OSTROWSKI, A.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 2—18 (1955)

Über Normen von Matrizen.

Dem Andenken an ISSAI SCHUR gewidmet.

Von

ALEXANDER OSTROWSKI.

Einleitung.

1. Im folgenden sollen die großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ mit Ausnahme des § 3 quadratische Matrizen einer festen Ordnung n mit reellen oder komplexen Elementen $a_{\mu\nu}$ bzw. $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}, \ldots$ bezeichnen. Werden andere Matrizen betrachtet, so wird dies jedesmal ausdrücklich angegeben werden. Die griechischen Buchstaben $\xi, \eta, \ldots$ bedeuten n-dimensionale (Kolonnen-) Vektoren mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$.

2. Bei verschiedenartigsten Untersuchungen wurden bereits zur ungefähren Charakterisierung der „Größe" einer Matrix verschiedene Ausdrücke benutzt, die man als *Beträge, Schranken* oder auch *Normen* bezeichnet. In der Literatur sind vor allem sechs verschiedene solche Normen verwendet worden. Es sind dies in der weiter unten zu erläuternden Nomenklatur die drei *Hölderschen Normen*

$$(1) \qquad |A|_1 = \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|, \qquad |A|_2 = \Big(\sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad N^*(A) = |A|_\infty = \operatorname*{Max}_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|,$$

sowie die zu den drei entsprechend definierten Vektornormen gehörenden symmetrischen *Schrankennormen*.

Es scheint nunmehr angebracht zu sein, eine systematische Untersuchung des Normbegriffes vorzunehmen unter Zugrundelegung geeigneter Postulate[1]). Sind auch, wie es sich herausstellt, für Limes- und Konvergenzbetrachtungen alle hier in Frage kommenden Normbegriffe im wesentlichen (für festes n) gleichberechtigt, so liefern sie andererseits in der Abschätzung der Eigenwerte oder bei der Diskussion des Fehlers in verschiedenen Iterationsverfahren sehr verschiedene Ergebnisse, so daß es wertvoll erscheint, über eine genügende Anzahl Normen zu verfügen. Dazu kommt noch, daß nicht alle Normen für Grenzübergänge mit $n \to \infty$ brauchbar sind. Es scheint, daß hierzu nur die symmetrischen Schrankennormen verwendet werden können.

---

[1]) Diese Untersuchung wurde für die sog. Schrankennormen in einer Note des Verfassers (OSTROWSKI [*2*]) begonnen und in allgemeineren Fällen von Herrn WE. GAUTSCHI in seiner Basler Dissertation ([*2*], [*3*]) fortgesetzt.

3. Wir definieren im folgenden eine *allgemeine Norm* $N(A)$ durch die drei Postulate:

I_N $N(A) > 0$ $(A \neq 0)$;

II_N $N(cA) = |c|\, N(A)$ für jede skalare Größe c;

III_N $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ [2].

Aus II_N folgt offenbar für $c=0$, daß $N(0)=0$ ist.

4. Neben diesen Normen betrachten wir noch speziellere, sog. *multiplikative Normen* $M(A)$, die den folgenden vier Postulaten genügen (vgl. z.B. FADDEJEWA [*1*], wo aber I_N statt I_M benutzt wird, p. 60; NBSR p. 83):

I_M $M(A) \geq 0$ und für wenigstens ein A_0: $M(A_0) > 0$;

II_M $M(cA) = |c|\, M(A)$ für jede skalare Größe c;

III_M $M(A+B) \leq M(A) + M(B)$;

IV_M $M(AB) \leq M(A)\, M(B)$.

5. Wie man sieht, kommt hier das Postulat IV_M dazu; andererseits wird das Postulat I_M abgeschwächt. Wir beweisen nun im § 1, der der Diskussion der multiplikativen Normen gewidmet ist, den

Satz I. *Jede multiplikative Norm ist auch eine allgemeine Norm.*

Andererseits ergibt sich, daß $M(E)$, unter E die Einheitsmatrix verstanden, stets ≥ 1 ist. Offenbar ist keine ähnliche Relation bei allgemeinen Normen generell möglich, da ja mit $N(A)$ auch $cN(A)$ für jede positive Konstante c eine allgemeine Norm ist.

6. Wir bezeichnen in dieser Arbeit mit λ_A den maximalen absoluten Betrag der Fundamentalwurzeln der Matrix A. Eine besonders wichtige Eigenschaft multiplikativer Normen kommt zum Ausdruck im

Satz II. *Es gilt stets* $M(A) \geq \lambda_A$ [3].

7. Für einen allgemeinen Vektor ξ wird eine allgemeine Norm $h(\xi)$ durch die Postulate definiert (vgl. z.B. FADDEJEWA [*1*], p. 59; NBSR p. 81):

I_V $h(\xi) > 0$ $(\xi \neq 0)$;

II_V $h(c\xi) = |c|\, h(\xi)$ für jede skalare Größe c;

III_V $h(\xi+\eta) \leq h(\xi) + h(\eta)$.

8. Sind nun $h(\xi)$ und $h_1(\xi)$ zwei derartige Vektornormen, so wird durch

$$S_{h,h_1}(A) = \operatorname*{Sup}_{\xi \neq 0} \frac{h(A\xi)}{h_1(\xi)} \tag{2}$$

eine *Schrankennorm* von A definiert, die zu den Vektornormen $h(\xi)$ und $h_1(\xi)$ gehört. Ist insbesondere $h(\xi) = h_1(\xi)$, so haben wir es mit einer

[2]) Diese Postulate sind von GAUTSCHI [*2*], p. 375 als Postulate VI, VII und VIII benutzt worden.

[3]) Für zahlreiche Spezialfälle und auch für einige nicht multiplikative Normen hat GAUTSCHI ([*1*], [*2*], [*3*]) die Ungleichung des Satzes II bewiesen. Im allgemeinsten Falle einer multiplikativen Norm ist der Satz II auf einem anderen Wege als bei uns bewiesen bei FADDEJEWA [*1*], p. 65; NBSR p. 90.

symmetrischen Schrankennorm zu tun (vgl. z.B. FADDEJEWA [*1*], pp. 60, 61; NBSR pp. 84, 85):

$$S_h(A) = \operatorname*{Sup}_{\xi \neq 0} \frac{h(A\xi)}{h(\xi)}. \tag{3}$$

Offenbar gilt für symmetrische Schrankennormen stets

$$S_h(E) = 1. \tag{4}$$

Übrigens folgt aus den Postulaten I_V bis III_V, daß eine Vektornorm stets eine *stetige Funktion der Vektorkomponenten* ist (vgl. den Stetigkeitsbeweis für allgemeine Normen in Nr. 20). Daher kann man in den Definitionen (2) und (3) das *Supremum* durch das *Maximum* ersetzen.

9. Aus der Definition (2) und den Postulaten I_V bis III_V folgt sofort, daß $S_{h,h_1}(A)$ den Postulaten I_N bis III_N genügt, also eine allgemeine Norm ist. Für die symmetrische Schrankennorm $S_h(A)$ folgt aber leicht, daß auch das Postulat IV_M erfüllt ist, so daß $S_h(A)$ stets eine *multiplikative Norm* ist. In der Tat gilt ja

$$\frac{h(AB\xi)}{h(\xi)} = \left(\frac{h(AB\xi)}{h(B\xi)}\right)\left(\frac{h(B\xi)}{h(\xi)}\right),$$

woraus IV_M sofort folgt. Im allgemeinsten Falle der nicht notwendig symmetrischen Schrankennormen wird in Nr. 19 als Formel (1.10) eine anders beschaffene „Multiplikationseigenschaft" aufgestellt.

