

Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung*).

Von

Stefan Warschawski in Königsberg i. Pr.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	322
I. Kapitel. Anwendungen des Löwnerschen Satzes, Herleitung der Hauptungleichungen	338
§ 1. Der Löwnersche Satz	338
§ 2. Weitere Hilfssätze	349
§ 3. Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter	355
§ 4. Formulierung und Beweis der Hauptungleichungen	361
§ 5. Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2	376
§ 6. Heranziehung der Vergleichskurven	381
II. Kapitel. Der Hauptsatz über konforme Ecken und Anwendungen	386
§ 7. Formulierung des Hauptsatzes über konforme Ecken und Vor- bemerkungen	386
§ 8. Hilfssätze	392
§ 9. Beweis des Hauptsatzes. Zusätze und Ergänzungen	410
§ 10. Anwendungen des Hauptsatzes auf rektifizierbare Kurven	427
§ 11. Kurven mit stetiger Tangente. Lipschitzbedingungen für die Tangente	443
Anhang	452

*) Die vorliegende Arbeit wurde im Juli 1930 als Dissertation von der philo-
sophischen Fakultät der Universität Basel angenommen.

Einleitung.

Im folgenden bezeichne G ein von einer geschlossenen Jordankurve begrenztes Gebiet in der w -Ebene, $z = \varphi(w)$ eine Funktion, die G auf das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform abbildet. Bekanntlich hat H. A. Schwarz bewiesen, daß, wenn C eine analytische Kurve ist, $\varphi(w)$ auch noch auf der Randkurve C selber analytisch ist. Insbesondere ist dann also auch $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig und besitzt dort Ableitungen von beliebig hoher Ordnung. Painlevé¹⁾ hat nun (1891) zum ersten Male die Frage aufgeworfen, unter welchen allgemeineren Annahmen über die Randkurve C von G die Funktion $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig ist, und wann sie darüber hinaus dort Ableitungen — bis zu einer bestimmten Ordnung $p \geq 1$ — besitzt. Die Stetigkeit von $\varphi(w)$ in $G + C$ bewies er unter der Annahme, daß C stückweise stetige Tangente hat; sein auf die Existenz der Ableitungen bezügliches Resultat lautet folgendermaßen: *Ist C durchweg durch die Gleichung*

$$(1) \quad w = w(s) = x(s) + i y(s)$$

gegeben, wo s die längs C gezählte Bogenlänge ist, existieren ferner die Ableitungen $x^{(n+2)}(s)$, $y^{(n+2)}(s)$ und sind diese durchweg auf C stetig, so existiert durchweg in $G + C$ $\varphi^{(n)}(w)$ und ist dort stetig²⁾.

Später (1909) hat Herr Lichtenstein³⁾ über die erste Ableitung $\varphi'(w)$ von $\varphi(w)$ ein wesentlich schärferes Resultat hergeleitet: er zeigte, daß *bereits unter der Annahme, daß die Randkurve C von G stetig gekrümmt ist, $\varphi'(w)$ in $G + C$ existiert und stetig ist und daß darüber hinaus $\varphi'(w)$, das ja wegen der Schlichtheit der Abbildung $z = \varphi(w)$ in G nicht verschwindet, auch in $G + C$ nirgends gleich Null ist.* Insbesondere folgt hieraus, daß es zwei positive Zahlen μ_1 und μ_2 gibt, so daß für alle w in $G + C$

$$0 < \mu_1 \leq |\varphi'(w)| \leq \mu_2$$

gilt. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, die also den Einheitskreis auf G abbildet, so folgt hieraus offenbar die Existenz und Stetig-

¹⁾ P. Painlevé, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 112 (1891), p. 653—657. Dort wird auch auf seine Thèse hingewiesen.

²⁾ Sind die Annahmen dieser Sätze nur längs eines Bogens erfüllt, so gelten die in ihnen ausgesprochenen Behauptungen gleichfalls auf diesem Bogen. Wir haben die obige Formulierung nur der Kürze halber gewählt. Analoges gilt von den weiter unten genannten Sätzen von Lichtenstein, Kellogg und Lawrentieff.

³⁾ L. Lichtenstein, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Annalen 67 (1909), S. 559—575, s. insbesondere S. 561 bis 563. Dort wird dieser Satz als Hilfssatz für die weiteren Untersuchungen hergeleitet.

keit von $f'(z)$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leq 1$. Vorher hatte Herr Korn⁴⁾ dieses Ergebnis unter Hinzunahme weiterer Voraussetzungen über C hergeleitet.

Einige Jahre darauf (1912) hat O. D. Kellogg⁵⁾ die Frage nach der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von $\varphi(w)$ wieder aufgenommen und ist so zu noch weitergehenden Resultaten gelangt. Diese Frage, die ja, potentialtheoretisch formuliert, auf die Frage nach dem Verhalten der Ableitungen der Greenschen Funktion von G auf dem Rande hinausläuft, wird bei Kellogg im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung über das Verhalten der Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie und zwar über das Verhalten ihrer Ableitung auf dem Rande des Definitionsbereiches behandelt. Die in dieser Arbeit eingeschlagene Methode ist rein potentialtheoretisch und benutzt die Theorie der Integralgleichungen. Er bewies den folgenden Satz (der übrigens auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete gilt; wir formulieren ihn nur für unser einfach zusammenhängendes Gebiet G): *Die Randkurve C von G möge durchweg eine sich stetig drehende Tangente besitzen und unter Zugrundelegung der Bogenlänge als Parameter durch die Gleichung (1) dargestellt sein. Ferner möge $w(s)$ n -mal stetig differenzierbar sein und $w^{(n)}(s)$ möge darüber hinaus gleichmäßig auf C einer Lipschitzbedingung mit dem Exponenten α , $0 < \alpha < 1$, genügen*

$$|w^{(n)}(s_1) - w^{(n)}(s_2)| \leq K |s_1 - s_2|^\alpha \quad (K \text{ Konstante}).$$

Dann existieren durchweg in $G + C$ die Ableitungen $\varphi^{(\nu)}(w)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sind dort stetig, und es gilt darüber hinaus in $G + C$

$$|\varphi^{(n)}(w_1) - \varphi^{(n)}(w_2)| \leq K' |w_1 - w_2|^\alpha \quad (K' \text{ Konstante}).$$

Hieraus folgt insbesondere für $n = 1$ die Existenz und Stetigkeit von $\varphi'(w)$ in $G + C$. Darüber hinaus bewies Kellogg, daß $\varphi'(w)$ nirgends in $G + C$ verschwindet. Ferner zeigte Kellogg durch Angabe eines Beispiels, daß die Existenz einer endlichen oder von 0 verschiedenen ersten Ableitung noch keineswegs aus der Annahme der bloßen Stetigkeit der Tangente in der Umgebung des betrachteten Randpunktes allein folgt. (Er betrachtet die durch $z \lg z$ in der Umgebung des Nullpunktes vermittelte Abbildung geeigneter Gebiete.)

