Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Die Aufgabe. Unter- und Oberfunktionen.

Sei ein ebenes beschränktes Gebiet G gegeben (Gebiet = zusammenhängende Menge von lauter *inneren* Punkten). Es braucht nicht schlicht zu sein, sondern darf Teile der Ebene mehrfach bedecken (Fig. 1 und 2); doch soll G keine Windungspunkte enthalten. Über den Rand R des Gebietes G braucht vorläufig gar nichts vorausgesetzt zu werden; er darf z. B. auch Windungspunkte enthalten (Fig. 2). Nun stellen wir die folgende

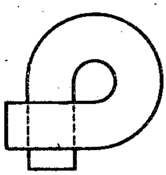

Fig. 1.

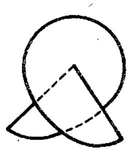

Fig. 2.

Randwertaufgabe. *Auf dem Rand R sei eine beschränkte Funktion f gegeben; ihre untere und obere Limesfunktion seien $\underline{f}$ und $\overline{f}$. Gesucht wird eine Funktion u im abgeschlossenen Bereich $G + R$, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:*

I. *Die untere und obere Limesfunktion $\underline{u}$ und $\overline{u}$ erfüllen auf dem Rand R die Ungleichungen*[1])

$$\underline{f} \leqq \underline{u} \leqq \overline{u} \leqq \overline{f}.$$

II. *Im Gebiet G ist u harmonisch; d. h. in G ist u nebst den partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ stetig und genügt der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

---

[1]) Da u den Definitionsbereich $G + R$ hat, so sind die Limesfunktionen $\underline{u}, \overline{u}$ natürlich nicht wie $\underline{f}, \overline{f}$ in bezug auf R, sondern in bezug auf $G + R$ zu verstehen.

In der Bedingung I steckt insbesondere die Forderung, daß überall da, wo die Randfunktion f stetig ist, auch u stetig ist und den gleichen Wert wie f annimmt; das ist die gewöhnliche Formulierung der Randwertaufgabe. Wir wollen jetzt die Bedingung II in eine etwas andere Form kleiden. Zu dem Zweck bezeichnen wir die Punkte von $G + R$ mit kleinen deutschen Buchstaben und demgemäß den Wert einer Funktion v im Punkt $\mathfrak{x}$ mit $v(\mathfrak{x})$. Ist dann K ein Kreis[2]), und v eine im abgeschlossenen Bereich $G + R$ definierte beschränkte Funktion, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_K v$ eine Funktion, die ebenfalls den Definitionsbereich $G + R$ hat, und zwar soll $\mathfrak{M}_K v$ außerhalb und auf der Peripherie von K mit v übereinstimmen, aber innerhalb K gleich dem über die Peripherie erstreckten und mit den Peripheriewerten von v gebildeten Poissonschen Integral sein; es werden nur solche Funktionen v in Betracht kommen, bei denen die Existenz des Integrals mindestens im Lebesgueschen Sinne von vornherein feststeht. Da die Peripheriewerte im Poissonschen Integral linear auftreten, so ist hiernach $\mathfrak{M}_K$ ein distributiver Operator, d. h. wenn α_1, α_2 Konstanten und v_1, v_2 Funktionen sind, so ist

$$\alpha_1 \mathfrak{M}_K v_1 + \alpha_2 \mathfrak{M}_K v_2 = \mathfrak{M}_K (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2).$$

Außerdem hat bekanntlich, wenn v eine Konstante ist, auch $\mathfrak{M}_K v$ denselben konstanten Wert, und wenn $v_1 \geqq v_2$ ist, so ist auch $\mathfrak{M}_K v_1 \geqq \mathfrak{M}_K v_2$. Im Innern von K ist $\mathfrak{M}_K v$ stetig, und wenn v auf der Peripherie von K stetig ist, so ist $\mathfrak{M}_K v$ in K bekanntlich diejenige eindeutig bestimmte Funktion, die im Innern von K harmonisch ist und sich stetig an die Peripheriewerte von v anschließt. Hiernach ist nun die obige Bedingung II völlig gleichbedeutend mit der folgenden:

IIa. *Im Gebiet G ist für jeden Kreis K*

$$u = \mathfrak{M}_K u.$$

Um nun eine Funktion u zu gewinnen, die den Bedingungen I und IIa genügt, stellen wir folgende Definitionen auf:

Jede im abgeschlossenen Bereich $G + R$ stetige Funktion φ, die den Ungleichungen genügt

$$\varphi \leqq f \quad \textit{auf dem Rand } R,$$
$$\varphi \leqq \mathfrak{M}_K \varphi \quad \textit{für jeden Kreis } K,$$

heißt eine Unterfunktion.

