Probab. Th. Rel. Fields 90, 175–202 (1991)

Probability Theory and Related Fields

Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale (I)

G. Ben Arous[1] **et R. Léandre**[2]

[1] Départment de Mathématiques, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France

[2] Université Louis Pasteur, 7, rue R. Descartes, F-67084 Strasbourg, France

Reçu le 3 mars 1988; en forme revisée le 15 juillet 1990

Summary. We give examples based upon large deviation's theory where the heat kernel of a degenerate diffusion has an exponential decay over the diagonal. Using Malliavin calculus, we give conditions for a more generalized heat kernel to have an exponential decay over the diagonal. We give lower bound in some particular case by using the Bismut's condition.

Nous abordons, dans cet article, l'étude de l'influence du drift sur le comportement asymptotique du noyau de la chaleur $p_t(x, y)$ associé à un opérateur hypoelliptique de la forme $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_0$, où les X_i sont des champs de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Commençons par rappeler quelques résultats (pour des références précises, nous renvoyons à [BA.4] et [L1]).

Si les X_i vérifient l'hypothèse forte de Hörmander,

$$\mathrm{Lie}(X_1, \ldots, X_m)(x) = \mathbb{R}^d \tag{0.1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le drift X_0 n'a pas d'influence directe sur le terme dominant le comportement asymptotique de $\log p_t(x, y)$, puisque l'on a

$$\lim_{t \to 0} t \log p_t(x, y) = -\frac{1}{2} d^2(x, y) \tag{0.2}$$

où $d(x, y)$ est la distance sous-riemannienne associée aux champs $X_1, \ldots, X_m$, dont on rappelle la définition après (0.8).

Pour le comportement asymptotique de $p_t(x, y)$, la situation est plus complexe.

Toujours sous l'hypothèse (0.1), le comportement asymptotique de $p_t(x, y)$ est donné par:

$$p_t(x, y) \sim \frac{c_0(x, y)}{t^{d/2}} \exp\left[-\frac{d^2(x, y)}{2t}\right] \tag{0.3}$$

où $c_0(x, y) > 0$, pour des points (x, y) qui sont hors du cut-locus. Pour ces points, le drift X_0 n'a donc pas d'influence sur le comportement asymptotique du noyau de la chaleur, comme dans le cas où l'opérateur L est elliptique.

Par contre, pour des points (x, y) du cut-locus, l'influence du drift peut être déterminante. Nous allons considérer le cas le plus simple de points du cut-locus, à savoir les points de la diagonale $y = x$ (tels que L ne soit pas elliptique en x). Pour de tels points, si le drift est identiquement nul, le noyau de la chaleur explose en temps petit de la façon suivante:

$$p_t(x, y) \sim \frac{c_0(x)}{\sqrt{t^{Q(x)}}} \tag{0.4}$$

où $Q(x)$ est un entier lié à la structure géométrique des crochets des champs $X_1, \ldots, X_m$ en x, et où $c_0(x) > 0$.

Par contre, si le drift X_0 est non nul, la situation est plus surprenante: nous allons montrer dans cet article que le drift peut induire une décroissance exponentielle de $p_t(x, x)$ de la forme:

$$\lim_{t \to 0} t^{\alpha(x)} \log p_t(x, x) < 0 \qquad \text{avec } \alpha(x) \in]0, 1[\,.$$

Commençons par introduire quelques notations: $\mathscr{C}_k(x)$ est l'espace engendré par les crochets de Lie des X_i ($i \neq 0$) de longueur $\leqq k$, $r(x)$ est le plus petit entier k tel que $\mathscr{C}_k(x) = \mathbb{R}^d$, et $n(x)$ le plus petit entier k tel que $X_0(x) \in \mathscr{C}_k(x)$.

On dit que deux points x et y de $\mathbb{R}^d$ sont équivalents si, pour tout k, $\dim \mathscr{C}_k(x) = \dim \mathscr{C}_k(y)$ et si $n(x) = n(y)$.

L'objet de cet article est de montrer le théorème suivant:

Théorème 0. *Avec les hypothèses et les notations suivantes*
a) *Si* $n(x) \geqslant 3$

$$\limsup_{t \to 0} t^{(1 - 2/n(x))} \log p_t(x, x) < 0 \tag{0.5}$$

b) *Si* $r(x) > n(x) \geqq 3$

$$\liminf_{t \to 0} t^{(1 - 2/r(x))} \log p_t(x, x) = 0 \,. \tag{0.6}$$

Par contre, $\sin(x) = r(x) \geqq 3$ *sur un compact* K *constitué de points équivalents, il existe une fonction continue* $M(x) > 0$ *sur* K *telle qe, uniformément sur* K, *on ait*

$$\lim_{t \to 0} t^{(1 - 2/n(x))} \log p_t(x, x) = -M(x) \,. \tag{0.7}$$

On peut préciser (0.7) de la façon suivante:
Introduisons l'espace de Cameron-Martin H^1 sur $\mathbb{R}^m$ des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^m$ d'énergie finie ($\|h\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \dot{h}_{i,t}^2 dt < \infty$), nulles en zéro, $\dot{h}_{i,t}$ désignant la dérivée par rapport à t de h_i, et considérons la solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} dy_t^\varepsilon(x, h) &= \sum_{i=1}^m X_i(y_t^\varepsilon(x, h))\dot{h}_{i,t}dt + \varepsilon^2 X_0(y_t^\varepsilon(x, h))dt \\ y_0(x, h) &= x \,. \end{aligned} \tag{0.8}$$

L'application $h \to y_1^\varepsilon(x, h) = \Phi_x^\varepsilon(h)$ est C^∞.

Notons $d_\varepsilon^2(x, y)$ la quantité $\operatorname{Inf}_{h \in (\Phi_x^\varepsilon(y))^{-1}} \|h\|^2$. (On remarquera que la distance sous-riemannienne qui apparaît dans (0.2) et (0.3) correspond à $d_0^2(x, y)$). (0.7) peut s'écrire de façon plus géométrique:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{d_{\sqrt{t}}^2(x, x)} \log p_t(x, x) = -1 . \tag{0.7)'$$

Nous commençons par étudier une série d'exemples dont le traitement ne fait pas appel à la preuve du théorème. Dans un premier exemple, nous faisons le lien entre ce phénomène de décroissance exponentielle et l'encadrement du noyau de la chaleur de Jerison et Sanchez -Calle ([J.S.1] [J.S.2]) et donnons une explication analytique de la nature de ce phénomène de décroissance exponentielle. Ensuite, nous illustrerons le cas b) du théorème 0 et nous détaillerons un exemple des pathologies qui peuvent se produire si $r(x) > n(x)$ dans un travail ultérieur.

Dans la seconde partie, nous introduisons quelques préliminaires géométriques sur le comportement des énergies. Nous prouvons les minorations du théorème dans la troisième partie, et les majorations dans la quatrième.

Dans un travail ultérieur [B-A-L.1], nous étudierons le comportement asymptotique de $p_t(x, x)$ dans le cas où $n(x) \leqq 2$ et nous montrerons que le phénomène de décroissance exponentielle est encore possible, mais pour des raisons différentes.

1. Quelques exemples

1) *L'exemple des groupes de Lie nilpotents libres*

Soit $N_{m,p}$ le groupe de Lie réel libre nilpotent de longueur p, *à* m générateurs. L'algèbre de Lie $\mathcal{N}_{m,p}$ de $N_{m,p}$ s'écrit

$$\mathcal{N}_{m,p} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p \tag{1.1}$$

où V_1 est un espace vectoriel de dimension m dont on choisit une base $(u_1, \ldots, u_m)$, et V_i est l'espace vectoriel engendré par les crochets de longueur i des $(u_j)_{1 \leqq j \leqq m}$.

Soient $(X_1, \ldots, X_m)$ les champs de vecteurs invariants à gauche sur $N_{m,p}$ tels que: $X_i(e) = u_i$, et soit d la distance sous-riemannienne associée. Soit de plus X_0 un champ de vecteurs invariant à gauche sur $N_{m,p}$ tel que: $X_0(e) = u_0 \in V_p \setminus \{0\}$. Considérons alors les opérateurs invariants à gauche sur $N_{m,p}$

$$L = \frac{1}{2} \sum_1^m X_i^2 \quad \text{et} \quad \bar{L} = \frac{1}{2} \sum_1^m X_i^2 + X_0 \tag{1.2}$$

ainsi que leurs noyaux de la chaleur $p_t(x, y)$ et $\bar{p}_t(x, y)$ respectivement. On a alors:

Théorème 1.1. $\forall x \in N_{m,p}$, $\limsup_{t \to 0} t^\alpha \log \bar{p}_t(x, x) < 0$ *avec* $\alpha = 1 - \dfrac{2}{p} = 1 - \dfrac{2}{n(x)} > 0$ *si* $p \geqq 3$.

Preuve du théorème 1.1. Le drift X_0 commute aux champs X_i puisque $X_0(e)$ est dans le centre V_p de l'algèbre $\mathcal{N}_{m,p}$. Ainsi X_0 et L commutent, on a donc:

$$\bar{p}_t(x, y) = p_t(e^{tX_0} \cdot x, y). \tag{1.4}$$

Or pour l'opérateur sans drift L, on sait ([J.S.2], [K.S.3], [V]) que:

$$\frac{K'}{\operatorname{Vol} B(x, \sqrt{t})} \exp\left[-C' \frac{d^2(x, y)}{t}\right] \leqq p_t(x, y)$$

$$\leqq \frac{K}{\operatorname{Vol} B(x, \sqrt{t})} \exp\left[-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right] \tag{1.5}$$

où K, K', C, C' sont des constantes positives et où $\operatorname{Vol} B(x, \sqrt{t})$ désigne le volume de la boule sous-riemannienne: $B(x, \sqrt{t}) = \{y, d(x, y) < \sqrt{t}\}$. Par (1.4) et (1.5), on a donc:

$$\bar{p}_t(x, y) \leqq \frac{K}{\operatorname{Vol} B(x, \sqrt{t})} \exp\left[-C \frac{d^2(e^{tX_0}x, x)}{t}\right]. \tag{1.6}$$

Or nous allons vérifier que:

$$d^2(e^{tX_0}x, x) = t^{2/p} d^2(e^{X_0}x, x) \tag{1.7}$$

ce qui montre que:

$$\bar{p}_t(x, x) \leqq \frac{K}{\operatorname{Vol} B(x, \sqrt{t})} \exp\left[-C \frac{d^2(e^{X_0}x, x)}{t^{1-2/p}}\right] \tag{1.8}$$

et achève la preuve du théorème, puisque l'on sait que la boule sous-riemannienne $B(x, \sqrt{t})$ contient une boule euclidienne de centre x et de rayon proportionnel à une puissance entière de $\sqrt{t}$ ([N.S.W.], Proposition 1.1 et Théorème 4).

Pour vérifier (1.7), nous allons prouver un lemme évident d'homogénéité. $\mathcal{N}_{m,p}$ est muni de la famille naturelle de dilatations $(\delta_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par:

$$\delta_\alpha(u) = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k u_k \quad \text{si} \quad u = \sum_1^r u_k \quad \text{avec} \quad u_k \in V_k \tag{1.9}$$

On a alors:

Lemme 1.2. *Pour tout* $x \in \mathcal{N}_{m,p}$, *tout* $u \in \mathcal{N}_{m,p}$, *et tout* $\alpha > 0$,

$$d^2(x, \exp(\delta_\alpha u).x) = \alpha^2 d^2(x, \exp u.x)\,. \tag{1.10}$$

Ce lemme montre que si $u \in V_k$ on a

$$d^2(x, \exp(tu).x) = t^{2/k} d^2(x, \exp u.x) \tag{1.11}$$

et donne donc (1.7) si $k = p$.