10. Ist $N(A)$ eine allgemeine Matrizennorm, so läßt sich aus ihr eine Vektornorm $h(\xi)$ herleiten, indem man dem Vektor $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ eine $(n \times n)$-Matrix A_ξ zuordnet, die in der ersten Kolonne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat und in den übrigen Kolonnen lauter Nullen. Dann kann man definieren

$$h_N(\xi) = N(A_\xi)\,[4]. \tag{5}$$

Am Schlusse des § 1 beweisen wir den

Satz III. *Wird aus einer multiplikativen Norm $M(A)$ die zugehörige Vektornorm $h_M(\xi)$ hergeleitet und sodann die zu dieser Vektornorm gehörende symmetrische Schrankennorm $S_{h_M}(A)$ gebildet, so gilt stets*

$$M(A) \geq S_{h_M}(A). \tag{6}$$

11. Im § 2, der allgemeinen Normen $N(A)$ gewidmet ist, beweisen wir zuerst den

Satz IV. *Für zwei beliebige Normen $N(A)$ und $N_1(A)$ liegt der Quotient $\frac{N(A)}{N_1(A)}$ zwischen zwei positiven von A unabhängigen Konstanten.*

Es genügt hierzu zu beweisen, daß

$$p_1 < \frac{N(A)}{N^*(A)} < p_2 \tag{7}$$

[4] Natürlich könnte man hier auch $N(A_\xi)$ so definieren, daß die Komponenten von A_ξ anstatt in der *ersten* Kolonne in der *k-ten* Kolonne von A_ξ stehen, und man erhält auf diese Weise mehrere aus $N(A)$ herleitbare Vektornormen, auf die unsere Betrachtungen genau so anwendbar bleiben.

gilt, wo $N^*(A)$ die in (1) definierte Norm ist und p_1 und p_2 von A unabhängige positive Zahlen sind.

Sodann beweisen wir eine Abschätzung von $N(A^t)$ für natürliche t, die für $t \to \infty$ die „richtige“ Größenordnung von $N(A^t)$ liefert. Wir leiten nämlich her den

Satz V. *Es seien die Elementarteiler der Matrix A durch*

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, \ (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \tag{8}$$

gegeben, wobei die Anordnung so ist, daß

$$\lambda_A = |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \tag{9}$$

und ferner

$$M \equiv m_1 = \cdots = m_s > m_{s+1} \geq \cdots \geq m_r \tag{10}$$

gilt. Dann besteht für jede allgemeine Norm $N(A)$ die Relation

$$p_3 < \frac{N(A^t)}{t^{M-1}\,\lambda_A^t} < p_4, \tag{11}$$

wo p_3 und p_4 zwei positive von t unabhängige und nur von $N(A)$ abhängende Zahlen sind. Gilt aber

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s, \tag{12}$$

so konvergiert der Quotient in (11) *sogar gegen einen positiven endlichen Grenzwert*[5]).

Aus den Sätzen IV und V folgt dann sofort der

Satz VI. *Für jede allgemeine Norm gilt*

$$\sqrt[t]{N(A^t)} \to \lambda_A \qquad (t \to \infty)\,^{6)}. \tag{13}$$

12. Im § 3 diskutieren wir die *Hölderschen Matrizennormen*

$$|A|_p = \Big(\sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|^p\Big)^{1/p} \qquad (p \geq 1). \tag{14}$$

---

[5]) Die aus (11) folgende Abschätzung der allgemeinen Norm $N(A)$ *nach oben* hat in etwas schwächerer Form Herr Gautschi ([*1*], [*2*]) bewiesen [dort ist M das Maximum sämtlicher Exponenten m_k in (8)]. Die zweite, unter der Annahme (12) geltende Behauptung des Satzes V hatte ich ursprünglich nur für die spezielle Norm $N^*(A)$ bewiesen. Erst durch Herrn Gautschi bin ich in freundlicher Weise darauf aufmerksam gemacht worden, daß eine geringfügige Abänderung meines Beweises sie für jede allgemeine Norm liefert.

[6]) Die Relationen (7) und (13) sind unabhängig von mir auch von Herrn L. Carleson bewiesen worden im Laufe einer für mich sehr anregenden Diskussion, für die ich ihm auch hier meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte.

Es sei noch bemerkt, daß die Relation (13) für den allgemeinsten Fall von (symmetrischen und unsymmetrischen) Schrankennormen sich bei Gautschi [*2*], p. 377, Formel (34), findet. Im Falle der symmetrischen Schrankennorm stellt sie einen Spezialfall eines allgemeinen Satzes der Theorie der linearen Transformationen im Hilbertschen Raum dar (vgl. Riesz-Nagy [*1*], p. 421).

Bei dieser Diskussion werden wir die Annahme, daß die Matrizen $A, B, C, \ldots$ quadratische Matrizen sind, fallen lassen und sie für diesen ganzen Paragraphen nur als rechteckige Matrizen voraussetzen, wobei natürlich, damit das Produkt AB „existiert", vorausgesetzt werden muß, daß die Kolonnenanzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Wir beweisen dann den Satz VII, aus dem insbesondere folgen wird, daß *im Falle quadratischer Matrizen die Norm* $|A|_p$ *für* $1 \leqq p \leqq 2$ *eine multiplikative Norm ist:*

Satz VII. *Existiert das Matrizenprodukt* AB *und ist* $1 \leqq p \leqq 2$, *so gilt*[7])

$$|AB|_p \leqq |A|_p |B|_p \qquad (1 \leqq p \leqq 2), \tag{15}$$

während (15) *für jedes* $p > 2$ *dann und nur dann allgemein*[8]) *gilt, wenn* A *aus einer einzigen Zeile und* B *aus einer einzigen Kolonne besteht.*

Für $p \geqq 2$ gelten aber zwei der Hölderschen Ungleichung analoge Relationen.

