Probab. Theory Relat. Fields 98, 307–337 (1994)

Probability Theory and Related Fields

Sur la forme des composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne plane

Wendelin Werner

Laboratoire de Probabilités, C.N.R.S., Université Pierre-et-Marie Curie, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Reçu le 31 mars 1993; version révisée reçu le 3 août

Résumé. Nous nous proposons d'étudier la forme des petites composantes connexes du complémentaire de la trajectoire brownienne plane. Nous montrons l'existence d'une loi limite de cette forme. De plus, nous obtenons un théorème limite qui montre que la donnée de l'ensemble des composantes connexes correspondant à une seule trajectoire suffit pour décrire cette loi.

Summary. We study the shape of the small connected components of the complement of a 2-dimensional Brownian path. We show the existence of an asymptotic law for this shape. Moreover, we prove a limit theorem that shows that the family of all the connected components of the complement of a single path contains all the information about this law.

Mathematics Subject Classification: 60J65, 60B05

1 Introduction

L'étude asymptotique du nombre de petites composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne plane a été l'objet de plusieurs travaux récents ([LG], [Mo]), motivés en partie par une question de [Ma]. Nous nous proposons ici d'étudier la forme asymptotique de ces petites composantes connexes. Les résultats exposés ici ont été annoncés dans une note ([We]).

Dans toute la suite B désigne un mouvement brownien plan issu de 0. Pour tout $t \geqq 0$, on note C_z^t la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus B([0, t])$ contenant un point z distinct de l'origine (qui est bien définie car p.s. $z \notin B([0, \infty[)$) et on définit sa renormalisation D_z^t par rapport à la distance de sa frontière à z par

$$D_z^t = \frac{(C_z^t - z)}{\mathrm{dist}(z, B([0, t]))} = \left\{ \frac{y - z}{\mathrm{dist}(z, B([0, t])}; y \in C_z^t \right\},$$

où $\mathrm{dist}(z, B([0, t])) = \inf_{u \in [0, t]} |B_u - z|$.

Nous montrons, dans ce travail que la loi de D_z^t converge lorsque $t \to \infty$ vers une loi $\mathscr{L}_1$ que nous décrivons de manière explicite; cette loi s'identifie avec la renormalisation de la loi de l'inverse de la composante connexe non-bornée du lacet brownien standard. Nous montrons aussi, que la loi conditionnelle de D_z^t (à temps t fixé) sachant l'évènement $\{\mathrm{dist}(z, B([0, t])) \leqq \varepsilon\}$ tend également vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Nous nous intéressons ensuite à l'ensemble des composantes connexes bornées du complémentaire de $B([0, 1])$. On les numérote par aire décroissante:

$$|C_1| \geqq |C_2| \geqq \ldots \geqq |C_n| \geqq \ldots .$$

Le théorème 13 de cet article affirme que pour toute fonction F mesurable bornée sur l'ensemble $\mathscr{C}_0$ des ouverts simplement connexes bornés, invariante par homothétie et par translation (c'est à dire qui ne dépend que de la "forme" de la composante connexe), on a:

$$\frac{F(C_1) + \ldots + F(C_n)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \int_{\mathscr{C}_0} \mathrm{F}(C) d\mathscr{L}_1(C) .$$

Nous établissons aussi une propriété de support qui implique que pour tout arc de Jordan $\mathscr{A}$, il existe p.s. une infinité de composantes connexes de $\mathbb{C} \backslash B([0, 1])$ dont les frontières ont (presque) la même forme que $\mathscr{A}$.

L'article est structuré comme suit: la seconde partie de cet article est consacrée à la définition et à l'étude d'une tribu sur l'ensemble $\mathscr{C}$ des ouverts simplement connexes bornés contenant l'origine. Ceci nous permet de définir des lois de probabilités sur cet ensemble. Dans la troisième partie nous étudions la loi des petites composantes connexes contenant un point z fixé; nous introduisons en particulier la loi $\mathscr{L}_1$ qui joue un rôle important dans ce travail. La quatrième partie est consacrée à l'étude de l'ensemble des composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne. Dans la cinquième et dernière partie nous établissons quelques propriétés de la loi limite que nous avons introduite dans la partie 3.

Je tiens à remercier Jean-François Le Gall qui m'a proposé ce travail et dont les conseils lors de l'élaboration de cet article ont été très précieux. Je remercie également Marc Yor et Omer Adelman pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux au sujet du paragraphe 3.4.

Notations générales employées

Dans cet article, nous identifierons souvent $\mathbb{R}^2$ au plan complexe. $\mathscr{C}(x, r)$ et $\mathscr{D}(x, r)$ désigneront respectivement le cercle et le disque ouvert de centre x et de rayon r. $\mathrm{dist}(x, A)$ désignera la distance d'un point x du plan à un fermé A. Si f est une fonction définie sur le plan et $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie de celui-ci, $f(A)$ désignera l'ensemble des images par f des éléments de A. Lorsque une fonction (ou un processus) X est définie sur un intervalle I, on notera $X_I = \{X(i), i \in I\}$ l'image de I par X. La notation $\|X\|$ sera réservée à la norme du sup (si l'ensemble de définition de X est I, $\|X\| = \sup_{i \in I}(|X(i)|)$).

2 L'espace des composantes connexes

Dans cette partie, nous allons construire une tribu sur l'espace des ouverts bornés simplement connexes contenant l'origine et étudier la mesurabilité de certaines applications relativement à cette tribu. Ceci est indispensable pour définir une loi sur cet espace comme nous le ferons dans les parties suivantes.

2.1 *Définitions de la tribu*

2.1.1 Notations. Soit $\mathscr{C}$, l'espace des ouverts bornés simplement connexes du plan qui contiennent l'origine. On définit

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{i=n} [z_{i-1}, z_i],\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ (z_0 = 0, z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{Q}^2)^{n+1} \right\}$$

l'ensemble des lignes brisées finies, à coins à coordonnées rationnelles, issues de 0. Remarquons que $\mathscr{B}$ est dénombrable.
Lorsque $L \subset \mathbb{R}^2$, on définit l'application i_L de $\mathscr{C}$ dans $\{0, 1\}$ par

$$i_L(C) = 1_{L \subset C} \, .$$

Si S est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^2$ on définit alors $\mathscr{T}_S$, la tribu engendrée par les applications i_L où L parcourt S. On notera dans la suite $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. C'est cette tribu que nous utiliserons dans toute la suite pour définir une loi sur $\mathscr{C}$.

Rappelons qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ est connexe par arcs et connexe par lignes brisées à coins à coordonnées rationnelles. Nous utiliserons souvent ce résultat dans la suite de cette partie.

2.1.2 Définitions équivalentes. Nous allons maintenant donner deux autres définitions équivalentes de la tribu $\mathscr{T}$ qui nous serviront par la suite. On définit

$$\mathscr{B}' = \{L_{[0,1]},\ L: [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ L(0) = 0 \text{ et } L \text{ est une application continue}\}$$

l'ensemble des chemins continus issus de l'origine et

$$\mathscr{B}'' = \{[x_1, x_1 + r] \times [x_2, x_2 + q],\ (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2,\ (r, q) \in (\mathbb{Q}^+)^2\}$$

l'ensemble des rectangles dont les coins ont des coordonnées rationnelles. Nous allons rapidement montrer que

$$\mathscr{T}_{\mathscr{B}'} = \mathscr{T}_{\mathscr{B}''} = \mathscr{T} .$$

Comme $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$, on a $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{B'}$. Réciproquement, si $L \in \mathscr{B}'$, grâce au fait que les ouverts considérés sont simplement connexes, on peut construire une suite L_n de lignes brisées "entourant" la frontière de la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C}\setminus L$ qui "converge" vers celle-ci telle que

$$i_L^{-1}\{1\} = \bigcup_{n \geq 0} \left(\bigcap_{m \geq n} i_{L_m}^{-1}\{1\} \right) \in \mathscr{T} \, .$$

On a donc finalement $\mathscr{T}_{\mathscr{B}'} = \mathscr{T}$.

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$, $r \in \mathbb{Q}^+$ et $q \in \mathbb{Q}^+$ fixés, on considère l'ensemble $\mathscr{B}_x$ des lignes brisées $\bigcup_{i=1}^{n} [z_{i-1}, z_i]$ de $\mathscr{B}$ joignant 0 à x (c'est à dire telles que $z_0 = 0$ et

$z_n = x$). Si $R = [x_1, x_1 + r] \times [x_2, x_2 + q]$ est inclus dans l'ouvert borné C, simplement connexe et contenant l'origine, alors il existe une ligne brisée à coins à coordonnées rationnelles reliant 0 à x dans C et donc

$$i_R^{-1}\{1\} = \bigcup_{L \in \mathscr{B}_x^R} (i_L^{-1}\{1\})$$

où $\mathscr{B}_x^R = \{L \cup \partial R, L \in \mathscr{B}_x\}$. On a donc $\mathscr{T}_{\mathscr{B}''} \subset \mathscr{T}$.

Réciproquement, on montre de même aisément que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathscr{B}''}$.

2.2 *Mesurabilité de certaines applications*

En vue d'applications futures, nous allons brièvement étudier la mesurabilité de certaines applications définies sur $\mathscr{C}$.

2.2.1 l'intersection. Si C_1 et C_2 sont deux ouverts de $\mathscr{C}$, on notera $C_1 \nabla C_2$ la composante connexe contenant 0 de $C_1 \cap C_2$. On a alors $C_1 \nabla C_2 \in \mathscr{C}$ et

$$\{L \in \mathscr{B}, i_L(C_1 \nabla C_2) = 1\} = \{L \in \mathscr{B}, i_L(C_1) = 1\} \cap \{L \in \mathscr{B}, i_L(C_2) = 1\} .$$

∇ est donc mesurable de $(\mathscr{C}^2, \mathscr{T} \otimes \mathscr{T})$ dans $(\mathscr{C}, \mathscr{T})$.

2.2.2. l'homothétie. Pour $r > 0$ et $C \in \mathscr{C}$, on définit $rC = \{rz, z \in C\}$. rC est alors un ouvert de $\mathscr{C}$ et pour $L \in \mathscr{B}'$, on a $i_L(rC) = i_{(L/r)}(C)$. On définit une suite B_m de lignes brisées de $\mathscr{B}$ entourant la frontière de la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \backslash L$ qui converge vers celle-ci lorsque $m \to \infty$. On montre alors aisément que

$$\{(r, C) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathscr{C}, i_L(rC) = 1\} = \bigcup_{m>0} \bigcap_{p>0} \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^{+*}} [q, q + 1/p[\times i_{B_m/q}^{-1}\{1\} \right):$$

En effet, si $L \subset rC$, alors il existe m tel que $B_m \subset rC$ et alors, pour tout $p > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}^{+*} \cap]r - 1/p, r]$ tel que $B_m \subset qC$.

Réciproquement, s'il existe $x \in L$ tel que $X \notin rC$ alors, pour tout $m > 0$, $x \in \tilde{B}_m$ où $\tilde{B}_m$ désigne ici l'intérieur du complémentaire de la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \backslash B_m$. Comme $\tilde{B}_m$ est ouvert, il existe $p > 0$, tel que pour tout $q \in \mathbb{Q}^{+*} \cap]r - 1/p, r]$, on ait $(q/r)\, X \in \tilde{B}_m$. On a donc $B_m \notin C/q$.

Ceci prouve bien que l'application qui à (r, C) associe rC est mesurable.

2.2.3 Le diamètre. Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit $\operatorname{diam}(A) = \sup_{(X,Y) \in A^2} |X - Y|$. Alors pour $C \in \mathscr{C}$, on a $\operatorname{diam}(C) = \sup_{L \in \mathscr{B}, i_L(C) = 1} (\operatorname{diam} L)$ et donc

$$\{C, \operatorname{diam}(C) > \alpha\} = \bigcup_{\{L \in \mathscr{B}, \operatorname{diam}(L) > \alpha\}} i_L^{-1}(1)$$

et le diamètre est une application mesurable de $(\mathscr{C}, \mathscr{T})$ dans $\mathbb{R}^+$.

2.2.4 La distance à l'origine. Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, on pose $\operatorname{dist}'(A) = \operatorname{dist}(0, {}^cA) = \inf_{X \notin A} |X|$. Pour $C \in \mathscr{C}$, on a $\operatorname{dist}'(C) = \inf_{\{L \in \mathscr{B}, L \notin C\}} (\operatorname{diam}(L))$ et donc dist′ est une application mesurable.

2.2.5 Les renormalisations. Lorsque $C \in \mathscr{C}$, on définit

$$D(C) = \frac{C}{\operatorname{dist}'(C)} \text{ et } E(C) = \frac{C}{\operatorname{diam}(C)} .$$

Ces deux applications sont mesurables comme composées d'applications mesurables.

