FENCHEL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 496—506 (1956)

Über konvexe Funktionen mit vorgeschriebenen Niveaumannigfaltigkeiten

ISSAI SCHUR zum Gedächtnis

Von

WERNER FENCHEL

Das Problem, das im folgenden diskutiert wird, läßt sich für Funktionen von zwei Variablen x_1 und x_2 folgendermaßen formulieren: In einem konvexen Bereich C der $x_1 x_2$-Ebene sei eine Schar (geschlossener oder offener) konvexer Kurven gegeben, die C einfach und lückenlos überdecken. Gefragt wird, unter welchen Bedingungen eine stetige konvexe Funktion $f(x_1, x_2)$ existiert, deren Niveaukurven diese Kurven sind. Ist die Kurvenschar durch eine Gleichung der Form $\varphi(x_1, x_2) = \text{konst.}$ gegeben, wo $\varphi(x_1, x_2)$ eine in C stetige Funktion ist, so läuft dies auf die Aufstellung notwendiger und hinreichender Bedingungen hinaus, die diese Funktion erfüllen muß, wenn es eine stetige monotone Funktion $F(t)$ einer Variablen derart geben soll, daß die Funktion $f(x_1, x_2) = F(\varphi(x_1, x_2))$ konvex ist.

Diese Frage, die auf den ersten Blick trivial erscheinen mag, ist erstmalig von B. DE FINETTI [3] aufgeworfen und für einen beschränkten abgeschlossenen Bereich C und eine Schar geschlossener Kurven eingehend behandelt worden. An anschaulichen Beispielen zeigt DE FINETTI, daß die Schar konvexer Kurven keineswegs willkürlich vorgeschrieben werden kann, sondern verschiedenartigen Einschränkungen unterworfen ist, die sowohl ihr lokales als auch ihr globales Verhalten betreffen. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der gestellten Aufgabe sind implizit in der Forderung enthalten, daß eines der beiden von DE FINETTI angegebenen Verfahren zur Konstruktion der gesuchten konvexen Funktion zum Ziele führen soll. In einfacher und durchsichtiger Form dürften sich solche Bedingungen kaum formulieren lassen. Es liegt daher nahe zu versuchen, eine etwas bessere Einsicht in ihre Natur dadurch zu gewinnen, daß man die Frage unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen behandelt. In der Arbeit DE FINETTIs wird dieser Fall kurz und auf eine Weise erwähnt, die den Eindruck erwecken könnte, daß dann die Frage eine ganz einfache Antwort zulasse ([3] S. 173—174). Dies ist aber keineswegs der Fall, nicht einmal, wenn man die Kurvenschar analytisch annimmt. Es ist daher vielleicht nicht überflüssig, nochmals auf den Gegenstand zurückzukommen.

Im folgenden wird die Fragestellung verallgemeinert, indem Funktionen von beliebig vielen Variablen und ein nicht notwendig beschränkter konvexer Definitionsbereich in Betracht gezogen werden. Andererseits wird vorausgesetzt, daß die gegebene Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und die gesuchte $F(t)$, für die also $F(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$ konvex sein soll, zweimal differenzierbar sind. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer solchen Funktion $F(t)$ aufgestellt, die das Verhalten von φ teils in den einzelnen Punkten, teils im großen betreffen. Die lokalen Bedingungen (§ 2) bestehen in Ungleichungen und algebraischen Relationen zwischen den ersten und zweiten partiellen Ableitungen von φ und lassen einfache geometrische Deutungen zu. Im Fall von zwei Variablen ergibt sich beispielsweise, daß an einer Stelle, an der die Krümmung der betreffenden Niveaukurve $\varphi(x_1, x_2) = \text{konst.}$ verschwindet, auch die GAUSSsche Krümmung der Fläche $z = \varphi(x_1, x_2)$ verschwinden muß. Die globalen Bedingungen (§ 3) sind dagegen auch in dem hier betrachteten Fall weniger durchsichtig, und eine weitere Aufspaltung wäre nicht ohne Interesse. Sie enthalten beispielsweise implizit die einfache notwendige Bedingung, daß alle Niveaumannigfaltigkeiten $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{konst.}$ dieselben unendlich fernen Punkte haben müssen (§ 5).

Der Verfasser hat sich mit dem DE FINETTIschen Problem auf Anregung von A. W. TUCKER beschäftigt und über die genannten Resultate in einer Vorlesungsreihe über konvexe Mengen und Funktionen [2] berichtet, die er 1951 im Rahmen eines vom Office of Naval Research unterstützten Forschungsprogramms an der Universität Princeton gehalten hat.

1. Vorbemerkungen. Es werden reelle Funktionen betrachtet, die in einem Bereich des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n definiert sind. (Die zu behandelnde Aufgabe hat zwar affininvarianten Charakter, es ist aber vielfach bequem, metrische Begriffe als Hilfsmittel heranzuziehen.) Im E^n wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt. Der Punkt mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ wird im allgemeinen kurz mit x bezeichnet werden. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ zwei Punkte und λ eine reelle Zahl, so werden λx und $x + y$ wie üblich durch

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

definiert.