Preuve du lemme 1.2. Il suffit, par invariance, de se restreindre au cas où $x = e$. Notons pour simplifier, si $x = \exp(u) \in N_{m,p}$, $\delta_\alpha(x) = \exp(\delta_\alpha u)$. Soit Φ_e^0 l'application définie en (0.8). On a alors de façon évidente: $\forall h \in H^1$: $\Phi_e^0(\alpha h) = \delta_\alpha(\Phi_e^0(h))$. Ainsi, toujours avec les notations de (0.8):

$$h \in (\Phi_e^0)^{-1}(y) \Leftrightarrow \alpha h \in (\Phi_e^0)^{-1}(\delta_\alpha y)$$

et donc:

$$d^2(e, y) = \inf(|h|_1^2, h \in K_e^y) = \frac{1}{\alpha^2} \inf(|k|_1^2, k \in K_e^{\delta_\alpha y}) = \frac{1}{\alpha^2} d^2(e, \delta_\alpha y) \qquad (1.12)$$

ce qui prouve le lemme (1.2).

Remarque. 1) Cet exemple montre que la minoration dans l'estimée (1.5) cesse d'être valide en présence d'un drift qui n'est pas dans l'espace engendré par les crochets d'ordre 2 des X_i; et que précisément c'est la majoration de (1.5) qui a permis de montrer que la minoration devient fausse.

2) Cet exemple montre aussi que la décroissance exponentielle du noyau de la chaleur n'est pas nécessairement un phénomène rare: elle est vraie ici sur toute la diagonale.

2) *Un exemple explicite sur* $\mathbb{R}^2$: *lien avec les grandes déviations et les systèmes dynamiques perturbés*

Nous allons considérer ici un exemple où le phénomène de décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonale peut être obtenu comme une conséquence du principe des grandes déviations pour le pont brownien. Soit sur $\mathbb{R}^2$ l'opérateur:

$$L = \tfrac{1}{2}(\partial_{x_1}^2 + x_1^{2n}\partial_{x_2}^2) + \partial_{x_2} \qquad (1.13)$$

où n est un entier positif; en d'autres termes, on a encore

$$L = \frac{1}{2}\sum_1^2 X_i^2 + X_0 \quad \text{avec} \quad X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = x_1^n \partial_{x_2} \quad \text{et} \quad X_0 = \partial_{x_2} .$$

L vérifie l'hypothèse de Hörmander forte (0.1).

En fait, L est elliptique hors de l'axe $D = \{x_1 = 0\}$.

Soit $p_t(x, y)$ le noyau de la chaleur associé à L; nous savons par (0.2) que:

$$\lim_{t \to 0} t \log p_t(x, x) = 0 . \qquad (1.14)$$

En fait, L étant elliptique sur D^c, on a, pour $x \in D^c$:

$$p_t(x, x) \sim \frac{c(x)}{t} \qquad (1.15)$$

avec $c(x) > 0$.

Il s'agit donc d'étudier $p_t(x, x)$ pour $x \in D$.

Commençons par remarquer qu'avec les notations du théorème 0, on a si $x \in D$:

$$n(x) = r(x) = n + 1 . \qquad (1.16)$$

En l'absence du terme de drift X_0, on aurait (*cf.* [BA4], [L.3]) si $x \in D$:

$$p_t(x, x) \sim \frac{c(x)}{\sqrt{t^{n+2}}} \qquad (1.17)$$

avec $c(x) > 0$:

Si $n = 1$ (auquel cas $n(x) = 2$), on va vérifier que le drift ne modifie pas le comportement donné par (1.17); par contre, pour $n \geqq 2$ (et donc $n(x) \geqq 3$), on va voir apparaître le phénomène de décroissance exponentielle.

Théorème 1.3. *Soit* $x \in D$ (*i.e.* $x_1 = 0$),

1) *Si* $n = 1$ *alors* $p_t(x, x) = \frac{K}{t^{3/2}}$ *avec* $K = \frac{1}{\sqrt{2\pi^{3/2}}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{shu}\right) du$.

2) *Si* $n \geqq 2$, *alors*: $\lim_{t\to 0} t^\alpha \log p_t(x, x) = -C$, *avec* $\alpha = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n(x)}$ *et* $C = \frac{1}{2}\left[(n+1)^{1/n} \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(1/2n + 1/2)}\right]^{2n/n+1}$.

Preuve. La diffusion $y^\varepsilon(t)$ de générateur $\varepsilon^2 L$, issue de $x \in D$, est donnée par:

$$\begin{cases} y_1^\varepsilon(t) = \varepsilon w_t^1 \\ y_2^\varepsilon(t) = \varepsilon^{n+1} \int_0^t (w_s^1)^n dw_s^2 + \varepsilon^2 t + x_2 \end{cases} \tag{1.18}$$

où (w_t^1, w_t^2) désigne un mouvement brownien de dimension 2.

Le noyau de la chaleur $p_{\varepsilon^2}(x, y)$ est la densité de la loi de la variable aléatoire $y^\varepsilon(1)$. Or, conditionnellement à $w_\cdot^1$, $y_2^\varepsilon(1)$ est gaussienne de moyenne $m(\varepsilon)$ et de variance $\sigma^2(\varepsilon)$ données par:

$$\begin{cases} m(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon^2 \\ \sigma^2(\varepsilon) = \varepsilon^{2n+2} \int_0^1 (w_s^1)^{2n} ds. \end{cases} \tag{1.19}$$

D'où l'on tire que:

$$p_{\varepsilon^2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E\left[\left(\int_0^1 (w_s^1)^{2n} ds\right)^{-1/2} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - x_2 - \varepsilon^2)^2}{\varepsilon^{2n+2} \int_0^1 (w_s^1)^{2n} ds}\right] \Big| \varepsilon w_1^1 = y_1\right] e^{-y_1^2/2\varepsilon^2} \tag{1.20}$$

et donc que:

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E\left[\left(\int_0^1 w_s^{2n} ds\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon^{2n-2}} \frac{1}{\int_0^1 w_s^{2n} ds}\right]\right] \tag{1.21}$$

si (w_s) désigne un pont brownien.

Commençons par un lemme évident d'intégrabilité:

Lemme 1.4. *Soit* (w_t) *un pont brownien et* $\alpha > 0$,

$$E\left[\left(\int_0^1 w_s^{2n} ds\right)^{-\alpha}\right] \leqq \frac{1}{2^{n\alpha - 1}\Gamma(n\alpha)} \int_0^\infty u^{2n\alpha - 1} \left(\frac{u}{shu}\right)^{1/2} du \tag{1.22}$$

l'égalité ayant lieu pour $n = 1$.

Preuve du lemme 1.4. On a $(\int_0^1 w_s^{2n} ds)^{-\alpha} \leqq (\int_0^1 w_s^2 ds)^{-n\alpha}$ et:

$$E\left[\left(\int_0^1 w_s^2 ds\right)^{-n\alpha}\right] = E\left[\left(\frac{1}{\Gamma(n\alpha)}\int_0^\infty \lambda^{n\alpha-1} e^{-\lambda\int_0^1 w_s^2 ds} d\lambda\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n\alpha-1}\Gamma(n^\alpha)}\int_0^\infty u^{2n\alpha-1} E\left[\exp\left[-\frac{u^2}{2}\int_0^1 w_s^2 ds\right]\right] du\,. \tag{1.23}$$

Or $E\left[\exp\left[-\frac{u^2}{2}\int_0^1 w_s^2 ds\right]\right] = \left(\frac{u}{shu}\right)$; ce qui prouve le lemme.

Ainsi, si $n = 1$, on a, par (1.21) et (1.22), avec $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E\left[\left(\int_0^1 w^{2n}\right)^{-1/2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^{n+2}}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^{3/2}}\int_0^\infty \left(\frac{u}{shu}\right) du \tag{1.24}$$

ce qui prouve le 1) du théorème.

Passons à la preuve du 2) du théorème 1.3, c'est-à-dire au cas où $n \geqq 1$: Soit $\alpha = \dfrac{n-1}{n+1}$ et $\eta = \varepsilon^\alpha$; on a alors

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n-2\alpha}} E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n} ds\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \tag{1.25}$$

où $F(\varphi) = (2\int_0^1 \varphi_s^{2n} ds)^{-1}$ pour toute fonction continue non nulle sur $[0, 1]$ et $F(0) = +\infty$.

Ainsi, pour évaluer $p_{\varepsilon^2}(x, x)$ lorsque ε tend vers zéro, il suffit d'appliquer une méthode de Laplace pour le pont brownien.

Pour cela, rappelons les notatons:

Soit $\mathscr{H} = \mathscr{H}_0^1$ l'ensemble des fonctions φ absolument continues sur $[0, 1]$ à dérivée L^2 et telles que: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Soit I la fonctionnelle d'action du pont brownien, à savoir:

$$\begin{cases} I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\varphi}_s|^2 ds & \text{si } \varphi \in H \\ I(\varphi) = \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.26}$$

La fonction F étant semi continue inférieurement pour la topologie de la convergence uniforme et bornée inférieurement, on sait que:

$$\limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \leqq -C \tag{1.27}$$

avec

$$C = \inf(F + I)\,.$$

De (1.26), on tire évidemment que, pour tout $K > 0$:

$$\limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\left(\int_0^1 (\eta w)^{2n} ds\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right];\ \int_0^1 (\eta w)^{2n} ds \geqq K\right] \leqq -C\,. \tag{1.28}$$

De plus, on a:

$$E\left[\left(\int_0^1 (\eta w)^{2n} ds\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]; \quad \int (\eta w_s)^{2n} ds \leqq K\right]$$

$$\leqq \frac{1}{\eta^n} \exp\left(-\frac{1}{K\eta^2}\right) E\left[\left(\int_0^1 w_s^{2n} ds\right)^{-1/2}\right]. \tag{1.29}$$

Du lemme 1.4, de (1.28) et (1.29), on tire donc que:

$$\limsup_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\left(\int_0^1 (\eta w_s)^{2n} ds\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \leqq -C. \tag{1.30}$$

Démontrons maintenant la minoration: $\liminf_{t \to 0} t^\alpha \log p_t(x, x) \geqq -C$ qui résulte de la continuité de F hors de 0.

Commençons par remarquer que l'infimum C est atteint (et donc strictement positif). C'est très classique: en effet, si la suite (φ_n) dans $\mathscr{H}$ est telle que: $\lim_{n \to \infty} (F + I)(\varphi_n) = C$, alors φ_n est bornée dans $\mathscr{H}$, une sous-suite de φ_n converge donc faiblement et uniformément vers un $\varphi \in \mathscr{H}$. Nécessairement, φ est non nul sinon $F(\varphi_n)$ tendrait vers l'infini et C serait infini.

Par la semi-continuité inférieure de $F + I$, on a

$$C = \lim (F + I)(\varphi_n) \geqq (F + I)(\varphi) \geqq C \tag{1.31}$$

d'où $(F + I)(\varphi) = C$.

Remarque. Nous verrons plus loin que C est atteint en exactement deux points et nous calculerons sa valeur.

Soit donc φ un point tel que $(F + I)(\varphi) = C$ et $B(\varphi, \rho)$ la boule uniforme de centre φ et de rayon ρ. Pour ρ assez petit, on a: $0 < K \leqq F \leqq L$ sur $B(\varphi, \rho)$ pour des réels strictement positifs K, L. On a alors:

$$E\left[(\int \eta w_s^{2n} ds)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \geqq \sqrt{2K}\, E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]; \eta w \in B(\varphi, \rho)\right]. \tag{1.32}$$

Or F est continue et bornée sur $B(\varphi, \rho)$, on a donc:

$$\liminf_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[\exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]; \eta w \in B(\varphi, \rho)\right]$$

$$\geqq -\inf (F + I)(\psi),\ \psi \in B(\varphi, \rho) = -C \tag{1.33}$$

et donc:

$$\liminf_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[(\int (\eta w_s)^{2n} ds)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] \geqq -C\,, \tag{1.34}$$

ce qui montre, avec (1.30), que:

$$\lim_{\eta \to 0} \eta^2 \log E\left[(\int (\eta w_s)^{2n} ds)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\eta^2} F(\eta w)\right]\right] = -C\,, \tag{1.35}$$

et donc par (1.25) que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2\alpha} \log p_{\varepsilon^2}(x, x) = -C, \tag{1.36}$$

ce qui achève la preuve du théorème, au calcul de C près.

