p(x) &= -2\mu \int_T \frac{\partial g_j}{\partial x_k}\, n_k(\eta)\, u_j(\eta)\, d_\eta T. \end{aligned}\right. \tag{5.03}$$

Hier ist $T'_{ik}(G)$ nach (1.06) zu bilden. Vgl. weiter unten, am Ende dieses Paragraphen.

Wir gehen nunmehr zum Studium der Funktionen A_{ij}, a_j über. Es gilt dabei die Darstellung

$$(5.04)\qquad \begin{cases} A_{ij}(x,y)=\int\limits_T K_{ik}(x,\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\,d_\xi T, \\ a_j(x,y)=\int\limits_T k_k(x,\xi)\,\chi_{kj}(\xi,y)\,d_\xi T, \end{cases}$$

wobei

$$(5.05)\qquad \chi_{kj}(\xi,y)=v_{kj}(\xi,y)+\int\limits_T \Gamma_{kl}(\xi,\eta)\,v_{lj}(\eta,y)\,d_\eta T,$$

und hier ist $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ die für $\lambda=+1$ modifizierte Fredholmsche Resolvente der Integralgleichung (4.02). Sie genügt der Funktionalgleichung

$$(5.06)\qquad \Gamma_{kl}(\xi,\eta)+\int\limits_T \Gamma_{km}(\xi,\zeta)\,L_{ml}(\zeta,\eta)\,d_\zeta T=L_{kl}(\xi,\eta),$$

wobei

$$(5.07)\qquad L_{kl}(\xi,\eta)=K_{kl}(\xi,\eta)-\varphi_k(\xi)\,\psi_l(\eta),$$

und $\varphi_k(\xi)$ bzw. $\psi_l(\eta)$ die zweckmäßig normierten Lösungen der homogenen Integralgleichungen (4.02) und (4.04) für $\lambda=+1$ bedeuten. Nach dem Satze XVII würde die Richtigkeit von (5.07) nur für Flächen der Klasse Bh bewiesen sein. Falls der Satz XVII nicht für Flächen der Klasse Ah Geltung haben würde, so wäre trotzdem (5.07) leicht zu modifizieren, ohne daß im folgenden etwas zu ändern wäre. Die Gleichung (5.06) genügt zur Bestimmung der Funktion $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$. Der Kern $L_{kl}(\xi,\eta)$ ist regulär, und eine endliche Anzahl von Iterationen ergibt eine Integralgleichung mit stetigem Kern, die keine Nullösungen besitzt. Somit ist die Existenz und Stetigkeit von $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ gesichert, falls $(\xi)\neq(\eta)$ bleibt. Man sieht ferner, daß eine Ungleichung der Form

$$(5.08)\qquad |\Gamma_{kl}(\xi,\eta)|<\frac{C}{r_{\xi\eta}^{2-h}}$$

besteht, gleichmäßig für (ξ) und (η) auf T.

Der Satz XIII lehrt, daß $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)$ als Funktion von (ξ) in jedem den Punkt (η) nicht enthaltenden Teilgebiet von T H-stetig mit dem Exponenten h ist. Wir brauchen eine Abschätzung für die Differenz $\Gamma_{kl}(\xi,\eta)-\Gamma_{kl}(\xi',\eta)$ für zwei benachbarte Punkte (ξ) und (ξ') im Abstande σ in der Umgebung des Punktes (η) auf der Fläche. Es kommt offenbar darauf an, das Integral

$$J(\xi,\eta)-J(\xi',\eta)=\int\limits_{\Sigma_1} L_{km}(\xi,\zeta)-L_{km}(\xi',\zeta)]\,L_{ml}(\zeta,\eta)\,d_\zeta T$$

abzuschätzen. Wir wählen unser Koordinatensystem ähnlich wie auf S. 340, indem wir die Flächennormale N durch den Mittelpunkt $(\bar{x})$ der Verbindungsstrecke $(\xi)-(\xi')$ als x_3-Achse wählen und den Ursprung dort verlegen, wo N die Fläche durchsetzt. Σ_0 und Σ_1 seien diejenigen Teile der Fläche T, die von zwei koaxialen Kreiszylindern mit den Radien σ bzw. ϱ_1 (ϱ_1 fix) um N als Achse herausgeschnitten werden. Der Abstand des Punktes (η) vom Ursprung soll größer als 2τ sein, und es sei $\tau > \sigma$. Eine Kugel vom Radius τ um (η) als Zentrum schneide aus T das Stück Σ' aus. Falls τ hinreichend klein gewählt worden ist, so werden Σ_0 und Σ', weil außerhalb einander, immer in Σ_1 liegen.

Beachtet man nun, daß, für eine Fläche der Klasse Ah, auf $\Sigma_1 - \Sigma_0$ eine Ungleichung der Form $(\eta_1^2 + \eta_2^2 = \varrho^2)$

$$|K_{km}(\xi,\zeta) - K_{km}(\xi',\zeta)| < C\frac{\sigma}{\varrho^{3-h}}$$

besteht, so ersieht man[22]) bei Abschätzung der Beiträge jedes einzelnen Stückes von Σ_1 für sich, daß die Beziehung

$$J(\xi,\eta) - J(\xi',\eta) = O\left[\frac{\sigma}{\tau^{3-2h}} + \frac{\sigma^h}{\tau^{2-h}}\right]$$

auf T gültig bleibt. Gleichfalls gilt dann

$$(5.09) \qquad \Gamma_{kl}(\xi,\eta) - \Gamma_{kl}(\xi',\eta) = O\left[\frac{r_{\xi\xi'}}{R^{3-h}} + \frac{r_{\xi\xi'}^h}{R^{2-h}}\right],$$

falls die Punkte (ξ) und (ξ') außerhalb eines kreisähnlichen Teilgebietes der Fläche T vom Radius R um den Punkt (η) liegen. Die Abschätzung von $\chi_{kj}(\xi, y)$ nach (5.05) läßt sich nun ohne weiteres mit Hilfe von (5.08) und (5.09) bewirken. Wenn es sich um die Schätzung von $\chi_{kj}(\xi,y) - \chi_{kj}(\xi',y)$ handelt, so hat man sich den Punkt (y), weil in $Q+T$, außerhalb einer Kugel um den Ursprung vom Radius 2τ liegend zu denken, und es kann vorkommen, daß das Flächenstück Σ' auf Null zusammenschrumpft. Es läßt sich die Schätzung genau wie bei $J(\xi,\eta) - J(\xi',\eta)$ ausführen, und wir bekommen

$$(5.10) \qquad \begin{cases} |\chi_{kj}(\xi,y)| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ |\chi_{kj}(\xi,y) - \chi_{kj}(\xi',y)| < C\left(\dfrac{r_{\xi\xi'}}{R^2} + \dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right). \end{cases}$$

Es gelten diese Ungleichungen gleichmäßig für (ξ) und (ξ') auf T und (y) in $Q+T$, doch so, daß bei der letzten Ungleichung (ξ) und (ξ') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) als Zentrum liegen.