Satz VIII. *Ist* $p \geqq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *und existiert das Produkt* $C = AB$, *so gilt*

$$|AB|_p \leqq |A|_p |B|_q, \tag{16}$$

$$|AB|_p \leqq |A|_q |B|_p. \tag{17}$$

Dagegen gilt für jedes p *mit* $1 \leqq p < 2$ *die Relation* (16) *dann und nur dann allgemein, wenn die Matrix* B *aus einer einzigen Kolonne besteht. Analog gilt* (17) *für jedes* p *mit* $1 \leqq p < 2$ *dann und nur dann allgemein, wenn die Matrix* A *aus einer einzigen Zeile besteht.*

13. Im Falle einer *ungeraden* Anzahl von Faktoren gilt aber eine ähnliche Ungleichung für *alle* $p \geqq 1$:

Satz IX. *Ist* $u > 1$ *ungerade, und existiert das Produkt* $A_1 A_2 \ldots A_u$, *so gilt für* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|A_1 A_2 \ldots A_u|_p \leqq |A_1|_p |A_2|_q |A_3|_p \cdots |A_u|_p \qquad (p \geqq 1). \tag{18}$$

Ist aber $g > 0$ *gerade und sind die Matrizen* $A_1, \ldots, A_g$ *die allgemeinsten Matrizen mit den vorgegebenen Zeilen- und Kolonnenanzahlen, für die das Produkt* $A_1 \ldots A_g$ *existiert, so gilt allgemein die Relation*

$$|A_1 A_2 \ldots A_g|_p \leqq |A_1|_p |A_2|_q \cdots |A_{g-1}|_p |A_g|_q \tag{19}$$

dann und nur dann, wenn entweder $p \geqq 2$ *oder die Kolonnenanzahl in* A_g *gleich* 1 *ist.*

Über die zu (17) analoge Ungleichung gilt der

Satz X. *Sind* $A_1, \ldots, A_l$ l *allgemeinste Matrizen mit vorgegebenen Zeilen- und Kolonnenanzahlen, deren Produkt existiert, so gilt im Falle eines ungeraden* l

$$|A_1 A_2 \ldots A_l|_p \leqq |A_1|_q |A_2|_p \cdots |A_l|_q \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{20}$$

---

[7]) Für $p = 2$ wurden diese Ungleichungen schon seit längerer Zeit verwendet (vgl. OSTROWSKI [*1*]).

[8]) Wir sagen hier (und später), daß eine solche Relation „allgemein" gilt, wenn sie für *alle* Matrizen mit festen Zeilen- und Kolonnenanzahlen gilt.

dann und nur dann allgemein, wenn entweder $p \geqq 2$ *oder die Zeilenanzahl in* A_1 *und die Kolonnenanzahl in* A_l *beide gleich* 1 *sind. Für ein gerades* g *gilt aber*

$$(20^\circ) \qquad |A_1 A_2 \ldots A_g|_p \leqq |A_1|_q \, |A_2|_p \ldots |A_g|_p \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

allgemein dann und nur dann, wenn entweder $p \geqq 2$ *oder die Zeilenanzahl in* A_1 *gleich* 1 *ist.*

— Übrigens ergeben sich im Text die Beweise der Unmöglichkeitsbehauptungen der Sätze VII bis X, indem man sämtliche Elemente der Matrizen gleich 1 setzt.

Unsere Beweise der obigen Sätze machen fortgesetzt Gebrauch von der folgenden speziellen Norm der Matrix A:

$$(21) \qquad |A|_{q,p} = \left[\sum_\nu \left(\sum_\mu |a_{\mu\nu}|^q\right)^{p/q}\right]^{1/p} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

über die im § 3 verschiedene Hilfsformeln (3.9), (3.10), (3.11) und (3.12) hergeleitet werden. Diese spezielle Norm kann aber auch bei gewissen Abschätzungen von Matrizenpotenzreihen verwendet werden. Wir beweisen daher noch den

Satz XI. *Ist* A *eine quadratische Matrix, so gilt für jedes natürliche* l

$$(22) \qquad |A^l|_p \leqq |A|_p \, |A|_{q,p}^{l-1} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Sind allgemeiner $A_1, \ldots, A_l$ *rechteckige Matrizen, deren Produkt* $A_1 \ldots A_l$ *existiert, so gilt*

$$(23) \qquad |A_1 \ldots A_l|_p \leqq |A_1'|_{q,p} \ldots |A_{k-1}'|_{q,p} \, |A_k|_p \, |A_{k+1}|_{q,p} \ldots |A_l|_{q,p},$$

wo k *auch gleich* 1 *oder* l *sein kann.*

Endlich geben wir zum Schluß des § 3 verschiedene vereinzelte Formeln für die Schrankennormen, die zu den Hölderschen Vektornormen gehören.

§ 1. Multiplikative Normen.

14. Aus I_M und IV_M folgt für $A = A_0$ und $B = E$, wo E die Einheitsmatrix bedeutet, $M(A_0) \leqq M(A_0) M(E)$,

$$(1.1) \qquad M(E) \geqq 1.$$

15. Wir verstehen im folgenden unter $E_{\mu\nu}$ die Matrix, bei der das in der μ-ten Zeile und der ν-ten Kolonne stehende Element gleich 1 ist, während alle übrigen Elemente verschwinden. Dann gelten für jedes $A = (a_{\mu\nu})$ die allgemeinen Formeln

$$(1.2) \qquad A = \sum_{\sigma,\varkappa} a_{\sigma\varkappa} E_{\sigma\varkappa},$$

$$(1.3) \qquad E_{\mu\nu} A = \sum_\varkappa a_{\nu\varkappa} E_{\mu\varkappa}.$$

Um (1.3) aus (1.2) herzuleiten, genügt es zu beachten, daß allgemein, unter $\delta_{\sigma\nu}$ das Kroneckersche Symbol verstanden, gilt

$$(1.4) \qquad E_{\mu\nu} E_{\sigma\varkappa} = \delta_{\nu\sigma} E_{\mu\varkappa}.$$

Multiplizieren wir (1.3) rechtsseitig mit $E_{\sigma\mu}$ und beachten (1.4) für $\varkappa=\mu$, so folgt, wegen $E_{\mu\varkappa}E_{\sigma\mu}=\delta_{\varkappa\sigma}E_{\mu\mu}$,

$$E_{\mu\nu}AE_{\sigma\mu}=a_{\nu\sigma}E_{\mu\mu}. \tag{1.5}$$

Ersetzen wir in (1.5) A durch $E_{\nu\nu}$ und setzen $\sigma=\nu$, so ergibt sich

$$E_{\mu\nu}E_{\nu\nu}E_{\nu\mu}=E_{\mu\mu}. \tag{1.6}$$

16. Wegen $\sum_{\nu=1}^{n}E_{\nu\nu}=E$, wo E die Einheitsmatrix ist, folgt nach III_M und (1.1)

$$\sum_{\nu=1}^{n}M(E_{\nu\nu})>0.$$

Daher ist $M(E_{\mu\mu})$ für wenigstens ein μ positiv. Aus (1.6) folgt aber wegen IV_M

$$M(E_{\mu\mu})\leqq M(E_{\mu\nu})\,M(E_{\nu\nu})\,M(E_{\nu\mu}), \tag{1.7}$$

so daß *alle* $M(E_{\mu\mu})$ positiv sind. Sodann folgt aber weiter aus (1.7), *daß* $M(E_{\mu\nu})$ *für alle* μ *und* ν *positiv ist.*

17. Wenden wir nun IV_M auf (1.5) an, so ergibt sich

$$|a_{\nu\sigma}|\,M(E_{\mu\mu})\leqq M(E_{\mu\nu})\,M(E_{\sigma\mu})\,M(A). \tag{1.8}$$

Man setze nun

$$p=\underset{\mu,\nu}{\mathrm{Min}}\,M(E_{\mu\nu}),\qquad P=\underset{\mu,\nu}{\mathrm{Max}}\,M(E_{\mu\nu}).$$

Wählen wir dann ν und σ in (1.8) so, daß $|a_{\nu\sigma}|=\underset{\mu,\nu}{\mathrm{Max}}|a_{\mu\nu}|=N^*(A)$ ist, so folgt schließlich für $A\neq 0$

$$M(A)\geqq\frac{p}{P^2}N^*(A)>0,$$

so daß für $M(A)$ auch das Postulat I_N erfüllt ist. Damit ist der Satz I bewiesen.