2.2.6 Les composantes connexes. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ fixé. Si X est un processus aléatoire continu $\mathscr{F}_t$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tel que p.s., $x \notin X_{[0,t]}$, on note $C_x^t(X)$ la composante connexe contenant x du complémentaire de $X_{[0,t]}$. Lorsque $t < t'$, on note $C_x^{[t,t']}(X)$ la composante connexe contenant x du complémentaire de $X_{[t,t']}$. Lorsque $C_x^t(X)$ est bornée, c'est un ouvert simplement connexe et $(C_x^t(X) - x) \in \mathscr{C}$. De plus, pour tout $L \subset \mathbb{R}^2$, on a $\{i_L(C_x^t(X) - x) = 1\} = \{(x + L) \cap X_{[0,t]} = \emptyset\}$ qui est $\mathscr{F}_t$-mesurable. On en déduit alors que l'ensemble $\{C_x^t(X)$ est non-bornée$\} = \{$il existe une ligne brisée L à coins à coordonnées rationnelles reliant 0 à l'infini au sens de la sphère de Riemann telle que $i_L(C_x^t) = 1\}$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable et que la variable aléatoire $C_x^t(X) - x$ est $\mathscr{F}_t$-mesurable sur le complémentaire de cet ensemble.

Soient X^1 et X^2 deux processus aléatoires continus issus d'un même point, tels que p.s., $x \notin X^1_{[0,t_1]} \cup X^2_{[0,t_2]}$. On définit alors $C_x^{t_1,t_2}(X^1, X^2)$ la composante connexe contenant x du complémentaire de $X^1_{[0,t_1]} \cup X^2_{[0,t_2]}$ dans le plan. Comme précédemment, la variable aléatoire $C_x^{t_1,t_2}(X^1, X^2)$ est mesurable sur l'ensemble $\{C_x^{t_1,t_2}(X^1, X^2)$ est bornée $\}$.

Dans toute la suite, on notera:

$$D_x^t(X) = D(C_x^t(X) - x)$$

et

$$D_x^{[t,t']}(X) = D(C_x^{[t,t']}(X) - x)$$

lorsque ces ensembles sont bien définis.

3 La composante connexe contenant un point donné

3.1 Introduction et notations

Dans cette partie B est un mouvement brownien plan issu de 0 et z un point fixé distinct de l'origine. Nous allons étudier la composante connexe $C_z^t(B)$ conditionnellement au fait que le mouvement brownien s'est approché près de z avant t. Pour tous réels R et ε tels que $\varepsilon \leqq \inf(|z|, 1)$ et $R > 1$, on définit

$$T_\varepsilon = \inf\{t > 0, |B_t - z| < \varepsilon\} \text{ et } T_R^\varepsilon = \inf\{t > T_\varepsilon, |B_t - z| > R\} .$$

Dans un premier temps, nous allons étudier la composante connexe $C_z^{T_R^\varepsilon}$ en utilisant la décomposition de $|B_t - z|$ au voisinage de son minimum sur $[0, T_R^\varepsilon]$. Dans un deuxième temps, nous appliquerons cette étude aux petites composantes connexes à temps fixe.

La décomposition en skew-product de $B_t - z$ s'écrit

$$B_t - z = \exp(X_{A_t} + iY_{A_t})$$

où $A_t = \int_0^t |B_u - z|^{-2} du$ et où X et Y sont deux mouvements browniens réels indépendants. Nous allons d'abord nous intéresser à $(X_{A_t}, t \leqq T_R^\varepsilon)$. On définit

$$I_R^\varepsilon = \inf\{X_{A_s}, s < T_R^\varepsilon\} = \log(\inf\{|B_t - z|, s \leqq T_R^\varepsilon\}) .$$

On définit alors les temps

$$\begin{aligned}
\sigma' &= A_{T_\varepsilon} = \inf\{u \geqq 0, X_u = \log \varepsilon\}\ ,\\
\sigma &= \inf\{u, X_u = I^\varepsilon_{\mathrm{R}}\}\ ,\\
t_0 &= A^{-1}(\sigma) = \inf\{t, |B_t - z| = \exp(I^\varepsilon_R)\},\\
\tau &= \inf\{u > \sigma, X_u = \log R\} = A_{T^\varepsilon_R},\\
\rho &= \tau - \sigma\ ,\\
\rho' &= \sigma - \sigma'\ .
\end{aligned}$$

Remarquons que si $x \geqq 1$,

$$P(\log \varepsilon - I^\varepsilon_R \leq \log x) = \frac{\log x}{\log R - \log \varepsilon + \log x}\,. \tag{1}$$

Nous allons maintenant décomposer X au voisinage de son minimum. On pose $\mathscr{B}^1_u = X_{\sigma+u} - X_\sigma$ pour $0 \leqq u \leqq \rho$ et $\mathscr{B}^2_u = X_{\sigma-u} - X_\sigma$ pour $0 \leqq u \leqq \rho'$.

D'après le théorème de décomposition de Williams (voir [Wi]), conditionnellement à $I^\varepsilon_R = h$, $\mathscr{B}^1$ et $\mathscr{B}^2$ sont des processus de Bessel de dimension 3 indépendants arrétés au temps d'atteinte de $\log R - h$ pour $\mathscr{B}^1$ et au dernier instant de passage en $\log \varepsilon - h$ avant le temps d'atteinte de $\log R - h$ pour $\mathscr{B}^2$.

On prolonge $\mathscr{B}^1$ et $\mathscr{B}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ indépendamment de B et de telle sorte que $\mathscr{B}^1$ et $\mathscr{B}^2$ restent indépendants (notons que ρ' reste le dernier instant de passage de $\mathscr{B}^2$ en $\log \varepsilon - h$ avant le temps d'atteinte de $\log R - h$). Conditionnellement à $I^\varepsilon_R = h$, $\mathscr{B}^1$ et $\mathscr{B}^2$ sont alors des processus de Bessel de dimension 3 indépendants définis sur $\mathbb{R}^+$.

On définit encore les angles correspondants $\Theta^1_u = Y_{\sigma+u} - Y_\sigma$ pour $0 \leqq u \leqq \rho$ et $\Theta^2_u = Y_{\sigma-u} - Y_\sigma$ pour $0 \leqq u \leqq \rho'$. On prolonge également ces deux processus sur $\mathbb{R}^+$ en posant $\Theta^1_{\rho+u} = \Theta^1_\rho + \Gamma^1_u$ et $\Theta^2_{\sigma+u} = \Theta^2_\sigma + \Gamma^2_u$, où Γ^1 et Γ^2 sont deux mouvements browniens réels indépendants et indépendants de B ainsi que des prolongements de $\mathscr{B}^1$ et de $\mathscr{B}^2$.

On pose alors $\mathscr{U}^1_u = \exp(\mathscr{B}^1_u + i\Theta^1_u)$ et $\mathscr{U}^2_u = \exp(\mathscr{B}^2_u + i\Theta^2_u)$. On a alors finalement

$$\begin{aligned}
B_t - z &= (B_{t_0} - z)\ \ \mathscr{U}^1_{A_t - \sigma} \text{ pour } t_0 \leqq t \leqq T^\varepsilon_R \text{ et}\\
B_t - z &= (B_{t_0} - z)\ \ \mathscr{U}^2_{\sigma - A_t} \text{ pour } T_\varepsilon \leqq t \leqq t_0
\end{aligned}$$

et donc

$$D^{[T_\varepsilon, T^\varepsilon_R]}_z(B) = e^{iY_\sigma} C^{\rho,\rho'}_0(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2)\ .$$

De plus, $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$ sont deux processus indépendants de même loi L issus de 1. Cette loi L est celle d'un processus $\exp(W_u + iW_u')$ où W est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et W' un mouvement brownien unidimensionnel issu de 0 indépendant de W. On peut également noter que bien que leur loi conjointe soit indépendante de ε et de R, les processus $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$ dépendent de ε et de R. Dans la suite, on notera $\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}$ et $\mathscr{U}^{2,\varepsilon,R}$ lorsqu'il y aura ambiguïté.

3.2 Etude de $D^{[T_\varepsilon, T^\varepsilon_R]}_z$

3.2.1 Étude des processus $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$. Nous allons tout d'abord établir les deux propositions suivantes.

Proposition 1 *La composante connexe $C_0^{\infty,\infty}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2)$ est p.s. bornée.*

Dans toute la suite, on notera $\mathscr{L}_0$ la loi de cette composante connexe (remarquons que cette loi ne dépend pas de ε et R). On dira que la loi d'un ouvert connexe aléatoire O_h converge vers la loi $\mathscr{L}_0$ lorsque $h \to 0$ si $P(O_h \in \mathscr{C}) \xrightarrow{h\to 0} 1$ et si pour toute fonction F bornée définie et mesurable sur $\mathscr{C}$, on a

$$E(1_{O_h \in \mathscr{C}} F(O_h)) \xrightarrow{h\to 0} \int_{\mathscr{C}} F(C) d\mathscr{L}_0(C)$$

(Il s'agit en fait d'une convergence en variation). On peut alors énoncer la

Proposition 2 *La loi de la composante connexe $C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R})$ converge vers la loi $\mathscr{L}_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ ou $R \to \infty$. Plus précisément, on a les estimations suivantes: Il existe une constante k, telle que pour tout $\varepsilon \leqq \inf(|z|, 1/20)$ et $R > 20$*

$$P(C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R}) \neq C_0^{\infty,\infty}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R}))$$
$$\leqq k \inf\left(\frac{\log\log R}{\log R}, \frac{\log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|}\right) \tag{2}$$

et

$$P(C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)) \leqq k \inf\left(\frac{\log\log R}{\log R}, \frac{\log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|}\right). \tag{3}$$

Ces deux propositions découlent directement de l'étude de certaines propriétés des processus ayant pour loi L. Soit $U_t = \exp(W_t + iW_t')$ un tel processus. Rappelons que W est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 et que W' est un mouvement brownien unidimensionnel issu de 0 indépendant de W. Pour tous $M \geqq N \geqq 0$ on définit $\tau_M = \inf\{t \geqq 0, W_t = M\}$ et $\mu_N^M = \sup\{t \leqq \tau_M, W_t = N\}$. On introduit encore $\mathscr{I}_t = \inf_{s \geqq t} W_s$. On a alors les résultats suivants:

Lemme 3 *Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $M > 1$,*

$$P(C_0^{\tau_M}(U) \textit{ est non-bornée}) \leqq e^{-\alpha M}.$$

Remarquons que ce lemme entraîne immédiatement la proposition 1.

Preuve. C'est une simple application du fait que $W_{[\mu_N^M, \tau_M]}$ et $N + W_{[0, \tau_{M-N}]}$ sont indépendants et ont même loi (Ce résultat se déduit facilement de la propriété de retournement du processus de Bessel de dimension 3 à un temps d'atteinte (voir par exemple [RY], chapitre 6, proposition (3.9))). On a alors

$$P(C_0^{\tau_{2M}} \text{ est non-bornée})$$
$$\leqq P(C_0^{[\mu_M^{2M}, \tau_{2M}]} \text{ est non-bornée}) P(C_0^{\tau_M} \text{ est non-bornée})$$
$$= P(C_0^{\tau_M} \text{ est non-bornée})^{\,2}.$$

On en déduit alors le lemme en observant que grâce aux propriétés de support de la loi du mouvement brownien, $P(C_0^{\tau_M}$ est non-bornée$) > 0$.

Lemme 4 *On a, pour tous $M > N$, $P(\mathscr{I}_{\tau_M} \leqq N) = N/M$.*

Preuve. ce résultat découle du fait que la fonction d'échelle du processus de Bessel de dimension 3 est $1/x$.