Schließlich betrachten wir (5.04) für zwei Punkte (x) und (x') in unbeschränkter Nähe der Randfläche T. Wir können sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit in beliebiger gegenseitiger Orientierung auf Geraden durch

---

[22]) Die Durchführung eines ähnlichen, etwas schwierigeren Beweises wird unten S. 364 näher besprochen.

(ξ) bzw. (ξ') verlegen, die parallel mit N sind. Der Punkt (y) liege irgendwo in $Q+T$, so daß r_{xy} bzw. $r_{x'y}$ größer als R ausfallen. Mit Hilfe von (5.10) und dem Satze II A beweist man dann

$$|A_{ij}(x, y)| < \frac{C}{r_{xy}},$$

$$|A_{ij}(x, y) - A_{ij}(x', y)| < C\left(\frac{r_{xx'}\,|\log r_{xx'}|}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right),$$

gleichmäßig gültig in $Q+T$, wofern (x) und (x') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) als Zentrum liegen.

Wir gehen nunmehr zu den ersten Ableitungen von $A_{ij}(x, y)$ über und legen damit unserer Betrachtung Gebiete der Klasse Bh zugrunde. Um in (5.04) partiell integrieren zu können, müssen wir Abschätzungen für die ersten Ableitungen von $\chi_{kj}(\xi, y)$ aufstellen, die analog zu (5.10) sind. Somit müssen wir die ersten Ableitungen von $\Gamma_{kl}(\xi, \eta)$ untersuchen. Nach den Sätzen IV und XIV besitzt $\Gamma_{kl}(\xi, \eta)$ für $(\xi) \neq (\eta)$ auf T erste Ableitungen nach (ξ) [23], die H-stetig mit dem Exponenten h sind. Es gilt die Ungleichung

$$(5.12)\qquad \left|\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi, \eta)}{\partial \xi_m}\right| < \frac{C}{r_{\xi\eta}^2}.$$

Um eine Abschätzung für die Differenz

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi, \eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi', \eta)}{\partial \xi'_m}$$

zu bekommen, hat man, ähnlich wie auf S. 359,

$$\frac{\partial J(\xi, \eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi', \eta)}{\partial \xi'_m} = \int\limits_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial L_{km}(\xi, \zeta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial L_{km}(\xi', \zeta)}{\partial \xi'_m}\right) L_{ml}(\zeta, \eta)\, d_\zeta T$$

zu betrachten. Eine Überlegung in der schon gewohnten Art in Verbindung mit Satz V A ergibt dann

$$(5.13)\qquad \left|\frac{\partial J(\xi, \eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi', \eta)}{\partial \xi'_m}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \frac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|,$$

und also, analog zu (5.09),

$$(5.135)\qquad \left|\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi, \eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi', \eta)}{\partial \xi'_m}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}}{R^3} + \frac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \frac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|.$$

Wir bemerken ferner, daß der Hauptwert des Integrals

$$\int\limits_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial J(\xi, \eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi', \eta)}{\partial \xi'_m}\right) d_\eta T$$

[23]) Es gilt dann immer $n_m(\xi)\dfrac{\partial}{\partial \xi_m} = 0$, $n_m(\xi')\dfrac{\partial}{\partial \xi'_m} = 0$ usw.

existiert und von der Ordnung $r^h_{\xi\xi'}$ ist. Um dies einzusehen, bemerkt man, daß, gleichmäßig auf T,

$$\left|\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m}\right| < \frac{C}{r_{\xi\eta}},$$

und daß mithin die Abschätzung (5.13) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$\left|\frac{\partial J(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial J(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}\right| \leqq C\left|\frac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{r_{\xi\eta}\,r_{\xi'\eta}} + \frac{r^h_{\xi\xi'}}{\sqrt{r_{\xi\eta}\,r_{\xi'\eta}}}\right|.$$

Diese Ungleichung gilt dann gleichmäßig auf der Fläche T und zeigt, daß das fragliche Integral absolut konvergent und von der Ordnung $r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|^2 + r^h_{\xi\xi'}$, d. h. von der Ordnung $r^h_{\xi\xi'}$ ist. Somit existiert auch der Hauptwert des entsprechenden Integrals über

$$\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}$$

und es ist

$$(5.14)\qquad \left|\int_T \left(\frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi,\eta)}{\partial \xi_m} - \frac{\partial \Gamma_{kl}(\xi',\eta)}{\partial \xi'_m}\right) d_\eta T\right| \leqq C\, r^h_{\xi\xi'}.$$

Mit Hilfe von (5.12) bis (5.14) beweist man nun auch, daß das in (5.05) auftretende Integral

$$I(\xi,y) = \int_T \Gamma_{kl}(\xi,\eta)\, v_{lj}(\eta,y)\, d_\eta T$$

für $(\xi) \neq (y)$ erste Ableitungen nach (ξ) besitzt, und zwar gilt

$$(5.15)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m}\right| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial I(\xi,y)}{\partial \xi_m} - \dfrac{\partial I(\xi',y)}{\partial \xi'_m}\right| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \dfrac{r^h_{\xi\xi'}}{R}\right|, \end{cases}$$

falls die Punkte (ξ) und (ξ') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) liegen.