Remarque. Il serait possible par cette méthode (en suivant [Az.1] ou [B-A.2]) d'obtenir un développement asymptotique de $p_{\varepsilon^2}(x, x)$ à condition de déterminer la nature des minima de $F + I$, qui comme on le verra sont au nombre de 2. Si ces minima sont non dégénérés, on obtiendrait au premier ordre:

$$p_t(x, x) \sim \frac{\text{constante}}{t^{2n+1/n+1}} e^{-C/t^\alpha}. \tag{1.37}$$

Passons au calcul de C:

Soit φ un point où l'infimum de $F + I$ est atteint: $F + I(\varphi) = C$, φ est non nul, c'est un point critique de $F + I$; ce qui est équivalent au fait que φ est de classe C^2 et solution de l'équation:

$$\ddot{\varphi} + \frac{n}{\left(\int_0^1 \varphi^{2n}\right)^2} \varphi^{2n-1} = 0 \tag{1.38}$$

avec $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$.
Or on a:

Lemme 1.5. 1) *L'application qui à φ associe $\psi = (\int_0^1 \varphi^{2n})^{-1/n-1} \varphi$ réalise une bijection de l'ensemble des points critiques de $F + I$ sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions non nulles de l'équation:*

$$\ddot{\psi} + n\psi^{2n-1} = 0 \tag{1.39}$$

avec $\psi(1) = \psi(0) = 0$.
$\mathscr{S}$ est l'ensemble des trajectoires d'un point matériel dans le potentiel $V(x) = \frac{1}{2} x^{2n}$ qui joignent 0 à 0 en temps 1.
2) *On a de plus:*

$$C = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n+1} \inf_{\psi \in \mathscr{S}} \left(\left(\frac{1}{2} \dot{\psi}(0)^2\right)^{n-1/n+1}\right). \tag{1.40}$$

Preuve. Si φ est critique, donc solution de (1.38), il est clair que $\psi = (\int \varphi^{2n})^{-1/n-1} \varphi$ est solution non nulle de (1.39). Réciproquement si ψ est solution non nulle de (1.39), $\varphi = (\int \psi^{2n})^{-1/n+1} \psi$ est solution de (1.38) et donc est critique. Ceci réalise un inverse de l'application précédente qui est donc une bijection, ce qui prouve le 1).

Prouvons le 2): Soit $\psi \in \mathscr{S}$; on a $\int_0^1 \dot{\psi}^2 = -\int_0^1 \psi \ddot{\psi} = n \int_0^1 \psi^{2n}$.
De plus, il existe une constante $E(\psi)$ (l'énergie mécanique totale) telle que:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \tfrac{1}{2} \dot{\psi}_t^2 + \tfrac{1}{2} \psi_t^{2n} = E(\psi). \tag{1.41}$$

D'où l'on tire:

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi^{2n} = \frac{1}{2}(n+1) \int_0^1 \psi^{2n}. \tag{1.42}$$

Soit alors φ un point critique de $F+I$ et $\psi = (\int \varphi^{2n})^{-1/n-1}\varphi$, on a:

$$(F+I)(\varphi) = \frac{n+1}{2}\left(\int \psi^{2n}\right)^{n-1/n+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2}{n+1}E(\psi)\right)^{n-1/n+1}$$

$$(F+I)(\varphi) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n+1} E(\psi)^{n-1/n+1}\,. \tag{1.43}$$

Il suffit de constater que $E(\psi) = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2(0)$ par (1.41) pour conclure la preuve du 2). Grâce au lemme 1.5, on peut calculer C. En effet, on a:

Lemme 1.6. *Soit $\psi \in \mathscr{S}$; alors ψ est périodique, de période $4T(\psi)$ avec*

$$T(\psi) = \frac{1}{|\dot{\psi}(0)|^{n-1/n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(1/2n+1/2)} \tag{1.44}$$

et $\psi(2T+t) = -\psi(t)$. ψ ne s'annule qu'aux multiples entiers de $2T$. De plus la période détermine ψ au signe près.

Preuve du lemme 1.6. Soit $\psi \in \mathscr{S}$; on a $\dot{\psi}(0)\dot{\psi}(1) \neq 0$. Supposons que $\dot{\psi}(0) > 0$. Le théorème de Rolle montre que $T = \inf(t, \dot{\psi}(t) = 0)$ appartient à $]0,1[$. Sur l'intervalle $]0, T[$ on a, par (1.41):

$$\dot{\psi} = (E(\psi) - \psi^{2n})^{1/2} \tag{1.45}$$

et donc

$$T = \int_0^{\psi(T)} \frac{ds}{(2E-\psi^{2n})^{1/2}}\,. \tag{1.46}$$

De plus, on a encore par (1.41): $\psi(T) = (E(\psi))^{1/2n}$ d'où:

$$T = \frac{1}{(2E)^{n-1/2n}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{2n}}} = \frac{1}{(2E)^{n-1/2n}}\frac{1}{2n}B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2E)^{n-1/2n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(1/2n, 1/2)}\,. \tag{1.47}$$

Or encore par (1.41): $E = \frac{1}{2}\dot{\psi}(0)^2$ d'où la valeur de T donnée dans le lemme. Or T est un point de maximum de ψ (puisque $\ddot{\psi}(T) = -n\psi(T)^{2n-1} < 0$). ψ décroît sur l'intervalle $[T, S]$ avec $S = \inf(t \geqq T, \psi(T) = 0$ par (1.39)). Par le même raisonnement que précédemment, on a:

$$S - T = \int_0^{(2E)^{1/2n}} \frac{ds}{(2E-s^{2n})^{1/2}} = T \tag{1.48}$$

d'où $S = 2T$.

Or en S, on a $\dot{\psi}(s) = -\dot{\psi}(0)$ donc sur l'intervalle $[2T, 4T]$ le mouvement est opposé à celui sur $[0, 2T]$. Ainsi, ψ est périodique de période $4T$ et ne s'annule qu'aux multiples entiers de $2T$.

Enfin, il est clair que $T(\psi)$ détermine $|\dot{\psi}(0)|$ et donc ψ au signe près.

Par le lemme 1.6, on voit alors que si $\psi \in \mathscr{S}$, $2T(\psi)$ doit diviser 1, c'est-à dire qu'il existe un entier k tel que:

$$T(\psi) = \frac{1}{2k}\,.$$

Ainsi l'ensemble $\mathscr{S}$, et donc l'ensemble des points critiques de $F + I$, est dénombrable et l'infimum de $(\frac{1}{2}\,\dot{\psi}(0)^2)^{n-1/n+1}$ pour $\psi \in \mathscr{S}$ est atteint pout $k = 1$ (i.e. en deux points ψ_0 et $-\psi_0$) et vaut:

$$\inf_{\psi \in \mathscr{S}} \left(\left(\frac{1}{2}\,\dot{\psi}(0)^2 \right)^{n-1/n+1} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1/n+1} \left(2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\,\frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma(1/2n + 1/2)} \right)^{2n/n+1} \tag{1.49}$$

d'où on tire la valeur de C par (1.40). Ce qui achève la preuve du théorème (1.3).

Lien avec un système dynamique perturbé

Nous allons expliquer ici le phénomène de décroissance exponentielle sur la diagonale sur l'exemple précédent en montrant que, après une renormalisation du processus (ou du générateur), il est équivalent à la décroissance exponentielle naturelle de la densité de la loi de transition entre deux points à distance *non nulle* pour un système dynamique perturbé qui relèverait d'une théorie à la Ventcell-Freidlin [F-V] dans le cas hypoelliptique (*cf.* [Az. 2]). Considérons sur $\mathbb{R}^2$ l'opérateur $L^\varepsilon = \varepsilon^2[\frac{1}{2}(\partial^2_{x_1} + x_1^{2n}\partial^2_{x_2})] + \partial_{x_2} = (\varepsilon^2/2)\sum_1^2 X_i^2 + X_0$.

Soit $q_t^\varepsilon(x, y)$ la solution fondamentale de L^ε.

Le théorème (1.3) b) est alors équivalent au résultat suivant:

Théorème 1.7. *Avec les notations précédentes, si* $n \geqq 2$, *on a*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log q_1^\varepsilon(0, 0) = -C$$

où C est la constante introduite au théorème (1.3).

Preuve. Soit $z^\varepsilon(t)$ la diffusion de générateur L^ε issue de 0.
On a:

$$\begin{cases} z_1^\varepsilon(t) = \varepsilon w_t^1 \\ z_2^\varepsilon(t) = \varepsilon^{n+1} \int_0^t (w_s^1)^n dw_s^2 + t\,. \end{cases} \tag{1.50}$$

Soit $x \in D$ et δ_ε^x le difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par:

$$\delta_\varepsilon^x(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha}}\,u_1, \frac{1}{\varepsilon^2}(u_2 - x_2) \right) \tag{1.51}$$

avec $\alpha = \dfrac{n-1}{n+1}$.

Si $y^\varepsilon(t)$ désigne, comme dans la preuve du théorème 1.3, la diffusion de générateur $\varepsilon^2 L$, on a en comparant (1.18) et (1.50):

$$\delta_\varepsilon^x(y^\varepsilon(t)) = z^{\varepsilon^\alpha}(t)\,. \tag{1.52}$$

D'où l'on tire évidemment:

$$p_{\varepsilon^2}(x, x) = \frac{1}{\varepsilon^{3-\alpha}} q_1^{\varepsilon^\alpha}(0, 0) . \tag{1.53}$$

Le théorème 1.7 est alors de façon évidente équivalent au b) du théorème 1.3.

Remarque. On obtiendrait de même le résultat de 1.7 pour un temps t différent de 1:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log q_t^\varepsilon(0, 0) = -C(t) \tag{1.54}$$

où la constante $C(t)$ est donnée par:

$$C(t) = \frac{1}{2} \inf_{\varphi \in H} \left(\frac{1}{\int_0^t \varphi^{2n}(s) \mathrm{d}s} + \int_0^t \dot{\varphi}^2(s) \mathrm{d}s \right) \tag{1.55}$$

et pourrait être calculé explicitement par l'argument de la preuve du b) du théorème 1.3.