Nous allons maintenant prouver (2). Pour $x = x(\varepsilon, R) > 1$ bien choisi, B se rapproche à ε/x près de z avant T_R^ε avec une grande probabilité. En effet, on a, d'après (1) :

$$P(T_{\varepsilon/x} > T_R^\varepsilon) = P(I_R^\varepsilon > \log(\varepsilon/x)) = \frac{\log x}{\log R - \log \varepsilon + \log x}\,.$$

Rappelons que conditionnellement à $I_R^\varepsilon = h$, $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$ sont indépendants et suivent la loi L et que, ρ désigne le temps d'atteinte par $\mathscr{U}^1$ du cercle $\mathscr{C}(0, Re^{-h})$ et ρ' le dernier instant de passage de $\mathscr{U}^2$ sur le cercle $\mathscr{C}(0, \varepsilon e^{-h})$ avant le temps d'atteinte de $\mathscr{C}(O, Re^{-h})$. Etudions tout d'abord $C_0^\rho(\mathscr{U}^1)$. Nous allons montrer qu'avec une grande probabilité (lorsque x est bien choisi) $C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \subset \mathscr{D}(0, x)$ et $C_0^\rho(\mathscr{U}^1) = C_0^\infty(\mathscr{U}^1)$. On a

$$\begin{aligned}
&P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x) \,\text{ou}\, C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \neq C_0^\infty(\mathscr{U}^1))\\
&\leqq P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x) \,\text{ou}\, \mathscr{U}^1_{[\rho,\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset)\\
&\leqq P(I_R^\varepsilon \geqq \log(\varepsilon/x)) + P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x) \text{ et } I_R^\varepsilon < \log(\varepsilon/x))\\
&\quad + P(\mathscr{U}^1_{[\rho,\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset \text{ et } I_R^\varepsilon < \log(\varepsilon/x))\,.
\end{aligned}$$

Nous allons majorer ces deux derniers termes ($P(I_R^\varepsilon \geqq \log(\varepsilon/x))$ est calculé plus haut). On définit τ_M^1 et τ_M^2 les temps d'atteinte de M par $\mathscr{B}^1 = \log|\mathscr{U}^1|$ et par $\mathscr{B}^2 = \log|\mathscr{U}^2|$. Lorsque $I_R^\varepsilon < \log(\varepsilon/x)$, on a $\rho \geqq \tau^1_{\log(Rx/\varepsilon)}$ et donc $\rho \geqq \tau^1_{\log x}$ et $\rho \geqq \tau^1_{\log R - \log\varepsilon}$; alors (d'après le lemme 3)

$$P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x) \text{ et } I_R^\varepsilon < \log(\varepsilon/x)) \leqq P(C_0^{\tau^1_{\log x}}(\mathscr{U}^1) \text{ est non-bornée}) \leqq x^{-\alpha}$$

et (d'après le lemme 4)

$$\begin{aligned}
P(\mathscr{U}^1_{[\rho,\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset \text{ et } I_R^\varepsilon < \log(\varepsilon/x)) &\leqq P(\mathscr{I}_{\tau^1_{\log R - \log\varepsilon}} < \log x)\\
&\leqq \frac{\log x}{\log R - \log \varepsilon}\,.
\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x) \,\text{ou}\, C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \neq C_0^\infty(\mathscr{U}^1)) \leqq x^{-\alpha} + \frac{2\log x}{\log R - \log \varepsilon}\,.$$

Nous allons maintenant étudier $C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2)$. Comme cet ouvert s'identifie avec $C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \nabla C_0^{\rho'}(\mathscr{U}^2)$ on a

$$\begin{aligned}
&P(C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2)) \neq C_0^{\infty,\infty}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \,\text{ou}\, C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \not\subset \mathscr{D}(0, x))\\
&\leqq P(C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \neq C_0^\infty(\mathscr{U}^1) \,\text{ou}\, C_0^\rho(\mathscr{U}^1) \not\subset \mathscr{D}(0, x))\\
&\quad + P(\mathscr{U}^2_{[\rho',\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset)\,.
\end{aligned}$$

Mais comme $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$ sont identiques en loi (et à cause des définitions de ρ et de ρ'), on a

$$\begin{aligned}
P(\mathscr{U}^2_{[\rho',\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset) &\leqq P(\mathscr{U}^1_{[\rho,\infty[} \cap \mathscr{D}(0, x) \neq \emptyset) + P(\varepsilon e^{-I_R^\varepsilon} < x)\\
&\leqq \frac{3\log \varepsilon}{\log R - \log \varepsilon}
\end{aligned}$$

et finalement:

$$P(C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \neq C_0^{\infty,\infty}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \text{ou } C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \not\subset \mathscr{D}(0, x))$$
$$\leqq x^{-\alpha} + \frac{5 \log x}{\log R - \log \varepsilon}.$$

Il suffit alors de prendre $x = (\log R)^{1/\alpha}$ et $x = |\log \varepsilon|^{1/\alpha}$ pour obtenir (2).

Si $T_{\varepsilon/x} < T_R^\varepsilon$ et si $C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2) \subset \mathscr{D}(0, x)$ alors $C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset C_z^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]}(B) \subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)$. Alors les estimations précédentes, avec le même choix de x, entraînent (3). La Proposition 2 est ainsi démontrée.

3.2.2 Étude du point de départ sur le cercle. D'après (3), avec une grande probabilité lorsque $\varepsilon \to 0$ ou $R \to \infty$, la composante connexe $C_z^{T_R^\varepsilon}$ est incluse dans le disque $\mathscr{D}(z, \varepsilon)$. Nous allons exploiter cette remarque pour montrer que le point de $D_z^{T_R^\varepsilon}(B)$ qui se trouve sur le cercle unité suit asymptotiquement une loi uniforme indépendante de la composante connexe $C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R})$.

On définit $\mathscr{L}_1$ la loi du produit λC (dans $\mathscr{C}$) où λ désigne une variable uniforme sur le cercle unité du plan et C une composante connexe indépendante de λ qui suit la loi $\mathscr{L}_0$. On a alors:

Proposition 5 *La loi de $D_z^{T_R^\varepsilon}(B)$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Plus précisément, il existe une constante k' telle que pour toute fonction réelle F mesurable bornée sur $\mathscr{C}$ et pour tous $R > 20$ et $\varepsilon < \inf(|z|, 1/20)$, on ait*

$$\left| E(F(D_z^{T_R^\varepsilon}(B))) - \int_{\mathscr{C}} F(C)\, d\mathscr{L}_1(C) \right| \leqq k' \|F\| \left(\frac{\varepsilon}{|z| - \varepsilon} + \frac{\log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|} \right).$$

Preuve. Rappelons que si $C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)$ on a

$$D_z^{T_R^\varepsilon}(B) = D_z^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]}(B) = e^{iY_\sigma} C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R})$$
$$= e^{iY_{\sigma'}}(e^{i(Y_\sigma - Y_{\sigma'})} C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R})).$$

On notera $\hat{C} = C_0^{\rho,\rho'}(\mathscr{U}^{1,\varepsilon,R}, \mathscr{U}^{2,\varepsilon,R})$.
$Y_{\sigma'}$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\log|z| - \log \varepsilon$, donc $e^{iY_{\sigma'}}$ converge en loi vers la loi uniforme sur le cercle $\mathscr{C}(0, 1)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Plus précisément, on a, pour tout entier n:

$$E(e^{inY_{\sigma'}}) = E(e^{-n^2\sigma'/2}) = e^{-|n|(\log|z| - \log \varepsilon)} = (\varepsilon/|z|)^{|n|}.$$

Pour toute fonction mesurable bornée F_1 sur $\mathscr{C}(0, 1)$, la décomposition en série de Fourier de F_1 s'écrit

$$F_1(e^{iY_{\sigma'}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inY_{\sigma'}} \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On en déduit

$$\left| E(F_1(e^{iY_{\sigma'}})) - \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leqq \sum_{n \neq 0} \|F_1\| |E(e^{inY_{\sigma'}})|$$
$$\leqq 2\|F_1\| \sum_{n > 0} (\varepsilon/|z|)^n$$
$$= 2\|F_1\| \varepsilon (|z| - \varepsilon)^{-1}.$$

Observons que $Y_{\sigma'}$ et $(Y_\sigma - Y_{\sigma'}, \hat{C})$ sont indépendants conditionnellement à $C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)$ (c'est une simple application de la propriété de Markov en T_ε et du fait que sur $\{C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)\}$, $\hat{C}$ s'écrit comme une fonction mesurable du processus $(B_{T_\varepsilon+t}, 0 \leqq t \leqq T_R^\varepsilon - T_\varepsilon)$). Si F_2 est une fonction mesurable bornée sur $\mathscr{C}$ on a alors, en utilisant (3) et (2),

$$\left|E(F_1(e^{iY_\sigma})F_2(\hat{C})) - \int_{\mathscr{C}} \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta})F_2(C)d\mathscr{L}_0(C)\frac{d\theta}{2\pi}\right|$$

$$\leqq \left|E(F_1(e^{iY_\sigma})F_2(\hat{C})1\{C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z,\varepsilon)\}) - \int_{\mathscr{C}} \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta})F_2(C)d\mathscr{L}_0(C)\frac{d\theta}{2\pi}\right| + \|F_1\|\|F_2\|P(C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \not\subset \mathscr{D}(z,\varepsilon))$$

$$\leqq \left|E(E(F_1(e^{i(Y_{\sigma'}+Y_\sigma-Y_{\sigma'})})|(Y_\sigma - Y_{\sigma'}, \hat{C}))F_2(\hat{C})1\{C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z,\varepsilon)\}) - \int_{\mathscr{C}} \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta})F_2(C)d\mathscr{L}_0(C)\frac{d\theta}{2\pi}\right| + k\|F_1\|\ \|F_2\|\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}$$

$$\leqq \left|E\left(\int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right)\left(E(F_2(\hat{C})\ 1\{C_z^{T_R^\varepsilon}(B) \subset \mathscr{D}(z,\varepsilon)\}) - \int_{\mathscr{C}} F_2(C)d\mathscr{L}_0(C)\right)\right| + \|F_1\|\ \|F_2\|\left(\frac{2\varepsilon}{|z|-\varepsilon} + k\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}\right)$$

$$\leqq \|F_1\|\ \|F_2\|\left(\frac{2\varepsilon}{|z|-\varepsilon} + 3k\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|}\right).$$

La proposition 5 en découle alors immédiatement.

3.3 Applications

3.3.1 Application au temps constant. Dans ce paragraphe on s'intéresse à la loi de $C_z^t(B)$ conditionnellement à $T_\varepsilon < t$ où t est un temps constant fixé. On a le théorème suivant.

Théorème 6 *La loi conditionnelle de $D_z^t(B)$ par rapport à $T_\varepsilon < t$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$.*

Preuve. on se ramène au cas $t = 1$ par scaling. On pose $R = R(\varepsilon) = |\log\varepsilon|^{-4}$. Dans cette démonstration C désigne $C_z^1(B)$ et C_ε désigne $C_z^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]}(B)$. Nous allons d'abord établir le

Lemme 7 *On a*

$$P(C_\varepsilon = C|T_\varepsilon < 1)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}1\ .$$

Preuve du lemme. On a

$$\begin{aligned} &P(C \neq C_\varepsilon|T_\varepsilon < 1)\\ &\leqq P((C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z,\varepsilon))|T_\varepsilon < 1) + P(T_R^\varepsilon > 1|T_\varepsilon < 1)\\ &\quad + P(\inf_{[T_R^\varepsilon, 1]}|B - z| \leqq \varepsilon|T_\varepsilon \leqq 1)\end{aligned}$$

Nous allons rapidement montrer que chacun de ces trois termes est négligeable lorsque $\varepsilon \to 0$.

● On a

$$P((C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)) | T_\varepsilon < 1) = P(C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon))$$

car l'évenement $(C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon))$ est indépendant de $(B_t, t \leqq T_\varepsilon)$ et donc de T_ε. On définit $\hat{\varepsilon} = 20\varepsilon/R = 20\varepsilon|\log\varepsilon|^4$ et $\hat{R} = 20$. Par changement d'échelle, on a:

$$P(C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)) = P(C_z^{[T_{\hat{\varepsilon}}, T_{\hat{R}}^{\hat{\varepsilon}}]}(B) \not\subset \mathscr{D}(z, \hat{\varepsilon}))$$

et d'après (3), on a donc

$$P(C_\varepsilon \not\subset \mathscr{D}(z, \varepsilon)) \leqq \frac{k \log|\log \hat{\varepsilon}|}{|\log \hat{\varepsilon}|} \leqq \frac{k'' \log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|}$$

pour k'' bien choisi.

● On a

$$\begin{aligned} P(\inf_{[T_R^\varepsilon, 1]}|B - z| \leqq \varepsilon | T_\varepsilon \leqq 1) &\leqq P(\inf_{[T_R^\varepsilon, T_R^\varepsilon + 1]}|B - z| \leqq \varepsilon | T_\varepsilon \leqq 1) \\ &= P(\inf_{[T_R^\varepsilon, T_R^\varepsilon + 1]}|B - z| \leqq \varepsilon) \\ &= O\left(\frac{\log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|}\right). \end{aligned}$$

Ce résultat connu (voir par exemple [LG, majoration de (3b)]) découle directement après scaling des estimations de $P(T_\varepsilon < 1)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

● Il reste à étudier le terme $P(T_R^\varepsilon > 1 | T_\varepsilon < 1)$. Remarquons que lorsque $|z| \to \infty$, la loi conditionnelle de T_ε par rapport à $T_\varepsilon < 1$ tend vers δ_1. On n'a donc pas d'estimations uniformes en z.