Es sei nun C ein (nicht notwendig beschränkter) konvexer Bereich im E^n, der, um unwesentliche Komplikationen zu vermeiden, stets als offen vorausgesetzt wird. Eine in C definierte Funktion $f(x)$ heißt (nach unten) konvex, wenn für beliebige Punkte x und y aus C und $0 \leq \Theta \leq 1$ die Ungleichung

$$f((1-\Theta)\,x + \Theta y) \leq (1-\Theta)\,f(x) + \Theta f(y)$$

gilt. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Menge derjenigen Punkte $(x, z) = (x_1, \ldots, x_n, z)$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes E^{n+1}, für welche $x \in C$ und $z \geq f(x)$ gilt, konvex ist. Von den wohlbekannten Eigenschaften der in C nicht konstanten konvexen Funktionen kommen die folgenden zur Anwendung:

a) Eine in C konvexe Funktion $f(x)$ ist dort stetig.

b) Eine in C konvexe Funktion $f(x)$ hat entweder überhaupt keine Extrema oder nur ein absolutes Minimum, das in einer relativ zu C abgeschlossenen konvexen Teilmenge von C angenommen wird.

c) Ist $f(x)$ konvex in C, und ist t eine Zahl aus dem Wertebereich von f, so bilden die Punkte x, in denen $f(x) \leq t$ gilt, eine relativ zu C abgeschlossene konvexe Teilmenge von C.

d) Existieren die partiellen Ableitungen $f_i = \partial f / \partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$, einer in C konvexen Funktion $f(x)$ überall in C, so sind sie stetig, so daß f also insbesondere differenzierbar ist, und sie verschwinden gleichzeitig nur in den eventuellen Minimumspunkten von f.

e) Ist die Funktion $f(x)$ zweimal differenzierbar in C, sind also sie selbst und ihre ersten Ableitungen differenzierbar, so ist sie dann und nur dann konvex, wenn die quadratische Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j, \qquad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

in den Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ für jeden Punkt x aus C positiv semidefinit ist.

2. Lokale notwendige Bedingungen. Wir formulieren nun die zu lösende Aufgabe. Gegeben sei eine im offenen konvexen Bereich C zweimal differenzierbare, nicht konstante Funktion $\varphi(x)$. Es werde

$$\alpha = \inf_{x \in C} \varphi(x), \qquad \beta = \sup_{x \in C} \varphi(x)$$

gesetzt, wo die Werte $-\infty$ und $+\infty$ von α bzw. β zugelassen sind. Der Wertevorrat von $\varphi(x)$ ist dann ein Intervall mit den Endpunkten α und β. Gesucht ist eine in diesem Intervall monoton wachsende, zweimal differenzierbare Funktion $F(t)$, für welche $f(x) = F(\varphi(x))$ konvex in C ist.

Wir beginnen mit der Herleitung notwendiger Bedingungen. Es sei also $f(x) = F(\varphi(x))$ konvex in C. Mit N_α werde die (eventuell leere) Teilmenge von C bezeichnet, in der $\varphi(x) = \alpha$ ist. Mit den Bezeichnungen

$$F' = \frac{dF}{dt}, \qquad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

folgt aus

$$f_i = F' \varphi_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

und den Eigenschaften b) und c) von f, daß die Ableitungen φ_i von φ außerhalb N_α nicht gleichzeitig verschwinden können. Wir haben also

$$k^2 = \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_n^2 > 0 \qquad \text{für} \qquad x \notin N_\alpha. \tag{2}$$

Wir formulieren dies als Bedingung

I. *Die Funktion $\varphi(x)$ hat entweder keine stationären Werte oder nur ein absolutes Minimum.*

Speziell folgt, daß φ die obere Grenze β nicht annehmen kann, so daß der Wertebereich $\alpha\,(\leq)\, t < \beta$ geschrieben werden kann, wo die Klammern um das Gleichheitszeichen andeuten, daß es dann und nur dann in Frage kommt, wenn φ ein Minimum hat.

Im Hinblick auf das folgende bemerken wir noch, daß aus d), (1) und $F' \geq 0$

$$F'(t) > 0 \quad \text{für} \quad \alpha < t < \beta \tag{3}$$

folgt.