Wir betrachten nun das Integral[24])

$$\frac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m} = \int_T \frac{\partial K_{ik}(x,\xi)}{\partial x_m}\, \chi_{kj}(\xi,y)\, d_\xi T.$$

Dann ist es klar nach (5.05) (5.15) und Satz V, daß die Funktion $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_m}$ für $(x) \neq (y)$ in $Q + T$ existiert und dort H-stetig ist. Um zu untersuchen, wie sie sich verhält, wenn (x) und (y) dicht beieinander am Rande T liegen, haben wir das Integral

---

[24]) Die Untersuchung von $a_j(x,y)$ ist ganz analog.

$$(5.16)\qquad \int_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5} \cdot n_l(\xi)\,\chi_{kj}(\xi, y)\,\frac{d\xi_1\, d\xi_2}{n_3(\xi)}$$

zu betrachten, wobei wir von der mehrmals gebrauchten Komponentendarstellung Gebrauch machen. Für den linken Faktor des Integranden von (5.16) gilt offenbar $\frac{\partial}{\partial x_m} = -\frac{\partial}{\partial \xi_m}$. Dann können wir, wie auf S. 339 und 345 partiell integrieren, und es entstehen Kurvenintegrale über die Randkurve von Σ_1, die für die weitere Untersuchung ausscheiden. Die übrigen Integrale sind von der Form

$$(5.17)\qquad B(x, y) = \int_{\Sigma_1} \frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5}$$

$$\times \left[\nu_1(\xi)\left(\frac{\partial v_{kj}(\xi, y)}{\partial \xi_m} + \frac{\partial I(\xi, y)}{\partial \xi_m}\right) + \nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi, y)\right] d\xi_1\, d\xi_2,$$

wobei $\nu_2(\xi)$ H-stetig mit dem Exponenten h und $\nu_1(\xi)$ H-stetig differentiierbar auf Σ_1 ist. Dann gilt nach (5.10)

$$(5.18)\qquad \begin{cases} |\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi, y)| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ |\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi, y) - \nu_2(\xi')\,\chi_{kj}(\xi', y)| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}}{R^2} + \dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

und nach (5.15)

$$(5.19)\qquad \begin{cases} \left|\nu_1(\xi)\,\dfrac{\partial I(\xi, y)}{\partial \xi_m}\right| < \dfrac{C}{r_{\xi y}}, \\ \left|\nu_1(\xi)\,\dfrac{\partial I(\xi, y)}{\partial \xi_m} - \nu_1(\xi')\,\dfrac{\partial I(\xi', y)}{\partial \xi'_m}\right| < C\left|\dfrac{r_{\xi\xi'}\,|\log r_{\xi\xi'}|}{R^2} + \dfrac{r_{\xi\xi'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

Nun ersieht man leicht, ähnlich wie oben bei der Untersuchung von A_{ij}, daß die aus $\nu_2(\xi)\,\chi_{kj}(\xi, y)$ und $\nu_1(\xi)\,\frac{\partial I(\xi, y)}{\partial \xi_m}$ herrührenden Beiträge zu $B(x, y)$, die wir unter der Bezeichnung $D(x, y)$ zusammenfassen, die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$(5.20)\qquad \begin{cases} |D(x, y)| < C\,\dfrac{|\log r_{xy}|}{r_{xy}}, \\ |D(x, y) - D(x', y)| < C\left|\dfrac{r_{xx'}\,|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R}\right|, \end{cases}$$

gleichmäßig gültig in $Q + T$, falls bloß (x) und (x') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) als Zentrum liegen. Es bleibt das Integral

$$\int_{\Sigma_1} \left[\frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)(x_l-\xi_l)}{r_{x\xi}^5}\,\nu_1(\xi)\,n_3(\xi)\right]\left[\frac{(\xi_j-y_j)(\xi_k-y_k)(\xi_m-y_m)}{r_{\xi y}^5}\right]\frac{d\xi_1\, d\xi_2}{n_3(\xi)}$$

$$\equiv \int_{\Sigma_1} Q_1(x, \xi)\cdot Q_2(\xi, y)\, d_\xi T \equiv E(x, y)$$

zurück, indem wir die in Klammern stehenden Ausdrücke mit $Q_1(x, \xi)$ bzw. $Q_2(\xi, y)$ bezeichnen. Wir behaupten nun die folgenden Ungleichungen

$$(5.21)\qquad \begin{cases} |E(x, y)| < \dfrac{C}{r_{xy}^2}, \\ |E(x, y) - E(x', y)| < \dfrac{C\, r_{xx'}\,|\log r_{xx'}|}{R^3}, \end{cases}$$

gleichmäßig gültig in $Q + T$, falls (x) und (x') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) als Zentrum liegen. Der Deutlichkeit halber soll auf die Herleitung der letzten Ungleichung etwas näher eingegangen werden, zumal die Schlußweise für die bis jetzt behaupteten ähnlichen Abschätzungen (5.09), (5.10), ..., (5.20) maßgebend ist. Es gilt

$$E(x, y) - E(x', y) = \int_{\Sigma_1} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, Q_2(\xi, y)\, d_\xi T$$
$$= \int_{\Sigma_0} + \int_{\Sigma'} + \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'},$$

und wir schätzen die Beiträge der verschiedenen Integrale jeden für sich. Wir haben

$$(5.22)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma_0} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, Q_2(\xi, y)\, dT \\ &= Q_2(x, y) \int_{\Sigma_0} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, dT \\ &+ \int_{\Sigma_0} Q_1(x, \xi)\, [Q_2(\xi, y) - Q_2(x, y)]\, dT \\ &- \int_{\Sigma_0} Q_1(x', \xi)\, [Q_2(\xi, y) - Q_2(x', y)]\, dT \\ &- [Q_2(x', y) - Q_2(x, y)] \int_{\Sigma_0} Q_1(x', \xi)\, dT, \end{aligned}$$

und ferner

$$(5.23)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma'} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, Q_2(\xi, y)\, dT \\ &= [Q_1(x, y) - Q_1(x', y)] \int_{\Sigma'} Q_2(\xi, y)\, dT \\ &+ \int_{\Sigma'} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi) - Q_1(x, y) + Q_1(x', y)]\, Q_2(\xi, y)\, dT, \end{aligned}$$

und schließlich

$$(5.24)\qquad \begin{aligned} &\int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, Q_2(\xi, y)\, dT \\ &= Q_2(x, y) \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, dT \\ &+ \int_{\Sigma_1 - \Sigma_0 - \Sigma'} [Q_1(x, \xi) - Q_1(x', \xi)]\, [Q_2(\xi, y) - Q_2(x, y)]\, dT. \end{aligned}$$