⁴⁾ A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie Bd. 2 (1901), S. 348–354. Herr Korn hat sich vor allem auch mit analogen Fragen im Raume beschäftigt (vgl. den Enzyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein).

⁵⁾ O. D. Kellogg, Harmonic functions and Greens integral, Transactions of the Americ. Math. Society 13 (1912), pp. 109–132. Siehe auch L. Lichtenstein, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, III, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.

Während in den bisher genannten Untersuchungen nach dem Verhalten der Ableitung von $\varphi(w)$ auf einem Bogen der Kurve C gefragt wird, längs dessen durchweg gewisse Regularitätseigenschaften der Kurve angenommen werden, kommt in der Literatur auch die Frage vor, wie sich die Ableitung von $\varphi(w)$ in einzelnen Punkten verhält, die gerade gegenüber ihrer Umgebung „singuläre“ Punkte sind. So hat Herr Lichtenstein⁶⁾ (ein Jahr vor dem Erscheinen der Kelloggschen Arbeit) die Frage nach dem Verhalten der Ableitung in einer Ecke aufgeworfen, die von zwei in einem Punkte $w = w_1$ von C zusammenstoßenden bis auf die Endpunkte analytischen Kurvenzweigen von C gebildet wird. Im Punkte w_1 erleidet die von 0 verschiedene Krümmung einen Sprung. Er bewies, daß, wenn die Ecke die Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, hat, in der Umgebung von w_1 für w in $G + C$

$$\varphi'(w) = (w - w_1)^{\frac{1}{\tau} - 1} \varphi_0(w)$$

ist, wo $\varphi_0(w)$ eine stetige Funktion und $\varphi_0(w_1) \neq 0$ ist. Analoge Sätze hat er auch für höhere Ableitungen hergeleitet. Aus diesem Resultat folgt leicht, daß der Grenzwert

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}},$$

der für eine Ecke einen Ersatz für die Ableitung bildet, existiert. Zwei Jahre später haben Osgood und Taylor⁷⁾ das obige Resultat von Herrn Lichtenstein auf anderem Wege bewiesen, und zwar mit einer Methode, die sich ohne weiteres auf Ecken anwenden läßt, die von zwei stetig gekrümmten Kurvenästen gebildet sind.

In neuerer Zeit (1927) hat Herr Lawrentieff⁸⁾ eine C. R.-Note veröffentlicht, in der er (ohne Beweis) unter anderm auch einige Resultate über das Randverhalten des Differenzenquotienten $\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right|$ mitteilt. Wir erwähnen vor allem den Satz, daß dieser Differenzenquotient zwischen zwei positiven Schranken bleibt, wenn C durchweg stetige Krümmung besitzt. Dieser Satz geht zwar weniger weit, als der entsprechende Satz von Kellogg; Herr Lawrentieff führt aber seinen Beweis, wie er angibt, auf rein funktionentheoretischem Wege, und zwar benutzt er einen Hilfssatz, den auch wir im folgenden verwenden werden (den Satz von Löwner § 1,

⁶⁾ L. Lichtenstein, Über die konforme Abbildung ebener, analytischer Gebiete mit Ecken, Journal für Mathematik 140 (1911), S. 100—119. Siehe auch den in Fußnote ⁵⁾ zitierten Encyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein.

⁷⁾ W. F. Osgood und E. H. Taylor, Transactions of the Americ. Math. Society 14 (1913), pp. 277—298, s. insbesondere S. 282—283.

⁸⁾ Lawrentieff, Sur la représentation conforme, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 184 (1927), p. 1407.

Satz A). Der Beweis von Herrn Lawrentieff hat vermutlich mit unserem Ansatz einige Berührungspunkte gemeinsam. — Ein weiteres Resultat, das sich auf Kurven mit stetiger Tangente bezieht, besprechen wir weiter unten (Kap. I, § 6, Satz 6).

Auf eine weitere Fragestellung, die mit den oben geschilderten Fragen zusammenhängt und in neueren Arbeiten der Herren J. Wolff, C. Carathéodory, E. Landau und G. Valiron behandelt worden ist, gehen wir weiter unten ein.

Die vorliegenden Untersuchungen sind nun aus den Versuchen hervorgegangen, den Kelloggschen Satz und vor allem den auf die erste Ableitung bezüglichen Teil dieses Satzes auf rein funktionentheoretischem Wege zu beweisen. Diese Versuche lassen sich an eine allgemeinere Fragestellung anknüpfen, die wir in folgendem behandeln und so formulieren wollen: *Die Randkurve C möge in einem Punkte P ($w = w_1$) eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzen. Bekanntlich ist $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig. Wie verhält sich dann der „Differenzenquotient“*

$$(2) \quad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}},$$

wenn $w \rightarrow w_1$ ($w \neq w_1$) in $G + C$ konvergiert? (Für $\tau = 1$ ist (2) der gewöhnliche Differenzenquotient von $\varphi(w)$ in $w = w_1$.) Insbesondere handelt es sich dann darum, möglichst einfache geometrische Bedingungen über die Natur der Randkurve C in der Umgebung von w_1 dafür anzugeben, daß (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt — wir sagen dann, C besitzt in P eine „konforme Ecke“⁹⁾ — und daß ferner der $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ existiert. — Nachdem wir so Kriterien für die Existenz der Ableitung gefunden haben, fragen wir weiter, wann diese längs eines Bogens von C stetig ist. In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns nur mit der Untersuchung der auf die erste Ableitung bezüglichen Fragen. Das Verhalten der höheren Ableitungen soll einer zweiten, dieser folgenden Mitteilung vorbehalten werden.