[2]) Unter einem Kreis wird in dieser Arbeit stets nur ein solcher verstanden, der mit Einschluß der Peripherie ganz dem Gebiet G angehört; diese Einschränkung wird später nicht mehr besonders hervorgehoben.

Jede im abgeschlossenen Bereich $G+R$ stetige Funktion ψ, die den Ungleichungen genügt

$$\psi \geqq \bar{f} \quad \textit{auf dem Rand } R,$$
$$\psi \geqq \mathfrak{M}_K \psi \quad \textit{für jeden Kreis } K,$$

heißt eine Oberfunktion.

Offenbar ist jede Konstante, die höchstens gleich der unteren Grenze von f ist, eine Unterfunktion; es gibt also Unterfunktionen, und ebenso gibt es auch Oberfunktionen. Ist φ eine Unterfunktion, ψ eine Oberfunktion, und setzt man $\psi - \varphi = \omega$, so ist

(a) $\omega \geqq 0$ auf dem Rand R,

(b) $\omega \geqq \mathfrak{M}_K \omega$ für jeden Kreis K.

Aus (b) schließt man in bekannter Weise, daß das Minimum der in $G+R$ stetigen Funktion ω auf dem Rand R liegt, also nach (a) nicht negativ ist. Daher ist überall $\psi - \varphi \geqq 0$, also *jede Oberfunktion mindestens so groß wie jede Unterfunktion.*

Infolgedessen hat für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von $G+R$ die Menge aller Oberfunktionen $\psi(\mathfrak{x})$ eine endliche untere Grenze $u(\mathfrak{x})$, und $u(\mathfrak{x})$ ist in $G+R$ beschränkt. *Wir wollen beweisen, daß die so definierte Funktion $u(\mathfrak{x})$ unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen die Randwertaufgabe löst, d. h. die in* I *und* IIa *geforderten Eigenschaften hat.*

§ 2.

Zwei Hilfssätze über Oberfunktionen.

Hilfssatz 1. *Sind n Oberfunktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ gegeben, so ist auch*

$$\psi = \mathrm{Min}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

eine Oberfunktion.

Beweis. Zunächst ist ψ selbstverständlich in $G+R$ stetig; außerdem ist auf dem Rand R

$$\psi_1 \geqq \bar{f}, \psi_2 \geqq \bar{f}, \ldots, \psi_n \geqq \bar{f},$$

also auch $\psi \geqq \bar{f}$. Ist sodann $\mathfrak{x}$ ein Punkt von $G+R$, so gibt es einen Index ν derart, daß

$$\psi(\mathfrak{x}) = \mathrm{Min}(\psi_1(\mathfrak{x}), \ldots, \psi_n(\mathfrak{x})) = \psi_\nu(\mathfrak{x}).$$

Aber weil ψ_ν eine Oberfunktion, und weil $\psi_\nu \geqq \psi$, so ist für jeden Kreis K

$$\psi_\nu(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi_\nu(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}).$$

Also ist nach vorigem auch

$$\psi(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}),$$

womit ψ als Oberfunktion erkannt ist.

Hilfssatz 2. *Ist ψ eine Oberfunktion und K ein Kreis, so ist auch $\mathfrak{M}_K \psi$ eine Oberfunktion.*

Beweis. Man setze

$$\mathfrak{M}_K \psi = \chi.$$

Da ψ als Oberfunktion in $G + R$ stetig ist, so ist auch χ in $G + R$ stetig. Ferner ist nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$ zunächst auf dem Rand R

$$\chi = \psi \geqq \bar{f}.$$

Nun muß nur noch gezeigt werden, daß für jeden Kreis L

$$\chi \geqq \mathfrak{M}_L \chi$$

ist oder ausführlicher, wenn $\mathfrak{x}$ einen beliebigen Punkt von $G + R$ bedeutet:

$$(1) \qquad \chi(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}).$$

Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von L, so ist diese Ungleichung schon nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_L$ erfüllt und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von K, so ist nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$

$$\chi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{M}_K \psi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}).$$

Beachtet man, daß außerdem in $G + R$, weil ψ eine Oberfunktion ist,

$$\chi = \mathfrak{M}_K \psi \leqq \psi,$$

also $\chi \leqq \psi$ und folglich auch

$$\mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \leqq \mathfrak{M}_L \psi(\mathfrak{x})$$

ist, so ergibt sich weiter:

$$\chi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \geqq \psi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \psi(\mathfrak{x}) \geqq 0.$$

Daher ist wieder die Ungleichung (1) erfüllt.