On a

$$P(T_R^\varepsilon > 1) \leqq P(B_1 \in \mathscr{D}(z, R)) \leqq \pi p_1(0, 0)|\log \varepsilon|^{-8}.$$

Il faut maintenant minorer $P(T_\varepsilon < 1)$: On a

$$P(T_\varepsilon \leqq 1) \sup_{y, |y - z| = \varepsilon} E_y\left(\int_0^1 1_{|B_s - z| < \varepsilon} ds\right) \geqq E_0\left(\int_0^1 1_{|B_s - z| < \varepsilon} ds\right).$$

Or

$$\sup_{y, |y - z| = \varepsilon} E_y\left(\int_0^1 1_{|B_s - z| < \varepsilon} ds\right) = E_\varepsilon\left(\int_0^1 1_{|B_s| < \varepsilon} ds\right) \leqq k'' \varepsilon^2 |\log \varepsilon|$$

où k'' est une constante fixée, et

$$\begin{aligned} E_0\left(\int_0^1 1_{|B_s - z| < \varepsilon} ds\right) &= \int_{|y - z| < \varepsilon} dy \int_0^1 p_s(0, y) ds \\ &\geqq \int_{|y - z| < \varepsilon} dy \int_0^1 p_s(0, 2|z|) ds \\ &\geqq \pi \varepsilon^2 \int_{1/2}^1 p_s(0, 2|z|) ds \\ &\geqq \frac{\varepsilon^2 e^{-4|z|^2}}{4}. \end{aligned}$$

On a donc

$$P(T_\varepsilon < 1) \geqq \frac{e^{-4|z|^2}}{4k''|\log \varepsilon|}$$

et finalement

$$P(T_R^\varepsilon > 1 | T_\varepsilon < 1) \leqq 4\pi k'' p_1(0,0) e^{4|z|^2} |\log \varepsilon|^{-7} .$$

La preuve du lemme 7 est ainsi achevée.

Nous allons maintenant faire un scaling convenable pour utiliser la proposition 5 afin de montrer que la loi de $(\mathrm{dist}(C_\varepsilon, z))^{-1}(C_\varepsilon - z)$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque ε tend vers 0. On pose

$$B'_u = \frac{B_{T_\varepsilon + \varepsilon^{1/2} u} - B_{T_\varepsilon}}{z - B_{T_\varepsilon}} .$$

B' est un mouvement brownien issu de 0. On note $S_M = \inf\{u, |B_u' - 1| = M\}$. On pose $R' = R/\varepsilon = 1/(\varepsilon|\log\varepsilon|^4)$ et $\varepsilon' = (\log R')^{-1}$. On a alors

$$D_z^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]}(B) = -\left(\frac{B_{T_\varepsilon} - z}{\varepsilon}\right) D_1^{S_{R'}}(B')$$

et $\varepsilon^{-1}(B_{T_\varepsilon} - z)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{C}(0, 1)$ indépendante de B'.

On a

$$P(S_{\varepsilon'} < S_{R'}) \xrightarrow{R' \to \infty} 1 .$$

Alors

$$P(D_1^{S_{R'}}(B') = D_1^{S_{R'}^{\varepsilon'}}(B')) \xrightarrow{R' \to \infty} 1 .$$

Mais la loi de $D_1^{S_{R'}^{\varepsilon'}}(B')$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $R' \to \infty$ d'après la proposition 5. On a alors,

$$E\left(F(D_1^{S_{R'}}(B')) \right) \xrightarrow{R' \to \infty} \int_{\mathscr{C}} F(C) d\mathscr{L}_1(C) . \tag{4}$$

Une simple application de la propriété d'invariance par rotation de la loi $\mathscr{L}_1$ montre alors que la loi de $D_z^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]}(B)$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $\varepsilon \to 0$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

3.3.2 Application au temps grand. Nous allons nous intéresser à la loi de $D_z^t(B)$ lorsque $t \to \infty$. Cette etude se ramène en fait après un scaling a l'étude de $D_\varepsilon^1(B)$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous allons tout d'abord établir le résultat suivant:

Proposition 8 *La loi de $D_\varepsilon^1(B)$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Preuve. on pose encore $R = |\log \varepsilon|^{-4}$ et

$$T_R(\varepsilon) = \inf\{t > 0, |B_t - \varepsilon| > R\} .$$

On définit $C_\varepsilon' = C_\varepsilon^{[0, T_R(\varepsilon)]}$. Exactement comme dans la démonstration du lemme 7, on a

$$\begin{aligned} &P(C_\varepsilon^1 \neq C_\varepsilon') \\ &\leqq P(C_\varepsilon' \not\subset \mathscr{D}(\varepsilon, \varepsilon)) + P(T_R(\varepsilon) > 1) + P(\inf_{[T_R, 1]}|B| \leqq \varepsilon) \\ &\leqq O\left(\frac{\log|\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|}\right) . \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du lemme 7, nous allons maintenant faire un scaling convenable pour utiliser la proposition 5: on pose $B'_u = \varepsilon^{-1} B_{u\varepsilon^{1/2}}$ et $R' = R/\varepsilon$. B' est alors un mouvement brownien issu de 0 et $D(C'_\varepsilon) = D_1^{S'_{R'}}(B')$ (oú $S'_{R'} = \inf\{u > 0, |B'_u - 1| > R'\}$ est défini comme précédemment). Comme dans la démonstration précédente, $D_1^{S'_{R'}}(B')$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ ce qui démontre la propriété 8.

On s'intéresse maintenant à la composante connexe $C_z^t(B)$ lorsque $t \to \infty$ (sans conditionnement). On a le

Théorème 9 *La loi de $D_z^t(B)$ converge vers $\mathscr{L}_1$ lorsque $t \to \infty$.*

Preuve. on se ramène à la proposition précédente en faisant un scaling convenable. On pose, pour tout t,

$$B_u^t = t^{-1/2} B_{tu} \, .$$

Pour t fixé, B^t est un mouvement brownien issu de 0. On a

$$D_z^t(B) = D^1_{t^{-1/2}z}(B^t) \, .$$

D'après la proposition 8 et le fait que la loi $\mathscr{L}_1$ est invariante par rotation autour de 0, la loi de $D^1_{t^{-1/2}z}(B^t)$ converge vers $\mathscr{L}_1$ lorsque $t \to \infty$, ce qui démontre le théorème.

3.3.3 Un résultat technique. Nous allons établir ici un autre résultat de convergence vers la loi $\mathscr{L}_1$ qui nous servira dans la suite de l'article. On étudie la loi de $C_z^{T_R}(B)$ conditionnellement à $T_r < T_R$ lorsque $r \to 0$ et $R \to \infty$. Rappelons que $T_R = \inf\{t \geqq 0, |B_t - z| = R\}$. On a la proposition suivante:

Proposition 10 *La loi conditionnelle de $D_z^{T_R}(B)$ sachant $\{T_r < T_R\}$ converge vers $\mathscr{L}_1$ lorsque $R \to \infty$ et $r \to 0$. Plus précisément, il existe une constante k_1 telle que, pour toute fonction mesurable bornée F de $\mathscr{C}$ dans* $\mathbb{R}$,

$$|E(F(D_z^{T_R}(B)) | T_r < T_R) - \int_{\mathscr{C}} F(C) d\mathscr{L}_1(C)| \leqq k_1 \|F\| \frac{\log\log R}{\log R}$$

uniformément pour $r \leqq (\log R)^{-1}$.

Preuve. remarquons tout d'abord que sur $\{T_r < T_R\}$ on a $T_R = T_R^r$. Comme l'événement $\{T_r < T_R\}$ est $\mathscr{F}_{T_r}$-mesurable, on peut utiliser la propriété de Markov en T_r et appliquer le résultat de la proposition 2 pour obtenir l'estimation suivante

$$P(C_0^{\varrho, \rho'}(\mathscr{U}^{1,r,R}, \mathscr{U}^{2,r,R}) + C_0^{\infty,\infty}(\mathscr{U}^{1,r,R}, \mathscr{U}^{2,r,R}) | T_r < T_R) \leqq k \frac{\log\log R}{\log R} \, .$$

Il nous reste à étudier le point de départ sur le cercle unité. Utilisons l'interprétation du processus de Bessel de dimension 3 comme mouvement brownien "conditionné à ne pas atteindre 0". On obtient que, conditionnellement à $\{T_r < T_R\}$, $(\log R - X_u, u \leqq \sigma')$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de $\log R - \log|z|$ et arrêté à son temps d'atteinte de $\log R - \log r$. On a alors

$$E(e^{inY_{\sigma'}} | T_r < T_R) = E(e^{-n^2\sigma'/2} | T_r < T_R) = \frac{\log(R/r)\sinh(n\log(R/|z|)}{\log(R/|z|)\sinh(n\log(R/r))}$$

en utilisant la formule de la transformée de Laplace du temps d'atteinte d'un processus de Bessel de dimension 3 (voir par exemple [RY]). Alors, pour $R > e$,

$$|E(e^{inY_{\sigma'}}|T_r < T_R)| \leqq \frac{R^{|n|}}{(R/r)^{|n|} - (R/r)^{-|n|}} (1 + |\log r|/|\log R|)$$

$$\leqq 2\left(1 + \frac{|\log r|}{\log R}\right) r^{|n|}$$

et pour toute fonction F_1 mesurable et bornée sur le cercle unité, la décomposition en série de Fourier de F_1 implique que:

$$|E(F_1(e^{inY_{\sigma}})|T_r < T_R) - (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} F_1(e^{i\theta})d\theta| \leqq 2\|F_1\| \frac{r}{1-r}\left(1 + \frac{|\log r|}{\log R}\right).$$

Comme dans le cas sans conditionnement (preuve de la proposition 5), on obtient alors finalement:

$$|E(F(D_z^{T_R}(B))|T_r < T_R) - \int_{\mathscr{C}} F(C)d\mathscr{L}_1(C)|$$

$$\leqq \|F\|\left(3k \frac{\log\log R}{\log R} + 2\frac{r}{1-r}\left(1 + \frac{|\log r|}{\log R}\right)\right)$$

$$\leqq \|F\| k_1 \frac{\log\log R}{\log R}$$

uniformément pour $r \leqq |\log R|^{-1}$. La démonstration est ainsi achevée.

On peut noter que comme $P(T_{1/\log R} < T_R) \xrightarrow{R \to \infty} 1$, la proposition précédente entraîne immédiatement le résultat suivant:

Corollaire 11 *La loi de $D_z^{T_R}(B)$ tend vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $R \to \infty$.*

3.3.4 Remarque sur la composante connexe non-bornée. Nous allons exploiter les résultats précédents pour obtenir quelques informations sur la composante connexe non-bornée du complémentaire de la courbe brownienne. Si Z désigne un mouvement brownien plan issu de 1, $1/Z$ est un mouvement brownien plan changé de temps. La composante connexe non-bornée du complémentaire de la trajectoire de Z, que nous noterons $C_\infty(Z)$, s'identifie avec l'ensemble des inverses des points de la composante connexe $C_0(1/Z)$ pris à un temps convenable. On définit $T_r = \inf\{t > 0, |Z_t| = r\}$. On a alors le résultat suivant qui est une simple conséquence de la remarque précédente et du corollaire 11.

Corollaire 12 *La loi de $D(1/C_\infty^{T_r}(Z))$ converge vers la loi $\mathscr{L}_1$ lorsque $r \to 0$.*

Remarquons que ce résultat peut être obtenu directement en décomposant $|Z|$ au voisinage de son maximum sur $[0, T_R]$. On peut également remarquer qu'un simple argument de scaling montre que $D(1/C_\infty^t(Z))$ converge en loi lorsque $t \to \infty$ vers $D(1/C_\infty^1(B))$ où B est un mouvement brownien issu de 0.