Es gelten nun die Ungleichungen

$$|Q_1(x,\xi)| < \frac{C}{r_{x\xi}^2}, \quad |Q_2(\xi,y)| < \frac{C}{r_{\xi y}^2},$$

$$|Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi)| < \frac{C r_{xx'}}{R_1^3},$$

$$|Q_2(x,y) - Q_2(x',y)| < \frac{C r_{xx'}}{R_2^3},$$

$$|Q_2(\xi,y) - Q_2(x',y)| < \frac{C r_{\xi x'}}{R_2^3},$$

$$|Q_1(x,\xi) - Q_1(x',\xi) - Q_1(x,y) + Q_1(x',y)| < \frac{C r_{xx'} r_{\xi y}}{R_3^4}$$

gleichmäßig gültig in $Q+T$, falls (x) und (x') außerhalb einer Kugel um (ξ) vom Radius R_1 bzw. $(x), (x')$ und (ξ) außerhalb einer Kugel vom Radius R_2 um (y) liegen. Die letzte Ungleichung gilt sicher für (ξ) auf Σ', falls τ [25]) größer als R_3 gewählt wird. Führt man diese Abschätzungen in (5.22) bis (5.24) ein, und bemerkt man, daß, nach dem Satze VA die Hauptwerte

$$\int_{\Sigma_1} Q_1(x,\xi)\, d_\xi T, \quad \int_{\Sigma_1} Q_2(\xi,y)\, d_\xi T$$

in $Q+T$ existieren und dort sogar H-stetig differentiierbar sind, so ergibt sich ohne Schwierigkeit die letzte Ungleichung (5.21). Mit Hilfe von (5.20) und (5.21) erhält man so

$$(5.25)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m}\right|, \quad |a_j(x,y)| < \dfrac{C}{r_{xy}^2}, \\ \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial A_{ij}(x,y)}{\partial x_m} - \dfrac{\partial A_{ij}(x',y)}{\partial x'_m}\right| \\ |a_j(x,y) - a_j(x',y)| \end{array}\right\} < C\left|\dfrac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^3} + \dfrac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \dfrac{r_{xx'}^h}{R}\right|. \end{cases}$$

Damit sind wir am Schlusse unserer Untersuchung über den Greenschen Tensor und können zusammenfassen:

Satz XVIII. *Für Gebiete der Klasse Ah gelten die Ungleichungen*:

$$|G_{ij}(x,y)| < \frac{C}{r_{xy}},$$

$$|G_{ij}(x,y)| - G_{ij}(x',y)| < C\left|\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right|,$$

[25]) Es sollen dabei Σ' und τ die entsprechende Bedeutung für den Punkt (y) besitzen wie auf S. 360 in bezug auf den Punkt (η).

Satz XIX. *Für Gebiete der Klasse Bh haben wir*

$$\left|\frac{\partial G_{ij}(x,y)}{\partial x_m}\right|, \quad |g_j(x,y)| < \frac{C}{r_{xy}^2},$$

$$\left|\frac{\partial G_{ij}(x,y)}{\partial x_m} - \frac{\partial G_{ij}(x',y)}{\partial x'_m}\right|, \quad |g_j(x,y) - g_j(x',y)|$$

$$< C\left|\frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|}{R^3} + \frac{r_{xx'}|\log r_{xx'}|^2}{R^2} + \frac{r_{xx'}^h}{R}\right|,$$

gleichmäßig gültig in $Q_{(i)} + T$, falls (x) und (x') außerhalb einer Kugel vom Radius R um (y) als Zentrum liegen. In diesen Formeln sind die Konstanten C nur von der Randfläche T und von h abhängig.

Schließlich betrachten wir das vermittels einer stetigen Funktion $X_j(y)$ gebildete Integral

$$Y_i(x) = \int_{Q_{(i)}} G_{ij}(x,y)\, X_j(y)\, d_y Q$$

und bekommen sofort mit Hilfe der Sätze XVIII bzw. XIX:

Satz XX. *Bei Gebieten der Klasse Ah ist $Y_i(x)$ in $Q_{(i)} + T$ H-stetig mit dem Exponenten h.*

Satz XXI. *Bei Gebieten der Klasse Bh besitzt $Y_i(x)$ in $Q_{(i)} + T$ erste Ableitungen, die H-stetig mit dem Exponenten h sind. Gleichfalls ist das Integral*

$$\int_{Q_{(i)}} g_j(x,y)\, X_j(y)\, d_y Q$$

in diesem Falle H-stetig mit dem Exponenten h.

Wichtige Bemerkung. Die strenge Gültigkeit von (5.02) und (5.03) ist nach Satz XIX und also nur für Gebiete der Klasse Bh zu erschließen. Für die Gültigkeit von (5.02) bei Gebieten der Klasse Ah würden die Sätze IIB, VC, XVIII und eine Betrachtung ähnlich derjenigen auf S. 354, die Bedingung $h > \frac{1}{2}$ ergeben. Ein Weg zur Verallgemeinerung der Formeln vom Typus (5.03) auf Gebiete der Klasse Ah findet man bei H. Weyl[26]).

§ 6.

Die nichtlineare Randwertaufgabe.

Wir betrachten in diesem Paragraphen unsere Hauptaufgabe, das System (1.01) bei vorgegebenen Randwerten $u_i(\xi)$ zu integrieren. Es handle sich dabei um ein Innengebiet Q der Klasse Bh. Die Randwerte $u_i(\xi)$ sollen auf der Begrenzungsfläche T H-stetig differentiierbar mit dem Exponenten h' sein, und darüber hinaus der Bedingung (4.11) genügen. Die Massenkräfte X_i werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit vernachlässigt.

[26]) Rend. Pal. 39 (1915), S. 14.