Durch Differentiation von (1) erhält man mit den obigen analogen Bezeichnungen

$$f_{ij} = F' \varphi_{ij} + F'' \varphi_i \varphi_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

und aus e) folgt daher, daß die quadratische Form

$$F' \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} \xi_i \xi_j + F'' \Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i\Big)^2$$

an jeder Stelle x von C positiv semidefinit sein muß. Ist N_α nicht leer, so ist dies wegen $F'(\alpha) \geq 0$ in den Punkten x von N_α stets von selbst erfüllt; denn da diese Minimumstellen von φ sind, gilt $\varphi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, und die Form $\sum \varphi_{ij} \xi_i \xi_j$ ist positiv semidefinit. Wir nehmen daher im folgenden an, daß x nicht zu N_α gehört, daß also $\varphi(x) > \alpha$ ist. Dann muß wegen (3) für jedes solche x die quadratische Form

$$Q_\sigma(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} \xi_i \xi_j + \sigma \Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i\Big)^2 \tag{4}$$

für ein gewisses $\sigma = \sigma(x)$, nämlich $\sigma = F''/F'$, positiv semidefinit sein. Als unmittelbare Folge ergibt sich:

II. *Für jedes x aus C ist die Form $\sum \varphi_{ij} \xi_i \xi_j$ unter der Nebenbedingung $\sum \varphi_i \xi_i = 0$ positiv semidefinit.*

Für die Punkte x von N_α ist dies nämlich nach einer soeben gemachten Bemerkung eine Folge von I.

Daß II notwendig ist, könnte man natürlich auch daraus schließen, daß die Menge der Punkte x, in denen $\varphi(x) \leq t$ ist, für jedes t, $\alpha (\leq) t < \beta$, wegen § 1, c) konvex sein muß, da sie ja mit der Menge der Punkte, in denen die konvexe Funktion $F(\varphi(x)) \leq F(t)$ ist, übereinstimmt. Es sei bemerkt, daß die Konvexität dieser Mengen, wie sehr leicht zu sehen, damit gleichbedeutend ist, daß die Funktion φ „quasikonvex" ist. Dies soll besagen, daß sie auf jeder in C enthaltenen abgeschlossenen Strecke ihr Maximum in einem der Endpunkte annimmt, daß also für alle x und y aus C und $0 \leq \Theta \leq 1$

$$\varphi\big((1-\Theta)x + \Theta y\big) \leq \operatorname{Max}\,[\varphi(x), \varphi(y)].$$

Wir haben nun weiter die Bedingung dafür aufzustellen, daß es zu jedem festen, nicht in N_α enthaltenen x eine Zahl σ derart gibt, daß die Form $Q_\sigma(\xi, \xi)$ für alle ξ_i mit $\sum \varphi_i \xi_i \neq 0$ nichtnegativ ist, oder anders ausgedrückt, daß

$$\sup_{\sum \varphi_i \xi_i \neq 0} \left(- \frac{\sum \varphi_{ij} \xi_i \xi_j}{(\sum \varphi_i \xi_i)^2}\right) < \infty \tag{5}$$

ist. Zu diesem Zweck betrachten wir das charakteristische Polynom $\Gamma_{Q_\sigma}(\lambda)$ der Form Q_σ. Mit der üblichen Bedeutung von δ_{ij} und der Festsetzung, daß die Indizes i und j in den folgenden Determinantenformeln die Werte $1, \ldots, n$ durchlaufen sollen, haben wir

$$(6)\qquad \begin{cases} \Gamma_{Q_\sigma}(\lambda) = |\varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij} + \sigma\,\varphi_i\,\varphi_j| \\ \quad = \begin{vmatrix} \varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij} + \sigma\,\varphi_i\,\varphi_j & \varphi_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij} & \varphi_i \\ -\sigma\,\varphi_j & 1 \end{vmatrix} \\ \quad = |\varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}| - \sigma \begin{vmatrix} \varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij} & \varphi_i \\ \varphi_j & 0 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Wir setzen zur Abkürzung $P(\xi, \xi) = \sum \varphi_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$ und bezeichnen mit $P^*(\xi, \xi)$ dieselbe Form, wenn die Variablen ξ_i der Bedingung $\sum \varphi_i\,\xi_i = 0$ unterworfen sind. Die charakteristischen Polynome dieser Formen sind

$$\Gamma_P(\lambda) = |\varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij}|$$

und

$$\Gamma_{P^*}(\lambda) = -\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} \varphi_{ij} - \lambda\,\delta_{ij} & \varphi_i \\ \varphi_j & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit der letzteren Gleichung kann man z.B. so einsehen: Beide Seiten sind invariant bei orthogonalen Transformationen der Koordinaten x_i, da solche Transformationen auf orthogonale Transformationen der Variablen ξ_i hinauslaufen (vgl. z.B. [4] S. 241–242). Wählt man nun das Koordinatensystem so, daß an der betreffenden Stelle $\varphi_1 = \cdots = \varphi_{n-1} = 0$, $\varphi_n = k$ wird, so vereinfacht sich die Nebenbedingung zu $\xi_n = 0$, und die rechte Seite geht tatsächlich in das charakteristische Polynom von $\sum\limits_{i,j=1}^{n-1} \varphi_{ij}\,\xi_i\,\xi_j$ über. Hiernach kann (6) also

$$\Gamma_{Q_\sigma}(\lambda) = \Gamma_P(\lambda) + \sigma\,k^2\,\Gamma_{P^*}(\lambda)$$