3.4 Liens avec le lacet brownien

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant:

Proposition 13 *La loi $\mathscr{L}_1$ s'identifie avec la loi de la renormalisation (par D) de l'inverse de la composante connexe non-bornée du complémentaire du lacet brownien plan standard.*

Preuve. Dans un récent travail Pitman et Yor ([PY] ou [PY2], voir aussi [Y]) ont montré que si $(r^1(u), u \leqq T_1)$ et $(r^2(u), u \leqq T_2)$ désignent deux processus de Bessel de dimension 2 arrêtés en leurs temps d'atteinte de 1 alors le processus R obtenu heuristiquement en recollant r^1 et r^2 dos-à-dos et en renormalisant "convenablement" est un pont de Bessel de dimension 2 standard. Plus précisément R est défini par:

$$R_s = \frac{1}{\sqrt{T_1 + T_2}} r^1_{s(T_1+T_2)} \text{ lorsque } s \leqq \frac{T_1}{T_1 + T_2}$$

et

$$R_{1-s} = \frac{1}{\sqrt{T_1 + T_2}} r^2_{(1-s)(T_1+T_2)} \text{ lorsque } 1 - s \leqq \frac{T_2}{T_1 + T_2} .$$

On peut interpréter ce résultat en terme de mouvement brownien plan et de lacet brownien: Si $(B^1_u, u \leqq T_1)$ et $(B^2_u, u \leqq T_2)$ désignent deux mouvements browniens plans issus de 0 arrêtés en leurs temps d'atteinte du cercle $\mathscr{C}(0, 1)$, on construit le processus $\tilde{X}$ obtenu en recollant B^1 et B^2 dos-à-dos; plus précisément:

$$\tilde{X}_u = B^1_u \text{ lorsque } u \leqq T_1$$

et

$$\tilde{X}_{u-T_1} = \lambda B^2_{T_2-(u-T_1)} \quad \text{lorsque } T_1 \leqq u \leqq T_1 + T_2$$

où $\lambda = B^1_{T_1}/B^2_{T_2}$.
On définit alors la renormalisation X de $\tilde{X}$ de la façon suivante: Pour $0 \leqq s \leqq 1$,

$$X_s = \frac{1}{\sqrt{T_1 + T_2}} \tilde{X}_{s(T_1+T_2)} .$$

En écrivant la décomposition en produit semi-direct de B^1 et de B^2 et en appliquant le résultat de Pitman et Yor à $|B^1|$ et $|B^2|$, on obtient facilement que

$$X_s = R_s \exp(i\varphi_{A_s})$$

où R est un pont de Bessel de dimension 2 standard, φ un mouvement brownien linéaire issu de 0 indépendant de R et

$$A_s = \int_0^s \frac{dt}{(R_t)^2} .$$

X est alors un lacet brownien plan standard.

Nous allons maintenant identifier la loi de l'inverse de la composante connexe non-bornée du complémentaire de la trajectoire de $\tilde{X}$ avec la loi $\mathscr{L}_1$: On a (ce résultat connu figure par exemple dans [LG3], proposition 1.1, (ii))

$$|B^1_{T_1-u}| = \exp(-W^1_{A^1_u})$$

où $A_u^1 = \inf\{v, \int_0^v \exp(-2W_w^1)\, dw > u\}$ et où W^1 est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0.
On en déduit alors que

$$B^1_{T_1-u} = B^1_{T_1}\exp(-W^1_{A^1_u} + i\theta^1_{A^1_u})$$

où θ^1 est un mouvement brownien linéaire issu de 0 indépendant de W^1 et de $B^1_{T_1}$.
Exactement de la même manière (avec des notations similaires) on a

$$\lambda B^2_{T_2-u} = B^1_{T_1}\exp(-W^2_{A^2_u} + i\theta^2_{A^2_u}).$$

On a alors

$$\begin{aligned}&\{1/\tilde{X}_u, 0 \leqq u \leqq T_1 + T_2\}\\ &= \{B^1_{T_1}\exp(W^1_w + i\theta^1_w), w \geqq 0\} \cup \{B^1_{T_1}\exp(W^2_w + i\theta^2_w), w \geqq 0\}\,.\end{aligned}$$

Comme $B^1_{T_1}$ suit une loi uniforme sur le cercle unité, cette égalité permet d'identifier la loi de la composante connexe contenant 0 du complémentaire de $1/\tilde{X}$ avec la loi $\mathscr{L}_1$, ce qui achève la démonstration de la proposition 13.

Remarquons que ce résultat permet de mieux interpréter le corollaire 12. En effet une simple application du résultat de Pitman et Yor montre en effet que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T_r}} Z_{uT_r}, 0 \leqq u \leqq 1\right)$$

converge vers le lacet brownien lorsque r tend vers 0.

4 L'ensemble des composantes connexes du complémentaire d'une courbe donnée

4.1 *Introduction. Notations*

On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble des composantes connexes bornées du complémentaire de la trajectoire brownienne plane $B_{[0,1]}$. Pour cela, il faut introduire une renormalisation intrinsèque. En effet si x et y sont dans une même composante connexe, $E_x^1(B)$ et $E_y^1(B)$ ne sont égaux qu'à une translation près (rappelons que $E_y^1(B)$ désigne la renormalisation de $C_y^1(B) - y$ par son diamètre). On définit $\mathscr{C}'$ l'espace quotient de $\mathscr{C}$ par les translations et les homothéties du plan que l'on munit de la tribu induite par $\mathscr{T}$. On peut par exemple représenter chaque classe de $\mathscr{C}'$ par un ouvert simplement connexe de diamètre 1 dont "le plus haut des points les plus à gauche" de sa frontière est 0. $\mathscr{C}'$ correspond à l'ensemble des formes des composantes connexes. On notera K_x^t la classe d'équivalence de $C_x^t(B)$ dans $\mathscr{C}'$. On notera $\mathscr{L}_2$ la loi induite dans $\mathscr{C}'$ par la loi $\mathscr{L}_1$.

On numérote les composantes connexes bornées du complémentaire de $B_{[0,1]}$ par aire décroissante:

$$|C_1| \geqq |C_2| \geqq \cdots \geqq |C_n| \geqq \ldots$$

et on note K_n la classe d'équivalence de C_n dans $\mathscr{C}'$. Nous allons étudier le comportement de la loi

$$\frac{\delta_{K_1} + \cdots + \delta_{K_n}}{n}$$

lorsque $n \to \infty$ et plus précisément, on va montrer dans cette partie le

Théorème 14 *Pour toute fonction F mesurable bornée de $\mathscr{C}'$* dans $\mathbb{R}$ *on a p.s.*

$$\frac{F(K_1) + \cdots + F(K_n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{F}$$

où $\tilde{F} = \int_{\mathscr{C}'} F(K)\, d\mathscr{L}_2(K)$.

Bien que les résultats obtenus soient différents, la démarche que nous allons suivre pour démontrer ce théorème est proche de celle de [Mo] et de [LG] pour la démonstration des théorèmes qui donnent des informations sur le nombre de composantes connexes d'aire donnée. Nous utiliserons dans cette partie certains des résultats de [LG] auquel nous renvoyons le lecteur pour une preuve détaillée. On pourra remarquer que le cas particulier $F = 1$ des propositions 18 et 20 donne exactement les estimations 3.1 et 3.2 de [LG].

4.2 La démonstration

4.2.1 Notations. Nous allons tout d'abord nous restreindre au cas où $F \geqq 0$. Le résultat dans le cas où F est quelconque en découle immédiatement.

Soit $\lambda < 1$ fixé. Pour $\alpha < \beta$, N_α désignera le nombre de composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash B_{[0,1]}$ d'aire strictement supérieure à $\pi\alpha^2$ et $N_{\alpha,\beta} = N_\alpha - N_\beta$ le nombre de composantes connexes d'aire comprise dans $]\pi\alpha^2, \pi\beta^2]$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit

$$\mathscr{U}_\varepsilon = \{x, \pi\lambda^2\varepsilon^2 < |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}$$

où par convention, $C_x = C_x^1$ et $K_x = K_x^1$.
On a alors (car $F \geqq 0$),

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx \leqq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{n=N_{\lambda\varepsilon}} F(K_n) \leqq \frac{1}{\pi\lambda^2\varepsilon^2} \int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx \,.$$

Nous allons étudier le comportement de $\int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx$ lorsque $\varepsilon \to 0$ pour en déduire le théorème (4.2.5). Pour cela, nous allons estimer l'espérance et la variance de $\int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx$ (4.2.3 et 4.2.4). Nous allons tout d'abord établir quelques résultats préliminaires.

4.2.2 Résultats préliminaires. Dans ce paragraphe X désigne un mouvement brownien dont le point de départ suit une loi uniforme sur le cercle unité, r et R des réels tels que $0 < r < 1 < R$. On note $C_R = C_0^{T_R}(X)$ avec $T_R = \inf\{s \geqq 0, |X_s| = R\}$. Etablissons tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 15 *Il existe $M > 0$ tel que*

$$P(C_R \not\subset \mathscr{D}(0, (\log R)^M)) = O((\log R)^{-10}) \,.$$

Preuve. cette estimation qui figure également dans [Mo] et [LG] est une simple application du lemme 3. Si $T_R' = \sup\{t < T_R, |B_t| = 1\}$, on a

$$\begin{aligned} &P(C_{(\log R)^M} \text{ est non-bornée }) \\ &\leqq P(C_0^{[T'_{(\log R)^M}, T_{(\log R)^M}]}(X) \text{ est non-bornée}) \\ &\leqq (\log R)^{-M\alpha} \,, \end{aligned}$$

car $(X_{u+T'_{(\log R)^M}}\, u\in[0, T_{(\log R)^M} - T'_{(\log R)^M}])$ a même loi que le processus $\mathscr{U}$ (de loi L), arrêté en son temps d'atteinte de $(\log R)^M$. Ceci se vérifie aisément en utilisant les liens entre la dernière excursion d'un mouvement brownien avant un temps d'atteinte et le processus de Bessel de dimension 3 exposés par exemple dans [RY], chapitre 6.

Rappelons que pour toute fonction F mesurable bornée de $\mathscr{C}'$ dans $\mathbb{R}$,

$$\tilde{F} = \int_{\mathscr{C}'} F(K)\,d\mathscr{L}_2(K)\,.$$

On définit

$$\Gamma^F(r, R) = E(1_{|C_R| \leqq \pi r^2} F(K_R))\,.$$

On a le

Lemme 16 *Lorsque $R \to \infty$, on a*

$$\Gamma^F(r, R) = \tilde{F} + \frac{\log r}{\log R}\tilde{F} + O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)$$

uniformément pour $\log\log R < |\log r| \leqq 2(\log R)^{1/2}$.

Preuve. on a $\{|C_R| \leqq \pi r^2\} \subset \{T_r < T_R\}$. Si $T_r < T_R$ alors $T_R = T_R^r$ et donc

$$\begin{aligned}
&P(\{T_r < T_R\}\backslash\{|C_R| \leqq \pi r^2\})\\
&= P(\{T_r < T_R \text{ et } |C_R| > \pi r^2\})\\
&\leqq P(C_0^{T_R^r}(X) \not\subset \mathscr{D}(0, r) \text{ et } T_r < T_R)\\
&\leqq P(C_0^{T_R^r}(X) \not\subset \mathscr{D}(0, r))\\
&\leqq O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)
\end{aligned}$$

indépendamment de $r < 1/20$ d'après (3). On a alors

$$\begin{aligned}
\Gamma^F(r, R) &= E(1_{|C_R| \leqq \pi r^2} F(K_R))\\
&= E(1_{T_r < T_R} F(K_R)) + \|F\| O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)\\
&= E(F(K_R)|T_r < T_R)P(T_r < T_R) + \|F\| O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)\\
&= \left(\tilde{F} + \|F\| O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)\right)\left(1 + \frac{\log r}{\log R - \log r}\right) + \|F\| O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)\\
&= \tilde{F}\left(1 + \frac{\log r}{\log R}\right) + O\left(\frac{\log\log R}{\log R}\right)
\end{aligned}$$

en utilisant la proposition 10, puis le fait que $\log\log R < |\log r| \leqq 2(\log R)^{1/2}$. Le lemme est ainsi démontré.

Rapplons que l'on s'est fixé $\lambda \in]0, 1[$; on définit

$$Q^F(r, R) = \Gamma^F(r, R) - \Gamma^F(\lambda r, R) = E(1_{\pi\lambda^2 r^2 < |C_R| \leqq \pi r^2} F(K_R))\,.$$

On a alors le développement asymptotique suivant:

Lemme 17 *Lorsque* $R \to \infty$, *on a*

$$Q^F(r, R) = \frac{\tilde{F}|\log \lambda|}{\log R} + O\left(\frac{\log\log R}{(\log R)^{3/2}}\right)$$

uniformément pour $\log\log R < |\log r| \leqq (\log R)^{1/2}$.