In meiner Dissertation habe ich diese Aufgabe so gelöst, daß ich $u_i(x) = u_i'(x) + v_i(x)$, $p(x) = p'(x) + q(x)$ setzte, wobei $u_i'(x)$, $p'(x)$ den Stokesschen Gleichungen (1.02) gehorchen, und $u_i'(x)$ die vorgeschriebenen Randwerte besitzen sollten. Mit Hilfe des Greenschen Tensors wurde dann für die Funktion $v_i(x)$, die auf dem Rande verschwindet, eine Funktionalgleichung aufgestellt, die durch sukzessive Approximation lösbar war. Es läßt sich der Konvergenzbeweis nur für „hinreichend kleine Gebiete“ erbringen.

Man kann aber, worauf mich Herr H. Prawitz aufmerksam machte, auch eine entsprechende Funktionalgleichung für $u_i(x)$ selbst aufschreiben, deren Auflösung durch sukzessive Approximationen, wie schon in der Einleitung erwähnt, für beliebige Größe des zugrunde gelegten Gebietes gelingt. Es gilt in der Tat nach (5.01)

$$(6.01) \qquad u_i(x) = -\varrho \int_Q G_{ij}(x, y)\, u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + u_i'(x),$$

$$(6.02) \qquad p(x) = -\varrho \int_Q g_j(x, y)\, u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + p'(x).$$

Wir können (6.01) versuchsweise differentiieren

$$(6.03) \qquad \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_l} = -\varrho \int_Q \frac{\partial G_{ij}(x, y)}{\partial x_l} u_k(y) \frac{\partial u_j(y)}{\partial y_k} d_y Q + \frac{\partial u_i'(x)}{\partial x_l},$$

denn nach Satz XVI ist $\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}$ in $Q + T$ H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$, wobei $\bar{h}$ die kleinere der Zahlen h und h' ist. Wir setzen zur Abkürzung

$$(6.04) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = u_{il}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = u_{jk}, \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_l} = u_{il}' \quad \text{usw.}$$

und haben in (6.01) und (6.03) ein System von zwölf Funktionalgleichungen für die Funktionen u_i und u_{il}. Wir können diese Funktionalgleichungen dadurch zu lösen versuchen, daß wir eine Lösung in der Form

$$(6.05) \qquad \begin{cases} u_i(x) = u_i^{(0)}(x) - \varrho\, u_i^{(1)}(x) + (-\varrho)^2 u_i^{(2)}(x) + \dots, \\ u_{il}(x) = u_{il}^{(0)}(x) - \varrho\, u_{il}^{(1)}(x) + (-\varrho)^2 u_{il}^{(2)}(x) + \dots \end{cases}$$

ansetzen, das heißt es wird die Lösung nach Potenzen von $-\varrho$ entwickelt. Alsdann bekommen wir die Rekursionsformeln

$$(6.06) \qquad \begin{cases} u_i^{(0)}(x) = u_i'(x), \qquad u_{il}^{(0)} = u_{il}'(x), \\ u_i^{(n+1)}(x) = \int_Q G_{ij}(x, y)\, [u_k^{(0)} u_{jk}^{(n)} + u_k^{(1)} u_{jk}^{(n-1)} + \dots + u_k^{(n)} u_{jk}^{(0)}]\, dQ, \\ u_{il}^{(n+1)}(x) = \int_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l} [u_k^{(0)} u_{jk}^{(n)} + u_k^{(1)} u_{jk}^{(n-1)} + \dots + u_k^{(n)} u_{jk}^{(0)}]\, dQ \\ \qquad (n \geqq 0). \end{cases}$$

Die nacheinander gebildeten Funktionen $u_i^{(n+1)}(x)$, $u_{il}^{(n+1)}(x)$ sind alle stetig. Bezeichnen wir das Maximum des absoluten Betrages einer beliebigen Funktion (bzw. eines Vektors oder Tensors) $\chi(x)$ durch Doppelstriche $\|\chi\|$, so gewinnen wir Majoranten der Reihen (6.05) in der Form

$$(6.07)\quad \begin{cases} U = U(-\varrho) = U_0 - \varrho U_1 + (-\varrho)^2 U_2 + \dots, \\ V = V(-\varrho) = V_0 - \varrho V_1 + (-\varrho)^2 V_2 + \dots, \\ \|u_i'\| = U_0, \quad \|u_{il}'\| = V_0, \\ U_{n+1} = G[U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \dots + U_n V_0], \\ V_{n+1} = G'[U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \dots + U_n V_0] \\ \qquad (n \geqq 0), \end{cases}$$

falls wir die Zahlen G und G' mit Hilfe der beliebigen stetigen Funktion $\chi(x)$ folgendermaßen charakterisieren

$$(6.08)\quad \begin{cases} \left| \int\limits_Q G_{ij}(x, y)\, \chi(y)\, dQ \right| \leqq G \|\chi\|, \\ \left| \int\limits_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l} \chi(y)\, dQ \right| \leqq G' \|\chi\|. \end{cases}$$

Die Existenz der Zahlen G und G' steht nach den Sätzen XVIII und XIX fest. Es sollen G und G' die kleinsten (6.08) erfüllenden Zahlen sein. Diese Zahlen sind dann für das Gebiet Q charakteristisch, und ihre Größe ist von der Größe des Gebietes abhängig. Es bleibt nur das Konvergenzgebiet der Reihen (6.07) festzustellen übrig. Man hat

$$UV = U_0 V_0 - \varrho(U_0 V_1 + U_1 V_0) + \dots \\ + (-\varrho)^n (U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \dots + U_n V_0) + \dots$$

und mithin werden die Funktionen $U(-\varrho)$ und $V(-\varrho)$ dem Gleichungssystem

$$(6.09)\quad \begin{cases} U = U_0 - \varrho G U V, \\ V = V_0 - \varrho G' U V \end{cases}$$

gehorchen. Setzt man hier $UV = W$, so ist

$$W = (U_0 - \varrho G W)(V_0 - \varrho G' W)$$

oder

$$(6.10)\quad \varrho^2 G G' W^2 - [1 + \varrho(G V_0 + G' U_0)] W + U_0 V_0 = 0.$$

Die Funktion W und damit die Funktionen U und V besitzen je einen in der Umgebung von $\varrho = 0$ regulären Zweig, dessen Potenzreihenentwicklung nach $-\varrho$ bis zum nächstgelegenen singulären Punkt der Funktion $W(-\varrho)$ konvergiert. Diesen Punkt erhält man durch Nullsetzen der Diskriminante von (6.10), d. h. aus der Gleichung

$$(6.11)\quad [1 + \varrho(G V_0 + G' U_0)]^2 - 4\varrho^2 G G' U_0 V_0 = 0.$$

Die Gleichung (6.11) besitzt zwei reelle negative Wurzeln, deren absolut kleinste den Konvergenzradius der Reihen (6.07) bestimmt. Es ergibt sich Konvergenz, falls die positive Konstante ϱ der Bedingung

$$\varrho < \frac{1}{\left(\sqrt{G V_0} + \sqrt{G' U_0}\right)^2} \tag{6.12}$$

genügt, wo überall die positive Quadratwurzel gemeint ist.