Es sei hier noch gleich auf eine etwas andere Auffassung dieser Fragestellung hingewiesen. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, so liefert $f(e^{i\vartheta})$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, eine Parameterdarstellung der Kurve C mittels des Parameters ϑ , die in gewisser Beziehung als eine „natürliche“ Parameterdarstellung der Kurve C angesehen werden kann, da sie ja immer

⁹⁾ Der Begriff der konformen Ecke sowie der weiter unten zu besprechende Begriff der generalisierten konformen Ecke wurde von Herrn Ostrowski in seiner Arbeit: Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math. 53 (1929), S. 234 bzw. S. 244, 245 eingeführt.

vorhanden ist und bekanntlich gewisse ausgezeichnete Eigenschaften besitzt. Die obige Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten (2) nach oben und unten bzw. nach der Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ läuft im wesentlichen, wenn $f(1) = w_1$ angenommen wird, auf die Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten $\frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(1)|}{|\vartheta|^\tau}$ nach oben und unten bzw. auf die Existenz des $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ hinaus. Es sei nun $w(t)$, $-T \leq t < T$, eine andere Parameterdarstellung unserer Kurve C , $w(0) = w_1$. Man kann dann insbesondere fragen, ob aus der Beschränktheit von $\left| \frac{w(t) - w(0)}{t^\tau} \right|$ nach oben und unten bzw. der Existenz eines endlichen und von 0 verschiedenen $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|^\tau}$ auch die entsprechenden Tatsachen für $\frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ folgen, d. h. ob der durch die konforme Abbildung gelieferte Parameter ebenso „leistungsfähig“ wie ein anderer Parameter ist. Wie das eben genannte Kelloggsche Beispiel zeigt, ist dies — bei dieser Formulierung der Frage — nicht der Fall. Wir werden jedoch sehen, daß dies in einem gewissen Umfange doch zutrifft, wenn die Frage etwas anders gestellt wird. —

Es hat sich nun als zweckmäßig erwiesen, die Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) noch weiter zu gliedern, und zwar den „allseitig“ genommenen Differenzenquotienten von dem „im Winkelraum“ gebildeten Differenzenquotienten (2) zu unterscheiden. Wir sprechen dabei im folgenden von dem Verhalten einer in G definierten Funktion $\psi(w)$ bei allseitiger Annäherung von w an den Randpunkt w_1 von G — und also auch von dem des allseitig genommenen Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \psi(w)$ —, wenn $w (\neq w_1)$ in beliebiger Weise in dem Definitionsbereich von $\psi(w)$ gegen w_1 konvergiert. Insbesondere soll ausdrücklich die Annäherung von w an w_1 längs C dabei zugelassen sein, wenn $\psi(w)$ — wie z. B. der Differenzenquotient — auf C (mit eventueller Ausnahme von w_1) definiert ist. Wir sprechen ferner von dem Verhalten der Funktion $\psi(w)$ bei Annäherung von w an w_1 „im Winkelraum“, wenn $w \rightarrow w_1$ innerhalb eines jeden Winkelraumes konvergiert, der von zwei von w_1 ausgehenden mit je einem an w_1 anstoßenden Stück ganz in G verlaufenden Strahlen gebildet ist.

Die Frage nach der Existenz der im Winkelraum gebildeten Ableitung ist in den oben genannten Arbeiten von Herrn Carathéodory und Herrn Valiron behandelt worden. Allerdings braucht bei diesen Untersuchungen G nicht als ein von einer Jordankurve begrenztes Gebiet vorausgesetzt zu werden, sondern kann ein wesentlich allgemeineres einfach zusammenhängendes Ge-

biet sein. Diese Untersuchungen stützen sich auf den folgenden Satz¹⁰⁾:
 a) Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und absolut < 1 , so existiert stets der

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z} = \alpha,$$

wenn $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“ konvergiert, und α ist entweder endlich und dann positiv oder ∞ . Im ersten Falle konvergiert auch $f'(z) \rightarrow \alpha$, wenn $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“ strebt. Mit Hilfe dieses Satzes beweist Herr Carathéodory vor allem: b) G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $P (w = w_1)$ ein Randpunkt von G , $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ auf G ab. Gibt es dann einen Kreis K_1 , der den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und dessen Inneres ganz G angehört, und ferner einen Kreis K_2 , der gleichfalls den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb von G verläuft, so gibt es einen Punkt z_1 auf $|z| = 1$, so daß $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = w_1$ ist, wenn $z \rightarrow z_1$ im Winkelraum gegen w_1 konvergiert, und $f(z)$ in z_1 eine im Winkelraum gebildete Ableitung besitzt. Ferner konvergiert $f'(z) \rightarrow f'(z_1)$, wenn $z \rightarrow z_1$ „im Winkelraum“ strebt. In einer etwas später erschienenen Arbeit leitet Herr Valiron¹¹⁾ einen allgemeineren Satz über die Existenz der endlichen Winkelderivierten her, bei dem an die Stelle des von „innen berührenden“ Kreises K_1 des Carathéodoryschen Satzes Kurven allgemeineren Charakters treten, die im „Berührungspunkte“ P keine endliche Krümmung mehr besitzen.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns, wie gesagt, mit der Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei *allseitiger Annäherung von w an w_1* und beschränken uns daher nur auf Punkte,

¹⁰⁾ In dieser Form wurde dieser Satz zum ersten Male explizite formuliert und bewiesen von Herrn Carathéodory in seiner Arbeit: Über Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1929, S. 39—54 und unabhängig und nahezu gleichzeitig von den Herren Landau und Valiron mit einem überraschend einfachen Beweis in der gemeinsam veröffentlichten Note: A deduction from Schwarz's lemma, Journal of the London Math. Society 4, March 1929, pp. 162—163. Wie ich durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. Landau erfuhr, findet sich dieser Satz implizite in einer bereits 1926 erschienenen C. R.-Note (183, S. 500—502) von Herrn J. Wolff, in der Herr Wolff einen etwas anderen Satz herleitet, nämlich: Aus $f(z)$ regulär und absolut < 1 für $|z| < 1$ und $f(z) - z \neq 0$ in $|z| < 1$, folgt die Existenz eines einzigen Randpunktes $z = \alpha$, in dem $\frac{\alpha - f(z)}{\alpha - z}$ und $f'(z)$ für $z \rightarrow \alpha$ „im Winkelraum“ gegen einen und denselben endlichen und positiven Grenzwert konvergieren. Doch enthält Nr. 1 bis 5 seiner Note, in denen er noch nicht von der speziellen Annahme $f(z) - z \neq 0$ in $|z| < 1$ Gebrauch macht, genau den Beweis des obigen Satzes.