18. Es sei nun ξ ein Eigenvektor von A, zu einer Fundamentalwurzel λ von A mit $|\lambda|=\lambda_A$ (vgl. Nr. 6) gehörend; dann gilt die Relation $A\xi=\lambda\,\xi$, die sich in den Bezeichnungen der Nr. 10 auch in der Form $AA_\xi=\lambda A_\xi$ schreiben läßt. Daraus folgt aber wegen II_M und IV_M

$$|\lambda|\,M(A_\xi)\leqq M(A)\,M(A_\xi),$$

und da $M(A_\xi)>0$ ist, folgt daraus

$$M(A)\geqq\lambda_A, \tag{1.9}$$

d.h. die Behauptung von Satz II.

19. Endlich ergibt sich der Satz III unmittelbar. In der Tat gilt nach (5)

$$\frac{h_M(A\xi)}{h_M(\xi)}=\frac{M(AA_\xi)}{M(A_\xi)}\leqq\frac{M(A)\,M(A_\xi)}{M(A_\xi)}=M(A),$$

und (6) ergibt sich dann ohne weiteres aus der Definition (3).

In der Nr. 9 ist für allgemeine, durch die Formel (2) definierte Schrankennormen die Gültigkeit des Multiplikationspostulates IV_M nur im Falle der symmetrischen Schrankennormen bewiesen worden. Im Falle der allgemeinen zu zwei Vektornormen h und h_1 gehörenden Schrankennormen gilt indessen eine etwas anders beschaffene „Multiplikationsrelation". Existiert nämlich das Produkt AB und sind h_1, h_2 und h_3 drei Vektornormen, so gilt

$$S_{h_1,h_3}(AB) \leq S_{h_1,h_2}(A)\, S_{h_2,h_3}(B), \tag{1.10}$$

sofern die Dimensionen von h_1, h_2, h_3 bzw. der Zeilenanzahl von A, der Zeilenanzahl von B und der Kolonnenanzahl von B gleich sind. In der Tat ist ja

$$\frac{h_1(AB\xi)}{h_3(\xi)} = \frac{h_1(AB\xi)}{h_2(B\xi)} \cdot \frac{h_2(B\xi)}{h_3(\xi)},$$

woraus (1.10) sofort folgt.

— Im Falle, daß die Normen h_1, h_2, h_3 als Quadratwurzeln aus positiven hermiteschen Formen in den Vektorkomponenten definiert werden, ist die Relation (1.10) von GAUTSCHI ([3], p. 4, Formel (15)) gegeben worden.

§ 2. Allgemeine Normen.

20. Wir beweisen nunmehr den Satz IV. Aus (1.2), II_N und III_N folgt

$$N(A) \leq \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}| N(E_{\mu\nu}) \tag{2.1}$$

und daher

$$|N(A) - N(B)| \leq \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}|\, N(E_{\mu\nu}). \tag{2.2}$$

Daher ist $N(A)$ *stetig in den* $a_{\mu\nu}$, und zugleich gilt

$$N(A) \leq N^*(A) \sum_{\mu,\nu} N(E_{\mu\nu}) = p_2 N^*(A),\ p_2 = \sum_{\mu,\nu} N(E_{\mu\nu}).$$

Andererseits existiert wegen der Stetigkeit von $N(A)$ auf der abgeschlossenen Menge $\operatorname{Max}_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}| = 1$ das

$$\operatorname{Min} N(A) = p_1$$

und ist positiv; daher gilt dann allgemein

$$N(A) \geq p_1 N^*(A),$$

und (7) ist bewiesen.

21. Wir kommen nunmehr zum Beweis des Satzes V. Es möge A durch die Matrix S auf die Jordansche Normalform [9]) entsprechend den Elementarteilern (8) transformiert werden:

$$T = SAS^{-1} = T_1 \dotplus T_2 \dotplus \ldots \dotplus T_k. \tag{2.3}$$

Hierbei *zerfällt* also T *vollständig* in die k quadratischen Matrizen $T_\varkappa$, wo $T_\varkappa$ eine Matrix der Ordnung $m_\varkappa$ ist, die zum Elementarteiler $(\lambda - \lambda_\varkappa)^{m_\varkappa}$ gehört. Jede dieser einzelnen Matrizen $T_\varkappa$ ist gleich

$$\lambda_\varkappa E_{m_\varkappa} + U_{m_\varkappa},$$

[9]) Vgl. z.B. SCHREIER und SPERNER [1], pp. 126—129, sowie namentlich TURNBULL and AITKEN [1], pp. 58—63.

wo $E_{m_\varkappa}$ die Einheitsmatrix der Ordnung $m_\varkappa$ ist, während $U_{m_\varkappa}$ eine quadratische Matrix der Ordnung $m_\varkappa$ ist, in der längs der Hauptdiagonalen und darunter lauter Nullen stehen, in der nächsten Superdiagonalen lauter Einsen und darüber wiederum lauter Nullen. Das Element $u_{\mu\nu}$ von $U_{m_\varkappa}$ ist also gegeben durch das Kroneckersche Symbol $\delta_{\nu,\mu+1}$.

Man beachte, daß wenn eine solche Matrix $U_{m_\varkappa}$ in die Potenz σ $(\sigma = 2, 3, \ldots)$ erhoben wird, dann eine Matrix entsteht, die in der σ-ten Superdiagonalen lauter Einsen hat und sonst durchweg Nullen. Die Elemente $u_{\mu\nu}^{(\sigma)}$ von $U_{m_\varkappa}^\sigma$ sind daher gegeben durch $\delta_{\nu,\mu+\sigma}$. Insbesondere enthält $U_{m_\varkappa}^{m_\varkappa-1}$ nur eine Einheit in der rechten oberen Ecke und sonst durchweg Nullen, während $U_{m_\varkappa}^\sigma$ für $\sigma \geqq m_\varkappa$ verschwindet.

22. Daher gilt

$$(\lambda_\varkappa E_{m_\varkappa} + U_{m_\varkappa})^t$$
$$= \lambda_\varkappa^t \left[E_{m_\varkappa} + \binom{t}{1} \lambda_\varkappa^{-1} U_{m_\varkappa} + \binom{t}{2} \lambda_\varkappa^{-2} U_{m_\varkappa}^2 + \cdots + \binom{t}{m_\varkappa - 1} \lambda_\varkappa^{-m_\varkappa+1} U_{m_\varkappa}^{m_\varkappa-1}\right].$$

Daraus folgt für den maximalen absoluten Betrag eines Elementes der Matrix links die für hinreichend große t geltende Relation

$$N^*(T_\varkappa^t) = \binom{t}{m_\varkappa - 1} |\lambda_\varkappa|^{t-m_\varkappa+1}.$$

Darüber hinaus gilt für $t \to \infty$ offenbar

$$T_\varkappa^t = \binom{t}{m_\varkappa - 1} \lambda_\varkappa^{t-m_\varkappa+1} E_{1 m_\varkappa}^{(\varkappa)} + O(t^{m_\varkappa-2} |\lambda_\varkappa|^t),$$

wo $E_{1m_\varkappa}^{(\varkappa)}$ eine quadratische Matrix der Ordnung $m_\varkappa$ ist, die in der rechten oberen Ecke eine Eins enthält und sonst lauter Nullen.