Man sieht somit, daß es bei gegebenem Gebiet, d. h. *bei gegebenen* G *und* G' *immer möglich sein wird, durch Verkleinerung von* U_0 *und* V_0 *zu erreichen, daß die Ungleichung* (6.12) *erfüllt ist, und daß sodann die Reihen* (6.07) *absolut und gleichmäßig konvergieren.* Dann konvergieren die Reihen (6.05) absolut und gleichmäßig und stellen mithin stetige Funktionen $u_i(x)$, $u_{il}(x)$ dar. Da $u'_{il}(x)$ H-stetig mit dem Exponenten $\bar{h}$ ist, so muß dies nunmehr nach (6.03) und dem Satze XXI auch mit der Funktion $u_{il}(x)$ der Fall sein. Dann können wir den Satz I auf unseren Ansatz (6.01), (6.02) anwenden, und somit bestätigen, daß die gesuchte Lösung der gestellten Randwertgabe vorliegt. Da die Zahlen U_0 und V_0 nur von den Randwerten $u_i(\xi)$ abhängen, und bei den gemachten Voraussetzungen (H-Stetigkeit der ersten Ableitungen von $u_i(\xi)$ auf T) mit ihnen beliebig klein gemacht werden können, so deckt sich unser jetziges Ergebnis, wie schon in der Einleitung erwähnt, mit dem Resultate der Lichtensteinschen Arbeit.

Wir können der Konvergenzbedingung (6.12) eine physikalisch faßbarere Form geben, falls wir dimensionslose Veränderliche einführen. Es sei l die kleinste lineare Abmessung unseres Gebietes Q, die mit dem gleichzeitigen Erfülltsein der Ungleichungen (6.08) verträglich ist, so daß

$$G = \frac{l^2}{\mu}, \qquad G' = \frac{l}{\mu}.$$

Es sei ferner U ein gewisses Geschwindigkeitsmaß, so daß wir setzen können

$$U_0 = U, \qquad V_0 = \frac{U}{l}.$$

Führen wir schließlich durch

$$R = \frac{\varrho\, l\, U}{\mu}$$

eine für die Strömung charakteristische, dimensionslose, sogenannte „Reynoldsche" Zahl ein, so wird (6.12) gleichbedeutend mit der einfachen Bedingung

$$R < \frac{1}{4}.$$

Es ist ja allerdings hier hervorzuheben, daß die Zahl R durch ein so kompliziertes Verfahren definiert worden ist, daß es im allgemeinen nicht möglich sein wird, den Zusammenhang dieser Zahl mit den von der experimentellen Forschung für spezielle Fälle eingeführten Reynoldschen Zahlen aufzudecken.

§ 7.

Auftreten von Verzweigungslösungen.

Bei größeren Reynoldschen Zahlen wird man erwarten müssen, daß funktionale Verzweigungen der Lösungen des Systems (1.01) eintreten werden. Um sie aufzufinden, hat man diejenigen Funktionalgleichungen aufzuschreiben, denen die Differenz $v_i(x)$, $q(x)$ zweier Lösungen $v_i(x)+u_i(x)$, $q(x)+p(x)$ und $u_i(x)$, $p(x)$ der Randwertaufgabe gehorchen. Beide Lösungen erfüllen ein Gleichungssystem vom Typus (6.01), (6.02), also ergibt sich für die Differenz unter Benutzung der abgekürzten Bezeichnungsweise (6.04)

$$(7.01)\qquad v_i(x) = -\varrho\int\limits_Q G_{ij}(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

$$(7.02)\qquad v_{il}(x) = -\varrho\int\limits_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l}\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

$$(7.03)\qquad q(x) = -\varrho\int\limits_Q g_j(x,y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk} + v_k v_{jk}]\,dQ,$$

wo die Funktionen u_k, u_{jk} als bekannt anzusehen sind[27]). Auf dieses System läßt sich zwecks Auffinden von Verzweigungslösungen die Theorie von E. Schmidt[28]) anwenden. Aber die physikalisch interessanteste Frage nach dem Vorhandensein *reeller* Verzweigungen bleibt von dieser Theorie zunächst unbeantwortet. Sie hängt mit der Existenz reeller Eigenwerte und Eigenlösungen derjenigen homogenen linearen Integralgleichungen zusammen, die man aus (7.01), (7.02) erhält, indem man die Produktglieder rechts wegstreicht. Wir verweisen auch diese Aufgabe der Weiterforschung und wollen nur einen besonders einfachen Fall angeben, wo tatsächlich *keine reellen Eigenwerte* des Systems (7.01), (7.02) existieren. Der lineare homogene Teil von (7.01), (7.03) lautet

---

[27]) Man denke etwa an die bekannten Lösungen des Systems (1.01), also z. B. an die sogenannten Couetteschen oder Poiseuilleschen Strömungen. Übrigens können die Betrachtungen dieses Paragraphen auch an das System (4.15) meiner Dissertation angeknüpft werden, wodurch die in (7.01) bis (7.04) dieser Arbeit eingehenden Funktionen u_k, p nur als Lösungen der Stokesschen Gleichungen angesprochen werden müssen.