¹¹⁾ G. Valiron, Sur un théorème de Julia, étendant le lemme de Schwarz, Bulletin des Sciences mathem. 1929.

die auf freien Jordanbögen des Randes liegen. Wir dürfen dann weiter annehmen (vgl. Hilfssatz 4 in Nr. 6), daß der Rand von G eine geschlossene Jordankurve ist. Nur in einem Anhang zu dieser Arbeit geben wir kurz eine Verallgemeinerung der eben erwähnten Resultate über die Winkel-derivierte der Herren Carathéodory und Valiron an in einem Umfange, wie sie die einfache Anwendung der über die allseitig gebildete Ableitung hergeleiteten Ergebnisse zu formulieren gestattet. —

Bei unserer Untersuchung gehen wir folgendermaßen vor: Unter einer geeigneten Annahme über die Struktur der Randkurve in der Umgebung von P läßt sich das Verhalten des längs C gebildeten Differenzenquotienten (2) durch das Verhalten geeigneter in jedem festen Winkelraum gebildeter Differenzenquotienten (2) charakterisieren. Um diese Bedingung zu formulieren, führen wir eine neue Begriffsbildung ein, nämlich die sog. *Unbewalltheitsfunktion* $\Delta(\varepsilon)$ der Kurve C im Punkte P . Darunter verstehen wir folgendes: Es sei c ein beliebiger Teilbogen von C , der P als inneren Punkt enthält. Wir beschreiben dann um P den Kreis k_ε mit so kleinem Radius ε , daß k_ε nur den Bogen c trifft, nicht aber den übrigen Teil der Kurve C , P_1 und P_2 seien die beiden „letzten“ Schnittpunkte von k_ε mit c , die man bei der Durchlaufung von c von P aus nach beiden Seiten antrifft. $\Delta(\varepsilon)$ ist dann der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe, die beide Bögen \widehat{PP}_1 und \widehat{PP}_2 von c enthält. Die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ braucht nur für *hinreichend kleine* Werte von ε definiert zu sein und ist im folgenden Sinne unabhängig vom Bogen c : ersetzt man c durch einen größeren c umfassenden oder einen kleineren in c enthaltenen Bogen (der gleichfalls P als inneren Punkt enthält), so hat $\Delta(\varepsilon)$ für hinreichend kleines ε immer denselben Wert, unabhängig davon, welcher Bogen zur Definition zugrunde gelegt wird. Die oben genannte Bedingung besteht nun darin, daß wir verlangen, der Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, der ja seiner Definition nach ≥ 1 ist, soll nach oben beschränkt sein oder, wie wir sagen wollen, C soll in P „*linear unbewallt*“ sein. Die dieser Bedingung zugrunde gelegte anschauliche Vorstellung ist die, daß die Kurve C in der Umgebung des Punktes P keine allzu starken „Schwankungen“ macht. Es stellt sich nämlich heraus, daß notwendig dafür, daß der Differenzenquotient (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt bzw. einem Grenzwert zustrebt, ist, daß $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ¹²⁾ gilt. Da es uns nun vor allem auf die Frage nach der Beschränktheit bzw. der Konvergenz des Differenzenquotienten (2) ankommt, setzen wir nun von vornherein das Bestehen der Relation

¹²⁾ Wir benutzen das von Herrn Ostrowski eingeführte Symbol \uparrow bzw. \downarrow , um das monotone Zunehmen bzw. Abnehmen zum Ausdruck zu bringen.

$\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ voraus. Unter dieser Annahme leiten wir nun den folgenden Satz her, der das für uns wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung der allseitig genommenen Ableitung darstellt (Satz 1 und 2):

Die Hauptungleichungen. W bezeichne einen von zwei von w_1 ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung $2\psi_1 < \tau$, der in der Umgebung von w_1 ganz in G liegt. Dann gibt es zwei Konstanten M und M' , sowie zu jedem hinreichend nahe bei w_1 gelegenen w auf C zwei Zahlen R, R' , die mit $w \rightarrow w_1$ gegen 0 konvergieren, so daß für alle Punkte c, c' in W im Abstände R bzw. R' von w_1

$$M \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \leq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leq M' \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

gilt. Die Konstanten M, M' hängen wesentlich von $\tau, \kappa = \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und ψ ab. Sie können von w abhängig gemacht werden und konvergieren dann mit $w \rightarrow w_1$ gegen $\frac{1}{\kappa^\tau} \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$ bzw. $\kappa^\tau \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}$.

Der etwas komplizierte Beweis dieses Satzes, dem der § 4 dieser Arbeit gewidmet ist, beruht auf einer konsequenten mehrmaligen Anwendung des bereits oben erwähnten Löwnerschen Satzes (Satz A, § 1), und erfordert eine Reihe von Hilfssätzen, die wir zu einem Teil im § 1 (Hilfssätze 1 bis 3) und zum andern Teil im § 2 (Hilfssätze 6 bis 9) herleiten. Diese Hilfssätze sind, wie wir glauben, auch unabhängig von diesem Zusammenhange von Interesse; sie liefern genauere Abschätzungen für die Bildlänge eines Randbogens bei konformer Abbildung unter verschiedenen Annahmen über die Normierung der Abbildungsfunktion.

Aus diesem Satze leitet man ohne Schwierigkeit den folgenden Satz (Satz 3) ab: *Existiert der Grenzwert von (2), wenn $w \rightarrow w_1$ längs einer in w_1 mündenden Kurve L in G strebt, die C nicht berührt, so ist notwendig und hinreichend, damit (2) bei allseitiger Annäherung von w an w_1 einen Grenzwert besitzt, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ konvergiert (d. h. C in P , wie wir sagen werden, „regulär unbewallt“ ist).*

Es genügt somit, das Verhalten des Differenzenquotienten (2) längs einer beliebigen in w_1 mündenden und die Kurve in C nicht berührenden Kurve L zu kennen, um — unter den Annahmen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ — auf das Verhalten des allseitig genommenen Differenzenquotienten (2) Rückschlüsse ziehen zu können.

Um nun das Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei der Annäherung längs solcher Kurven L zu untersuchen, führen wir die sogenannten *Vergleichskurven* ein. Wir verstehen unter einer *inneren* resp.

äußeren Vergleichskurve \mathcal{C}_i bzw. \mathcal{C}_a von C in P eine geschlossene Jordankurve, die den Punkt P mit C gemeinsam hat und sonst nirgends außerhalb bzw. nirgends innerhalb von C verläuft und im letzten Falle das Innere von C enthält. Die in der oben genannten Abhandlung von Herrn Carathéodory benutzten Kreise und die allgemeineren Kurven von Herrn Valiron können als solche Vergleichskurven aufgefaßt werden.