23. Nunmehr folgt aus (2.3) für hinreichend große t

$$N^*(T^t) = \operatorname*{Max}_\varkappa \binom{t}{m_\varkappa - 1} |\lambda_\varkappa|^{t-m_\varkappa+1} = \lambda_A^t \operatorname*{Max}_{\varkappa \leqq s} \binom{t}{m_\varkappa - 1} \lambda_A^{-m_\varkappa+1} = \binom{t}{M-1} \lambda_A^{t-M+1},$$

$$N^*(T^t) = \binom{t}{M-1} \lambda_A^{t-M+1} \tag{2.4}$$

und, $\lambda_\nu/\lambda_A = \varepsilon_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ gesetzt,

$$T^t = \binom{t}{M-1} \lambda_A^{t-M+1} [E_{1M}\, \varepsilon_1^{t-M+1} + E_{M+1,2M}\, \varepsilon_2^{t-M+1} + \cdots +$$
$$+ E_{(s-1)M+1,sM}\, \varepsilon_s^{t-M+1}] + O(t^{M-2} \lambda_A^t),$$

wo nunmehr die Symbole $E_{\mu\nu}$ die in der Nr. 15 festgelegte Bedeutung haben. Daraus folgt im Falle, daß die Relation (12) gilt, da ja dann alle ε_ν einander gleich sind,

$$T^t = \binom{t}{M-1} \lambda_1^{t-M+1} \sum_{\sigma=1}^{s} E_{(\sigma-1)M+1,\sigma M} + O(t^{M-2} \lambda_A^t). \tag{2.5}$$

24. Wegen (2.3) gilt $T^t = SA^t S^{-1}$, $A^t = S^{-1} T^t S$ für jedes natürliche t und daraus folgt für

$$(2.6)\qquad \begin{cases} S = (s_{\mu\nu}), \quad S^{-1} = (s'_{\mu\nu}), \quad \sigma = \sum\limits_{\mu,\nu} |s_{\mu\nu}| \sum\limits_{\mu,\nu} |s'_{\mu\nu}| : \\ N^*(T^t) \leqq \sigma N^*(A^t), \quad N^*(A^t) \leqq \sigma N^*(T^t) \end{cases}$$

und daher wegen (2.4)

$$(2.7)\qquad \frac{1}{\sigma} \leqq \frac{N^*(A^t)}{\binom{t}{M-1} \lambda_A^{t-M+1}} \leqq \sigma,$$

womit wegen (7) auch (11) bewiesen ist.

25. Andererseits folgt aus (2.5) für $t \to \infty$

$$\frac{A}{\binom{t}{M-1} \lambda_1^{t-M+1}} = C + O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad C = \sum_{\sigma=1}^{s} S^{-1} E_{(\sigma-1)M+1,\sigma M} S.$$

Daher gilt wegen II_N in Nr. 3 für $t \to \infty$

$$\frac{N(A^t)}{\binom{t}{M-1} \lambda_A^{t-M+1}} \to N(C).$$

Wäre nun $N(C) = 0$, so wäre $N(A^t) = o(t^{M-1} \lambda_A^t)$, entgegen (2.7). Daher folgt die zweite Behauptung des Satzes V unmittelbar[10]).

§ 3. Höldersche Normen.

26. Von nun an sollen die Matrizen $A, B, \ldots$ nur als rechteckige Matrizen vorausgesetzt werden. Auch für solche Matrizen, z. B. Matrizen vom $(m \times n)$-Typus, d. h. mit m Zeilen und n Kolonnen, soll der Normbegriff durch die Postulate I_N bis III_N der Nr. 3 definiert werden. Eine solche Norm kann z. B. in sehr allgemeiner Weise aus gegebenen Vektornormen für n- und m-dimensionale Vektoren gebildet werden. Es seien $h_1(\xi), \ldots, h_n(\xi)$ n gleiche oder verschiedene Vektornormen für m-dimensionale Vektoren ξ und es sei $h(\eta)$ eine Vektornorm für n-dimensionale Vektoren η. $h(\eta)$ soll ferner die Eigenschaft haben, daß sie für nicht negative Komponenten $y_1, \ldots, y_n$ von η eine nicht abnehmende Funktion dieser Komponenten ist. Bezeichnen wir dann mit ξ_ν den ν-ten Kolonnenvektor der Matrix A, so daß also

$$\xi_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots, a_{m\nu})$$

ist, so setze man

$$(3.1)\qquad H(A) = h[h_1(\xi_1), h_2(\xi_2), \ldots, h_n(\xi_n)].$$

Damit ist eine Norm von A definiert.

---

10) Wir hätten anstatt der Jordanschen Normalform auch z. B. die explizite Darstellung von A^t, wie sie sich bei H. Schmidt ([1], p. 549, Formel (9)) findet, benutzen können, doch wäre hierzu erst eine weitere Diskussion der in diese Formel eingehenden Vektoren notwendig.

27. In der Tat, daß die Postulate I_N und II_N der Nr. 3 erfüllt sind, ist unmittelbar klar. Bei III_N ergibt sich dies aber wie folgt: Es sei A^0 eine weitere $(m\times n)$-Matrix und es seien ihre Kolonnenvektoren $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$. Dann ergibt sich wegen (3.1) unter Benutzung der Postulate der Nr. 7:

$$\begin{aligned} H(A+A^0) &= h[h_1(\xi_1+\xi_1^0), \ldots, h_n(\xi_n+\xi_n^0)] \leq \\ &\leq h[h_1(\xi_1)+h_1(\xi_1^0), \ldots, h_n(\xi_n)+h_n(\xi_n^0)] \leq \\ &\leq h[h_1(\xi_1), \ldots, h_n(\xi_n)] + h[h_1(\xi_1^0), \ldots, h_n(\xi_n^0)] = H(A)+H(A^0). \end{aligned}$$

28. Definieren wir z.B. allgemein für einen k-dimensionalen Vektor ξ und für ein p, $1\leq p\leq\infty$,

$$|\xi|_p = \Big(\sum_\varkappa |x_\varkappa|^p\Big)^{1/p} \qquad (1\leq p\leq\infty), \tag{3.2}$$

wobei natürlich für $p=\infty$, $|\xi|_\infty = \operatorname*{Max}_\varkappa |x_\varkappa|$ ist, so ist $|\xi|_p$ eine Norm im Sinne der Postulate der Nr. 7. Dabei folgt insbesondere das Postulat III_V aus der Minkowskischen Ungleichung.

Setzen wir nun insbesondere in (3.1) $h_\nu(\xi)=|\xi|_{p_1}$ und $h(\eta)=|\eta|_{p_2}$, so erhalten wir die Norm

$$|A|_{p_1,p_2} = \Big[\sum_\nu \Big(\sum_\mu |a_{\mu\nu}|^{p_1}\Big)^{p_2/p_1}\Big]^{1/p_2}, \tag{3.3}$$

wo p_1 und p_2 zwischen 1 und ∞ liegen. Andererseits ergibt sich, wenn (3.2) auf den Fall $k=m\,n$ angewandt wird, daß der für eine Matrix A durch (14) definierte Ausdruck für $1\leq p\leq\infty$ eine Norm ist.