geschrieben werden. Bezeichnen wir die ν-ten elementarsymmetrischen Funktionen der Eigenwerte von P, P^* und Q_σ mit S_ν, S_ν^* bzw. $T_\nu^{(\sigma)}$ und setzen $S_0 = S_0^* = T_0^{(\sigma)} = 1$, so haben wir

$$\Gamma_P(\lambda) = S_n - S_{n-1}\,\lambda + \cdots + (-1)^n\,S_0\,\lambda^n,$$
$$\Gamma_{P^*}(\lambda) = S_{n-1}^* - S_{n-2}^*\,\lambda + \cdots + (-1)^{n-1}\,S_0^*\,\lambda^{n-1},$$
$$\Gamma_{Q_\sigma}(\lambda) = T_n^{(\sigma)} - T_{n-1}^{(\sigma)}\,\lambda + \cdots + (-1)^n\,T_0^{(\sigma)}\,\lambda^n.$$

Die Forderung, daß Q_σ positiv semidefinit sein soll, ist also gleichbedeutend mit

$$(7)\qquad T_\nu^{(\sigma)} = S_\nu + \sigma\,k^2\,S_{\nu-1}^* \geqq 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

wo das Verschwinden eines $T_\nu^{(\sigma)}$ das aller folgenden nach sich zieht.

Es sei nun $r-1$ der (natürlich im allgemeinen von x abhängige) Rang von P^*. Dann haben wir nach II

$$(8)\qquad S_\nu^* > 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq r-1, \qquad S_\nu^* = 0 \quad \text{für} \quad r \leqq \nu \leqq n-1,$$

so daß aus (7) speziell

$$(9)\qquad S_{r+1} \geqq 0$$

folgt. Zwischen den Eigenwerten

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$$

und

$$\lambda_1^* \geqq \lambda_2^* \geqq \cdots \geqq \lambda_{n-1}^*$$

von P bzw. P^* bestehen infolge ihrer Minimum-Maximum-Eigenschaften bekanntlich die Ungleichungen

$$\lambda_1 \geqq \lambda_1^* \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\nu \geqq \lambda_\nu^* \geqq \cdots \geqq \lambda_{n-1}^* \geqq \lambda_n$$

(vgl. z.B. [*1*] S. 28). Wegen (8) ist nun

$$\lambda_\nu^* > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq r-1, \qquad \lambda_\nu^* = 0 \quad \text{für} \quad r \leqq \nu \leqq n-1,$$

folglich

$$\lambda_\nu > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq r-1$$

und, falls $r < n$ ist,

$$\lambda_r \geqq 0, \quad \lambda_\nu = 0 \quad \text{für} \quad r+1 \leqq \nu \leqq n-1, \quad \lambda_n \leqq 0,$$

insbesondere also $S_{r+1} = \lambda_1 \ldots \lambda_r \lambda_n \leqq 0$. Zusammen mit (9) gibt dies

$$S_{r+1} = 0 \quad \text{falls} \quad r < n;$$

d.h. der Rang von P kann höchstens gleich r sein. Wir formulieren dies als weitere notwendige Bedingung:

III. *Hat im Punkt $x \in C$ die Form $\sum \varphi_{ij}\, \xi_i\, \xi_j$ unter der Nebenbedingung $\sum \varphi_i\, \xi_i = 0$ den Rang $r(x) - 1$, so hat sie ohne diese Bedingung höchstens den Rang $r(x)$.*

Dies wurde zwar nur für die nicht zu N_α gehörigen Punkte von C bewiesen; für $x \in N_\alpha$ ist es aber wegen $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, von selbst erfüllt.

Die Notwendigkeit einer Bedingung von der Art III ist auch anschaulich unmittelbar einleuchtend. Für $n = 2$ betrachte man in der $x_1 x_2$-Ebene etwa das Geradenbüschel mit dem Nullpunkt als Scheitel. In einem in der Halbebene $x_1 > 0$ enthaltenen konvexen Gebiet C sind die Büschelgeraden die Niveaukurven der Funktion $\varphi = x_2/x_1$. Die Bedingungen I und II sind offensichtlich erfüllt. Für jede wachsende Funktion $z = F(t)$ ist aber die Fläche $z = F(x_2/x_1)$ eine windschiefe Regelfläche und daher niemals konvex. Daß III auch bei Konvexität im engeren Sinne der Niveaukurven nicht überall erfüllt zu sein braucht, zeigt das Beispiel der Funktion $\varphi = (x_2 - x_1^4)/(x_1 + 1)$ in der Halbebene $x_1 > -1$. Auch hier sind I und II erfüllt, während III für $x_1 = 0$ nicht erfüllt ist. Es beruht dies darauf, daß die Niveaukurven $x_2 = x_1^4 + t(x_1 + 1)$ in ihren Schnittpunkten mit der x_2-Achse verschwindende Krümmung, aber nicht parallele Tangenten haben.