Jetzt bleibt nur noch der Fall übrig, daß die Kreise K und L innere Punkte gemein haben, und daß $\mathfrak{x}$ ein solcher gemeinsamer Punkt ist. Nun ist aber $\chi = M_K \psi$ im Innern von K harmonisch, und $\mathfrak{M}_L \chi$ ist im Innern von L harmonisch. Also ist die Differenz

$$(2) \qquad \chi - \mathfrak{M}_L \chi$$

im Innern des den Kreisen K und L gemeinsamen Bereiches KL harmonisch. Auf der Peripherie von L verschwindet die Funktion (2) nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_L$. Auf der Peripherie von K ist

$$\chi = \mathfrak{M}_K \psi = \psi,$$

und da, wie schon vorhin bemerkt, überall $\chi \leqq \psi$, also auch

$$\mathfrak{M}_L \chi \leqq \mathfrak{M}_L \psi$$

ist, so ist auf der Peripherie von K

$$\chi - \mathfrak{M}_L \chi \geqq \psi - \mathfrak{M}_L \psi \geqq 0,$$

die Funktion (2) also $\geqq 0$. Die im Innern von KL harmonische Funktion (2) ist also auf dem Rand von KL überall $\geqq 0$. Da sie aber auf dem Rand von KL noch stetig ist (sie ist nämlich in $G + R$ überall stetig), so folgt bekanntlich, daß sie auch im Innern noch $\geqq 0$ sein muß. Es ist also

$$\chi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{M}_L \chi(\mathfrak{x}) \geqq 0,$$

und somit die Ungleichung (1) wiederum erfüllt.

Bemerkung. Entsprechende Hilfssätze gelten natürlich auch für Unterfunktionen:

1. Sind n Unterfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ gegeben, so ist auch

$$\varphi = \mathbf{Max}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

eine Unterfunktion.

2. Ist φ eine Unterfunktion und K ein Kreis, so ist auch $\mathfrak{M}_K \varphi$ eine Unterfunktion.

§ 3.

Nachweis, daß u in G harmonisch ist.

Hilfssatz 3. *Ist F eine im Bereich $G + R$ stetige Funktion und ist überall $u \leqq F$, so ist für jeden Kreis K auch $u \leqq \mathfrak{M}_K F$.*

Beweis. Man erinnere sich, daß u als untere Grenze aller Oberfunktionen definiert ist. Wenn also $\mathfrak{x}$ ein Punkt von $G + R$ und ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, so gibt es eine Oberfunktion $\psi_{\mathfrak{x}}$ derart, daß

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) - \varepsilon$$

ist (natürlich hängt $\psi_{\mathfrak{x}}$ auch von ε ab). Wegen $u \leqq F$ ist also auch

$$F(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit von F und $\psi_{\mathfrak{x}}$ gilt daher die Ungleichung

$$F > \psi_{\mathfrak{x}} - \varepsilon$$

auch in einer gewissen Umgebung $U_{\mathfrak{x}}$ von $\mathfrak{x}$. Somit erscheint jedem Punkt $\mathfrak{x}$ der beschränkten abgeschlossenen Menge $G + R$ eine Umgebung $U_{\mathfrak{x}}$ zugeordnet. Nach dem Heine-Borel-Theorem kann man aus ihnen endlich viele Umgebungen

$$U_{\mathfrak{x}_1}, U_{\mathfrak{x}_2}, \ldots, U_{\mathfrak{x}_n}$$

aussondern, die bereits die ganze Menge $G + R$ überdecken. Den n Punkten $\mathfrak{x}_\nu$ entsprechen dann in obiger Weise n Oberfunktionen $\psi_{\mathfrak{x}_\nu}$, und wenn man

$$\mathrm{Min}\,(\psi_{\mathfrak{x}_1}, \psi_{\mathfrak{x}_2}, \ldots, \psi_{\mathfrak{x}_n}) = \psi$$

setzt, so ist nach Hilfssatz 1 auch ψ eine Oberfunktion. Da jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $G + R$ einer Umgebung $U_{\mathfrak{x}_\nu}$ angehört, ist

$$F(\mathfrak{y}) > \psi_{\mathfrak{x}_\nu}(\mathfrak{y}) - \varepsilon \geqq \psi(\mathfrak{y}) - \varepsilon.$$