Man beachte, daß während $|A|_p$ beim Übergang zur transponierten Matrix unverändert bleibt, $|A'|_p=|A|_p$, dies bei der Norm (3.3) im allgemeinen nicht der Fall ist. — Ist die Kolonnenanzahl in A gleich 1, so gilt, wie man sich sofort überzeugt,

$$|A|_{p_1,p_2} = |A|_{p_1}.$$

29. Mit Hilfe von (3.2) läßt sich die Höldersche Ungleichung so formulieren: Gilt

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad 1\leq p\leq\infty, \tag{3.4}$$

so gilt für das innere Produkt

$$(\xi,\eta) = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \bar{y}_\nu \tag{3.5}$$

der Vektoren ξ,η der Dimension n, die Relation

$$|(\xi,\eta)| \leq |\xi|_p\,|\eta|_q. \tag{3.6}$$

Andererseits gilt bekanntlich, daß der Ausdruck (3.2) *mit zunehmendem* $p\geq 1$ *monoton abnimmt.* (Diese Tatsache ist zuerst von A. PRINGSHEIM angegeben worden (vgl. HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA [*1*], p. 28).)

Ist nun $p\leq 2$, so ist wegen (3.4) $q\geq 2$, $p\leq q$, so daß

$$|\xi|_q \leq |\xi|_p \qquad (p\leq 2\leq q) \tag{3.7}$$

gilt. Daher folgt nunmehr aus (3.6), wenn (3.7) auf η angewendet wird,

$$|(\xi,\eta)| \leq |\xi|_p\, |\eta|_p \qquad (1 \leq p \leq 2). \tag{3.8}$$

30. Wir beweisen nun einen Hilfssatz über den Ausdruck (3.3) unter der Annahme, daß $p_1 = q$ und $p_2 = p$ durch die Relation (3.4) verknüpft sind.

Hilfssatz. *Gilt (3.4), so gilt für zwei Matrizen A, B, für die das Produkt AB existiert:*

$$|AB|_{q,p} \leq |A|_q\, |B|_p. \tag{3.9}$$

Ist aber darüber hinaus $p \geq 2$, so gilt

$$|A|_{q,p} \leq |A|_q \qquad (p \geq 2). \tag{3.10}$$

31. *Beweis.* Es sei A eine $(m \times k)$- und B eine $(k \times n)$-Matrix. Dann ist $AB = C = (c_{\mu\nu})$ eine $(m \times n)$-Matrix und es gilt wegen $c_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varkappa} a_{\mu\varkappa} b_{\varkappa\nu}$ nach (3.6), wenn dort p mit q vertauscht wird und beide Seiten in die q-te Potenz erhoben werden,

$$|c_{\mu\nu}|^q \leq \Big(\sum_{\varkappa} |a_{\mu\varkappa}|^q\Big) \Big(\sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^p\Big)^{q/p}$$

und daher, wenn nach μ summiert wird, wegen (14),

$$\sum_{\mu} |c_{\mu\nu}|^q \leq |A|_q^q \Big(\sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^p\Big)^{q/p},$$

$$\Big(\sum_{\mu} |c_{\mu\nu}|^q\Big)^{p/q} \leq |A|_q^p \sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^p,$$

und wenn hier über ν summiert wird, wegen (3.3) und (14),

$$|AB|_{q,p}^p \leq |A|_q^p\, |B|_p^p,$$

womit (3.9) bewiesen ist.

32. Andererseits läßt sich, wenn

$$y_\nu = \Big(\sum_{\mu} |a_{\mu\nu}|^q\Big)^{1/q},$$

gesetzt wird, $|A|_{q,p}$ schreiben als

$$|A|_{q,p} = \Big(\sum_{\nu} y_\nu^p\Big)^{1/p}$$

und dies ist, wenn $p \geq 2 \geq q$ ist, nach (3.7), wenn dort p mit q vertauscht wird, höchstens gleich

$$\Big(\sum_{\nu} y_\nu^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{\nu,\mu} |a_{\mu\nu}|^q\Big)^{1/q} = A_q,$$

womit (3.10) bewiesen ist.

33. Um nun den Satz VII zu beweisen, nehmen wir an, daß A eine $(m \times k)$- und B eine $(k \times n)$-Matrix ist. Ist dann $c_{\mu\nu}$ das allgemeine Element von $C = AB$, so gilt $c_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varkappa} a_{\mu\varkappa} b_{\varkappa\nu}$ und daher wegen (3.8) für $p \leq 2$

$$|c_{\mu\nu}|^p \leq \sum_{\varkappa} |a_{\mu\varkappa}|^p \sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^p.$$

Summieren wir hier über μ und ν, so folgt

$$|C|_p^p \leq |A|_p^p |B|_p^p,$$

woraus (15) unmittelbar folgt.

34. Ist aber $p > 2$, so wählen wir als Matrizen A und B die Matrizen, deren sämtliche Elemente gleich 1 sind. Dann ist $c_{\mu\nu} = k$ und

$$|A|_p = (m\,k)^{1/p}, \qquad |B|_p = (n\,k)^{1/p}, \qquad C_p = k\,(m\,n)^{1/p}.$$

Hier liefe die Relation (15) hinaus auf

$$(m\,n)^{1/p}\,k \leq m^{1/p}\,k^{1/p}\,n^{1/p}\,k^{1/p},$$

was für $p > 2$ unmöglich ist, solange $k > 1$ ist. Für $k = 1$ dagegen ist (15) offenbar für alle $p \geq 1$ richtig, sogar mit dem Gleichheitszeichen. Damit ist der Satz VII bewiesen.

35. Es sei wiederum A eine $(m \times k)$- und B eine $(k \times n)$-Matrix. Dann gilt nach (3.6) für $c_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varkappa} a_{\mu\varkappa} b_{\varkappa\nu}$:

$$|c_{\mu\nu}|^p \leq \sum_{\varkappa} |a_{\mu\varkappa}|^p \Big(\sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^q\Big)^{p/q}$$

und daher, wenn nach μ und ν summiert wird, wegen (3.3)

$$|A\,B|_p^p \leq |A|_p^p \sum_{\nu} \Big(\sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^q\Big)^{p/q} = |A|_p^p\,|B|_{q,p}^p,$$

$$|A\,B|_p \leq |A|_p\,|B|_{q,p} \qquad \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big). \tag{3.11}$$

Andererseits folgt wiederum aus (3.6), wenn dort p mit q vertauscht wird:

$$|c_{\mu\nu}|^p \leq \sum_{\varkappa} |b_{\varkappa\nu}|^p \Big(\sum_{\varkappa} |a_{\mu\varkappa}|^q\Big)^{p/q},$$

und daraus durch Summation nach μ und ν

$$|A\,B|_p^p \leq |B|_p^p \sum_{\mu} \Big(\sum_{\varkappa} |a_{\mu\varkappa}|^q\Big)^{p/q}.$$

Der zweite Faktor rechts ist aber gleich $|A'|_{q,p}^p$, unter A' die zu A gehörende transponierte Matrix verstanden, so daß wir schließlich erhalten

$$|A\,B|_p \leq |B|_p\,|A'|_{q,p}. \tag{3.12}$$

36. Ist nun $p \geq 2$, so folgt aus (3.11) und (3.10), auf B angewandt, die Relation (16). Aus (3.12) und (3.10) folgt aber

$$|A\,B|_p \leq |B|_p\,|A'|_q = |B|_p\,|A|_q,$$

womit auch (17) bewiesen ist.