Im allgemeinen Fall läßt III folgende geometrische Deutung zu: Verschwinden in einem Punkt der Hyperfläche $\varphi(x) = \text{konst.}$ des E^n genau $n - r$ ihrer Hauptkrümmungen, so müssen an dieser Stelle auch mindestens $n - r$ der Hauptkrümmungen der Hyperfläche $z = \varphi(x)$ des E^{n+1} verschwinden.

3. Globale notwendige Bedingungen. Die Zahlen σ, für welche $Q_\sigma(\xi, \xi)$ positiv semidefinit ist, müssen nach (7) der Ungleichung

$$\sigma \geq \sigma_0 = \max_{1 \leq \nu \leq r} \left(- \frac{S_\nu}{k^2 S^*_{\nu-1}} \right)$$

genügen. Da nun, wie schon bemerkt, das Verschwinden eines $T_\nu^{(\sigma)}$ das aller folgenden nach sich zieht, muß das Maximum für $\nu = r$ erreicht werden, so daß

$$\sigma_0 = - \frac{S_r}{k^2 S^*_{r-1}}.$$

Wie aus (4) hervorgeht, ist σ_0 zugleich die in (5) auftretende obere Grenze.

Wir ziehen nun die Abhängigkeit vom Punkt x in Betracht. Soll es eine Funktion $F(t)$ mit den verlangten Eigenschaften geben, so muß nach (4)

$$\sigma_0(x) \leq \frac{F''(\varphi(x))}{F'(\varphi(x))}$$

gelten. Da die rechte Seite auf jeder Niveaumannigfaltigkeit konstant ist, ergibt sich als weitere notwendige Bedingung:

IV. *Für jedes feste t mit $\alpha < t < \beta$ ist*

$$G(t) = \sup_{\varphi(x) = t} \left(- \frac{S_r}{k^2 S^*_{r-1}} \right) < \infty.$$

Schließlich verlangt die Aufgabe, daß eine in $\alpha (\leqq) t < \beta$ zweimal differenzierbare Funktion $F(t)$ mit $F'(t) > 0$ für $\alpha < t < \beta$ existiert, so daß für diese t

$$\frac{F''(t)}{F'(t)} \geq G(t).$$

Ob sich diese Bedingung wesentlich reduzieren läßt, muß dahingestellt bleiben. Da Stetigkeit der zweiten Ableitungen von φ nicht vorausgesetzt ist und die Niveaumannigfaltigkeiten sich ins Unendliche erstrecken können, wird man im allgemeinen von $G(t)$ wohl kaum mehr als die Meßbarkeit behaupten können. Wir formulieren daher als notwendige Bedingung:

V. *Die Funktion $G(t)$, $\alpha < t < \beta$, hat eine Majorante, die die logarithmische Ableitung einer in $\alpha < t < \beta$ positiven und in $\alpha (\leqq) t < \beta$ differenzierbaren Funktion ist.*

4. Das Hinreichen der Bedingungen. Der Beweis dafür, daß die aufgestellten Bedingungen I bis V auch hinreichend sind, ist sehr einfach. Es sei eine in einem offenen konvexen Bereich C des E^n definierte, zweimal differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ gegeben, die I bis V erfüllt. Nach V gibt es eine Funktion $H(t)$, die in $\alpha (\leqq) t < \beta$ differenzierbar und in $\alpha < t < \beta$ positiv ist, derart daß

$$\frac{H'(t)}{H(t)} \geq G(t), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Es sei $F(t)$ ein unbestimmtes Integral von $H(t)$. Dann ist $F(t)$ zweimal differenzierbar und monoton wachsend in $\alpha (\leqq) t < \beta$. Wir haben zu zeigen, daß die quadratische Form

$$F'(\varphi(x)) \sum \varphi_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j + F''(\varphi(x))\, (\sum \varphi_i \xi_i)^2 \tag{10}$$

für jedes $x \in C$ positiv semidefinit ist.

Besitzt $\varphi(x)$ gemäß I ein Minimum α, so ist diese Behauptung offenbar für die Punkte von N_α richtig; denn dort verschwinden die φ_i, die Form $\sum \varphi_{ij}\, \xi_i \xi_j$ ist positiv semidefinit und $F'(\alpha) \geq 0$. Wir können daher $\varphi(x) > \alpha$ und folglich $F'(\varphi) > 0$ voraussetzen und statt (10) die Form $Q_\sigma(\xi, \xi)$ mit $\sigma = F''/F'$ betrachten. Nun ist nach der obigen Definition von $F(t)$

$$\sigma = \frac{F''(\varphi)}{F'(\varphi)} \geq G(\varphi) \geq \sigma_0 = -\frac{S_r}{k^2\, S^*_{r-1}},$$

also

$$Q_\sigma(\xi, \xi) \geq Q_{\sigma_0}(\xi, \xi).$$

Es genügt also zu zeigen, daß die letztere Form positiv semidefinit ist. Mit den früheren Bezeichnungen haben wir für diese Form