Ist nun K ein Kreis, und setzt man $\mathfrak{M}_K \psi = \chi$, so ist nach Hilfssatz 2 auch χ eine Oberfunktion, und aus der vorigen Ungleichung folgt:

$$\mathfrak{M}_K F > \mathfrak{M}_K \psi - \varepsilon = \chi - \varepsilon.$$

Da χ eine Oberfunktion, und da u die untere Grenze aller Oberfunktionen, so ist also erst recht

$$\mathfrak{M}_K F > u - \varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, so folgt hieraus:

$$\mathfrak{M}_K F \geqq u. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Der Beweis, daß u in G harmonisch ist, gestaltet sich nun folgendermaßen. Wie beim Beweis von Hilfssatz 3 gibt es, wenn $\mathfrak{x}$ einen Punkt von $G + R$ und ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, eine Oberfunktion $\psi_{\mathfrak{x}}$ derart, daß

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) - \varepsilon.$$

Ist also $\mathfrak{x}_1$ ein in $G + R$ gelegener hinreichend naher Nachbarpunkt von $\mathfrak{x}$, so ist, da $\psi_{\mathfrak{x}}$ als Oberfunktion stetig ist, auch

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}_1) - \varepsilon,$$

und daher erst recht, weil u die untere Grenze aller Oberfunktionen ist,

$$u(\mathfrak{x}) > u(\mathfrak{x}_1) - \varepsilon.$$

Das besagt aber, *daß die Funktion u nach oben halbstetig ist.* Daher läßt sie sich als Grenzwert einer monoton abnehmenden Folge von *stetigen* Funktionen F_ν darstellen:

$$u = \lim_{\nu \to \infty} F_\nu,$$

wobei also $F_\nu \geqq F_{\nu+1}$ und $u \leqq F_\nu$ ist[3]). Nach Hilfssatz 3 ist dann für jeden Kreis K auch

$$u \leqq \mathfrak{M}_K F_\nu,$$

---

[3]) Carathéodory, C.: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin 1918, Seite 402. Vermutlich kann man auch ohne diesen Satz auskommen und u direkt als Grenzwert einer monoton abnehmenden Folge von *Oberfunktionen* darstellen. Diese Darstellung, die mir leider nicht gelungen ist, hätte den weiteren Vorteil, daß dann der Hilfssatz 3 entbehrlich würde.

und da die F_ν offenbar gleichmäßig beschränkt sind (alle sind $\leqq F_1$ und $\geqq u$), so folgt hieraus nach einem Lebesgueschen Satz über die Integration eines Grenzwertes, indem man zur Grenze $\nu \to \infty$ übergeht:

$$u \leqq \mathfrak{M}_K u. \tag{3}$$

Dabei kann der in dem Zeichen $\mathfrak{M}_K u$ steckende Integrationsprozeß zunächst nur im Lebesgueschen Sinne aufgefaßt werden, da ja die Stetigkeit von u noch nicht bewiesen ist.

Andererseits ist aber, wenn $\psi_{\mathfrak{x}}$ und ε wieder die obige Bedeutung haben,

$$u(\mathfrak{x}) > \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) - \varepsilon,$$

und, weil $\psi_{\mathfrak{x}}$ eine Oberfunktion ist,

$$\psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K \psi_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K u(\mathfrak{x});$$

also ist auch $u(\mathfrak{x}) > \mathfrak{M}_K u(\mathfrak{x}) - \varepsilon$, und da ε beliebig klein sein darf, so schließt man hieraus:

$$u(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K u(\mathfrak{x}). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich aber die Gleichung

$$u = \mathfrak{M}_K u.$$

Also erfüllt u die Bedingung IIa, *d. h. u ist in G harmonisch.*

§ 4.

Nachweis, daß u unter einer gewissen Voraussetzung auch die Randbedingungen erfüllt.