37. Ist jetzt $p < 2$, so spezialisiere man A und B wiederum zu Matrizen, deren sämtliche Elemente gleich 1 sind. Dann gelten die Relationen

$$|A|_p = (m\,k)^{1/p}, \qquad |B|_q = (n\,k)^{1/q}, \qquad |C|_p = k\,(m\,n)^{1/p}.$$

Dann liefe die Ungleichung (16) hinaus auf

$$k\,(m\,n)^{1/p} \leq m^{1/p}\,k^{1/p}\,n^{1/q}\,k^{1/q},$$

d.h. wegen (3.4) auf $n^{1/p} \leq n^{1/q}$, was für $n > 1$, $p < 2$ unmöglich ist. Ebenso ist (17) für $m > 1$, $p < 2$ unmöglich.

38. Ist aber $n = 1$, so folgt aus der Definition (3.3), daß $|B|_{q,p} = |B|_q$, so daß (16) für alle $p \geqq 1$ aus (3.11) folgt. Ebenso reduziert sich für $m = 1$, $|A'|_{q,p}$ auf $|A'|_q = |A|_q$, so daß dann (17) aus (3.12) für alle $p \geqq 1$ folgt. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

39. Um die Relation (18) des Satzes IX zu beweisen, beachte man, daß aus (3.11) folgt

$$(3.13) \qquad |A_1 A_2 \ldots A_u|_p \leq |A_1|_p \, |A_2 \ldots A_u|_{q,p}$$

und daher, wenn auf den zweiten Faktor rechts (3.9) angewendet wird,

$$(3.14) \qquad |A_1 A_2 \ldots A_u|_p \leq |A_1|_p \, |A_2|_q \, |A_3 \ldots A_u|_p,$$

woraus (18) durch vollständige Induktion hervorgeht.

40. Soll nun die Relation (19) allgemein gelten und ist A_1 eine $(m \times k_1)$-, A_2 eine $(k_1 \times k_2)$-, $\ldots$, A_g eine $(k_{g-1} \times n)$-Matrix, so spezialisiere man alle diese Matrizen in der Weise, daß ihre sämtlichen Elemente gleich 1 gesetzt werden. Dann ist das Produkt eine $(m \times n)$-Matrix, deren sämtliche Elemente gleich $k_1 k_2 \ldots k_{g-1}$ sind. Daher wird die linke Seite von (19) gleich

$$(m\,n)^{1/p} k_1 k_2 \ldots k_{g-1},$$

während das Produkt rechts in (19) zu

$$(m\,k_1)^{1/p} (k_1 k_2)^{1/q} \ldots (k_{g-2} k_{g-1})^{1/p} (k_{g-1} n)^{1/q} = m^{1/p} n^{1/q} k_1 \ldots k_{g-1}$$

wird. Aus (19) folgt aber dann $n^{1/p} \leq n^{1/q}$, was nur für $n = 1$ oder $p \geqq 2 \geqq q$ gelten kann.

Um aber einzusehen, daß in den beiden letzten Fällen (19) gilt, beachte man, daß im Falle eines geraden g genau wie oben aus (3.13) und (3.14) durch vollständige Induktion die Formel

$$(3.15) \qquad |A_1 A_2 \ldots A_g|_p \leq |A_1|_p \, |A_2|_q \cdots |A_{g-1}|_p \, |A_g|_{q,p}$$

folgt. Für $p \geqq 2$ folgt aber dann (19) aus (3.10) und für $n = 1$ daraus, daß dann wegen (3.3) der letzte Faktor in (3.15) gleich $|A_g|_q$ wird. Damit ist Satz IX bewiesen.

41. Soll nun die Relation (20) des Satzes X allgemein gelten, so spezialisiere man die Matrizen $A_1, \ldots, A_l$ wiederum derart, daß ihre sämtlichen Elemente gleich 1 werden, und nehme die zugehörigen Zeilen- und Kolonnenanzahlen, wie in der Nr. 40, bzw. gleich $m, k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}, n$. Dann ist $A_1 \ldots A_l$ eine $(m \times n)$-Matrix, deren sämtliche Elemente gleich $k_1 \ldots k_{l-1}$ sind, so daß der Ausdruck links in (20) zu $(m\,n)^{1/p} k_1 \ldots k_{l-1}$ wird. Das Produkt rechts in (20) wird im Falle eines ungeraden l, wie in der Nr. 40, zu $(m\,k_1)^{1/q} (k_1 k_2)^{1/p} \ldots (k_{l-1} n)^{1/q}$, so daß hier (20) auf

$$(m\,n)^{1/p} \leq (m\,n)^{1/q}$$

hinausläuft, und wir entweder $m=n=1$ oder $p\geqq 2\geqq q$ erhalten. Für ein gerades l dagegen wird das Produkt rechts in (20) zu $(m\,k_1)^{1/q}(k_1 k_2)^{1/p}\ldots(k_{l-1}n)^{1/p}$ und (20) läuft auf

$$(m\,n)^{1/p}=m^{1/q}\,n^{1/p}$$

hinaus, so daß entweder $m=1$ oder $p\geqq 2\geqq q$ ist.

42. Ist andererseits $p\geqq 2$, so folgt aus (17)

$$|A_1\ldots A_l|_p\leqq|A_1|_q\,|A_2\ldots A_l|_p$$

und (20) bzw. (20°) folgt hier aus (18) oder (19), da ja auch die Relation (19) für $p\geqq 2$ gilt. Ist aber $m=1$, so folgt aus (3.12)

$$|A_1\ldots A_l|_p\leqq|A_2\ldots A_l|_p\,|A_1'|_{q,p}.$$

Der letzte Faktor ist aber gleich $|A_1'|_q=|A_1|_q$, da die Kolonnenzahl m in A_1' den Wert 1 hat. Daher folgt

$$|A_1\ldots A_l|_p\leqq|A_1|_q\,|A_2\ldots A_l|_p\qquad(m=1). \tag{3.16}$$

Ist nun g gerade, also die Faktorenzahl in $A_2\ldots A_g$ ungerade, so folgt (20°) aus (3.16) wegen (18). Ist dagegen l ungerade, so haben wir auch zugleich $n=1$ vorausgesetzt. In diesem Falle ist aber auf den zweiten Faktor rechts in (3.16) die Ungleichung (19) anzuwenden, so daß (20) folgt. Damit ist der Satz X bewiesen.