$$T_\nu^{(\sigma_0)} = S_\nu - \frac{S_r}{S^*_{r-1}}\, S^*_{\nu-1}, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

also

$$T_\nu^{(\sigma_0)} = 0 \qquad \text{für} \qquad r \leq \nu \leq n$$

auf Grund der Definition von r und wegen III. Die Form Q_{σ_0} hat also höchstens den Rang $r-1$. Da sie nun für $\sum \varphi_i \xi_i = 0$ mit P, also mit P^* übereinstimmt und nach II die letztere Form $r-1$ positive Eigenwerte hat, hat sie selbst $r-1$ positive Eigenwerte und ist daher nichtnegativ, wie behauptet.

5. Beschränktheits- und Unbeschränktheitsrichtungen der Niveaumannigfaltigkeiten konvexer Funktionen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, haben die Niveaumannigfaltigkeiten einer konvexen Funktion alle dieselben unendlich fernen Punkte. Dies muß folglich auch für die gegebene Funktion $\varphi(x)$ gelten und daher eine Folge der aufgestellten notwendigen Bedingungen sein. Es läßt sich aber einfach direkt und ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen zeigen. Zur Beleuchtung der Natur der globalen Bedingungen möge der Beweis dafür und für die damit eng zusammenhängende Eigenschaft der Niveaumannigfaltigkeiten, in denselben Richtungen beschränkt zu sein, hier kurz angegeben werden.

Vorbereitend stellen wir einige, unter teilweise engeren Voraussetzungen im wesentlichen bekannte Sätze über unbeschränkte konvexe Mengen mit kurzen Beweisen zusammen (vgl. hierzu [*5*], [*6*], [*2*]).

Es sei zunächst M eine beliebige nicht beschränkte Punktmenge und $u = (u_1, \ldots, u_n) \neq (0, \ldots, 0)$ ein Vektor im E^n. Wir sagen, M sei beschränkt in der Richtung u, oder u sei Beschränktheitsrichtung von M, wenn es eine Hyperebene $\sum u_i x_i = c$ mit der positiven Normalenrichtung u gibt, derart daß M in dem durch sie bestimmten abgeschlossenen negativen Halbraum enthalten ist, wenn also

$$\sum u_i x_i \leq c \qquad \text{für} \qquad x \in M.$$

Die Hyperebene heiße dann eine Schranke von M; sie kann speziell Stützhyperebene von M sein. Die sämtlichen Beschränktheitsrichtungen u von M machen, etwa vom Nullpunkt aus abgetragen, einen konvexen Kegel $B(M)$ aus, der speziell leer sein kann. Sind nämlich u und v Beschränktheitsrichtungen, so auch $\lambda u+\mu v$ für alle nichtnegativen λ und μ, für welche $\lambda u+\mu v\neq 0$ ist.

Sei nun $x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$, eine Folge zu M gehöriger Punkte, die sich im Endlichen nicht häufen. Die Folge der Halbstrahlen $\overrightarrow{px^{(i)}}$, die einen willkürlichen festen Punkt p mit den Punkten $x^{(i)}$ verbinden, häuft sich gegen wenigstens einen Halbstrahl. Die Menge aller solchen Häufungsstrahlen ist ein Kegel $A_p(M)$ mit dem Scheitel p. Er gibt die Richtungen an, in denen sich M ins Unendliche erstreckt, und heiße der Asymptotenkegel von M mit dem Scheitel p. Man sieht sehr leicht, daß $A_p(M)$ abgeschlossen ist und daß zwei zu verschiedenen Punkten p gehörige Kegel $A_p(M)$ durch Translation auseinander hervorgehen. Wir können daher kurz von dem Asymptotenkegel von M sprechen.

Zwischen den beiden eingeführten Kegeln besteht die Relation

$$\overline{B(M)} \leqq B\big(A(M)\big), \tag{11}$$

wo die Überstreichung den Übergang zur abgeschlossenen Hülle bedeutet; denn eine Schranke von M ist, wie unmittelbar aus der Definition von $A_p(M)$ folgt, auch Schranke des Asymptotenkegels mit einem in ihr gelegenen Scheitel, und der Kegel B der Beschränktheitsrichtungen eines Kegels ist abgeschlossen.

Setzen wir nun M als konvex und (der Übersichtlichkeit halber) als abgeschlossen voraus, so ergeben sich wesentlich schärfere Aussagen. Zunächst folgt, daß dann auch $A_p(M)$ konvex ist. Wird ferner p beliebig in M gewählt, so besteht $A_p(M)$ genau aus den von p ausgehenden Halbstrahlen, die ganz zu M gehören. Daß diese Halbstrahlen in $A_p(M)$ enthalten sind, ist nämlich klar. Ist andererseits $\overrightarrow{px^{(i)}}$ eine Folge von Halbstrahlen der oben beschriebenen Art, so gehören die Strecken $p\,x^{(i)}$ wegen der Konvexität von M ganz zu M. Da nun die Längen dieser Strecken über alle Grenzen wachsen, ist also jeder Punkt eines Halbstrahls, gegen den sich die Halbstrahlen $\overrightarrow{px^{(i)}}$ häufen, Häufungspunkt von Punkten aus M und gehört somit wegen der Abgeschlossenheit von M zu M.