[28]) Math. Annalen **65** (1908).

$$
(7.04) \qquad \begin{cases} v_i(x) = -\varrho \int\limits_Q G_{ij}(x, y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\, dQ, \\ v_{il}(x) = -\varrho \int\limits_Q \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_l}[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\, dQ, \\ q(x) = -\varrho \int\limits_Q g_j(x, y)\,[v_k u_{jk} + u_k v_{jk}]\, dQ, \end{cases}
$$

und die beiden ersten Gleichungen dieses Systems als lineare Integralgleichungen aufgefaßt sind der Fredholmschen Methode zugänglich. Falls diese Gleichungen eine stetige Lösung $v_i(x)$, $v_{il}(x)$ besitzen, so wird sie nach dem Satze XXI in $Q + T$ H-stetig mit dem Exponenten h sein, und dann wird nach dem Satze I das Gleichungssystem (7.04) gleichbedeutend sein mit

$$
(7.05) \qquad \mu \Delta v_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} + \varrho\left(v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right), \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.
$$

Trägt man (7.05) in (1.07) ein, so ergibt sich

$$
(7.06) \qquad \int\limits_Q \left\{\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + \varrho\, v_i \left(v_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\right\} dQ = 0,
$$

da ja die Funktion v_i auf dem Rande T verschwindet. Hier läßt sich, da $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ ist, das letzte Glied

$$
v_i u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{v_i^2}{2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_k \frac{v_i^2}{2}\right)
$$

durch partielle Integration wegschaffen, und wir haben nach einer leichten Umformung

$$
(7.07) \qquad \int\limits_Q \left\{\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + \varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) v_i v_k\right\} dQ = 0.
$$

Wenn die rechts im Integranden von (7.07) stehende quadratische Form in v_i positiv definit ist, so besitzt das Eigenwertproblem (7.05) und damit auch (7.04) für alle reellen ϱ keine Lösung $v_i \not\equiv 0$. Wir erwähnen nur den naheliegendsten Fall: Wenn für die Grundbewegung u_i, p der Ausdruck

$$
\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0
$$

ist, d. h. falls u_i die Bewegung eines starren Körpers darstellt, so wird (7.07) nur für $v_i \equiv 0$ erfüllbar[29]). Es existieren somit in diesem Falle keine reellen Verzweigungen der Lösung u_i, p der Gleichungen (6.01), (6.02) bzw. des Systems (1.01).

---

[29]) Dann lassen sich die Gleichungen (7.05) bei beliebigen, H-stetig differentiierbaren, der Bedingung (4.11) genügenden Randwerten integrieren. Denn zerlegt man die Funktionen v_i, q in je zwei, von denen die ersten die entsprechende Stokessche Randwertaufgabe lösen, so bekommen wir für die anderen ein inhomogenes

(Fortsetzung der Fußnote 29) auf nächster Seite.)

§ 8.

Nichtstationäre Bewegungen. Stabilität.

Bei der Betrachtung nichtstationärer Bewegungen einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit hat man links in der ersten Gleichung (1.01) die zeitliche Ableitung $-\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t}$ einzuführen. Zu den Randwerten, die nunmehr, wie auch die Randfläche T selbst, von t abhängen, treten gewisse, etwa für $t = 0$ gültige Anfangsbedingungen. Hier soll auf dieses schwierige Problem nur in dem einfachen Falle eingegangen werden, wo einerseits die Randwerte $u_i(\xi, t)$ und die Randfläche T von der Zeit t unabhängig[30]) sind und andererseits die Produktglieder vernachlässigt werden. Dann können wir gleichwohl das folgende Problem betrachten: Man bestimme $u_i(x, t)$, $p(x, t)$ in einem Innengebiete Q (der Klasse Ah), so daß

$$(8.01)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \mu \Delta u_i - \varrho \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \ldots \end{array}\right\} \text{ in } Q \text{ für } t > 0. \\ u_i(\xi, t) \equiv 0 \text{ auf } T, \\ u_i(x, 0) = u_i^{(0)}(x) = \text{gegebener Funktion in } Q. \end{cases}$$

Man setzt dann, wie gewöhnlich,

$$(8.02)\qquad u_i(x, t) = v_i(x)\, e^{-\lambda t}, \qquad p(x, t) = q(x)\, e^{-\lambda t},$$

wobei $v_i(x)$ und $q(x)$ von t unabhängig sein sollen. Hierdurch wird man auf das hydrodynamische „Schwingungsproblem" geführt:

$$(8.03)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \mu \Delta v_i + \varrho \lambda v_i = \dfrac{\partial q}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \ldots \end{array}\right\} \text{ in } Q, \\ v_i(\xi) = 0 \text{ auf } T. \end{cases}$$

System von Integralgleichungen vom Typus (7.04), welches in diesem Falle für beliebige reelle ϱ lösbar ist. Unter diesen Lösungen befinden sich die Lösungen der ersten Randwertaufgabe für die bekannten Oseenschen Differentialgleichungen, die für Außen- und Innengebiete von Faxén, a. a. O.[3]) ausführlich behandelt worden sind. Unsere hiesige Lösung bezieht sich allerdings auf das hier weniger interessante Innengebiet. Es befindet sich aber unter unseren Lösungen auch die der folgenden, mit der Oseenschen analogen Aufgabe: Man bestimme unter Berücksichtigung der „halbquadratischen Glieder" die von einem eingetauchten Körper in einer rotierenden Flüssigkeit hervorgerufene Bewegung.

[30]) Ein Weg zur Verallgemeinerung ähnlicher Betrachtungen, wie die folgenden, auf den Fall zeitlich veränderlicher Randwerte ist von Herrn A. Korn, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 1927, S. 353, vorgeschlagen worden.

Zur Lösung dieser Aufgabe eignet sich der Greensche Tensor, indem wir ja ansetzen können:

$$v_i(x) = \lambda \varrho \int_Q G_{ij}(x, y)\, v_j(y)\, d_y Q, \tag{8.04}$$

$$q(x) = \lambda \varrho \int_Q g_j(x, y)\, v_j(y)\, d_y Q. \tag{8.05}$$

In der Gleichung (8.04) haben wir eine Integralgleichung mit regulärem, symmetrischem Kern. Der Kern ist nach dem Satze XVIII quadratisch integrierbar, und es wird somit die bekannte Hilbertsche Theorie anwendbar. Insbesondere besitzt die Gleichung (8.04) eine abzählbare Folge von Eigenwerten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

und zugehörige Eigenfunktionen

$$v_i^{(1)}(x),\ v_i^{(2)}(x),\ \ldots,$$

die ein orthogonales und normiertes Funktionensystem ausmachen, d. h. wir haben

$$\int_Q v_i^{(m)}(y)\, v_i^{(n)}(y)\, d_y Q = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Es läßt sich ferner jede Funktion $w_i(x)$, die vermittels einer stetigen Funktion $h_i(x)$ quellenmäßig dargestellt werden kann,

$$w_i(x) = \int_Q G_{ij}(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q, \tag{8.06}$$

in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe der Form

$$w_i(x) = \sum_m v_i^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, w_j(y)\, d_y Q \tag{8.07}$$

entwickeln.