Preuve. Nous allons comparer $Q^F(\lambda r, R)$ et $Q^F(r, R)$. Nous en déduirons ensuite le lemme.
On a toujours $C_R \subset C_{\lambda R}$ (car $\lambda < 1$). Alors,

$$\begin{aligned}
&|Q^F(\lambda r, \lambda R) - Q^F(\lambda r, R)| \\
&\quad \leqq \|F\| P(C_R \neq C_{\lambda R} \text{ et } \pi\lambda^4 r^2 < |C_R| \leqq \pi\lambda^2 r^2 \text{ et } |C_{\lambda R}| > \pi\lambda^2 r^2) \\
&\qquad + \|F\| P(C_R \neq C_{\lambda R} \text{ et } \pi\lambda^4 r^2 < |C_{\lambda R}| \leqq \pi\lambda^2 r^2)\,.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
&P(C_R \neq C_{\lambda R} \text{ et } \pi\lambda^4 r^2 < |C_{\lambda R}| \leqq \pi\lambda^2 r^2) \\
&\quad \leqq P(C_{\lambda R} \not\subset \mathscr{D}(0, (\log R)^M)) \\
&\qquad + P(\inf_{[T_{\lambda R}, T_R]} B \leqq (\log R)^M \text{ et } \pi\lambda^4 r^2 < |C_{\lambda R}| \leqq \pi\lambda^2 r^2) \\
&\quad \leqq O((\log R)^{-10}) + O((\log R)^{-1}) P(\pi\lambda^4 r^2 < |C_{\lambda R}|) \\
&\quad \leqq O((\log R)^{-3/2})
\end{aligned}$$

d'après les lemmes 15 et 16 (dans le cas $F = 1$, celui-ci entraîne que

$$P(\pi\lambda^4 r^2 < |C_{\lambda R}|) = 1 - \Gamma^1(\lambda^2 r, \lambda R) = O((\log R)^{-1/2})$$

uniformément pour $\log\log R < |\log r| \leqq 2(\log R)^{1/2}$).
De même, en utilisant les lemmes 14 et 15, on a:

$$\begin{aligned}
&P(C_R \neq C_{\lambda R}, \pi\lambda^4 r^2 < |C_R| \leqq \pi\lambda^2 r^2 \text{ et } |C_{\lambda R}| > \pi\lambda^2 r^2) \\
&\quad \leqq P(C_R \neq C_{\lambda R}, C_{\lambda R} \subset \mathscr{D}(0, (\log R)^M) \text{ et } |C_{\lambda R}| > \pi\lambda^2 r^2) \\
&\qquad + O((\log R)^{-10}) \\
&\quad \leqq P(\inf_{t\in[T_{\lambda R}, T_R]} B_t < (\log R)^M \text{ et } |C_{\lambda R}| > \pi\lambda^2 r^2) + O((\log R)^{-10}) \\
&\quad \leqq (1 - \Gamma^1(\lambda r, \lambda R)) P(\inf_{t\in[T_{\lambda R}, T_R]} B_t < (\log R)^M) + O((\log R)^{-10}) \\
&\quad \leqq O((\log R)^{-3/2})
\end{aligned}$$

et donc finalement,

$$|Q^F(\lambda r, \lambda R) - Q^F(\lambda r, R)| \leqq O((\log R)^{-3/2})\,.$$

Par ailleurs, on a par scaling

$$C_R \overset{\text{(loi)}}{=} \lambda^{-1} C_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}$$

et donc

$$Q^F(r, R) = E(F(K_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}) 1(\pi\lambda^4 r^2 < |C_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}| \leqq \pi\lambda^2 r^2)) .$$

Lorsque $|C_{\lambda R}| \leqq \pi r^2$, alors $T_\lambda < T_{\lambda R}$; on a donc

$$\begin{aligned}
&|P(T_\lambda < T_{\lambda R}) Q^F(r, R) - Q^F(\lambda r, \lambda R)| \\
&\quad = |P(T_\lambda < T_{\lambda R}) E(F(K_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}) 1(\pi\lambda^4 r^2 \leqq |C_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}| \leqq \pi\lambda^2 r^2)) - Q^F(\lambda r, \lambda R)| \\
&\quad \leqq |E(1(T_\lambda < T_{\lambda R}) F(K_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}) 1(\pi\lambda^4 r^2 \leqq |C_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]}| \leqq \pi\lambda^2 r^2)) \\
&\qquad - E(1(T_\lambda < T_{\lambda R}) F(K_0^{[0, T_{\lambda R}]}) 1(\pi\lambda^4 r^2 \leqq |C_0^{[0, T_{\lambda R}]}| \leqq \pi\lambda^2 r^2))| \\
&\quad \leqq 2\|F\| P(C_0^{[T_\lambda, T_{\lambda R}^\lambda]} \neq C_0^{[0, T_{\lambda R}]}) \\
&\quad \leqq 2\|F\| P(C_{\lambda R} \not\subset \mathscr{D}(0, \lambda)) \\
&\quad \leqq \|F\| O((\log R)^{-10})
\end{aligned}$$

d'après le lemme 15.
On a alors finalement, puisque $P(T_\lambda < T_{\lambda R}) = 1 + (\log \lambda) / \log R$,

$$Q^F(\lambda r, R) = Q^F(r, R)\left(1 + \frac{\log \lambda}{\log R}\right) + O((\log R)^{-3/2})$$

uniformément pour $\log \log R < |\log r| \leqq 2(\log R)^{1/2}$.
Nous allons maintenant en déduire le lemme. Soit N la partie entière de $(\log R)^{1/2}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{k=N} Q^F(\lambda^k r, R) \\
&\qquad = (N + O(N^2/\log R)) Q^F(r, R) + N O(\log R)^{-3/2}) \\
&\qquad = N(1 + O((\log R)^{-1/2})) Q^F(r, R) + N O((\log R)^{-3/2}) .
\end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 16, on a (uniformément pour $\log \log R < |\log r| \leqq (\log R)^{1/2}$),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k=N} Q^F(\lambda^k r, R) &= \Gamma^F(r, R) - \Gamma^F(\lambda^N r, R) \\
&= \frac{N|\log \lambda|}{\log R} \tilde{F} + O\left(\frac{\log \log R}{\log R}\right) .
\end{aligned}$$

On a donc

$$Q^F(r, R)(1 + O((\log R)^{-1/2})) = \frac{|\log \lambda| \tilde{F}}{\log R} + O\left(\frac{\log \log R}{(\log R)^{3/2}}\right) ,$$

et en particulier $Q^F(r, R) = O((\log R)^{-1})$. On a alors

$$Q^F(r, R) = \frac{|\log \lambda| \tilde{F}}{\log R} + O\left(\frac{\log \log R}{(\log R)^{3/2}}\right) ,$$

ce qui démontre le lemme.

4.2.3 Etude de l'espérance $E(\int_{\mathcal{U}^\varepsilon} F(K_x)\,dx)$. Nous allons établir la proposition suivante:

Proposition 18

$$E\left(\int_{\mathcal{U}^\varepsilon} F(K_x)dx\right) = \frac{\pi|\log\lambda|\tilde{F}}{|\log\varepsilon|^2} + O\left(\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|^{5/2}}\right).$$

Preuve. la preuve est analogue à celle du théorème 3.1 de [LG]. On définit $\delta(\varepsilon)$ par

$$\delta\exp(-|\log\delta|^{1/4}) = \varepsilon\,.$$

On pose $R = |\log\delta|^{-4}$, $\tilde{C}_x = C_x^{[T_\delta, T_R^\delta]}(B)$ et on note $\tilde{K}_x$ la classe d'équivalence de $\tilde{C}_x$ dans $\mathscr{C}'$.
Notons que $|\log\delta| = |\log\varepsilon| - |\log\varepsilon|^{1/4} + o(|\log\varepsilon|^{1/4})$. On a

$$\begin{aligned}
&|E(1_{x\in\mathcal{U}_\varepsilon}F(K_x)) - E(1(T_{\delta\leqq 1}, |\tilde{C}_x| \in [\pi\lambda^2\varepsilon^2, \pi\varepsilon^2])F(\tilde{K}_x))| \\
&\leqq 2\|F\|(P(T_\delta \leqq 1, |\tilde{C}_x| \in [\pi\lambda^2\varepsilon^2, \pi\varepsilon^2], C_x \neq \tilde{C}_x) \\
&\quad + P(T_\delta \leqq 1, |C_x| \in [\pi\lambda^2\varepsilon^2, \pi\varepsilon^2], C_x \neq \tilde{C}_x)) \\
&\leqq \|F\|\frac{\log|\log\delta|}{|\log\delta|^3}\psi(x)
\end{aligned}$$

où ψ est une fonction intégrable (cf. [LG, majoration des termes de (3b)]).
On définit $h(z)$ sur le cercle unité par

$$h(z) = E_z(1(\pi\lambda^2 r^2 < |C_R| \leqq \pi r^2)F(K_R))$$

pour $r = \varepsilon/\delta$ et $R = |\log\delta|^{-4}/\delta$. En fait, $h(z)$ est défini comme

$$Q^F(\varepsilon/\delta, |\log\delta|^{-4}/\delta)$$

mais pour un mouvement brownien issu de z. On a immédiatement

$$Q^F(\varepsilon/\delta, |\log\delta|^{-4}/\delta) = \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

On définit alors

$$\tilde{Q}_\delta^F(\varepsilon/\delta, |\log\delta|^{-4}/\delta) = E(h(Z)|\,T_\delta \leqq 1)$$

où $Z = \delta^{-1}(B_{T_\delta} - x)$.
D'après la propriété de Markov en T_δ et un argument de changement d'échelle, on a

$$E(1(T_\delta \leqq 1, |\tilde{C}_x| \in [\pi\lambda^2\varepsilon^2, \pi\varepsilon^2])F(\tilde{K}_x)) = P(T_\delta \leqq 1)\tilde{Q}_\delta^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right)$$

Il nous faut maintenant comparer Q^F et $\tilde{Q}_\delta^F$. On a le lemme suivant:

Lemme 19 *Pour tout $\delta < 1/4$ et pour tout $|x| > \sqrt{\delta}$ on a*

$$P(T_\delta \leqq 1)\left|\tilde{Q}_\delta^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right) - Q^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right)\right|$$
$$\leqq 4P(T_{\sqrt{\delta}} \leqq 1)\|F\|\sqrt{\delta}\,.$$

Preuve du lemme. Rappelons que $Z = \delta^{-1}(B_{T_\delta} - x)$. On note α l'argument de x. D'après la décomposition en skew-product de $B_t - x$, on a $Z = \exp(iY_{\sigma(\delta)})$ où Y est un mouvement brownien issu de $-\alpha$ et où $\sigma(\delta)$ est le temps d'atteinte de $\log\delta$ par un mouvement brownien issu de $\log|x|$ indépendant de Y. Soit $\sigma'(\delta) = \sigma(\delta) - \sigma(\sqrt{\delta})$. On a alors pour tout entier non-nul n, et pour tout δ tel que $\sqrt{\delta} < |x|$,

$$\begin{aligned}|P(T_\delta < 1)E(e^{inZ}|T_\delta < 1)| &= |E(e^{inZ}1_{T_\delta<1})|\\ &= |E(e^{-n^2\sigma(\delta)/2}1_{T_\delta<1})|\\ &\leqq E(e^{-n^2\sigma'(\delta)/2}1_{T_{\sqrt{\delta}}<1})\\ &\leqq E(e^{-n^2\sigma'(\delta)/2})P(T_{\sqrt{\delta}} < 1)\\ &\leqq \sqrt{\delta}^{|n|}P(T_{\sqrt{\delta}} < 1)\end{aligned}$$

car $\sigma'(\delta)$ et $T_{\sqrt{\delta}}$ sont indépendants.
Comme dans le 3.2.2, on écrit la décomposition en série de Fourier de h et on remarque que, pour tout $\sqrt{\delta} < 1/2$

$$\begin{aligned}&P(T_\delta \leqq 1)\left|\tilde{Q}_\delta^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right) - Q^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right)\right|\\ &= P(T_\delta \leqq 1)\left|E(h(Z)|T_\delta < 1) - \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\right|\\ &\leqq \|F\|P(T_{\sqrt{\delta}} < 1)\sum_{n\neq 0}\sqrt{\delta}^{|n|}\\ &\leqq 4\|F\|P(T_{\sqrt{\delta}} < 1)\sqrt{\delta}\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.
D'après les estimations précédentes et le lemme 19, on a

$$\left|E(1_{x\in U_\varepsilon}F(K_x)) - P(T_\delta < 1)Q^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right)\right|$$
$$\leqq \|F\|\psi(x)\frac{\log|\log\delta|}{|\log\delta|^3} + 4P(T_{\sqrt{\delta}} < 1)\|F\|\sqrt{\delta}\,.$$

On notera S_δ la saucisse de Wiener de rayon δ associée à $B_{[0,1]}$ (rappelons que $S_\delta = \cup_{t\in[0,1]}\mathscr{D}(B_t, \delta)$). En intégrant l'inégalité par rapport à x sur $\mathbb{R}^2\backslash\mathscr{D}(0,\sqrt{\delta})$, on obtient:

$$\left|E\left(\int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx\right) - E(|S_\delta|)Q^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right)\right|$$
$$\leqq O\left(\frac{\log|\log\delta|}{(\log\delta)^3}\right) + O(\sqrt{\delta})E(|S_{\sqrt{\delta}}|) + 4\|F\|\pi\delta\,.$$

Mais d'après le lemme 17,

$$Q^F\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{|\log\delta|^{-4}}{\delta}\right) = \frac{\tilde{F}|\log\lambda|}{|\log\delta|} + O\left(\frac{\log|\log\delta|}{|\log\delta|^{3/2}}\right),$$

et de plus $E(|S_\delta|) = \pi/|\log\delta| + O(|\log\delta|^{-2})$ (voir par exemple [LG2], chapitres 6 et 11); on a donc finalement:

$$E\left(\int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx\right) = \frac{\pi|\log\lambda|\tilde{F}}{|\log\delta|^2} + O\left(\frac{\log|\log\delta|}{|\log\delta|^{5/2}}\right)$$
$$= \frac{\pi|\log\lambda|\tilde{F}}{|\log\varepsilon|^2} + O\left(\frac{\log|\log\varepsilon|}{|\log\varepsilon|^{5/2}}\right).$$

La propriété 18 est ainsi démontrée.