Um nun den Beweis zu vollenden, daß u eine Lösung der in § 1 formulierten Randwertaufgabe ist, muß nur noch gezeigt werden, daß u auch die beiden Randbedingungen

$$\underline{u} \geqq \underline{f}, \qquad \bar{u} \leqq \bar{f}$$

auf dem Rand R erfüllt. Dazu machen wir vorläufig die folgende

Voraussetzung A. *Ist $\mathfrak{r}$ ein beliebiger Punkt des Randes R, und $U_{\mathfrak{r}}$ eine beliebig kleine Umgebung*[4]) *von $\mathfrak{r}$, so gibt es eine in $G+R$ stetige Funktion w, die den vier Bedingungen genügt:*

1. $w(\mathfrak{r}) = 0$,
2. $w \geqq 0$ *in* $U_{\mathfrak{r}}$,
3. *Außerhalb $U_{\mathfrak{r}}$ bleibt w über einer positiven Schranke,*
4. $w \geqq \mathfrak{M}_K w$ *für jeden Kreis K.*

[4]) Selbstverständlich verstehen wir unter einer Umgebung von $\mathfrak{r}$ allemal nur den Teil einer *vollen* Umgebung, der zu $G+R$ gehört. Sie ist unter Umständen nicht zusammenhängend.

Hierzu beachte man für später, daß die vierte Bedingung sicher dann erfüllt ist (nämlich mit dem Gleichheitszeichen), wenn w in G harmonisch, also wenn w gleich dem reellen Teil einer in G analytischen Funktion von $x + iy$ ist.

Bedeutet jetzt ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man in Voraussetzung A die Umgebung $U_\mathfrak{r}$ so klein wählen, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ des Durchschnitts $RU_\mathfrak{r}$

$$\underline{f}(\mathfrak{r}) - \varepsilon < \underline{f}(\mathfrak{x}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{x}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon$$

ist. Dann erkennt man leicht, daß die Funktion

$$\varphi_1 = \underline{f}(\mathfrak{r}) - \varepsilon - Cw, \tag{5}$$

wenn nur die positive Konstante C genügend groß gewählt wird, eine Unterfunktion ist. Ebenso ist

$$\psi_1 = \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon + Cw \tag{6}$$

eine Oberfunktion.

Da nach (5) insbesondere $\varphi_1(\mathfrak{r}) = \underline{f}(\mathfrak{r}) - \varepsilon$, so gibt es eine Umgebung $U_\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{r}$ derart, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}'$ von $U_\mathfrak{r}'$

$$\varphi_1(\mathfrak{x}') \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon$$

ist. Da jede Oberfunktion mindestens so groß ist wie jede Unterfunktion, so ist auch die untere Grenze u mindestens so groß wie jede Unterfunktion, und aus der vorigen Ungleichung folgt:

$$u(\mathfrak{x}') \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon.$$

Also ist auch

$$\underline{u}(\mathfrak{r}) \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}) - 2\varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, schließt man hieraus:

$$\underline{u}(\mathfrak{r}) \geqq \underline{f}(\mathfrak{r}).$$

Die erste Randbedingung ist also erfüllt.

Noch einfacher ist das Erfülltsein der zweiten zu beweisen. Da nach (6) nämlich $\psi_1(\mathfrak{r}) = \bar{f}(\mathfrak{r}) + \varepsilon$, so gibt es eine Umgebung $U_\mathfrak{r}''$ von $\mathfrak{r}$ derart, daß für jeden Punkt $\mathfrak{x}''$ von $U_\mathfrak{r}''$

$$\psi_1(\mathfrak{x}'') \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon$$

ist. Daher wird erst recht

$$u(\mathfrak{x}'') \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon,$$

und folglich auch

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}) + 2\varepsilon$$

sein. Da aber ε beliebig klein sein darf, so schließt man hieraus:

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) \leqq \bar{f}(\mathfrak{r}).$$

Die zweite Randbedingung ist also ebenfalls erfüllt. Übrigens kann man bemerken, daß die zweite Randbedingung immer mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist. Denn für jede Oberfunktion ψ ist ja definitionsgemäß $\psi(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$; also wird auch $u(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$, und folglich erst recht $\bar{u}(\mathfrak{r}) \geqq \bar{f}(\mathfrak{r})$ sein; daher schließlich:

$$\bar{u}(\mathfrak{r}) = \bar{f}(\mathfrak{r}).$$

Damit ist nun der Existenzbeweis für eine Lösung der in § 1 *formulierten Randwertaufgabe, ohne das geringste über den Rand R vorauszusetzen, zurückgeführt auf die Erfüllung der Voraussetzung* A, *deren Inhalt allerdings selbst wieder ein Existenzsatz ist, aber ein viel einfacherer als der ursprüngliche.*

Das gilt übrigens nicht nur für das ebene Problem, auf das wir uns beschränkt haben, sondern ebenso für das räumliche. Der Beweis bleibt der gleiche; nur muß an Stelle des ebenen Gebietes G natürlich ein räumliches treten; an Stelle der Kreise treten Kugeln, und an Stelle der ebenen Poissonschen Integrale treten räumliche.