Es seien G und G_1 allgemein zwei von den geschlossenen Jordankurven C und C_1 begrenzte Gebiete, von denen das eine bis auf den gemeinsamen Randpunkt P im Innern des andern enthalten ist und die beide in P eine Ecke (nicht notwendig von derselben Öffnung) besitzen. Bildet man G und G_1 beide Male auf das Innere des Einheitskreises ab und bildet mit jeder Abbildungsfunktion den in einem festen Winkelraum genommenen Differenzenquotienten (2), so besteht zwischen den absoluten Beträgen dieser Ausdrücke eine gewisse eigentümliche Monotonierelation, wie man sie ähnlich vom Schwarzschen Lemma und seiner Verallgemeinerung, dem Lindelöfschen Prinzip, her kennt. Man kann sie etwas unpräzise dahin formulieren, daß der Differenzenquotient für das größere Gebiet im wesentlichen größer ist. (Die Ungleichung gilt also in der entgegengesetzten Richtung wie beim Lindelöfschen Prinzip; Näheres siehe § 6.) Somit ist es also klar, daß wir Schranken für den allseitig gebildeten Differenzenquotienten (2) finden können, wenn wir geeignete Vergleichskurven konstruieren. Auf die Beschränktheit des Differenzenquotienten nach oben und unten kommt es zunächst vor allem an. Unter den im folgenden zu machenden Annahmen werden wir dann die Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ verhältnismäßig leicht nachweisen können.

Die Bedingung, die wir zur Kennzeichnung des Verhaltens des Differenzenquotienten (2) benutzen, besteht also, wie wir zusammenfassend sagen können, aus zwei „Komponenten“, die nach zwei wesentlich verschiedenen Richtungen dem Verhalten der Kurve in der Nachbarschaft von P Rechnung tragen: 1. aus der Bedingung über die Unbewalttheitsfunktion, welche die innere Struktur von C in der Umgebung von P charakterisiert und 2. aus der Annahme der Existenz geeigneter Vergleichskurven, eine Bedingung, die sich mehr auf den „äußeren“ Verlauf von C in der Umgebung von P bezieht. Nach dem Obigen erscheint es wohl auch verständlich, daß es für Untersuchungen über die Winkelderivierten nur auf die zweite Bedingung ankommt (vgl. die oben genannten Sätze der Herren Carathéodory und Valiron).

Die Konstruktion von Vergleichskurven führen wir nun am Anfang des zweiten Kapitels durch, wo wir den Hauptsatz über die konformen Ecken herleiten. Eine genauere Analyse der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ zeigt, daß diese Bedingung damit äquivalent ist, daß gewisse ausgezeichnete

Parameterdarstellungen der Kurve $C: w = w(t), -T \leq t < T$ existieren, und zwar folgender Art: Entspricht dem Scheitelpunkt P der Ecke der Parameterwert $t = 0$, so gibt es zwei positive Konstanten c_1 und C_1 , so daß für alle t im betrachteten Intervall

$$(3) \quad 0 < c_1 \leq \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right| \leq C_1$$

gilt. Wir bezeichnen dann t als einen „metrischen Parameter“. Zwischen dem $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa$ und dem Quotienten $\frac{L}{l}$ der Größen $L = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|}$, $l = \underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|}$ besteht ein enger Zusammenhang. Des weiteren ist die Bedingung $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ damit äquivalent, daß es einen metrischen Parameter t gibt, für den über (3) hinaus auch noch der $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right|$ existiert und positiv ist.

Wir nehmen nun an, die Kurve C sei in einer solchen Parameterdarstellung durch einen metrischen Parameter gegeben; γ_-, γ_+ seien die beiden in P zusammenstoßenden Kurvenäste von C , welche die Ecke der Öffnung $\pi \tau$ in P bilden, t_-, t_+ die Halbtangenten an γ_- bzw. γ_+ in P ; $\xi(t)$ bezeichne den Abstand des Punktes $w(t)$ auf γ_- bzw. γ_+ von der entsprechenden Halbtangente. Es sei $\mathcal{E}(t)$ eine „monotone Majorante“ von $\xi(t)$, d. h. eine monotone mit $|t| \downarrow 0$ selber monoton gegen 0 abnehmende Funktion, für die $\xi(t) \leq \mathcal{E}(t)$ ist. Z. B. kann $\mathcal{E}(t) = \xi^*(t)$ gesetzt werden, wo

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \text{Max}_{0 < \sigma \leq t} \xi(\sigma), & t > 0, \\ \text{Max}_{0 > \sigma \geq t} \xi(\sigma), & t < 0, \end{cases}$$

ist; $\xi^*(t)$ ist die „kleinste“ derartige monotone Majorante.

Wir erläutern nun kurz die Konstruktion der Vergleichskurven für den Fall der Ecke der Öffnung π ($\tau = 1$), da wir alles auf diesen Fall vermittelt der Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ reduzieren können und es somit nur auf diesen Fall ankommt.

Wir setzen voraus, daß das Integral $\int_0^\omega \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt, \omega \geq 0$, konvergiert.

Unter diesen Annahmen können wir zwei im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktionen $w = F(z), w = F_1(z)$ konstruieren, die $|z| < 1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven abbilden, von denen die eine innere, die andere äußere Vergleichskurve von C in P ($w = w_1$) ist. Ferner besitzen $F(z), F_1(z)$ im Punkte $z = 1$, den sie in $w = w_1$ überführen, im Winkelraum gebildete Ableitungen. So gewinnen wir zunächst Schranken für den im Winkelraum gebildeten und hieraus dann nach den Haupt-

ungleichungen auch für den allseitig genommenen Differenzenquotienten (2). Für diese Konstruktion der Vergleichskurven brauchen wir einen Hilfssatz (Hilfssatz 12, § 8), der zu jeder mit $|t| \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmenden Funktion $X(t)$ eine andere monotone (und übrigens stetig differenzierbare) Funktion $V(t)$ von ähnlichem Charakter zuordnet, die *schwächer* als $X(t)$ gegen 0 konvergiert, darüber hinaus aber gewisse weitere Eigenschaften besitzt (es konvergiert ein gewisses im folgenden benutztes Integral, das Integral (8, 2)). Dieser Satz hängt mit dem bekannten Reihensatze zusammen, daß es zu jeder Reihe mit positiven Gliedern eine schwächer konvergierende Reihe mit positiven Gliedern gibt; die hier verwendeten Überlegungen liegen aber wesentlich tiefer.