Ferner läßt sich die Inklusion (11) für abgeschlossene konvexe M zu

$$\overline{B(M)} = B\big(A(M)\big) \tag{12}$$

verschärfen. Um dies einzusehen, bemerke man zunächst, daß es genügt, den Fall zu betrachten, wo $A(M)$ keinen vollständigen linearen Unterraum positiver Dimension enthält. Sei nämlich L_o der maximale in $A_o(M)$ enthaltene, durch den Nullpunkt o gehende lineare Unterraum, l seine Dimension und L_o^* der durch o gehende, zu L_o vollständig orthogonale $(n-l)$-dimensionale Unterraum. Der Polarkegel $B\big(A_o(M)\big)$ von $A_o(M)$ ist dann in L_o^* enthalten und hat als Teilmenge dieses Unterraums innere Punkte. Für jeden Punkt p

von M gilt wegen der genannten Eigenschaften der Kegel $A_p(M)$, daß der durch p gehende, zu L_o parallele l-dimensionale Unterraum ganz in M enthalten ist; mit anderen Worten, M ist die Vereinigung von zu L_o parallelen l-dimensionalen Unterräumen. Dies hat zur Folge, daß auch $B(M)$ in L_o^* enthalten ist und daß die Kegel $B(M)$ und $B(A_o(M))$ ungeändert bleiben, wenn man statt E^n den Unterraum L_o^* betrachtet und M und somit $A_o(M)$ durch ihre Durchschnitte mit L_o^* ersetzt. Dies zeigt, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu den obigen Voraussetzungen hinzufügen können, daß $A(M)$ keinen linearen Unterraum positiver Dimension vollständig enthält. Es gibt dann Stützhyperebenen des Kegels $A_o(M)$, die mit ihm nur den Punkt o gemeinsam haben. Die positiven Normalen solcher Stützhyperebenen sind genau die inneren Halbstrahlen des Polarkegels $B(A_o(M))$. Zum Beweis von (12) genügt es nun wegen (11) zu zeigen, daß ein nicht zu $B(M)$ gehöriger Halbstrahl nicht innerer Strahl von $B(A_o(M))$ sein kann. Dies ist aber evident. Ist nämlich u ein nicht zu $B(M)$ gehöriger Vektor, so enthält der Halbraum $\sum u_i x_i > 0$ eine ins Unendliche strebende Folge von Punkten $x^{(i)}$ aus M. Die Häufungsstrahlen der Folge von Halbstrahlen $\overrightarrow{o x^{(i)}}$ sind folglich im Halbraum $\sum u_i x_i \geqq 0$ enthalten, und $A_o(M)$ kann somit (vom Scheitel o abgesehen) nicht vollständig dem offenen Halbraum $\sum u_i x_i < 0$ angehören.

Wir wenden uns nun zur Anwendung dieser Resultate auf die Niveaumannigfaltigkeiten konvexer Funktionen. Sei also $z = f(x)$ eine im offenen konvexen Bereich C definierte konvexe Funktion. Mit $[C, f]$ werde die abgeschlossene und konvexe Menge derjenigen Punkte (x, z) des E^{n+1} bezeichnet, für welche $x \in C$ und $z \geqq f(x)$. Es sei M_{z_0} der Durchschnitt von $[C, f]$ mit der Hyperebene $z = z_0$. Die orthogonale Projektion von M_{z_0} auf die Hyperebene $z = 0$ ist die Niveaumenge N_{z_0} von f, d. h. die Menge der Punkte x mit $f(x) \leqq z_0$. Der Asymptotenkegel $A_{p_0}[C, f]$, wo $p_0 = (x^{(0)}, z_0)$ ein Punkt von $[C, f]$ ist, wird von der Hyperebene $z = z_0$ im Asymptotenkegel $A_{p_0}(M_{z_0})$ von M_{z_0} geschnitten. Ist $p_1 = (x^{(1)}, z_1)$ ein zweiter Punkt von $[C, f]$, so geht $A_{p_1}[C, f]$ aus $A_{p_0}[C, f]$ durch eine Translation hervor. Dieselbe Translation führt aber die Hyperebene $z = z_0$ in $z = z_1$ über, und folglich ist $A(M_{z_0}) = A(M_{z_1})$. Projiziert man auf $z = 0$, so erhält man also die Behauptung:

Die Niveaumengen einer konvexen Funktion sind entweder alle beschränkt oder alle unbeschränkt mit demselben Asymptotenkegel.