§ 5.

Spezielle Annahmen über den Rand R.

Funktionen der in Voraussetzung A verlangten Art sind bei geeigneter Beschaffenheit des Randes leicht anzugeben. Sei z. B. das Gebiet G schlicht, und der Rand R eine Jordankurve. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein beliebiger Punkt von R, so machen wir ihn zunächst durch Parallelverschiebung zum Koordinatenanfangspunkt, und sodann sorgen wir durch Maßstabsänderung dafür, daß in $G+R$ dauernd $x^2+y^2<1$ ist[5]). Dann ist die Funktion

$$\log(x+iy) = p+iq$$

in $G+R$, abgesehen vom Anfangspunkt $\mathfrak{r}$, eindeutig und analytisch, und wegen $x^2+y^2<1$ ist $p<0$. In der Umgebung von $\mathfrak{r}$ aber ist ihr absoluter Betrag beliebig groß. Der reelle Teil von

$$\frac{-1}{\log(x+iy)}, \tag{7}$$

also die Funktion

$$w = \frac{-p}{p^2+q^2} \tag{8}$$

hat daher, wenn wir ihr im Punkt $\mathfrak{r}$ den Wert Null beilegen, die in Voraussetzung A geforderten Eigenschaften.

---

[5]) Man beachte, daß ja durch solche Transformationen die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ in sich übergeht.

Sei allgemeiner das Gebiet G wieder schlicht, aber von mehreren, und zwar endlich vielen Jordankurven berandet (also mehrfach zusammenhängend). Ist dann $\mathfrak{r}$ ein Punkt der *äußeren* Randkurve, so kann man genau wie oben verfahren. Ist aber $\mathfrak{r}$ ein Punkt einer *inneren* Randkurve, so kann man diese zunächst durch eine lineare Transformation[5]) der komplexen Variablen $x + iy$ zur äußeren machen und dann wieder wie oben verfahren.

§ 6.

Allgemeinere Annahmen über den Rand.

Das in § 5 angewandte Verfahren kann nie zum Ziel führen, wenn der Rand R verschiedene Punkte mit gleichen Koordinaten enthält, was beispielsweise bei nicht-schlichten Gebieten der Fall ist (Fig. 1 und 2), aber auch bei schlichten Gebieten schon vorkommen kann, z. B. in Fig. 3, wo gegenüberliegende Uferpunkte des Schnittes l als verschieden anzusehen sind. Dann würde nämlich die Funktion (7), also auch ihr reeller Teil (8) nicht nur im Randpunkt $\mathfrak{r}$ und allenfalls in einer beliebig kleinen Umgebung $U_\mathfrak{r}$ verschwinden, sondern auch in den anderen Randpunkten, die die gleichen Koordinaten wie $\mathfrak{r}$ haben; bei der Voraussetzung A war es aber wesentlich, daß w außerhalb $U_\mathfrak{r}$ über einer positiven Schranke bleibt, weil man sonst nicht schließen kann, daß die Funktion (5) eine Unterfunktion und die Funktion (6) eine Oberfunktion ist.

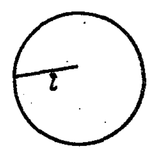

Fig. 3.

Diese Schwierigkeit wird sich in konkreten Fällen meistens durch eine einfache konforme Abbildung[5]) leicht beheben lassen. Man kann sie aber in größerem Umfang auch dadurch vermeiden, daß man die Voraussetzung A durch eine geringere ersetzt. *Die Voraussetzung* A *ist nämlich von selbst erfüllt, und folglich die Lösbarkeit der allgemeinen Randwertaufgabe sichergestellt, sobald die folgende geringere Voraussetzung* B *erfüllt ist.*

Voraussetzung B. *Ist $\mathfrak{r}$ ein beliebiger Punkt des Randes R, ferner $U_\mathfrak{r}$ eine hinreichend und beliebig kleine abgeschlossene Umgebung von $\mathfrak{r}$, so gibt es eine in $U_\mathfrak{r}$ stetige Funktion Ω, die den vier Bedingungen genügt:*