Nachdem das Vorhandensein einer konformen Ecke in P bewiesen ist, folgt — im wesentlichen unter Zuhilfenahme eines potentialtheoretischen Hilfssatzes (Hilfssatz 14), den wir zu diesem Zwecke herleiten — leicht auch die Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ zunächst bei Annäherung von w an w_1 längs einer speziellen Kurve und dann unter Hinzunahme der Bedingung $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ auch bei allseitiger Annäherung. — Übrigens gestattet die Beweismethode dieses Hilfssatzes einen neuen Beweis des oben zitierten Satzes a) über die Existenz des $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$ bei einer im Einheitskreise regulären und beschränkten Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ im Winkelraum. —

So erhalten wir das folgende Resultat (Satz 7):

Hauptsatz über konforme Ecken: *Hat die geschlossene Jordankurve C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ ($0 < \tau \leq 2$), ist ferner C in P linear unbewallt (d. i. $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$) und ist schließlich das mit der oben definierten Funktion $\xi^*(t)$ gebildete Integral $\int_0^\omega \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$, $\omega \geq 0$, konvergent, so hat C in P eine konforme Ecke.*

Ist darüber hinaus C in P regulär unbewallt (d. i. $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$), so existiert sogar für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Inneren von C auf das Innere des Einheitskreises der $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung und ist von 0 und ∞ verschieden.

Diesem Satz können wir eine Ergänzung beifügen, die zeigt, daß die Bedingung dieses Satzes, was die Größenordnung von $\xi(t)$ betrifft, nicht verbessert werden kann. Wir beweisen nämlich (Satz 8), daß, wenn die Kurve C in der Umgebung des Punktes P ganz innerhalb eines der beiden von den Halbtangenten t_- und t_+ in P gebildeten Winkelräume verläuft und wenn ferner $\xi(t)$ monoton, also $\xi^*(t) = \xi(t)$ ist, notwendig aus der Voraussetzung der konformen Ecke die Existenz eines metrischen Para-

meters σ und die Konvergenz des Integrals $\int_0^{\omega} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$ folgt. ($\xi_1^*(\sigma)$ ist die Funktion $\xi^*(t)$ als Funktion von σ aufgefaßt.)

Von dem Standpunkt der oben erwähnten Frage nach der „Güte“ des durch die konforme Abbildung gelieferten Parameters, können wir das im Hauptsatze gewonnene Resultat auch folgendermaßen formulieren: Ist t ein metrischer Parameter in $w = w_1$, für den das Integral $\int_0^{\omega} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$ existiert, so ist auch $\sigma = |\vartheta|^r \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer Parameter von C in $w = w_1$, für den gleichfalls das Integral $\int_0^{\omega'} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$, $\omega' \geq 0$

($\xi_1^*(\sigma) = \xi^*(t)$ gesetzt) konvergiert. In diesem Sinne kann man also behaupten, daß der konforme Parameter mit der „beste“ ist. Vgl. auch Satz 12.

Wenn auch der Beweis des Satzes 7 etwas kompliziert erscheint, so liegt dies zum Teil daran, daß wir im Hinblick auf die weiteren Anwendungen dieses Satzes die *Art der Abhängigkeit der für den Differenzenquotienten (2) hergeleiteten Schranken von der Kurve C* ermitteln wollen. Dies zwang uns, beim Beweise in weit höherem Maße, als es sonst nötig gewesen wäre, auf quantitative Überlegungen einzugehen. Ferner haben wir auch an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen angefügt, deren Zweck es ist, diese Abhängigkeit herauszuarbeiten. Das Ergebnis haben wir dann im Zusatze zu Satz 7 zusammengefaßt. Die Schranken hängen natürlich einmal von den die Kurve C in der Umgebung von P charakterisierenden Größen, weiter von der Normierung der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ (d. h. davon, welcher Punkt bei der Abbildung in den Nullpunkt übergeführt wird) und schließlich auch von der Gesamtausdehnung der Kurve C ab. —

Der übrige Teil des zweiten Kapitels (§§ 10, 11) bringt Anwendungen des Satzes 7. Das wichtigste Ergebnis des § 10 ist der Satz 10. Dort wird unter der Annahme, daß die Kurve C längs eines Bogens c stetig sich drehende Tangente besitzt, und daß ferner, falls der Bogen c unter Zugrundelegung der Bogenlänge s als Parameter durch die Gleichung $w = w(s)$,

$0 \leq s \leq a$, dargestellt wird, das Integral $\int_0^{\beta} \left| \frac{w'(s+\sigma) - w'(s)}{\sigma} \right| d\sigma$ in jedem

Intervall der Form $0 < \alpha \leq s \leq \beta < a$ gleichmäßig konvergiert, bewiesen, daß $\varphi'(w)$ auf dem (offenen) Bogen c existiert, stetig und von 0 verschieden ist. Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir zuerst, daß $\varphi'(w)$ auf c existiert und zwischen zwei positiven Schranken liegt, und leiten erst dann die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ her. Für spätere Anwendungen, bei

denen der Satz nicht nur auf eine einzige feste Kurve, sondern auf eine Schar von Kurven C mit gemeinsamen für diese Schar charakteristischen Eigenschaften angewandt werden soll, haben wir den Beweis des Satzes von vornherein so angelegt, daß wir diese Schranken in ihrer Abhängigkeit von diesen Eigenschaften der Kurve C bestimmen. Dies macht natürlich den Beweis etwas umständlicher, als er es sonst wäre. Ferner haben wir an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen hinzugefügt, die diese Abhängigkeit herausarbeiten sollen und das Ergebnis im Zusatz 1 zum Satz 10 formuliert. Ein weiterer Zusatz (über die „Stetigkeitsfunktion“ von $f'(z) - f(z)$ ist die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion — s. Nr. 98) soll gleichfalls bei späteren Überlegungen verwertet werden. Da die erwähnten Anwendungen des Satzes 10 erst in der zweiten Mitteilung angegeben werden sollen, können alle diese auf die „Gleichmäßigkeit“ bezüglichen Bemerkungen auch zunächst überschlagen werden.