Nous allons vérifier ici que la constante C est bien l'action minimale pour joindre 0 à 0 en temps 1. Pour cela, rappelons les notations de (0.8):
Soit Φ_x^1 l'application qui, à h, élément de $H([0, 1], \mathbb{R}^2)$ nul en 0, associe la solution $y_1(h)$ de l'équation:

$$\begin{cases} dy_t = \sum_{i=1}^{2} X_i(y_t) \dot{h}_t^i dt + X_0(y_t) dt \\ y_0 = x \end{cases} \tag{1.56}$$

et $\mathrm{d}_1(x, y)$ l'action minimale entre x et y i.e.:

$$\bar{d}_1^2(x, y) = \inf_{h \in (\Phi_x^1)^{-1}(y)} (|h|_1^2). \tag{1.57}$$

On a alors:

Théorème 1.8. *Avec les notations précédentes,*

$$C = \tfrac{1}{2} \bar{d}_1(0, 0)^2. \tag{1.58}$$

Preuve. Rappelons que C a été introduit en (1.28):

$$C = \inf(F + I) = \inf_{\varphi \in H} \left(\frac{1}{2 \int_0^1 \varphi^{2n}(s) \mathrm{d}s} + \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{\varphi}_s^2 \, \mathrm{d}s \right) \tag{1.59}$$

où H est $H_0^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Commençons par montrer que: $\frac{1}{2} d_1^2(0, 0) \geqq C$.
Soit $h \in H^1([0, 1], \mathbb{R}^2)$ nul en 0, $\Phi_0^1(h)$ est nul si et seulement si:

$$h_1(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 h_1^n(s) \mathrm{d}h_2(s) = -1. \tag{1.60}$$

Pour un tel h, on a donc:

$$1 = \left| \int_0^1 h_1^n \, dh_2 \right| \leqq \left(\int_0^1 h_1^{2n} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \dot{h}_2^2 \right)^{1/2} \tag{1.61}$$

et donc

$$\int_0^1 \dot{h}_1(s)^2 ds + \int_0^1 \dot{h}_2(s)^2 ds \geqq \int_0^1 \dot{h}_1^2(s) + \frac{1}{\int_0^1 h_1^{2n}(s) ds}. \tag{1.62}$$

Or $h_1 \in H$, on a donc pour tout h tel que $\phi_0^1(h) = 0$:

$$\int_0^1 \dot{h}_1(s)^2 ds + \int_0^1 \dot{h}_2(s)^2 ds \geqq 2C \tag{1.63}$$

d'où

$$\bar{d}_1^2(0, 0) \geqq 2C.$$

Réciproquement, soit φ_0 l'un des deux points de H où l'infimum C de $F + I$ est atteint; posons $h_1 = \varphi_0$ et

$$h_2(t) = -\frac{1}{\int_0^1 h_1^{2n}} \int_0^t h_1^n(s) ds \qquad \text{et} \qquad h = (h_1, h_2) \tag{1.64}$$

On a alors: $\int_0^1 h_1^n \, dh_2 = -1$ et donc $h = (h_1, h_2) \in K_0^0$.
De plus:

$$\int_0^1 \dot{h}_1^2 + \int_0^1 \dot{h}_2^2 = \int_0^1 \dot{h}_1^2 + \frac{1}{\int_0^1 h_1^{2n}} = 2C. \tag{1.65}$$

On a donc bein: $\bar{d}_1^2(0, 0) = 2C$.

2. Estimation asymptotique de l'action $d_\varepsilon^2(x, x)$

Soient X_i, $i = 0, \ldots, m, m + 1$ champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ de dérivées de tout ordre bornées. Supposons que l'hypothèse (0.1) soit vérifiée. L'objectif de cette partie est d'étudier la quantité introduite après (0.8):

$$d_\varepsilon^2(x, x) = \inf_{h \in (\Phi_x^\varepsilon)^{-1}(x)} \|h\|^2. \tag{2.1}$$

À cette fin, introduisons l'espace $\mathscr{F}_k(x)$ orthogonal de $\mathscr{C}_{k-1}(x)$ dans $\mathscr{C}_k(x)$, et le projecteur orthogonal $\pi_k(x)$ sur $\mathscr{F}_k(x)$, où $\mathscr{C}_k(x)$ est l'espace vectoriel engendré par les crochets de Lie des champs X_i, $i \neq 0$ de longueur $\leqq k$. $n(x)$ est le plus grand entier l tel que $\pi_l(x) X_0(x) \neq 0$ et $r(x)$ le plus grand entier tel que $\pi_l(x) \neq 0$. L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Supposons que* $r(x) > n(x) \geqq 3$. *On a*:

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon^2(x, x) \varepsilon^{-4/n(x)} > 0\,. \tag{2.2}$$

Si $n(x) = r(x)$, il existe un réel $M(x) > 0$ tel que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon^2(x, x)\varepsilon^{-4/n(x)} = M(x) . \tag{2.3}$$

Supposons de plus que, sur un compact κ la dimension de chaque $\mathscr{C}_k(x)$, reste fixe ainsi que $r(x)$ et $n(x)$. Alors (2.2) et (2.3) sont uniformes sur κ et $M(x)$ dépend de façon continue de $x \in \kappa$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, introduisons quelques notations.

Soit (β) un multi-indice $(i_1, \ldots, i_r)$, i_j appartenant à $0, 1, \ldots, m$. Notons $|\beta|$ sa longueur, $|\beta^0|$ le nombre de 0 appartenant à (β) et $|\beta^1|$ le nombre de termes non nuls appartenant à (β). $X_{(\beta)}$ désigne le crochet de Lie $[X_{i_1}, \ldots [X_{i_{r-1}}, X_{i_r}]]$. On peut extraire de l'ensemble des multi-indices de longueur $\leq r$ un ensemble minimal $\mathscr{A}_r$ tel que

$$X_{(\beta)} = \sum_{(\beta') \in \mathscr{A}_r} \lambda_{(\beta')} X_{(\beta')} , \tag{2.5}$$

les $\lambda_{(\beta')}$ étant universels. De plus, dans (2.5), les seuls $\lambda_{(\beta')}$ non nuls sont associés à des (β') qui se déduisent de (β) au moyen d'une permutation. Enfin, on peut supposer que $\mathscr{A}_r \subset \mathscr{A}_{r+1}$. Il suffit de considérer une base de Hall de l'algèbre de Lie libre à $m + 1$ générateurs.

Soit $t \to (h_t'^0, \ldots, h_t'^m)$ un élément de l'espace de Cameron-Martin sur $\mathbb{R}^{m+1}$. Soit $y_t(x, h')$ la solution de l'équation dans $\mathbb{R}^d$:

$$dy_t(x, h') = \sum_{i=0}^{m} X_i(y_t(x, h'))\dot{h}'^i_t dt$$

$$y_0(x, h') = x . \tag{2.6}$$

Rappelons le résultat suivant ([B-A.1], [Str], [L.3]): Soit $r > 0$. Il existe des fonctionnelles universelles réelles $F_{(\beta)}(h')$ $((\beta) \in \mathscr{A}_r)$ et un polynôme universel $P_x^r(F_{(\beta)}(h'))$ en les dérivées des champs X_i en x et en les $F_{(\beta)}(h')((\beta) \in \mathscr{A}_r)$ tel que:

i) quand $\| h' \| \to 0$

$$y_1(x, h') = x + \{I + P_x^r(F_{(\beta)}(h'))\} \left\{ \sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h') \right\} + 0(\| h' \|^{r+1}) . \tag{2.7}$$

ii) $F_{(\beta)}(h')$ est une combinaison linéaire d'intégrales itérées contenant pour tout $j \in \{0, \ldots, m\}$ autant de termes en $\dot{h}_t'^j dt$ que (β) contient de termes en j.

iii) P_x^r est de valuation non nulle en les $F_{(\beta)}(h')$.

On pourra trouver une démonstration de ce fait dans [B-A.L. 2].

On peut introduire l'ensemble de ces $F_{(\beta)}(h')$ d'une autre façon. Soit le groupe nilpotent simplement connexe $N_{m+1,r}$ libre d'ordre r à $m + 1$ générateurs et $X_0^G, \ldots, X_m^G$ les champs invariants à gauche qui constituent les $m + 1$ générateurs de son algèbre de Lie. Soit $y_t^G(h')$ la solution de l'équation:

$$dy_t^G(h') = \sum_{i=0}^{m} X_i^G(y_t^G(h'))\dot{h}_t'^i dt$$

$$y_t^G(h') = e. \tag{2.8}$$

Dans ce cas, $y_1^G(h') = (F_{(\beta)}(h'), (\beta) \in \mathscr{A}_r)$ (à un changement de réalisation du groupe de Lie près).

Rappelons le lemme suivant ([L.2], Th. 1.2):

Lemme 2.2. *Soit $h' \in H^1$ et soit $\eta > 0$. Il existe un élément h'_η de l'espace de Cameron-Martin vérifiant les 3 propriétés suivantes:*

i) $\| h' - h'_\eta \| < \eta$ (2.9)

ii) *Pour tout* $(\beta) \in \mathscr{A}_r$

$$F_{(\beta)}(h') = F_{(\beta)}(h'_\eta) . \tag{2.10}$$

iii) $h \to F_{(.)}(h)$ *est une submersion en* h'_η.

Preuve du théorème 2.1. Transformons h_t en $\varepsilon^{2/n(x)} h_t$ dans (0.8). Nous obtenons ainsi une nouvelle équation différentielle:

$$d\tilde{y}_t^\varepsilon(x, h) = \varepsilon^{2/n(x)} \sum_{i=1}^m X_i(\tilde{y}_t^\varepsilon(x, h))\dot{h}_t^i dt + \varepsilon^2 X_0(\tilde{y}_t^\varepsilon(x, h))dt$$

$$\tilde{y}_t^\varepsilon(x, h) = x . \tag{2.11}$$

Posons $\tilde{\Phi}_t^\varepsilon(h) = \tilde{y}_t^\varepsilon(x, h)$. On a alors:

$$d_\varepsilon^2(x, x') = \varepsilon^{4/n(x)} \inf_{h \in (\tilde{\Phi}_x^\varepsilon)^{-1}(x)} \| h \|^2 = \varepsilon^{4/n(x)} (\tilde{d}_\varepsilon(x, x))^2 . \tag{2.12}$$

Pour montrer (2.2), il suffit de montrer d'après (2.12) que $\liminf_{\varepsilon \to 0} \tilde{d}_\varepsilon(x, x) > 0$. Utilisons à cette fin (2.7). Soit (β) un multi-indice. Soit $h' = (t, h)$ et $h'_\varepsilon = (\varepsilon^2 t, \varepsilon^{2/n(x)} h)$, alors $F_{(\beta)}(h'_\varepsilon) = \varepsilon^{\nu(\beta)} F_{(\beta)}(h')$, avec $\nu(\beta) = 2\left(\frac{|\beta^1|}{n(x)} + |\beta^0|\right)$. Soit $N > 0$. Pour un entier r assez grand, on a par (2.7):

$$\tilde{\Phi}_x^\varepsilon(h) = x + (I + P_x^r(\varepsilon^{\nu(\beta)} F_{(\beta)}(h'))) \left(\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon^{\nu(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h') + 0(\varepsilon^N) \right) . \tag{2.13}$$

Soit $C > 0$. Lorsque ε est assez petit, $I + P_x^r(\varepsilon^{\nu(\beta)} F_{(\beta)}(h'))$ est une matrice inversible, car égale à l'identité lorsque $\varepsilon = 0$. Par suite, l'équation $\tilde{\Phi}_x^\varepsilon(h) = x$ équivaut quand ε est assez petit à:

$$\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon^{\nu(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h') + 0(\varepsilon^N) = 0 . \tag{2.14}$$

Soit une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $h_{\varepsilon_n} \in (\tilde{\Phi}_x^{\varepsilon_n})^{-1}(x)$ et telle que $\| h_{\varepsilon_n} \| \to 0$. Supposons que $N > 2$. L'exposant minimum de ε_n dans

$$\pi_{n(x)}(x) \sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon_n^{\nu(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h_{\varepsilon_n}) \tag{2.15}$$

est égal à 2 et son coefficient vaut:

$$\sum_{|\beta| = n(x), |\beta^0| = 0, (\beta) \in \mathscr{A}_r} \pi_{n(x)}(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h_{\varepsilon_n}) + \pi_{n(x)}(x) X_0(x) . \tag{2.16}$$

(2.16) nous montre que lorsque $n \to \infty$:

$$\sum_{|\beta| = n(x), |\beta^0| = 0, (\beta) \in \mathscr{A}_r} \pi_{n(x)}(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h_{\varepsilon_n}) + \pi_{n(x)}(x) X_0(x) \to 0 . \tag{2.17}$$

Comme $\pi_{n(x)}(x) X_0(x) \neq 0$, (2.17) implique que $\liminf_{n \to \infty} \| h_{\varepsilon_n} \|^2 > 0$. Ceci nous prouve que $\liminf_{\varepsilon \to 0} (\tilde{d}_\varepsilon(x, x))^2 > 0$.