4.2.4 Etude de la variance de $\int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)\,dx$. Par commodité d'écriture, on notera parfois

$$X_\varepsilon = \int_{\mathscr{U}_\varepsilon} F(K_x)dx\ .$$

On a l'estimation suivante:

Proposition 20 *Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a*

$$\mathrm{var}(X_\varepsilon) = \mathrm{O}(|\log\varepsilon|^{-11/2})\ .$$

Preuve. l'idée de la démonstration est de découper la trajectoire $B_{[0,1]}$ en deux $(B_{[0,1/2]} \cup B_{[1/2,1]})$ afin d'obtenir une relation entre les variances de X_ε et de $X_{\varepsilon\sqrt{2}}$ (obtenue après scaling pour chacune des deux portions de trajectoires). On pose, pour $0 \leqq t \leqq 1$

$$B_t' = B_t - B_{1/2}$$

et pour $0 \leqq t \leqq 1/2$,

$$B_t^1 = B_{1/2+t} - B_{1/2} = B'_{1/2+t} \text{ et } B_t^2 = B_{1/2-t} - B_{1/2} = B'_{1/2-t}\ .$$

On associe à ces trois processus les composantes connexes C_x', C_x^1, C_x^2 et leurs classes d'équivalence correspondantes K_x', K_x^1, K_x^2 ainsi que les ensembles $\mathscr{U}_\varepsilon'$, $\mathscr{U}_\varepsilon^1$, $\mathscr{U}_\varepsilon^2$ et les variables aléatoires X_ε', X_ε^1, X_ε^2. Remarquons que $C_x' - x = (C_x^1 - x)$ $\nabla(C_x^2 - x)$ (avec les notations de la partie 2) et que $X_\varepsilon = X_\varepsilon'$. Nous allons tout d'abord montrer l'estimation suivante:

Lemme 21 *Lorsque $\varepsilon \to 0$, on a*

$$E((X_\varepsilon' - X_\varepsilon^1 - X_\varepsilon^2)^2) = O(|\log\varepsilon|^{-11/2})\ .$$

L'idée de cette étude est de voir que lorsque $\varepsilon \to 0$, on a asymptotiquement $\mathscr{U}_\varepsilon' = \mathscr{U}_\varepsilon^1 \cup \mathscr{U}_\varepsilon^2$ et que pour $x \in \mathscr{U}_\varepsilon^1$, on a en général $K_x' = K_x^1$ et de même pour $x \in \mathscr{U}_\varepsilon^2$, $K_x' = K_x^2$. Il en découle alors que X_ε' est proche de $X_\varepsilon^1 + X_\varepsilon^2$.

Preuve du lemme. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
&|X'_\varepsilon - X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon| \\
&\leqq \left|\int_{\mathscr{U}'_\varepsilon \backslash (\mathscr{U}^1_\varepsilon \cup \mathscr{U}^2_\varepsilon)} F(K'_x)dx\right| + \left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| + \left|\int_{\mathscr{U}^2_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon \cap \mathscr{U}^2_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| + \left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon} (F(K'_x) - F(K^1_x))dx\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathscr{U}^2_\varepsilon} (F(K'_x) - F(K^2_x))dx\right| .
\end{aligned}$$

Nous allons majorer les moments d'ordre 2 de chacun de ces termes. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathscr{U}'_\varepsilon \backslash (\mathscr{U}^1_\varepsilon \cup \mathscr{U}^2_\varepsilon)} F(K'_x)dx\right| + \left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| + \left|\int_{\mathscr{U}^2_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| \\
&+ \left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon \cap \mathscr{U}^2_\varepsilon} F(K'_x)dx\right| \\
&\leqq \|F\|(|\mathscr{U}'_\varepsilon \backslash (\mathscr{U}^1_\varepsilon \cup \mathscr{U}^2_\varepsilon)| + |\mathscr{U}^1_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon| + |\mathscr{U}^2_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon| + |\mathscr{U}^1_\varepsilon \cap \mathscr{U}^2_\varepsilon|) .
\end{aligned}$$

Or les moments d'ordre 2 des termes de droite sont exactement ceux étudiés dans la démonstration du lemme 3.3 de [LG]. Les estimations obtenues sont:

$$\begin{aligned}
&E(|\mathscr{U}'_\varepsilon \backslash (\mathscr{U}^1_\varepsilon \cup \mathscr{U}^2_\varepsilon)|^2 + |\mathscr{U}^1_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon|^2 + |\mathscr{U}^2_\varepsilon \backslash \mathscr{U}'_\varepsilon|^2 + |\mathscr{U}^1_\varepsilon \cap \mathscr{U}^2_\varepsilon|^2) \\
&\quad = O(|\log \varepsilon|^{-11/2}) .
\end{aligned}$$

Grâce à un argument de symétrie, il ne nous reste plus qu'à étudier

$$E\left(\left|\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon} (F(K_x') - F(K^1_x))dx\right|^2\right) .$$

Or

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathscr{U}^1_\varepsilon} (F(K'_x) - F(K^1_x))dx\right)^2 \\
&\qquad = \int_{(\mathscr{U}^1_\varepsilon)^2} (F(K'_x) - F(K^1_x))(F(K'_y) - F(K^1_y))dx\,dy \\
&\qquad \leqq 4\|F\|^2 \int_{(\mathscr{U}^1_\varepsilon)^2} 1_{K'_x \neq K^1_x} 1_{K'_y \neq K^1_y} dx\, dy \\
&\qquad \leqq 4\|F\|^2 \int_{(\mathscr{U}^1_\varepsilon)^2} 1_{C'_x \neq C^1_x} 1_{C'_y \neq C^1_y} dx\, dy .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\delta(\varepsilon)$ et $R(\varepsilon)$ définis comme précédemment (rappelons que $R = R(\varepsilon) = |\log\varepsilon|^{-4}$ et $\varepsilon = \delta\exp(-|\log\delta|^{1/4})$), on a,

$$\begin{aligned}E\left(\int_{\mathcal{U}_\varepsilon} 1_{C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta)} dx\right) &\leqq E\left(\int_{S_\varepsilon} 1_{C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta)} dx\right)\\ &\leqq \int_{\mathbb{R}^2} P(x \in S_\varepsilon \text{ et } C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta))dx\\ &\leqq \int_{\mathbb{R}^2} P(T_\varepsilon(x) < T_R^\varepsilon(x) < 1, C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta))dx\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} P(T_\varepsilon(x) < 1 \leqq T_R^\varepsilon(x))dx\,.\end{aligned}$$

Mais d'après le lemme 15 et en utilisant la propriété de Markov en T_ε,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} P(T_\varepsilon(x) < T_R^\varepsilon(x) < 1, C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta))dx\\ &\leqq \int_{\mathbb{R}^2} P(T_\varepsilon(x) < 1)P(C_x^{[T_\varepsilon, T_R^\varepsilon]} \not\subset \mathcal{D}(x,\delta))dx\\ &\leqq O(|\log\varepsilon|^{-10})E(|S_\varepsilon|)\\ &\leqq O(|\log\varepsilon|^{-10})\,.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} P(T_\varepsilon(x) < 1 < T_R^\varepsilon(x))dx &\leqq \int_{\mathbb{R}^2} P(B_1 \in \mathcal{D}(x,R))dx\\ &\leqq O(R^2) = O(|\log\varepsilon|^{-8})\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$E\left(\int_{\mathcal{U}_\varepsilon} 1_{C_x \not\subset \mathcal{D}(x,\delta)} dx\right) \leqq O(|\log\varepsilon|^{-8})\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}&E\left(\int_{(\mathcal{U}_\varepsilon^1)^2} 1_{C'_x \neq C_x^1} 1_{C'_y \neq C_y^1} dx\, dy\right)\\ &\leqq E\left(\int_{(\mathcal{U}_\varepsilon^1)^2} 1_{C'_x \neq C_x^1} 1_{C'_y \neq C_y^1} 1_{C_x^1 \subset \mathcal{D}(x,\delta) \text{et} C_y^1 \subset \mathcal{D}(x,\delta)} dx\, dy\right) + O(|\log\varepsilon|^{-8})\\ &\leqq E\left(\int_{(\mathcal{U}_\varepsilon^1)^2} 1_{x \in S_\delta^2} 1_{y \in S_\delta^2} dx\, dy\right) + O(|\log\varepsilon|^{-8})\end{aligned}$$

où S_δ^2 désigne la saucisse de Wiener de rayon δ associée à $B_{[1/2,1]}$. L'intégrale du terme de droite est majorée dans (3.g) de [LG]. Cette majoration implique alors que

$$E\left(\int_{(\mathcal{U}_\varepsilon^1)^2} (F(K'_x) - F(K_x^1))(F(K'_y) - F(K_y^1))dx\, dy\right) = O(|\log\varepsilon|^{-11/2})$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous allons maintenant en déduire la proposition 20. On a

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X'_\varepsilon)^{1/2} &\leqq E((X^1_\varepsilon - E(X^1_\varepsilon) + X^2_\varepsilon - E(X^2_\varepsilon))^2)^{1/2} \\ &\quad + E((X'_\varepsilon - X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon - E(X'_\varepsilon - X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon))^2)^{1/2} \\ &\leqq \operatorname{var}(X^1_\varepsilon + X^2_\varepsilon)^{1/2} + E((X'_\varepsilon - X^1_\varepsilon - X^2_\varepsilon)^2)^{1/2} \\ &\leqq \operatorname{var}(X^1_\varepsilon + X^2_\varepsilon)^{1/2} + O(|\log\varepsilon|^{-11/4}) .\end{aligned}$$

Mais on a par scaling, $2X^1_\varepsilon \overset{(\text{loi})}{=} X_{\varepsilon\sqrt{2}}$ (car les "formes" des composantes connexes sont invariantes par scaling). Comme X^1_ε et X^2_ε sont indépendants, on a

$$(\operatorname{var}X_\varepsilon)^{1/2} \leqq 2^{-1/2}(\operatorname{var}X_{\varepsilon\sqrt{2}})^{1/2} + O(|\log\varepsilon|^{-11/4}) .$$

On en déduit immédiatement $(\operatorname{var}X_\varepsilon)^{1/2} = O(|\log\varepsilon|^{-11/4})$ et la proposition.