Im § 11 untersuchen wir Kurven C mit einer Ecke in einem ihrer Punkte P , die von zwei in P zusammenstoßenden Kurvenzweigen mit stetiger Tangente gebildet ist. Wir charakterisieren die Änderung des Tangentenwinkels in der Umgebung des Punktes P durch die Angabe einer *allgemeinen Lipschitzbedingung*: bildet die (etwa im Sinne wachsender s gerichtete) Tangente im Punkt $P(s)$ mit der positiven reellen Achse den Winkel $\theta(s)$, wobei s die von P aus gezählte Bogenlänge bedeutet ($-\delta \leq s \leq \delta$) und haben die Halbtangenten in P die Richtungswinkel θ_- und θ_+ , so möge

$$(4) \quad \left| \theta(s) - \theta_+ \right|_{s > 0} \leq \omega(s), \quad \left| \theta(s) - \theta_- \right|_{s < 0} \leq \omega(|s|)$$

sein, wo $\omega(\sigma)$ eine für $\sigma \downarrow 0$ monoton nach 0 abnehmende stetige Funktion von σ ist, $0 < \sigma \leq \delta$. Wir bezeichnen $\omega(\sigma)$ als den „Lipschitzschen Modul“ von $\theta(s)$ in $s = 0$. Wir fassen alle geschlossenen Jordankurven, deren Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der Bogenlänge s in einer von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildeten Ecke $P(s = 0)$ der Lipschitzschen Bedingung (4) genügen, zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ zusammen. Dann gilt der Satz (Satz 11): *Hinreichend und notwendig dafür, daß alle Kurven der Klasse $L(\omega(\sigma))$ in dem betrachteten Punkte P eine konforme*

Ecke besitzen, ist, daß das Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$ konvergiert.

Hat C längs eines Bogens c durchweg sich stetig drehende Tangente und gibt es einen Lipschitzschen Modul $\omega(\sigma)$ mit konvergentem Integral

$\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$, so daß durchweg auf diesem Bogen

$$|\theta(s) - \theta(s_1)| \leq \omega(|s - s_1|)$$

gilt, so ist $\varphi'(w)$ längs dieses Bogens stetig und von 0 verschieden. Indem man $\omega(\sigma)$ spezialisiert, erhält man weitere spezielle Kriterien. So ergibt sich für $\omega(\sigma) = K\sigma^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (K Konstante) der Teil des eingangs genannten Satzes von Kellogg (für $n=1$), der die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ behauptet. Aber auch das Bestehen der Lipschitzbedingung für $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ läßt sich dann — unter Zuhilfenahme eines Satzes von Herrn I. Privaloff über konjugierte Potentialfunktionen — leicht herleiten. —

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen angeordnet. Das erste Kapitel, in dem wir die Hauptungleichungen herleiten und aus ihnen verschiedene Folgerungen ziehen, umfaßt die Paragraphen 1 bis 6. In den Paragraphen 1 und 2 leiten wir im wesentlichen die Hilfssätze her, die wir zum Beweise der Hauptungleichungen im § 4 brauchen. Wir gehen im § 1 von dem Löwner'schen Satze aus (Nr. 1), besprechen einige Folgerungen und Anwendungen (Sätze A, B, C) und sodann drei Hilfssätze (die Hilfssätze 1 bis 3), die wir für den Beweis der Hauptungleichungen brauchen. Dagegen werden die dort weiter folgenden Hilfssätze 4 und 5 erst später (§ 9) benutzt. § 2 enthält die Hilfssätze 6 bis 9, die nur in § 4 gebraucht werden. Der § 3 ist vor allem der Diskussion der Unbewalltheitsfunktion gewidmet und bereitet im übrigen alle im folgenden zu benutzenden geometrischen Hilfsmittel vor. Die Begriffe der „Richtungsfunktion“ und des „metrischen Parameters“ werden erst im zweiten Kapitel gebraucht. § 4 enthält die Formulierung und den Beweis der Hauptungleichungen, § 5 weitere Anwendungen, deren wichtigste der oben genannte Satz 3 ist. Im § 6 führen wir die Vergleichskurven ein und leiten den Zusammenhang zwischen dem Differenzenquotienten (2) der Abbildungsfunktion von G und gewissen Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion des Innern der Vergleichskurven auf den Einheitskreis ab. Daraus ziehen wir dann einige Folgerungen, unter denen wir den Satz 5 hervorheben möchten, der den Zusammenhang der „generalisierten konformen“ Ecke mit der „konformen“ Ecke klärt.

Das zweite Kapitel enthält den Hauptsatz über konforme Ecken und Anwendungen. Es umfaßt die Paragraphen 7 bis 11. Im § 7 wird der Hauptsatz formuliert und daran werden drei Vorbemerkungen angeschlossen. Im § 8 leiten wir drei Hilfssätze her, die zum Beweise des Hauptsatzes, der im § 9 durchgeführt wird, benötigt werden. Am Schlusse von § 9 leiten wir den Satz 8 (s. oben) her, der für eine spezielle Klasse von Kurven die Umkehrung des Satzes 7 darstellt. § 10 enthält Anwendungen des Satzes 7 auf rektifizierbare Kurven und § 11 auf Kurven mit stetiger Tangente, bei denen das Verhalten der Tangente durch eine allgemeine Lipschitz-Bedingung charakterisiert wird.

Schließlich gehen wir in einem Anhang kurz auf eine naheliegende Verallgemeinerung der Sätze der Herren Carathéodory und Valiron über

die Existenz einer endlichen und von 0 verschiedenen im Winkelraum genommenen Ableitung ein¹³⁾.

¹³⁾ Nachdem ich die Redaktion dieser Arbeit bereits abgeschlossen hatte, erschien die Abhandlung von Herrn L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta societatis scientiarum Fennicae, Nova series A, 1, Nr. 9 (1930), S. 1—40, die in ihren Resultaten mit einem Teile dieser Arbeit enge Berührungspunkte aufweist. Herr Ahlfors befaßt sich dort mit der Frage nach der „im Winkelraum“ gebildeten Ableitung in einem Randpunkte. Er geht von einem anderen Gesichtspunkt aus als wir, indem er zur Charakterisierung des Randes in der Umgebung des betrachteten Randpunktes eine etwas andere Bedingung als wir benutzt, und gelangt zu einem schärferen Resultat über die Existenz der Winkelableitung, als wir es unter Benutzung unserer Ergebnisse über die allseitige Ableitung im Anhang formulieren konnten. Man könnte aber auch sein Resultat beim Beweise unseres Satzes 7 verwenden. Dieser Beweis besteht, wie oben ausgeführt, darin, daß wir zunächst mittels der „Hauptungleichungen“ das Verhalten des allseitig gebildeten Differenzenquotienten in einem Randpunkte auf dasjenige des im Winkelraum gebildeten reduzieren und sodann die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten beweisen. Dieser letzte Teil des Beweises — der im wesentlichen auf der Konstruktion der Vergleichskurven beruht — ließe sich nun auch durch das Ahlfors'sche Resultat über die Existenz der Winkelableitung ersetzen. Mit seinem schärfsten Ergebnis (Satz II, S. 36) könnte man unseren Satz 7 sogar etwas verschärfen. Im übrigen enthält aber seine Arbeit keines der in unserer Arbeit selbst formulierten Resultate, die sich ja alle auf die allseitige Ableitung beziehen. Seine Methode ist von der unseren wesentlich verschieden, wenn auch die Grundidee seines Beweises seines Satzes II (S. 36) auch in der Konstruktion eines geeigneten „Vergleichsgebietes“ besteht.