Pour démontrer (2.3), on commence comme dans la preuve de (2.2), mais on doit montrer cette fois que $\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{d}_\varepsilon^2(x, x) = M(x) > 0$. On doit maintenant appliquer la même procédure que dans la preuve de (2.2), pour chaque projection $\pi_l(x)$, et non pour $\pi_{n(x)}(x)$ uniquement. Si $l < n(x)$, il y a un seul terme dont l'exposant de ε est inférieur à 2 $\pi_l(x) \sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon^{v(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h_\varepsilon)$. Il s'agit du terme:

$$\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r, |\beta^0| = 0, |\beta^1| = l} \varepsilon^{2l/n(x)} \pi_l(X) X_{(\beta)} F_{(\beta)}(h) . \tag{2.18}$$

On a $F_{(\beta)}(h') = F_{(\beta)}(h)$ car $|\beta^0| = 0$.

Si $l = n(x)$, il y a un seul terme dont l'exposant est égal à 2. Par suite, l'équation (2.14) se ramène, lorsque $\|h\|$ est bornée, à:

$$\sum_{|\beta| \in \mathscr{A}_{n(x)} |\beta^0| = 0} F_{(\beta)}(h) \pi_{|\beta|} X_{(\beta)}(x) + \pi_{n(x)}(x) X_0(x) + o(1) = 0 . \tag{2.19}$$

L'hypothèse essentielle dans le fait que (2.14) est équivalent à (2.19) est que $n(x) = r(x)$, et donc que la somme directe des $\mathscr{F}_{k(x)}$ est égale à $\mathbb{R}^d$. Introduisons la fonctionnelle de h définie par:

$$\psi_x(h) = \sum_{l \leq n(x)} \pi_l(x) \sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_{n,(x)}, |\beta^0| = 0, |\beta| = l} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(h) . \tag{2.20}$$

(2.19) s'écrit maintenant:

$$\psi_x(h) = -\pi_{n(x)}(x) X_0(x) + o(1) . \tag{2.21}$$

Posons

$$M(x) = \inf_{\psi_x(h) = -\pi_{n(x)}(x) X_0(x)} \|h\|^2. \tag{2.22}$$

La remarque essentielle est la suivante: dans les intégrales itérées figurant dans (2.20), *il n'y a que des termes en* $\dot{h}_t^i dt$ *et pas de termes en* dt. Cela va nous permettre d'appliquer le lemme 2.2 (pour $N_{m, n(x)}$ et non pour $N_{m+1, r}$).

Ceci nous permet de montrer d'abord que $M(x) < \infty$.

De plus, d'après ce lemme, il existe, pour tout $\eta > 0$, un élément $h_\eta \in (\psi_x)^{-1}(-\pi_{n(x)}(x) X_0(x))$ tel que $\|h_\eta\|^2 \leq M(x) + \eta$ et tel que $h \to \psi_x(h)$ soit une submersion en h_η. Par suite, il existe un élément $h_\eta^\varepsilon \to h_\eta$ quand $\varepsilon \to 0$, solution de l'équation (2.21), par le théorème des fonctions implicites.

Donc $(\tilde{d}_\varepsilon(x, x))^2 \leq \|h_\eta^\varepsilon\|^2$. Ceci nous prouve que:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} (\tilde{d}_\varepsilon(x, x))^2 \leq M(x) + \eta \tag{2.23}$$

pour tout $\eta > 0$.

Montrons maintenant l'inégalité

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} (\tilde{d}_\varepsilon(x, x))^2 \geq M(x) . \tag{2.24}$$

Raisonnons par l'absurde. Il existerait une suite $\varepsilon_n \to 0$, une suite h_n bornée telles que:

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n\|^2 < M(x) \tag{2.25}$$

et telles que:

$$\psi_x(h_n) = -\pi_{n(x)}(x)X_0(x) + o(1)\,. \tag{2.26}$$

Par compacité, on en déduit qu'il existe un élément h de l'espace de Cameron-Martin tel que:

$$\|h\|^2 < M(x) \tag{2.27}$$

et tel que:

$$\psi_x(h) = -\pi_{n(x)}(x)X_0(x)\,. \tag{2.28}$$

ce qui contredit la définition (2.22).

Si la dimension de chaque $\mathscr{C}_k(x)$ reste constante sur un compact κ, les projecteurs $\pi_l(x)$ dépendent de façon continue de x. Si $n(x)$ et $r(x)$ ne dépendent pas de x, $\pi_{n(x)}(x)X_0(x)$ est continu en x. Il en résulte clairement la continuité de $M(x)$ en x et l'uniformité en x des limites (2.2) et (2.3).

3. Minoration du logarithme du noyau de la chaleur

Soit $(w^1, \ldots, w^m)$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^m$. Considérons l'équation différentielle de Stratonovitch sur $\mathbb{R}^d$:

$$dy_t^\varepsilon(x,w) = \varepsilon \sum_{i=1}^m X_i(y_t^\varepsilon(x,w))dw_t^i + \varepsilon^2 X_0(y_t^\varepsilon(x,w))dt$$

$$y_t^\varepsilon(x,w) = x. \tag{3.1}$$

On suppose que l'hypothèse (0.1) est vérifiée.

Dans ce cas, $y_1^\varepsilon(x,w)$ possède une densité $p_{\varepsilon^2}(x,y)$. (C'est aussi la densité en x du noyau associé à $\exp[-\varepsilon^2 \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m X_i^2 - \varepsilon^2 X_0]$.)

$M(x)$ est toujours défini comme dans (2.22).

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1. *Supposons que $r(x) = n(x) \geqq 3$. Alors:*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^2 \varepsilon^{-4/n(x)} \log p_{\varepsilon^2}(x,x) \geqq -M(x) \tag{3.2}$$

Si $r(x) > n(x) \geqq 3$;

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon^2 \varepsilon^{-4/r(x)} \log p_{\varepsilon^2}(x,x) = 0. \tag{3.3}$$

De plus, si $n(x)$ et la dimension de chaque $\mathscr{C}_k(x)$ restent constantes sur un compact κ la minoration (3.2) *est uniforme sur κ. Si $n(x)$ reste constante sur κ,* (3.3) *est uniforme sur κ.*

Preuve. Démontrons d'abord (3.2). Introduisons une suite f_n de fonctions C^∞ à support compact tendant vers la masse de Dirac en 0 au sens des distributions. On a:

$$p_{\varepsilon^2}(x,x) = \lim_{n\to\infty} E[f_n(y_1^\varepsilon(x,w))]. \tag{3.4}$$

Nous allons suivre la démarche de [L.2], proposition 2.1. Soit un réel $\eta > 0$. Introduisons un élément h^ε de l'espace de Cameron-Martin H^1, que nous choisirons plus tard, la seule hypothèse que nous ferons maintenant sur lui étant que $\| h^\varepsilon \|^2 < M(x) + \eta$ si ε est petit. Au lieu d'effectuer, comme dans la preuve de la proposition 2.1 de [L.2], la transformation $\varepsilon dw \to \varepsilon dw + \dot{h}_t^\varepsilon dt$, nous ferons la translation $\varepsilon dw \to \varepsilon dw + \varepsilon^{2/n(x)} \dot{h}_t^\varepsilon dt$. Cela revient à considérer l'équation différentielle de Stratonovitch:

$$
\begin{aligned}
dz_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{i=1}^m X_i(z_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) dw_t^i + \varepsilon^{2/n(x)} \sum_{i=1}^m X_i(z_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) \dot{h}_t^{\varepsilon^i} dt \\
&\quad + \varepsilon^2 X_0(x)(z_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) dt \qquad (3.5) \\
z_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon) &= x ,
\end{aligned}
$$

δw^i désignant la différentielle d'Itô, introduisons le processus:

$$
\begin{aligned}
Z_t^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon) = \exp&\left[- \int_0^t \varepsilon^{(1-2/n(x))-1} \dot{h}_s^{\varepsilon^i} \delta w_s^i \right] \\
&\times \exp\left[- \frac{1}{2} \int_0^t (\varepsilon^{1-2/n(x)})^{-2} \sum_{i=1}^m \| \dot{h}_s^{\varepsilon^i} \|^2 ds \right] . \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

C'est une martingale de carré intégrable. En utilisant la formule de Girsanov, nous obtenons:

$$
E[f_n(y_1^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) Z_1^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)] = E[f_n(y_1^\varepsilon(x, w))] . \qquad (3.7)
$$

Soit $\eta_1 > 0$. Soit χ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ égal à 1 sur $\left[-\frac{\eta_1}{2}, \frac{\eta_1}{2} \right]$ et nulle en dehors de $[-\eta_1, \eta_1]$. On a, si $f_n \geqq 0$:

$$
\begin{aligned}
E[f_n(y_1^\varepsilon(x, dw))] \geqq \exp&\left[- \frac{1}{2} (\varepsilon^{1-2/n(x)})^{-2} \left(\int_0^1 \sum_{i=1}^m \| \dot{h}_t^{\varepsilon^i} \|^2 dt + \eta_1 \right) \right] \\
E&\left[\chi\left((\varepsilon^{1-2/n(x)}) \int_0^1 h_t^{\varepsilon^i} \delta w_i \right) f_n(y_1^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) \right] . \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Introduisons la mesure μ_ε sur $\mathbb{R}^d$ définie par:

$$
\int f d\mu_\varepsilon = E\left[\chi\left((\varepsilon^{1-2/n(x)}) \int_0^1 h_t^{\varepsilon^i} \delta w_t^i \right) f(y_1^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon)) \right] . \qquad (3.9)
$$

Elle possède une densité $q_\varepsilon(x, y) C^\infty$ si $\varepsilon > 0$. (3.9) nous permet de dire que:

$$
p_{\varepsilon^2}(x, x) \geqq \exp\left[- \frac{1}{2} (\varepsilon^{1-2/n(x)})^{-2} (\| h^\varepsilon \|^2 + \eta_1) \right] q_\varepsilon(x, x) . \qquad (3.10)
$$

(3.10) montre alors qu'il suffit pour démontrer (3.2) de trouver une constante $C > 0$ et un entier $N > 0$ tel que

$$
q_\varepsilon(x, x) \geqq C \varepsilon^{-N} . \qquad (3.11)
$$

A cette fin, il suffit d'utiliser la méthode de [L.1], partie I. Aussi, nous ne détaillerons pas. Posons $\alpha(x) = 1 - 2/n(x)$ de façon à ce que:

$$\varepsilon dw + \varepsilon^{2/n(x)} \dot{h}_t^\varepsilon dt = \varepsilon^{2/n(x)} (\dot{h}_t^\varepsilon dt + \varepsilon^{\alpha(x)} dw) . \tag{3.12}$$

Les résultats de [BA.1], [BA-L.2] montrent que (2.7) devient, dans ce cas:

$$y_t^\varepsilon(x, dw, dh^\varepsilon) = x + (I + P_x^r(\varepsilon^{v(\beta)} F_{(\beta)}(dt, dh_t^\varepsilon + \varepsilon^{\alpha(x)} dw_t)))$$

$$\left(\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon^{v(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(dt, dh_t^\varepsilon + \varepsilon^{\alpha(x)} dw_t) \right) + 0(\varepsilon^N) , \tag{3.13}$$

les $F_{(\beta)}(dt, h_t^\varepsilon + \varepsilon^{\alpha(x)} dw)$ étant des sommes d'intégrales itérées au sens de Stratonovitch. Réécrivons le terme de droite dans (3.13) sous sa forme $x + (I + A_x^r(\varepsilon)) U_x^r(\varepsilon)) + 0(\varepsilon^N)$.