Aus (12) kann man nun weiter schließen, daß die Kegel $B(N_z)$ der Beschränktheitsrichtungen für alle Niveaumengen N_z dieselbe abgeschlossene Hülle haben. Es läßt sich aber noch etwas mehr aussagen:

Hat eine konvexe Funktion $f(x)$ die untere Grenze a ($\geqq -\infty$), so sind alle Niveaumengen N_z für $z > a$ in denselben Richtungen beschränkt. Ist $B = B(N_z)$ ihr gemeinsamer Kegel der Beschränktheitsrichtungen, so gilt, falls $f(x)$ die untere Grenze a erreicht, $B \subseteqq B(N_a) \subseteqq \overline{B}$.

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus $N_a \subseteqq N_z$ für $z > a$ und dem soeben über die Kegel $B(N_z)$ Gesagten. Die Richtigkeit der ersten Behauptung kann man so einsehen. Es sei N_{z_0}, $z_0 > a$, in der Richtung u beschränkt.

Ist $\sum u_i x_i = c$ eine Schranke, so ist der $(n-1)$-dimensionale Unterraum L^{n-1} des E^{n+1} mit den Gleichungen $\sum u_i x_i = c$, $z = z_0$ eine Schranke der Menge M_{z_0} als Teilmenge der Hyperebene $z = z_0$. Dieser Unterraum L^{n-1} enthält also keine inneren Punkte der Menge $[C, f]$. Daher läßt sich durch ihn eine Schranke von $[C, f]$ legen. Durch Projektion auf eine zu L^{n-1} orthogonale (zweidimensionale) Ebene des E^{n+1} geht nämlich $[C, f]$ in einen (unbeschränkten) konvexen Bereich und L^{n-1} in einen äußeren oder Randpunkt dieses Bereichs über. Durch diesen Punkt läßt sich folglich eine Gerade legen, die Schranke des Bereichs ist und die daher zusammen mit L^{n-1} eine Schranke S von $[C, f]$ aufspannt. Nun muß S von der Hyperebene $z = z_0$ verschieden sein, da $[C, f]$ sowohl Punkte mit $z > z_0$ als auch Punkte mit $z < z_0$ enthält. Daher wird S von den Hyperebenen $z = \text{konst.}$ in zu L^{n-1} parallelen Schranken der Mengen M_z geschnitten. Projektion auf $z = 0$ ergibt also, daß jede Beschränktheitsrichtung von N_{z_0} auch Beschränktheitsrichtung aller übrigen Mengen N_z ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Daß im Falle der Existenz eines Minimums von $f(x)$ der Kegel $B(N_a)$ der Menge N_a der Punkte, in denen das Minimum angenommen wird, umfassender sein kann als der Kegel B der Beschränktheitsrichtungen der übrigen Niveaumengen, zeigt die konvexe Funktion $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1$. Hier ist $a = 0$, und N_0 ist die positive x_1-Achse, also beschränkt in den Richtungen (u_1, u_2) mit $u_1 \leq 0$, während die anderen Mengen N_z von Parabeln mit der x_1-Achse als Achse begrenzt werden, also nur in Richtungen mit $u_1 < 0$ beschränkt sind.

Beispiele von Funktionen $\varphi(x_1, x_2)$, die die Bedingungen I bis III erfüllen, deren Niveaukurven aber nicht die soeben bewiesenen Eigenschaften der Niveaumannigfaltigkeiten konvexer Funktionen besitzen, sind ebenfalls leicht anzugeben. Die Niveaukurven der Funktion $\varphi(x_1, x_2) = (1 + x_2^2)/x_1^2$, $x_1 > 0$, sind die in $x_1 > 0$ gelegenen Zweige der konzentrischen Hyperbeln $t x_1^2 - x_2^2 = 1$, $t > 0$, mit von t abhängigem Asymptotenwinkel. Bei der Funktion $\varphi(x_1, x_2) = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2]/x_1^2$, $x_1 > 0$, sind es die Kegelschnitte mit dem Brennpunkt $(1, 0)$ und der Leitlinie $x_1 = 0$. Die Schar enthält also hier sowohl beschränkte als auch unbeschränkte Kurven. In beiden Fällen ist die Bedingung IV nicht erfüllt.

Literatur

[1] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. I. Berlin 1931. — [2] FENCHEL, W.: Convex cones, sets, and functions. (From notes by D. W. BLACKETT of lectures at Princeton University.) Princeton, N. J. 1953. — [3] FINETTI, B. DE: Sulle stratificazioni convesse. Ann. di Matematica (4) **30**, 173—183 (1949). — [4] KOWALEWSKI, G.: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909. — [5] STEINITZ, E.: Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, II. J. reine u. angew. Math. **144**, 1—40 (1914). — [6] STOKER, J. J.: Unbounded convex point sets. Amer. J. Math. **62**, 165—179 (1940).

Kopenhagen, Dänische Technische Hochschule

(Eingegangen am 23. September 1955)