43. Zum Beweise des Satzes XI genügt es offenbar (23) zu beweisen, da (22) daraus für $A_1=A_2=\cdots=A_l$, $k=1$ ohne weiteres folgt. Nun folgt aber aus (3.12)

$$|A_1\ldots A_l|_p\leqq|A_1'|_{q,p}\,|A_2\ldots A_l|_p\leqq\cdots\leqq|A_1'|_{q,p}\cdots|A_{k-1}'|_{q,p}\,|A_kA_{k+1}\ldots A_l|_p.$$

Für den letzten Faktor rechts folgt durch wiederholte Anwendung von (3.11)

$$|A_k\ldots A_l|_p\leqq|A_k\ldots A_{l-1}|_p\,|A_l|_{q,p}\leqq\cdots\leqq|A_k\ldots A_{l-2}|_p\,|A_{l-1}|_{q,p}\,|A_l|_{q,p}\leqq\cdots\leqq$$
$$\leqq|A_k|_p\,|A_{k+1}|_{q,p}\cdots|A_l|_{q,p}.$$

Damit ist Satz XI bewiesen.

44. Wir wollen noch einige Angaben über diejenigen Schrankennormen [vgl. die Definition in (2)] hinzufügen, die zu den durch (3.2) definierten Hölderschen Vektornormen gehören. Wir setzen

$$S_{p_1,p_2}(A)=\operatorname{Sup}\frac{|A\xi|_{p_1}}{|\xi|_{p_2}}\qquad(1\leqq p_1,p_2\leqq\infty) \tag{3.17}$$

und ferner

$$S_p(A)=S_{p,p}(A)\qquad(1\leqq p\leqq\infty). \tag{3.18}$$

Aus dem in Nr. 29 erwähnten monotonen Abnehmen von (3.2) folgt, daß $S_{p_1,p_2}(A)$ eine *monoton abnehmende* Funktion von p_1 und eine *monoton zunehmende* Funktion von p_2 ist. Von den symmetrischen Schrankennormen

(3.18) lassen sich namentlich die $p=1$ und $p=\infty$ entsprechenden sehr einfach darstellen:

$$S_1(A) = \operatorname*{Max}_{\nu} \sum_{\mu} |a_{\mu\nu}|, \tag{3.19}$$

$$S_\infty(A) = \operatorname*{Max}_{\mu} \sum_{\nu} |a_{\mu\nu}|. \tag{3.20}$$

Diese beiden sehr leicht zu beweisenden Formeln werden häufig in der Iterationstheorie der Matrizen verwendet[11]).

45. Es ist von Interesse, den Wert der Norm (3.17) für $A=E$, wo E eine n-dimensionale Einheitsmatrix ist, zu bestimmen. Hierzu ist es offenbar notwendig das Extremalproblem zu lösen

$$\operatorname{Max}\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{p_1}\right)^{1/p_1} = \,? \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{p_2} = 1\right). \tag{3.21}$$

Ist $p_1 \geqq p_2$, so folgt aus der oben erwähnten Monotonieeigenschaft von $S_{p_1,p_2}(A)$, daß $S_{p_1,p_2}(E) \leqq S_{p_2,p_2}(E) = 1$ ist, und die Schranke 1 wird erreicht für $x_1=1$, $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$. Für $p_1<p_2$ liefert die Lagrangesche Multiplikatorenmethode sofort das Resultat, daß wenn keines der x_ν im Extremalpunkt verschwindet, $x_1=x_2=\cdots=x_n=n^{-1/p_2}$ und dafür $|\xi|_{p_1}=n^{1/p_1-1/p_2}>1$ ist. Wären aber einige der $x_\nu=0$, so hätte man hier n durch eine kleinere Zahl zu ersetzen, so daß sich schließlich ergibt:

$$S_{p_1,p_2}(E) = \begin{cases} 1 & (p_1 \geqq p_2) \\ n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} & (p_1 \leqq p_2). \end{cases} \tag{3.22}$$

46. Existiert das Matrizenprodukt AB, so folgt, wenn (18) auf das Zählerprodukt angewandt wird:

$$S_{p_1,p_2}(AB) = \operatorname{Sup} \frac{|AB\xi|_{p_1}}{|\xi|_{p_2}} \leqq |A|_{p_1} |B|_{q_1} S_{p_1,p_2}(E) \qquad \left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1\right)$$

und daher insbesondere wegen (3.22)

$$S_{p_1,p_2}(AB) \leqq |A|_{p_1} |B|_{q_1} \qquad (p_1 \geqq p_2). \tag{3.24}$$

Ferner folgt, wenn die Sätze VII und VIII auf $|A\xi|_{p_1}$ angewandt werden,

$$S_{p_1,p_2}(A) \leqq |A|_{p_1} S_{p_1,p_2}(E) \qquad (p_1 \leqq 2), \tag{3.25}$$

$$S_{p_1,p_2}(A) \leqq |A|_{p_1} S_{q_1,p_2}(E) \qquad (1 \leqq p_1 \leqq \infty), \tag{3.26}$$

$$S_{p_1,p_2}(A) \leqq |A|_{q_1} S_{p_1,p_2}(E) \qquad (p_1 \geqq 2). \tag{3.27}$$

Es sei endlich noch vermerkt, daß

$$S_{\infty,1}(A) = N^*(A) = \operatorname*{Max}_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}| \tag{3.28}$$

---

11) Vgl. z.B. FADDEJEWA [*1*], pp. 62, 63; NBSR pp. 85—87.

ist. In der Tat gilt

$$\frac{\operatorname*{Max}_{\mu} \left| \sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu \right|}{\sum_{\nu} |x_\nu|} \leq \operatorname*{Max}_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|,$$

und die Schranke rechts wird offenbar erreicht, wenn ein geeignetes der x_ν gleich 1 und alle übrigen gleich 0 gesetzt werden.

Literatur.

AITKEN, A. C., and H. W. TURNBULL: [*1*] An Introduction to the Theory of Canonical Matrices. London and Glasgow, Blackie and Son 1950. — FADDEJEWA, W. N.: [*1*] Numerische Methoden der linearen Algebra. Moskau 1950 (russisch). Eine Übersetzung des für uns vor allem in Frage kommenden 1. Kapitels des Buches ist veröffentlicht worden als National Bureau of Standards Report 1644, Computational methods of linear algebra, Ch. 1, Basic material from linear algebra, pp. V + 1—93 (Translator: C. D. Benster, Editor: G. E. Forsythe). Im Text werden wir die Zitate auf diese Übersetzung mit NBSR charakterisieren. — GAUTSCHI, WE.: [*1*] The asymptotic behaviour of powers of matrices. Duke Math. J. **20**, 127—140 (1953). — [*2*] The asymptotic behaviour of powers of matrices. II. Duke Math. J. **20**, 375—379 (1953). — [*3*] Bounds of matrices with regard to an Hermitian metric. Comp. Math. **12**, 1—16 (1954). — HARDY, LITTLEWOOD, PÓLYA: [*1*] Inequalities. Cambridge 1934. — OSTROWSKI, A.: [*1*] Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants. Bull. Sci. Math. (2) **61**, 1—14 (1937). — [*2*] Un nouveau théorème d'existence pour les systèmes d'équations. C. R. Acad. Sci. Paris **232**, 786—788 (1951). — RIESZ, F., et B. NAGY: [*1*] Lecons d'analyse fonctionelle, deuxième edition. Budapest 1953. — SCHMIDT, H.: [*1*] Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen. Math. Z. **52**, 547—556 (1950). — SCHREIER, O., u. E. SPERNER: [*1*] Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, Bd. II. Leipzig 1935.

Mathematische Anstalt der Universität Basel (Schweiz).

(Eingegangen am 24. Dezember 1954.)