Soit g une fonction C^∞ de l'ensemble des matrices sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $[0, 1]$, égale à 1 si la norme de la matrice est inférieure à $\frac{1}{4}$ et nulle si elle est supérieure à $\frac{1}{2}$. Introduisons la mesure μ_ε^r sur $\mathbb{R}^d$ définie par:

$$\int f d\mu_\varepsilon^r = E\left[f(x + (I + A_x^r(\varepsilon))(U_x^r(\varepsilon) + 0(\varepsilon^N))) g(A_x^r(\varepsilon)) \chi(\varepsilon^{1-2/n(x)} \int_0^1 h_t^{\varepsilon^i} \delta w_t^i) \right] . \tag{3.14}$$

Elle possède une densité C^∞ $\bar{q}_\varepsilon(x, y)$. De plus, si $g(A_x^r(\varepsilon)) \neq 0$, $I + A_x^r(\varepsilon)$ est inversible, d'inverse borné. Par suite:

$$g(A_x^r(\varepsilon)) y_1^\varepsilon(x, w, h^\varepsilon) = (x + (I + A_x^r(\varepsilon))(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon))) g(A_x^r(\varepsilon)) . \tag{3.15}$$

De plus, la fonctionnelle brownienne $g(A_x^r(\varepsilon)) R_N(\varepsilon)$ est C^∞ au sens de Malliavin ([W]). Plus précisément, soit F une fonctionnelle brownienne dont on notera par $D^{(i)}F$ le i$^{\text{eme}}$ gradient itéré au sens de Malliavin. Introduisons la norme $\| \ \|_{p,k}$ de F définie par:

$$\| F \|_{p,k} = \sum_{i \leq k} (E[|D^{(i)} F|^p])^{1/p}. \tag{3.16}$$

$g(A_x^r(\varepsilon))$ tend vers 1 pour toutes les normes $\| \ \|_{p,k}$ quand $\varepsilon \to 0$ et $g(A_x^r(\varepsilon)) R_N(\varepsilon)$ est aussi borné quand $\varepsilon \to 0$ pour toutes les normes $\| \ \|_{p,k}$.

Soient F et G deux fonctionnelles browniennes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Notons $\langle DF, DG \rangle$ leur matrice de covariance. Les estimations de Kusuoka-Stroock ([K-S.2]) montrent qu'il existe un entier N_0 ne dépendant que de $n(x)$ tel que, pour $r > n(x)$, on ait, quand $\varepsilon \to 0$: $\| \langle DU_x^r(\varepsilon), DU_x^r(\varepsilon) \rangle^{-1} \|_{p,k} \leq C_{p,k,r} \varepsilon^{-N_0}$. On en déduit que si N est assez grand, et que si $g(A_x^r(\varepsilon)) \neq 0$:

$$V_x^r(\varepsilon) = \langle DU_x^r(\varepsilon), DU_x^r(\varepsilon) \rangle^{-1} (\langle DU_x^r(\varepsilon), DU_x^r(\varepsilon) \rangle - \langle D(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon)) ,$$

$$D(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon)) \rangle) \tag{3.17}$$

tend vers zéro (lorsque ε tend vers zéro) pour toutes les normes de Sobolev $\| \ \|_{p,k}$. Considérons maintenant la mesure $\mu_\varepsilon'^r$ définie par:

$$\int f d\mu_\varepsilon'^r = E\left[f(x + (I + A_x^r(\varepsilon))(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon))) \right.$$

$$\left. g(A_x^r(\varepsilon))g(V_x^r(\varepsilon))\chi\left(\varepsilon^{(1-2/n(x))}\int_0^1 h_t^{\varepsilon^i}\delta w_t^i\right)\right]. \tag{3.18}$$

Elle possède une densité $C^\infty \bar{q}_\varepsilon'(x, y)$ inférieure à $\bar{q}_\varepsilon(x, y)$. Introduisons enfin la mesure v_ε^r définie par:

$$\int f dv_\varepsilon^r = E\left[f(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon))g(A_x^r(\varepsilon))g(V_x^r(\varepsilon)) \right.$$

$$\left. \chi\left(\varepsilon^{(1-2/n(x))}\int_0^1 h_t^{\varepsilon^i}\delta w_t^i\right)\right]. \tag{3.19}$$

Elle possède une densité $C^\infty \tilde{q}_\varepsilon(x, z)$. De plus, $\tilde{q}_\varepsilon(x, 0) \leqq C\bar{q}_\varepsilon'(x,x)$, car il existe une constante $C > 0$ telle que la condition $|(I + A_x^r(\varepsilon))(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon))| \leqq \delta$ implique $|(U_x^r(\varepsilon) + \varepsilon^N R_N(\varepsilon))| \leqq C\delta$ lorsque $g(A_x^r(\varepsilon)) \neq 0$. Comme $\bar{q}_\varepsilon'(x, x) \leqq q_\varepsilon(x, x)$, $\tilde{q}_\varepsilon(x, 0) \leqq Cq_\varepsilon(x, x)$.

Soit $\eta > 0$. Choisissons un h_η possédant les propriétés suivantes:

i)
$$\sum_{(\beta)\in\mathscr{A}_{n(x)}, |\beta^0| = 0} \pi_{|\beta|}(x)X_{(\beta)}(x)F_{(\beta)}(dh_\eta) = -\pi_{n(x)}(x)X_0(x)\,. \tag{3.20}$$

ii) $\|h_\eta^2\| \leqq M(x) + \eta$.

iii) $h \to (F_{(\beta)}(h); |\beta^0| = 0; (\beta)\in\mathscr{A}_{n(x)})$ est une submersion en h_η.

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\varepsilon \to h_\eta^\varepsilon$ telle que $\lim h_\eta^\varepsilon = h_\eta$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et telle que $\sum_{(\beta)\in\mathscr{A}_r}\varepsilon^{v(\beta)}X_{(\beta)}(x)F_{(\beta)}(dt, dh_\eta^\varepsilon) = 0$. Le terme d'exposant minimum dans l'expression

$$\pi_l(x)\sum_{(\beta)\in\mathscr{A}_r}\varepsilon^{v(\beta)}X_{(\beta)}(x)F_{(\beta)}(dt, dh_\eta^\varepsilon + \varepsilon^{\alpha(x)}dw)$$

est

$$\varepsilon^{2l/n(x)}\sum_{(\beta)\in\mathscr{A}_r, |\beta^0| = 0, |\beta| = l}\pi_l(x)X_{(\beta)}(x)DF_{(\beta)}(h_t^\varepsilon).(\varepsilon^{\alpha(x)}w).$$

Par suite:

$$\tilde{q}_\varepsilon(x, 0) \geqq C\varepsilon^{-N(x)} \tag{3.21}$$

avec

$$N(x) = \sum_{l\leqq n(x)}\left(\frac{2}{n(x)}l + \alpha(x)\right)\dim \mathscr{F}_l(x) \tag{3.22}$$

ce qui provient du fait que la variable aléatoire $\sum_{(\beta)\in\mathscr{A}_{n(x)}}\pi_{|\beta|}(x)X_{(\beta)}(x)DF_{(\beta)}(dh_\eta).\,dw$ est une *gaussienne non dégénérée*, puisque l'application $h \to F_{(\beta)}(h)$ ($|\beta^0| = 0$, $(\beta)\in\mathscr{A}_{n(x)}$) est une submersion en h_η.

Pour montrer (3.3), on fait la translation $\varepsilon dw \to \varepsilon dw + \varepsilon^{2/r(x)}\dot{h}_t^\varepsilon dt$. Comme $r(x) > n(x)$, on doit remplacer dans (3.20) $-\pi_{n(x)}(x)X_0(x)$ par 0. Dans tous les autres calculs, $n(x)$ doit être changé en $r(x)$. Ainsi l'entier $N(x)$ devient l'entier $\sum_{l \leqq r(x)} \left(\frac{2}{r(x)} l + \alpha(x) \right) \dim \mathscr{F}_l(x)$ avec $\alpha(x) = 1 - \frac{2}{r(x)}$. Ceci nous montre que $\liminf 2\varepsilon\varepsilon^{2-4/r(x)} \log p_{\varepsilon^2}(x, x) \geqq 0$. Comme par ailleurs, $p_{\varepsilon^2}(x, x) \leqq \frac{C}{\varepsilon^{N_1}}$ pour ε assez petit et pour un entier N_1 convenable, la limite inférieure ci-dessus ne saurait être strictement positive. Ceci achève de prouver (3.3).

Remarque. On aurait pu utiliser la méthode plus élémentaire de [B.2], dans l'étude des densités.

4. Majoration du logarithme du noyau de la chaleur

Nous prouvons maintenant la majoration dans le théorème de l'introduction. $M(x)$ est toujours défini comme dans la partie 2.

Théorème 4.1. *Supposons que* $r(x) = n(x) \geqq 3$. *Alors*:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \varepsilon^{-4/n(x)} \log p_{\varepsilon^2}(x, x) < -n(x) . \tag{4.2}$$

Plutôt que de multiplier les combinaisons linéaires constituant les intégrales itérées de Stratonovitch $F_{(\beta)}(t, w)$ par $\varepsilon^{\nu(\beta)}$ comme on le faisait dans la partie 2, on les multiplie par $\varepsilon^{2|\beta^0|}\varepsilon^{|\beta^1|}$, quantité notée $\varepsilon^{\nu'(\beta)}$. Soit N un entier assez grand. Les résultats de [BA.1], [BA-L.2] montrent qu'il existe un entier $r > r(x)$ tel qu'on ait l'analogue de (3.13):

$$y_1^\varepsilon(x, w) = x + (I + P_x^r(\varepsilon^{\nu'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w))) \left(\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} \varepsilon^{\nu'(\beta)} X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(t, w) \right) + 0(\varepsilon^N) . \tag{4.3}$$

Soit $\langle Dy_1^\varepsilon(x, w), Dy_1^\varepsilon(x, w) \rangle$ la matrice de Malliavin de $y_1^\varepsilon(x, w)$. Les résultats de Kusuoka-Stroock ([K-S.2]) montrent que pour tout p, il existe un entier $N(p)$ tel que:

$$E[(\det(Dy_1^\varepsilon(x, w), Dy_1^\varepsilon(x, w)\rangle))^{-p}] \leqq C\varepsilon^{-N(p)} . \tag{4.4}$$

Soit η_1 un réel > 0. Soit g une fonction C^∞ de l'ensemble des $F_{(\beta)}(t, w)$ dans $[0, 1]$, égale à 1 si tous les $F_{(\beta)}(t, w)$ sont inférieurs en module à $\frac{\eta_1}{2}$ et nulle si l'un au moins des $F_{(\beta)}(t, w)$ est en module $> \eta_1$. Introduisons la mesure μ_x^ε définie par:

$$\int f \, d\mu_x^\varepsilon = E[g(\varepsilon^{\nu'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)) f(y_1^\varepsilon(x, w))] . \tag{4.5}$$

Les fonctionnelles $g(\varepsilon^{\nu'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w))$ et $y_1^\varepsilon(x, w)$ sont C^∞ au sens de Malliavin. (4.4) montre donc que la mesure μ_x^ε possède une densité $q_\varepsilon(x, y)$ de classe C^∞ pour $\varepsilon > 0$. L'intégration par parties du calcul de Malliavin montre qu'il existe une expression universelle $\Xi(\alpha)$ polynomiale en les dérivées au sens de Malliavin de $y_1^\varepsilon(x, w)$ et de $\det\langle Dy_1^\varepsilon(x, w), Dy_1^\varepsilon(x, w)\rangle^{-1}$ et celles au sens usuel de g telles que:

$$E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(y_1^\varepsilon(x, w))\right] - E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(y_1^\varepsilon(x, w)) g(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w))\right]$$
$$= E[\Xi(\alpha) f(y_1^\varepsilon(x, w))] . \tag{4.6}$$

De plus, $\Xi(\alpha)$ est nulle si tous les $|\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)|$ sont inférieurs à η_1. D'après l'annexe, prop. A.2, il existe deux constantes C et C' telles que:

$$P\{|F_{(\beta)}(t, w)| \geqq \lambda\} \leqq C \exp[-C' \lambda^{2/|\beta^1|}] . \tag{4.7}$$