1. $\Omega(\mathfrak{r}) = 0$,
2. $\Omega \geqq 0$ *in $U_\mathfrak{r}$,*
3. $\Omega > 0$ *auf dem Rand von $U_\mathfrak{r}$, soweit er zu G (also nicht zu R) gehört, sowie in den Häufungspunkten dieser Menge,*
4. $\Omega \geqq \mathfrak{M}_L \Omega$ *für jeden Kreis L im Innern von $U_\mathfrak{r}$.*

Um das einzusehen, definieren wir in $G+R$ eine Funktion w durch die Formeln

$$w = \operatorname{Min}(C\Omega, 1) \quad \text{in } U_{\mathfrak{r}},$$
$$w = 1 \quad \text{außerhalb } U_{\mathfrak{r}},$$

wo C eine geeignet zu wählende positive Konstante ist, und zeigen, daß dann w die in Voraussetzung A geforderten Eigenschaften hat. In der Tat ist w in $G+R$ gewiß stetig, wenn nur C genügend groß[6]); außerdem ist

$$w(\mathfrak{r}) = 0,$$
$$w \geqq 0 \quad \text{in } U_{\mathfrak{r}},$$
$$w = 1 \quad \text{außerhalb } U_{\mathfrak{r}},$$

und somit muß nur noch gezeigt werden, daß für jeden Kreis K

$$w \geqq \mathfrak{M}_K w$$

ist, oder ausführlicher:

$$w(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}). \tag{9}$$

Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb oder auf der Peripherie von K, so ist die Ungleichung (9) nach der Definition des Zeichens $\mathfrak{M}_K$ gewiß erfüllt (nämlich mit dem Gleichheitszeichen). Liegt $\mathfrak{x}$ außerhalb $U_{\mathfrak{r}}$, so ist die linke Seite von (9) definitionsgemäß gleich 1; die rechte ist aber, weil ja überall $w \leqq 1$, also auch $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$ ist, gewiß $\leqq 1$. Die Ungleichung (9) ist daher wieder erfüllt. Somit bleibt nur noch der Fall, daß $\mathfrak{x}$ ein Punkt des Durchschnitts $K U_{\mathfrak{r}}$ ist. Nun genügt die Funktion $\chi_1 = C\Omega$ für jeden Kreis L im Innern von $U_{\mathfrak{r}}$ definitionsgemäß der Ungleichung

$$\chi_1 \geqq \mathfrak{M}_L \chi_1 .$$

Ferner ist die Funktion $\chi_2 = \mathfrak{M}_K w$ im Innern von K harmonisch, also ist für jeden Kreis L im Innern von K

$$\chi_2 = \mathfrak{M}_L \chi_2 .$$

Setzt man daher

$$C\Omega - \mathfrak{M}_K w = \chi_1 - \chi_2 = X,$$

so ist für jeden Kreis L im Innern des Durchschnitts $K U_{\mathfrak{r}}$

$$X \geqq \mathfrak{M}_L X,$$

und außerdem ist X auf dem Rand von $K U_{\mathfrak{r}}$ noch stetig. Daraus schließt man aber, daß das Minimum der im abgeschlossenen Bereich $K U_{\mathfrak{r}}$ stetigen Funktion X auf dem Rand von $K U_{\mathfrak{r}}$ liegt.

---

[6]) w hat dann auch auf dem Rand von $U_{\mathfrak{r}}$, soweit er zu G gehört, sowie in den Häufungspunkten dieser Menge den Wert 1, so daß dort also $C\Omega \geqq 1$ ist. So groß muß eben C gewählt werden.

Aber auf dem Rand von K, soweit er zu $KU_{\mathfrak{r}}$ gehört, ist nach der Definition von w

$$C\Omega \geqq w = \mathfrak{M}_K w,$$

also

$$X = C\Omega - \mathfrak{M}_K w \geqq 0.$$

Auf dem Rand von $U_{\mathfrak{r}}$, soweit er zu $KU_{\mathfrak{r}}$ gehört, ist nach Fußnote [6]) $C\Omega \geqq 1$; also, da, wie schon oben bemerkt wurde, $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$ ist,

$$X = C\Omega - \mathfrak{M}_K w \geqq 1 - 1 = 0.$$

Somit ist auf dem Rand von $KU_{\mathfrak{r}}$ überall $X \geqq 0$, und da das Minimum auf dem Rand liegt, ist auch im Innern von $KU_{\mathfrak{r}}$ überall $X \geqq 0$. Erinnert man sich an die Bedeutung des Zeichens X, so ist also, wenn $\mathfrak{x}$ einen beliebigen Punkt von $KU_{\mathfrak{r}}$ bedeutet,

$$C\Omega(\mathfrak{x}) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Anderseits ist, wie schon wiederholt bemerkt, $\mathfrak{M}_K w \leqq 1$, also

$$1 \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen zusammen folgt aber:

$$w(\mathfrak{x}) = \mathrm{Min}\,(C\Omega(\mathfrak{x}), 1) \geqq \mathfrak{M}_K w(\mathfrak{x}).$$