4.2.5 Fin de la preuve du théorème 14. Nous allons maintenant finir la démonstration du théorème 13. D'après la proposition 20, on a

$$\sum_{n\geqq 1} (\log\lambda^n)^4 \operatorname{var}\left(\int_{\mathscr{U}_{\lambda^n}} F(K_x)dx\right) = O\left(\sum n^{-3/2}\right) < \infty$$

et donc p.s.,

$$(\log\lambda^n)^2\left(\int_{\mathscr{U}_{\lambda^n}} F(K_x)dx - E\left(\int_{\mathscr{U}_{\lambda^n}} F(K_x)dx\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Mais d'après la proposition 18,

$$(\log\lambda^n)^2 E\left(\int_{\mathscr{U}_{\lambda^n}} F(K_x)dx\right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi\tilde{F}|\log\lambda|$$

donc, p.s.,

$$(\log\lambda^n)^2 \int_{\mathscr{U}_{\lambda^n}} F(K_x)dx \xrightarrow{n\to\infty} \pi\tilde{F}|\log\lambda| .$$

et donc (Césaro)

$$\frac{\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{\lambda^{2p}(\log\lambda^p)^2}(\log\lambda^p)^2\int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} F(K(x))dx}{\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{\lambda^{2p}(\log\lambda^p)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \pi|\log\lambda|\tilde{F} .$$

Le cas particulier $F = 1$ donne

$$\frac{\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{\lambda^{2p}(\log\lambda^p)^2}(\log\lambda^p)^2|\mathscr{U}_{\lambda^p}|}{\displaystyle\sum_{p=1}^n \frac{1}{\lambda^{2p}(\log\lambda^p)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \pi|\log\lambda|$$

et donc, en faisant le rapport:

$$\frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} \int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} F(K(x))dx}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} |\mathscr{U}_{\lambda^p}|} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \tilde{F} .$$

Mais d'après l'encadrement vu en 4.2.1, on a

$$\lambda^2 \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} \int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} F(K(x))dx}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} \int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} dx} \leqq \frac{\sum_{p=N_\lambda+1}^{p=N_{\lambda^{n+1}}} F(K_p)}{N_{\lambda^{n+1}} - N_\lambda}$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda^2} \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} \int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} F(K(x))dx}{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2p}} \int_{\mathscr{U}_{\lambda^p}} dx} .$$

On a donc finalement:

$$\lambda^2 \tilde{F} \leqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=N_\lambda+1}^{p=N_{\lambda^n}} F(K_p)}{N_{\lambda^n} - N_\lambda} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=N_\lambda+1}^{p=N_{\lambda^n}} F(K_p)}{N_{\lambda^n} - N_\lambda} \leqq \frac{\tilde{F}}{\lambda^2} .$$

Il reste à étudier le comportement de N_{λ^n} lorsque n tend vers l'infini pour en déduire le théorème 14 (nous allons montrer que N_{λ^n} tend vers l'infini suffisamment lentement). D'après [LG] on sait que p.s.

$$N_{\lambda^n} = O(n^{-2}\lambda^{-n}) ,$$

et que $N_{\lambda^{n+1}}/N_{\lambda^n}$ tend p.s. vers λ^{-1} lorsque n tend vers l'infini. On en déduit alors

$$\lambda^3 \tilde{F} \leqq \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{p=N_{\lambda^n}} F(K_p)}{N_{\lambda^{n+1}}}$$

$$\leqq \liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{p=N} F(K_p)}{N}$$

$$\leqq \limsup_{N\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{p=N} F(K_p)}{N}$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=1}^{p=N_{\lambda^{n+1}}} F(K_p)}{N_{\lambda^n}} \leqq \frac{\tilde{F}}{\lambda^3} .$$

Comme ceci est vérifié pour tout $\lambda < 1$, on en déduit le théorème 14 dans le cas où F est une fonction positive. Le cas général en découle alors immédiatement, ce qui achève la démonstration du théorème.

5 Propriétés de la loi limite

Nous allons montrer maintenant deux propriétés de la loi limite.

5.1 *Invariance par changement de pôle*

Nous allons rapidement montrer que la loi $\mathscr{L}_1$ est invariante par la transformation que nous décrivons ci-après: on choisit un point x au hasard (uniformément par rapport à la mesure de Lebegue) dans l'ouvert aléatoire D qui suit la loi $\mathscr{L}_1$. La renormalisation de D par rapport au point x (c'est à dire l'ouvert $\text{dist}(x, D^c)^{-1} (D - x)$) suit alors également la loi $\mathscr{L}_1$.

Proposition 22 *La loi $\mathscr{L}_1$ est invariante par changement de pôle; plus précisément, pour toute fonction F mesurable bornée sur $\mathscr{C}$, on a*

$$\int_{\mathscr{C}} F(D) d\mathscr{L}_1(D) = \int_{\mathscr{C}} d\mathscr{L}_1(D) \left(\int_D F\left(\frac{D - x}{\text{dist}(x, D^c)} \right) \frac{dx}{|D|} \right).$$

où $\text{dist}(x, D^c)$ désigne la distance de x au complémentaire de D.

Preuve. on définit G sur $\mathscr{C}$ par

$$G(D) = \int_D F\left(\frac{D - x}{\text{dist}(x, D^c)} \right) \frac{dx}{|D|}.$$

Alors, si B est un mouvement brownien, si C_x désigne la composante connexe $C_x^1(B)$ et si $D_x = D(C_x - x)$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} dx G(D_x) \\ &= \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} dx \int_{D_x} F\left(\frac{D_x - z}{\text{dist}(z, (D_x)^c)} \right) \frac{dz}{|D_x|} \\ &= \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} dx \int_{C_x} \frac{F(D_y)}{|D_x| \text{dist}(x, (C_x)^c)^2} dy \\ &= \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}^2} dx dy\, 1_{(C_x = C_y)} \frac{F(D_x)}{|D_x| \text{dist}(x, (C_x)^c)^2} \\ &= \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}^2} dx dy\, 1_{(C_x = C_y)} \frac{F(D_y)}{|C_x|} \\ &= \int_{\{y, |C_y| \leqq \pi\varepsilon^2\}} F(D_y) dy. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que

$$E\left(\int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} F(D_y) dy \right) \overset{\varepsilon \to 0}{\sim} E(|\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}|) \left(\int_{\mathscr{C}} F(D) d\mathscr{L}_1(D) \right).$$

On sait que

$$\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\} \subset \{x, T_\varepsilon(x) \leqq 1\}.$$

et que pour tout $x \neq 0$

$$P(|C_x| \leqq \pi\varepsilon^2) \overset{\varepsilon\to 0}{\sim} P(T_\varepsilon(x) \leqq 1)\,,$$

on a donc p.s.,

$$|\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}| \overset{\varepsilon\to 0}{\sim} |\{x, T_\varepsilon(x) \leqq 1\}|\,.$$

On peut donc écrire (car $E(|S_\varepsilon|) = O(|\log\varepsilon|^{-1}))$,

$$\begin{aligned} &E\Bigg(\int\limits_{\{x,|C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} F(D_y)dy\Bigg) \\ &\quad = E\Bigg(\int\limits_{\{x,T_\varepsilon(x) \leqq 1\}} F(D_y)dy\Bigg) + o(|\log\varepsilon|^{-1}) \\ &\quad = \int\limits_{\mathbb{R}^2} dxP(T_\varepsilon(x) < 1)E(F(D_x)|\,T_\varepsilon(x) < 1) + o(|\log\varepsilon|^{-1}). \end{aligned}$$

D'après le théorème 6, on a

$$E(F(D_x)|\,T_\varepsilon(x) < 1) = \int\limits_{\mathscr{C}} F(D)d\mathscr{L}_1(D) + \eta_x(\varepsilon)$$

où η_x vérifie, pour tout x,

$$\eta_x(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

et $|\eta_x(\varepsilon)| \leqq 2\|F\|$. On a donc

$$\begin{aligned} E\Bigg(\int\limits_{\{x,|C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} F(D_y)dy\Bigg) &= \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2} dxP(T_\varepsilon(x) < 1)\Bigg)\Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}} F(D)d\mathscr{L}_1(D)\Bigg) \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^2} dxP(T_\varepsilon(x) < 1)\eta_x(\varepsilon) + o(|\log\varepsilon|^{-1}) \\ &= \frac{\pi}{|\log\varepsilon|}\int\limits_{\mathscr{C}} F(D)d\mathscr{L}_1(D) + o(|\log\varepsilon|^{-1}) \end{aligned}$$

en se servant du fait que

$$P(T_\varepsilon(x) < 1) \leqq |\log\varepsilon|^{-1}h(x)$$

où h est intégrable (voir par exemple [LG, lemme 1-2]), qui entraîne que

$$|\log\varepsilon| \int\limits_{\mathbb{R}^2} dxP(T_\varepsilon(x) < 1)\eta_x(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

par convergence dominée.

Finalement

$$\pi \int_{\mathscr{C}} F(D) d\mathscr{L}_1(D) = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left(|\log \varepsilon| \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} F(D_y) dy \right)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} E\left(|\log \varepsilon| \int_{\{x, |C_x| \leqq \pi\varepsilon^2\}} G(D_y) dy \right)$$
$$= \pi \int_{\mathscr{C}} G(D) d\mathscr{L}_1(D)$$

ce qui démontre bien la proposition.

5.2 *Propriété de support*

Nous allons maintenant établir la propriété de support suivante.

Proposition 23 *Pour tout arc de Jordan fermé $\mathscr{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité sous $\mathscr{L}_2(K)$ pour qu'il existe un représentant de K dont la frontière soit incluse dans le voisinage $W_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \mathscr{D}(x, \varepsilon)$ de l'arc $\mathscr{A}$ est strictement positive.*

Cette propriété entraîne alors immédiatement le résultat suivant:

Corollaire 24 *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout arc de Jordan fermé $\mathscr{A}$ de diamètre* 1, *il existe presque sûrement une infinité de composantes connexes C_{n_p} dont un représentant C'_{n_p} de la classe $K_{C_{np}}$* soit tel que *$\partial C'_{n_p}$ soit inclus dans le voisinage $W_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} \mathscr{D}(x, \varepsilon)$ de l'arc $\mathscr{A}$.*

Preuve du corollaire. c'est une simple combinaison de la proposition 23 et du théorème 14, pour la fonction $F = 1_{(\exists y \in \mathbb{R}^2, D \subset y + W_\varepsilon)}$.

Preuve de la proposition. Soient $\mathscr{A}$ un arc de Jordan de diamètre 1 et $\varepsilon > 0$ fixés. Soient X_0 et Y_0 deux points de $\mathscr{A}$ tels que $|X_0 - Y_0| = 1$. Soit A l'intérieur de la courbe $\mathscr{A}$; A est un ouvert simplement connexe. Il existe deux points X_1 et Y_1 de A tels que $|X_1 - X_0| \leqq \eta$ et $|Y_1 - Y_0| \leqq \eta$ où $\eta = \varepsilon/10$. Comme A est connexe, il existe un chemin continu L reliant X_1 à Y_1 dans A. Soit $\mu = \text{dist}(L, \mathscr{A})/2$; remarquons que $0 < \mu \leqq \eta/2$. Soit $\tilde{W}_\mu$ la composante connexe du complémentaire de W_μ contenant X_1 et Y_1. On a $\text{diam}(\tilde{W}_\mu) \leqq 1 + 2\mu \leqq 1 + \eta$ et $\text{diam}(\tilde{W}_\mu) \geqq |X_1 - Y_1| \geqq 1 - 2\eta$.

Soit $O' \in \tilde{W}_\mu$ (par exemple $O' = X_1$). On pose $r = \text{dist}(O', W_\mu) > 0$. Soit R' un point de la frontière de W_μ où cette distance est atteinte. Alors il existe un point R de $\mathscr{A}$ situé sur la droite (O', R') tel que $|R - O'| = r + \mu$. De plus $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}(O', r + \mu) = \emptyset$ (sinon $\text{dist}(O', W_\mu) < r$).

On pose $V_\mu = (W_\mu - O')/(r + \mu)$. D'après les propriétés de support des lois des processus de Bessel et du mouvement brownien plan,

$$P(\partial C_0^{\infty,\infty}(\lambda U^1, \lambda U^2) \subset V_\mu) > 0$$

si U^1 et U^2 suivent la loi L, et si λ est une variable uniforme sur le cercle unité indépendante de $\mathscr{U}^1$ et $\mathscr{U}^2$. Remarquons que dans ce cas

$$(1 - 8\eta)(r + \mu)^{-1} \leqq \text{diam}(C) \leqq (1 + 8\eta)(r + \mu)^{-1}$$

et qu'alors

$$\frac{C}{\text{diam} C} \subset W_{\mu + 8\eta} - O' \subset W_\varepsilon - O' .$$

Finalement,

$$P\left(\frac{C}{\operatorname{diam} C} \subset W_\varepsilon - O'\right) > 0\,,$$

ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Références

[LG] Le Gall, J.F: On the connected components of the complement of a two-dimensional Brownian path. In: R. Durret, H. Kesten, (eds.), Random walks, Brownian motion and interacting particle systems, Progress in Probability, Vol. 28, pp. 323–338. Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1991.

[LG2] Le Gall, J.F: Some properties of planar Brownian motion. Cours de l'ecole d'été de St-Flour 1990 (Lect. Notes Math., Vol. 1527, pp. 111–236) Berlin Heidelberg New York: Springer 1992

[LG3] Le Gall, J.F: Sur la mesure de Haussdorff de la mesure brownienne, Séminaire de Probabilités XIX (Lect. Notes Math., Vol. 1123, pp. 297–313) Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

[Ma] Mandelbrot, B.B: The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman 1982

[Mo] Mountford, T.S: On the asymptotic number of small components created by planar Brownian motion. Stochastics **28**, 177–188 (1989)

[PY] Pitman, J., M. Yor: Random scaling of Brownian and Bessel bridges. (Preprint)

[PY2] Pitman, J., M. Yor: Quelques extensions d'une identité de F. Knight. (Preprint)

[RY] Revuz, D., M. Yor: Continuous martingales and Brownian motion. Berlin Heidelberg New York: Springer 1991

[We] Werner, W: Sur la forme des composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne plane. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **314**, 947–950 (1992)

[Wi] Williams, D: Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I. Proc. Lond. Math. Soc. **28**(3) 738–768 (1974)

[Y] Yor, M: Some aspects of Brownian motion, Part II: some new martingale problems. (Lect. Math.) ETH Zürich, Boston Basel Stuttgart: Birkhaüser (ă paraître 1993)