Ceci nous montre que, pour tout multi-indice (α), il existe 2 constantes C et $C' > 0$ telles que:

$$E\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} f(y_1^\varepsilon(x, w))(1 - g(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)))\right] \leqq C\varepsilon^{-N(\alpha)} \exp\left[-\frac{C'}{\varepsilon^2}\right] \tag{4.8}$$

pour un certain entier $N(\alpha)$. Par suite, la densité $q_\varepsilon(x, y)$ de μ_x^ε est telle que quand $\varepsilon \to 0$:

$$\sup_y |q_\varepsilon(x, y) - p_{\varepsilon^2}(x, y)| \leqq \exp\left[-\frac{C'}{\varepsilon^2}\right] \tag{4.9}$$

pour un certain $C > 0$ ne dépendant que de r défini dans (4.3) et de η_1. Pour prouver la première partie du théorème 4.1, il suffit donc de prouver que:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon^2 \varepsilon^{-4/n(x)} \log q_\varepsilon(x, x) \leqq -M(x) . \tag{4.10}$$

Si η_1 est assez petit, il existe deux constantes $C_1(\eta_1)$ et $C_2(\eta_1) > 0$ telles que si $g(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)) \neq 0$, alors

$$C_1(\eta_1)|y| \leqq |(I + P_x^r(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)))(y)| \leqq C_2(\eta_1)|y| . \tag{4.11}$$

Si $g(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)) \neq 0$, (4.3) s'écrit:

$$y_1^\varepsilon(x, w) = x + (I + P_x^r(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w)))\left(\sum_{(\beta) \in \mathscr{A}_r} X_{(\beta)}(x) \varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w) + 0(\varepsilon^N)\right)$$
$$= x + (I + A_x^r(\varepsilon))(U_x'^r(\varepsilon) + \varepsilon^N S_N(\varepsilon)) \tag{4.12}$$

où $S_N(\varepsilon) g(\varepsilon^{v'(\beta)} F_{(\beta)}(t, w))$ est borné pour toutes les normes $\| \ \|_{p,k}$.

Soit $\delta > 0$. Soit $0_{\delta,x}^\varepsilon$ l'ouvert de $\mathbb{R}^d$ défini de la façon suivante: $y \in 0_{\delta,x}^\varepsilon$ si $|\pi_l(x)y| < \delta\varepsilon^{2l/n(x)}$ pour tout $l \leqq n(x)$. Soit $g_{\delta,x}^\varepsilon(y)$ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$ égale à 1 sur $0_{\delta,x}^\varepsilon$ et nulle en dehors de $0_{2\delta,x}^\varepsilon$. On peut supposer de plus que pour tout multi-indice (α), il existe un entier $N((\alpha), \delta)$ tel que:

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} g_{\delta,\varepsilon}^\varepsilon(y)\right| \leqq C\varepsilon^{-N((\alpha),\delta)} . \tag{4.13}$$

Introduisons la mesure $\nu^{\varepsilon}_{\delta,x}$ définie par:

$$\int f \mathrm{d}\nu^{\varepsilon}_{\delta,x} = E[g(\varepsilon^{\nu'(\beta)}F_{(\beta)}(t,w))g^{\varepsilon}_{\delta,\varepsilon}(U'^{r}_{x}(\varepsilon) + \varepsilon^{N}S_{N}(\varepsilon))f(y^{\varepsilon}_{1}(x,w))]\,. \tag{4.14}$$

Cette mesure possède une densité $C^{\infty}\, q^{\delta}_{\varepsilon}(x, y)$.

La remarque essentielle pour la suite est que $q^{\delta}_{\varepsilon}(x, x) = q_{\varepsilon}(x, x)$. En effet, posons $f_{\delta'}(y) = \dfrac{1_{|x,y|<\delta'}(y)}{C|\delta'|^{d}}$, de sorte que:

$$q_{\varepsilon}(x, x) = \lim_{\delta'\to 0} E[g(\varepsilon^{\nu'(\beta)}F_{(\beta)}(t,w))f_{\delta'}(y^{\varepsilon}_{1}(x,w))]\,. \tag{4.15}$$

Il existe un réel $C(\delta,\varepsilon)$ tel que si $\delta' < C(\delta,\varepsilon)$, on a d'après (4.11):

$$\begin{aligned} E[g(\varepsilon^{\nu'(\beta)}F_{(\beta)}(t,w))f_{\delta'}(y^{\varepsilon}_{1}(x,w))] = E[g(\varepsilon^{\nu'(\beta)}F_{(\beta)}(t,w))g^{\varepsilon}_{\delta,x}(U'^{r}_{x}(\varepsilon) \\ + \varepsilon^{N}S_{N}(\varepsilon))f_{\delta'}(y^{\varepsilon}_{1}(x,w))]\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ceci nous montre que $q^{\delta}_{\varepsilon}(x, x) = q_{\varepsilon}(x, x)$.

Utilisons de nouveau la procédure d'intégration par parties de Malliavin ([M]). Soit (α) un multi-indice. Il existe une fonctionnelle $\theta(\alpha)$ telle que:

$$\nu^{\varepsilon}_{\delta,x}\left[\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}}f\right] = E[\theta(\alpha)f(y^{\varepsilon}_{1}(x,w))]\,. \tag{4.17}$$

$\theta(\alpha)$ est un polynôme en les dérivées au sens usuels de $g^{\varepsilon}_{\delta,x}$ et de y, et en celles au sens de Malliavin de $y^{\varepsilon}_{1}(x, w)$ de $\varepsilon^{\nu'(\beta)}F_{(\beta)}(t, w)$ et de $(\det\langle Dy^{\varepsilon}_{1}(x,w), Dy^{\varepsilon}_{1}(x,w)\rangle)^{-1}$. L'estimation de Kusuoka-Stroock (4.4) et l'hypothèse (4.13) sur les dérivées de $g^{\varepsilon}_{\delta,x}$ prouvent que, pour tout $q > 1$, il existe un entier $N((\alpha), q) > 0$ tel que:

$$E[|\theta(\alpha)|] \leqq C\varepsilon^{-N((\alpha),q)}(P\{(U^{r}_{x}(\varepsilon) + \varepsilon^{N}S_{N}(\varepsilon))\in O^{\varepsilon}_{2\delta,x}\})^{1/q}\,. \tag{4.18}$$

Pour montrer (4.1), il ne reste plus qu'à montrer que:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{(2-4/n(x))}\log P\{(U'^{r}_{x}(\varepsilon) + \varepsilon^{N}S_{N}(\varepsilon))\in O^{\varepsilon}_{2\delta,x}\} \leqq -M(x,\delta) \tag{4.19}$$

et que lorsque $\delta \to 0$, $M(x,\delta) \to M(x)$ (ces deux propriétés étant uniformes sur un compact κ vérifiant les conditions du théorème). Nous le ferons en prenant $r = n(x)$ et $N = n(x) + 1$.

On peut considérer le développement de Taylor stochastique de $y^{\varepsilon}_{1}(x, w)$. On a:

$$y^{\varepsilon}_{1}(x,w) = x + \sum_{j=0}^{n(x)} \varepsilon^{j}\frac{\partial^{(j)}}{\partial\varepsilon^{(j)}}y^{0}_{1}(x,w) + \varepsilon^{n(x)+1}R^{\varepsilon}_{n(x)+1}(x,w)\,. \tag{4.20}$$

On sait (Annexe) que chaque $\dfrac{\partial^{(j)}}{\partial\varepsilon^{(j)}}y^{0}_{1}(x, w)$ est une combinaison linéaire d'intégrales itérées, et de plus que:

$$R^{\varepsilon}_{n(x)+1}(x,w) = \sum_{l}\varepsilon^{l}R^{\varepsilon}_{n+1,l}(x,w) + \tilde{R}^{\varepsilon}_{n+1}(x,w) \tag{4.21}$$

chaque variable aléatoire $R^{\varepsilon}_{n+1,l}(x, w)$ et $\tilde{R}^{\varepsilon}_{n+1}(x, w)$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$P\{|\tilde{R}^{\varepsilon}_{n+1}(x, w)| \geqq \lambda\} \leqq C \exp[-C\lambda^{2/n(x)+1}] \tag{4.22}$$

$$P\{|R^{\varepsilon}_{n+1,l,1}(x, w)| \geqq \lambda\} \leqq C \exp[-C\lambda^{2/n(x)+1+l}]\,. \tag{4.23}$$

De plus, si on considère une intégrale itérée V contenant k termes d'intégration en w et k' termes d'intégration en t, on sait d'après l'annexe que:

$$P\{|V| \geqq \lambda\} \leqq \exp[-C\lambda^{2/k}]\,. \tag{4.24}$$

On doit contourner une petite difficulté, issue du fait que dans (4.3) on effectue le développement de Taylor de $y^{\varepsilon}_1(x, w)$ en procédant à des regroupements. *Le reste* $0(\varepsilon^{n(x)+1})$ *ne coïncide pas dans* (4.3) *avec* $\varepsilon^{n(x)+1} R^{\varepsilon}_{n(x)+1}(x, w)$. Toutefois, on a:

$$0(\varepsilon^{n(x)+1}) = \varepsilon^{n(x)+1} R^{\varepsilon}_{n(x)+1}(x, w) + \sum_{j=n(x)+1}^{2n(x)+2} \varepsilon^j P_j(F_{(\beta)}(t, w))\,, \tag{4.25}$$

chaque P_j dans (4.26) étant un polynôme en les $F_{(\beta)}(t, w)$ ne contenant que des monômes $F_{(\beta_1)}(t, w) \dots, F_{(\beta_r)}(t, w)$ tels que:

$$\sum (2|\beta^0_i| + |\beta^1_i|) = j\,. \tag{4.26}$$

On en déduit que dans (4.19):

$$P\{|\pi_l(x)\varepsilon^N S_N(\varepsilon)| \geqq \delta\varepsilon^{2l/n(x)}\} \leqq \sum_{j=n(x)+1}^{2n(x)+2} \exp[-C\varepsilon^{\alpha_j}] \tag{4.27}$$

avec $\alpha_j = \dfrac{2}{j}\left(\dfrac{2l}{n(x)} - j\right) \leqq \dfrac{4}{n(x)+1} - 2 < \dfrac{4}{n(x)} - 2.$

Pour montrer (4.19), il suffit donc de montrer que:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{(2-4/n(x))} \log P\{U'^{n(x)}_x(\varepsilon) \in O^{\varepsilon}_{\delta,x}\} \leqq -M'(x, \delta) \tag{4.28}$$

avec $\lim_{\delta\to 0} M'(x, \delta) = M(x)$.

Le gain obtenu dans (4.28) par rapport à (4.19) est que les $U'^{n(x)}_x(\varepsilon)$ ne sont plus constituées que de combinaisons linéaires d'intégrales itérées de Stratonovitch. L'évènement $\{U'^{n(x)}_x(\varepsilon) \in O^{\varepsilon}_{\delta,x}\}$ est égal à $\bigcap_{l \leqq n(x)} A^{\varepsilon}_{x,\delta}(l)$ avec, si $l < n(x)$:

$$A^{\varepsilon}_{x,\delta}(l) = \left\{ w \Big/ \left| \sum_{|\beta^0|=0, |\beta|=l} \pi_l(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}((\varepsilon^{1-2/n(x)})w) + o(1)\pi_l(x)X_0(x) \right.\right.$$

$$+ o(1) \sum_{|\beta^0|=0, |\beta|>l} \pi_l(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(\varepsilon^{(1-2/n(x))} w) \tag{4.29}$$

$$\left.\left. + o(1) \sum_{|\beta^0|=0, |\beta| \neq 0} \pi_l(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(t, \varepsilon^{(1-2/n(x))} w) \right| \leqq \delta \right\} \tag{4.30}$$

et si $l = n(x)$

$$A^{\varepsilon}_{x,\delta}(n(x)) = \left\{ w \Big/ \left| \sum_{|\beta^0| = 0, |\beta| = n(x)} \pi_{n(x)}(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(\varepsilon^{(1-2/n(x))} w) + \pi_{n(x)}(x) X_0(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. + o(1) \sum_{|\beta^0| \neq 0, |\beta^1| \neq 0} \pi_{n(x)}(x) X_{(\beta)}(x) F_{(\beta)}(t, \varepsilon^{(1-2/n(x))} w) \right| \leqq \delta \right\}. \tag{4.31}$$

Rappelons que ψ_x a été défini dans (2.20). La théorie des grandes déviations ([Az.2]) montre que (4.27) est valide avec

$$M'(x, \delta) = \inf_{|\psi_x(h) - \pi_{n(x)}(x) X_0(x)| \leqq \delta} \|h\|^2 \tag{4.32}$$

De façon évidente, $M'(x, \delta)$ tend vers $M(x)$, ce qui achève la preuve de (4.28), donc de (4.19) et donc de (4.1).