Aus (8.04) und dem Satze XX folgt nun, daß die Eigenfunktionen $v_i^{(n)}(x)$ in $Q + T$ H-stetig mit dem Exponenten h sein müssen. Somit folgt aus dem Satze I, daß (8.04) und (8.05) in Q zwei- bzw. einmal differentiiert werden können. Falls wir mit $q^{(n)}(x)$ den, gemäß (8.05), zu $v_i^{(n)}(x)$ gehörigen Druck bezeichnen, so ist es klar, daß die Randwertaufgabe (8.03) für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ durch die Funktionenkomplexe

$$v_i^{(1)}(x),\ v_i^{(2)}(x),\ \ldots,$$
$$q^{(1)}(x),\ q^{(2)}(x),\ \ldots$$

gelöst wird.

Es sollen nun die Anfangswerte $u_i^{(0)}(x)$ die Eigenschaften

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } Q,$$

$$u_i^{(0)}(\xi) = 0 \quad \text{auf } T$$

besitzen, und darüber hinaus soll eine Funktion $p^{(0)}(x)$ existieren, so daß die Funktion

(8.08) $$\mu \Delta u_i^{(0)} - \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = -h_i(x) \not\equiv 0$$

in $Q + T$ H-stetig mit dem Exponenten h' ist. Dann gilt identisch in Q

$$u_i^{(0)}(x) = \int_Q G_{ij}(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q,$$

$$p^{(0)}(x) = \int_Q g_j(x, y)\, h_j(y)\, d_y Q,$$

denn auf die rechten Seiten lassen sich nach Satz I die in (8.08) enthaltenen Differentiationsoperationen ausführen. Nach dem obigen Entwicklungssatz gilt

(8.09) $$u_i^{(0)}(x) = \sum_m v_i^{(m)}(x) \int_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q.$$

Es sind nun sämtliche Eigenwerte $\lambda_n > 0$. Denn führt man (8.03) in (1.07) ein, so kommt

$$\int_Q \left\{ \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 - \varrho \lambda v_i^2 \right\} dQ = 0,$$

und hieraus folgt, daß $v_i \not\equiv 0$ nur für $\lambda > 0$ möglich ist. Wir können dann die Ausdrücke

(8.10) $$\begin{cases} u_i(x, t) = \sum\limits_m e^{-\lambda_m t} v_i^{(m)}(x) \int\limits_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q, \\ p(x, t) = \sum\limits_m e^{-\lambda_m t} q^{(m)}(x) \int\limits_Q v_j^{(m)}(y)\, u_j^{(0)}(y)\, d_y Q \end{cases}$$

bilden, und es ist klar, daß die Reihen für jeden Wert von $t \geq t_1$ $(t_1 > 0)$ gleichmäßig konvergieren. Die Reihen können gliedweise differentiiert werden, und die Differentialgleichungen (8.01) sind erfüllt. In der ersten Gleichung (8.10) können wir zur Grenze $t \to 0$ gehen und haben nach (8.09)

$$\lim_{t=0} u_i(x, t) = u_i^{(0)}(x).$$

Es wird somit durch (8.10) in der Tat die Aufgabe (8.01) gelöst.

Betrachten wir schließlich die auf eine Grundbewegung $\bar{u}_i(x)$, $\bar{p}(x)$ — Lösung der in § 6 gelösten Randwertaufgabe — superponierten kleinen Schwingungen $u_i(x, t)$, $p(x, t)$, die den Differentialgleichungen

(8.11) $$\begin{cases} \mu \Delta u_i - \varrho \left(u_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \bar{u}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - \varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

gehorchen und auf dem Rande T (der Klasse Bh) verschwinden, so können wir wiederum den Ansatz (8.02) machen und gelangen zur Aufgabe, $v_i(x)$, $q(x)$ so zu bestimmen, daß

$$(8.12)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\mu \Delta v_i - \varrho\left(\bar{u}_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right) + \varrho \lambda v_i = \frac{\partial q}{\partial x_i} \\ &\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \ldots \end{aligned}\right\} \text{ in } Q, \\ v_i(\xi) = 0 \text{ auf } T. \end{cases}$$

Mit Hilfe des Greenschen Tensors bekommt man wieder eine Fredholmsche Integralgleichung, dessen Kern zwar regulär, aber jetzt nicht mehr symmetrisch ist. Das Hauptinteresse knüpft sich an die Frage, ob der Realteil der Eigenwerte positiv ist, denn in diesem Falle wird eine Störung, die etwa für $t = 0$ einsetzt, allmählich abklingen, d. h. die Lösung $\bar{u}_i$, $\bar{p}$ stabil sein. Wir denken uns jetzt die Funktionen $\bar{u}_i$ mit einem neuen Parameter ε multipliziert. Der Kern der Integralgleichungen wird somit ein linearer Ausdruck in λ und ε sein. Die homogenen Gleichungen werden dann im allgemeinen Eigenwerte sowohl in bezug auf λ als auf ε aufweisen. Die Fredholmsche Determinante wird eine ganze Funktion von den beiden Parametern sein. Es werden dann die Nullstellen der Determinante in bezug auf λ gewisse stetige Funktionen von ε sein. Für $\varepsilon = 0$ haben wir eben bewiesen, daß sämtliche Eigenwerte λ reell und positiv sind. Es wird dann immer möglich sein, eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ so zu bestimmen, daß die Realteile aller Eigenwerte positiv ausfallen, sobald $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ ist. Es bedeutet dies, daß, falls $|\bar{u}_i|$, $\left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right|$ hinreichend klein sind, so werden sämtliche Eigenwerte positiven Realteil besitzen, d. h. die Grundbewegung stabil sein.

(Eingegangen am 26. April 1929.)