Daher ist auch jetzt die Ungleichung (9) wieder erfüllt. Unsere Behauptung, daß mit der Voraussetzung B stets auch die Voraussetzung A erfüllt ist, ist damit vollständig bewiesen.

Hiernach läßt sich die in § 1 *formulierte Randwertaufgabe z. B. immer lösen, wenn zu jedem Punkt* $\mathfrak{r}$ *des Randes* R *eine abgeschlossene Umgebung* [7]) $U_{\mathfrak{r}}$ *existiert, in welcher man den Punkt* $\mathfrak{r}$ *nicht umlaufen kann.*

In der Tat behält $U_{\mathfrak{r}}$ diese Eigenschaft bei Verkleinerung offenbar bei, so daß man $U_{\mathfrak{r}}$ beliebig klein wählen kann. Alsdann ist wie in § 5 nur nötig, den Punkt $\mathfrak{r}$ durch Parallelverschiebung zum Koordinatenanfangspunkt zu machen und dafür zu sorgen (durch Maßstabsänderung oder einfacher durch Verkleinerung von $U_{\mathfrak{r}}$), daß in $U_{\mathfrak{r}}$ überall $x^2 + y^2 < 1$ ist. Setzt man jetzt wieder

$$\log(x + iy) = p + iq,$$

so hat die Funktion

$$\Omega = \frac{-p}{p^2 + q^2}$$

in $U_{\mathfrak{r}}$ die in Voraussetzung B geforderten Eigenschaften.

Damit haben wir für die Berandung genau den gleichen Grad von Allgemeinheit erreicht, den auch die Herren Lebesgue, Courant,

---

[7]) Hier ist die Fußnote [4]) zu beachten.

Lichtenstein, jeder auf andere Art, erreicht haben[8]). Bezüglich der Art, wie die Funktion u gewonnen wird, ohne jede Konvergenzbetrachtung, dürfte unsere Methode die einfachste sein. Übrigens ist aber auch unsere Formulierung der Randwertaufgabe wesentlich allgemeiner.

Die Figuren 1, 2, 3 sind Beispiele von Rändern, welche unter die gegenwärtige Betrachtung fallen; auch Windungspunkte unendlich hoher Ordnung wären als Randpunkte zulässig. Dagegen fällt z. B. nicht unter diese Betrachtung ein Rand, der isolierte Punkte enthält. Denn in jeder Umgebung eines solchen Punktes $\mathfrak{r}$ kann man $\mathfrak{r}$ umlaufen, und daher ist der Logarithmus nicht eindeutig. Aber das ist kein Mangel der Methode; denn in diesem Fall hat die Randwertaufgabe im allgemeinen gar keine Lösung. Wenn z. B. das Gebiet G das Innere eines Kreises nach Wegnahme des Mittelpunktes ist, so beweist man in bekannter Weise, daß eine in G harmonische und auf dem Rand R von G noch stetige Funktion im Mittelpunkt (der jetzt zu R gehört) den arithmetischen Mittelwert aus den Peripheriewerten annimmt. Verlangt man also etwa, daß die in G harmonische Funktion auf der Peripherie gleich 1 und im Mittelpunkt gleich 0 ist, so hat diese Randwertaufgabe gewiß keine Lösung. Auf dieses Beispiel hat bereits früher Herr Zaremba[9]) hingewiesen.

---

[8]) Lebesgue, H.: Sur le problème de Dirichlet. Rendiconti del circolo matematico di Palermo **24** (1907), S. 371–402. — Courant, R.: Über die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie. Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **144** (1914), S. 190–211. — Lichtenstein, L.: Encyklopädie der mathemat. Wissenschaften II C 3, S. 306 [vgl. auch Berichte der Berl. Math. Ges. **15** (1916), S. 92–96].

[9]) Vgl. Zaremba, S.: Sur le principe de Dirichlet. Actă mathematica **34** (1911), S. 293–316 (S. 310).

(Eingegangen am 18. September 1922.)