L'uniformité dans (4.1) provient du fait que les projecteurs $\pi_l(x)$ dépendent de façon continue de x si la dimension de chaque $\mathscr{C}_l(x)$ ne change pas.

Pour montrer (4.2), on procède comme dans la preuve de (4.1) jusqu'à (4.12). Mais au lieu de prendre $O^{\varepsilon}_{x,\delta}$, on prendrait $O'^{\varepsilon}_{x,\delta}$ défini de la façon suivante: $y \in O'^{\varepsilon}_{x,\delta}$ si $|\pi_{n(x)}(y)| \leqq \delta\varepsilon^2$. Dans ce cas, on a:

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, \varepsilon^{2-4/n(x))} \log \{(U'^{r}_{x}(\varepsilon) + \varepsilon^N S_N(\varepsilon)) \in O'^{\varepsilon}_{x,\delta}\} < 0 \tag{4.19$'$}$$

car $\pi_{n(x)} X_0(x) \neq 0$.

Annexe

Elle constitue une légère amélioration des résultats de [Az.1].

Soient $X_0, X_1 \ldots, X_m$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ de dérivées de tout ordre bornées. Introduisons la solution de l'équation différentielle d'Itô:

$$dy^{\varepsilon}_t(x, w) = \varepsilon \sum_{i=1}^{m} X_i(y^{\varepsilon}_t(x, w)) \delta w^i_t + \varepsilon^2 X_0(y^{\varepsilon}_t(x, w)) dt$$

$$y^{\varepsilon}_0(x, w) = x. \tag{A.1}$$

D'après [Az.1], on a un développement de Taylor de $y^{\varepsilon}_t(x, w)$ dans $\varepsilon \to 0$.

$$y^{\varepsilon}_t(x, w) = x + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y^0_{j,t}(x, w) + \varepsilon^{n+1} R^{\varepsilon}_{n+1,t}(x, w). \tag{A.2}$$

Les coefficients de Taylor de $y^{\varepsilon}_t(x, w)$ sont étroitement liés à ceux du développement en x des champs X_i. Rappelons quelques notations. Si $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est un multi-indice sur $\mathbb{R}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $(x)^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$, $(x = (x_1, \ldots, x_d))$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. On a:

$$X_i(y) = X_i(x) + \sum_{|\alpha| \leqq n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} X_i(x)(y - x)^{(\alpha)} + v_{i,n}(y - x). \tag{A.3}$$

De plus, $|v_{i,n}(y-x)| \leqq C|y-x|^{n+1}$ (C ne dépend ni de y ni de x). Ceci permet d'obtenir une relation de récurrence qui relie $\frac{\partial^{(k)}}{\partial \varepsilon^{(k)}} y_t^0(x, w)$ aux différents $\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y_t^0(x, w)$ (*cf.* [Az.1]).

Notons $\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y_t^0(x, w) = \left(\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y_t^{0,1}(x, w), \ldots, \frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y_t^{0,d}(x, w)\right)$.

La définition suivante est donnée dans [Az.1].

Définition A.1. Soit $\alpha > 0$, $C > 0$. On dit qu'un processus X_s à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est du type $\omega(\alpha, C)$ si il existe une constante C' telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$P\left\{\sup_{s \leqq 1} |X_s| \geqq \lambda\right\} \leqq C' \exp[-C\lambda^\alpha]. \tag{A.5}$$

Remarquons que $\omega(\alpha, C) \subset \omega(\alpha, C_1)$ si $C_1 \leqq C$. Considérons un processus X_t continu prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}$, appartenant à $\omega(\alpha, C)$. $Z_t = \int_0^t X_s \delta w_s$ est dans $\omega(\alpha', C')$ avec $\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$, pour un réel convenablement choisi ([Az.1], p. 254).

En particulier, si $\alpha = \frac{2}{k}$, $\alpha' = \frac{2}{k+1}$.

De même, si le processus $X \in \omega(\alpha_1, C_1)$ et $Y \in \omega(\alpha_2, C_2)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, $XY \in \omega(\alpha, C)$ avec $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$. *En particulier*, si $\alpha_1 = \frac{2}{k_1}$ et $\alpha_2 = \frac{2}{k_2}$, $\alpha = \frac{2}{k_1 + k_2}$.

Soit (β) un multi-indice sur $\{0, \ldots, m\}$ et soit $G_{(\beta)}$ une intégrale itérée homogène contenant β_0 termes t et β_j termes $\delta\omega_j$:

$$G_{(\beta),t} = \iiint_{0 < t_1 < t_2 \ldots < t_{|\beta|} < t} \delta w_{t_1}^{i_1} \cdots \delta w_{t_{|\beta|}}^{i_{|\beta|}} \tag{A.6}$$

où $\delta w_s^0 = ds$. et considérons la même intégrale itérée, δw_j étant remplacée par la différentielle de Stratonovitch. Notons-la $\bar{G}_{(\beta),t}$.

$|\beta^1|$ désigne le nombre de termes non nuls. On déduit immédiatement par récurrence sur $|\beta^1|$ la proposition suivante:

Proposition A.2. *Il existe une constante* C telle que $G_{(\beta),t} \in w\left(\frac{2}{|\beta^1|}, C\right)$ *et* $\bar{G}_{(\beta),t} \in \omega\left(\frac{2}{|\beta^1|}, C\right)$.

De plus, en procédant encore par récurrence sur j, on en déduit que le processus $\frac{\partial^{(j)}}{\partial \varepsilon^{(j)}} y_t^0(x, w)$ appartient à $\omega\left(\frac{2}{j}, C\right)$ (C ne dépendant que des normes dérivées en X des champs X_i), car c'est une combinaison linéaire d'intégrales itérées contenant au plus j intégrations gaussiennes, *cf.* [BA.1].

Introduisons le processus $z_t^\varepsilon(x,w) = \frac{y_t^\varepsilon(x,w) - x}{\varepsilon}$: il existe C_1 et C_2 indépendantes de ε, ne dépendant que des normes uniformes des dérivées des champs X_i telles que:

$$P\left\{\sup_{s \leqq 1} |Z_s^\varepsilon(x,w)| > \lambda\right\} \leqq C_1 \exp[-C_2\lambda^2]\,. \tag{A.7}$$

Comme $|v_{i,n}(y,x)| \leqq C|y-x|^{n+1}$, on déduit de (A.10) que le processus $t \to \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} v_{i,n}(y_t^\varepsilon(x,w))$ vérifie:

$$P\left\{\sup_{s \leqq 1} \left|\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} v_{i,n}(y_t^\varepsilon(x,w))\right| \geqq \lambda\right\} \leqq C_1 \exp[-C_2\lambda^{(2/n+1)}] \tag{A.8}$$

pour des constantes C_1 et C_2 indépendantes de ε (ne dépendant que des normes uniformes des dérivées des champs X_i).
On en déduit:

Proposition A.3. *Il existe une constante* C: $R_{n+1,t}^\varepsilon \in \omega\left(\frac{2}{n+1}, C\right)$.

Bibliographie

[Az.1] Azencott, R.: Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynman. Séminaire de Probabilités XVI. (Lect. Notes Math., vol. 921) Berlin Heidelberg New York: Springer 1980/81

[Az.2] Azencott, R.: Grandes déviations et applications. Cours de probabilité de Saint-Flour. (Lect. Notes Math., vol. 774) Berlin Heidelberg New York: Springer 1978

[BA.4] Ben Arous, G.: Noyau de la chaleur hypoelliptique et géométrique sous-riemannienne. Actes du Colloque Franco-Japonais, Paris. (Lect. Notes Math., vol. 1322) Berlin Heidelberg New York: Springer 1987

[BA.2) Ben Arous, G.: Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener. Stochastics **25**, 125–153 (1988)

[BA.3] Ben Arous, G.: Développement asymptotique du noyau de la chaleur hors du cut-locus. Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV, Ser. **21**, 307–331 (1988)

[BA.1] Ben Arous, G.: Flots et séries de Taylor stochastiques. Probab. Th. Rel. Fields **81**, 29–77 (1989)

[BA-L.1] Ben Arous, G., Léandre, R.: Influence du drift sur le comportement au point de départ d'un noyau de la chaleur hypoelliptique (II). A paraître à Probab. Th. Rel. Fields

[BA-L.2] Ben Arous, G., Léandre, R.: Formule de Campbell-Hausdorff-Dynkin stochastique. (preprint)

[B.1] Bismut, J.-M.: in Large deviations and the Malliavin calculus. In: Progress in Maths, vol. 45. Boston: Birkhaüser 1984

[B.2] Bismut, J-M.: Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Vew. Geo. **56**, 469–505 (1981)

[F-V] Freidlin, M.I. Ventcel, A.D.: Random perturbation of dynamical system. Grundlehren der Mathématischen Wissenschaften, vol. 260 Berlin Heidelberg New York: Springer 1984

[J-S.1] Jerison, D., Sanchez-Calle, A.: Subelliptic second order differential operator in complex analysis III. In: Berenstein, E. (ed.) (Lect. Notes Math., vol. 1227, pp. 46–78) Berlin Heidelberg New York: Springer 1987

[J-S.2] Jerison, D., Sanchez-Calle, A.: Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. Indiana Univ. Math. J. **35**, 835–854 (1986)

[K-S.1] Kusuoka, S., Stroock, D.W.: Long time estimates for the heat kernel associated with uniformly subelliptic symmetric second order operator. Ann. Math. **127**, 165–189 (1989)

[K-S.2] Kusuoka, S., Stroock, D.W.: Applications of the Malliavin calculus II

[K-S.3] Kusuoka, S., Stroock, D.W.: Applications of the Malliavin calculus III

[L.1] Léandre, R.: Applications quantitatives et géométriques du calcul de Malliavin. Version française: Actes du Colloque Franco-Japonais. (Lect. Notes Math., vol. 1322) Berlin Heidelberg New York: Springer Version anglaise: Proceedings du Colloque Geometry of random motion. A.M.S. Contemp. Math. **73**, 173–196 (1989)

[L.2] Léandre, R.: Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée. J. Funct. Anal. **74**, 399–415 (1987)

[L.3] Léandre, R.: Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée. A paraitre dans Forum Mathematicum (1991)

[M] Meyer, P.-A.: Le calcul de Malliavin et un peu de pédagogie. RCP n° 25, vol. 34, Université de Strasbourg, 1984

[N-S-W] Nagel, A., Stein, E.M., Wainger, S.: Balls and metrics defined by vector fields, I. Basic Properties. Acta Math. **155**, 103–147 (1985)

[Str] Strichartz, R.: The Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula and solutions of differential equations. J. Funct. Anal. **72**, 320–346 (1987)

[T] Takanobu, S.: Diagonal short time asymptotics of heat kernels for certain degenerate operators of Hörmander type. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24**, 169–203 (1988)

[V] Varopoulos, N.: (preprint)

[W] Watanabe, S.: Analysis of Wiener functional and its applications to heat kernels. Ann. Probab. **15**, 1–39 (1987)