Anmerkung bei der Korrektur. Während des Druckes der vorliegenden Abhandlung erschienen die folgenden Arbeiten, die mit dieser vielfach Berührungspunkte gemeinsam haben: 1. P. Bessonoff et M. Lawrientieff, Sur l'existence de la dérivée limite, Bull. de la soc. math. de France 58 (1930), p. 175—198. Dort wird vor allem ein Spezialfall unseres Satzes 7 bewiesen (nämlich $\xi^*(t) = ct^{1+\alpha}$, α, c positive Konstanten, $0 < \alpha < 1$). Der Beweis weist, sowohl was die Verwendung des Löwner-Montelschen Satzes als auch die Heranziehung von „Vergleichskurven“ anbelangt, sehr enge Berührungspunkte mit dem unsrigen auf, ist aber einfacher als dieser, da er für den Spezialfall direkt zugeschnitten ist. 2. J. Wolff, Comptes rendus 191 (1930₂), p. 921—923, wo die Ableitung der Abbildungsfunktion bei Kurven untersucht wird, die in dem betrachteten Punkt P eine Tangente t haben und in seiner Umgebung in Polarkoordinaten (r, φ) — φ Winkel des Radiusvektors r gegen t , P sein Scheitelpunkt — durch $r = r(\varphi)$ mit *monotonem* $r(\varphi)$ gegeben sind, die aber insbesondere dort ganz auf einer Seite von t verlaufen. Es wird 1. gezeigt, daß die Abbildungsfunktion in P stets eine *allseitige* Ableitung hat (∞ zugelassen), und 2. wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit der

Ableitung angegeben, die mit der unseres Satzes 7 (Konvergenz von $\int_0^{\theta} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$)

für diese speziellen Kurven äquivalent ist. 2. ist in unserem Sätzesystem 7, 8 enthalten, 1. kann mit der Beweismethode von Satz 8 unter Zuhilfenahme der Hauptungleichungen erhalten werden. Die Wolff'schen Beweise sind besonders einfach. 3. W. Seidel, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen, Math. Annalen 104 (1931), S. 183—243. Dort wird neben der Abbildung von speziellen

(Fortsetzung der Fußnote ¹³⁾ auf nächster Seite.)

Die Anregung zu dieser Arbeit sowie viele wertvolle Ratschläge sowohl bei der allmählichen Herausarbeitung der Fragestellungen als auch bei der Durchführung sowie bei ihrer endgültigen Darstellung verdanke ich Herrn Professor Ostrowski. So geht unter anderem insbesondere die Formulierung der im folgenden neu eingeführten geometrischen Begriffsbildungen (vgl. auch das Verzeichnis am Schlusse der Einleitung), so die des Kurvenelements, der Unbewalltheitsfunktion, des metrischen Parameters u. a. teils auf mündliche Besprechungen mit ihm und teils auf seine Vorlesungen zurück. Es sei mir gestattet, Herrn Professor Ostrowski für das stete freundliche Interesse, mit dem er den Fortgang meiner Arbeit sowie meiner bisherigen Studien überhaupt unterstützte und förderte, meinen herzlichsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen. — Ferner danke ich der philosophischen Fakultät der Universität Basel für einen mir freundlichst gewährten Zuschuß zu den Veröffentlichungskosten der Arbeit.

Verzeichnis der im folgenden eingeführten Begriffsbildungen.

	Seite
Abschirmen	340
Konforme Ecke	384
Generalisierte konforme Ecke	384
Konforme Länge	339
Konformes Maß	339
Konvergenzfunktion (eines Integrals)	413
Kurvenelement	355
Lipschitzscher Modul	443
Metrischer Parameter	357
Richtungsfunktion	357
ϱ -Kurve	428
Stetigkeitsfunktion	438
Unbewalltheitsfunktion	355, 357
Unbewallt: linear unbewallt	357
regulär unbewallt	357
Vergleichskurve	381

Gebietsklassen auch das Randverhalten der Ableitungen der Abbildungsfunktion $w = f(z)$ von $|z| < 1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven C untersucht. Zu unserem Gegenstand stehen vor allem die Sätze 18 bis 20 in Beziehung, wo unter der Annahme, daß C durchweg „beschränkte Krümmung“ hat (der Tangentenwinkel $\theta(s)$ genügt einer Lipschitzbedingung), die Totalstetigkeit von $f'(z)$ und ferner die Existenz für fast alle ϑ von $\lim_{r \uparrow 1} f''(re^{i\vartheta})$ und die die Integrabilität von $|f''(e^{i\vartheta})|^p$ für jedes $p > 0$ bewiesen wird. Vgl. hierzu unsere Sätze 10, 12. — Ferner möchten wir auf die kürzlich erschienenen Arbeiten von O. D. Kellogg, On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Transactions of the American Math. Soc. **33** (1931), p. 486–510, J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen I, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602–640, und L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV, Sächsische Berichte **82** (1930), S. 265–344, hinweisen, wo sich weitere Untersuchungen über die Ableitungen von (räumlichen) Potentialfunktionen am Rande befinden.

I. Kapitel.

Anwendungen des Löwnerschen Satzes. Herleitung der Hauptungleichungen.

§ 1.

Der Löwnersche Satz.

1. Ein bekannter von Herrn Löwner¹⁴⁾ herrührender Satz lautet:

Es sei $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und absolut < 1 , es sei ferner $f(0) = 0$. Ferner besitze $f(z)$ auf einem Bogen γ von $|z| = 1$ stetige Randwerte vom Betrage 1. Dann wird durch $f(z)$ dieser Bogen auf einen nicht kürzeren abgebildet. Die Länge von γ bleibt nur erhalten, wenn $f(z) \equiv e^{i\tau z}$ (τ reell) ist.

Beweis. Durchläuft z den Bogen γ in mathematisch positivem Sinne, so durchlaufen sowohl $f(z)$ als auch $\frac{f(z)}{z}$ ihre Bildbögen in mathematisch positivem Sinne, da beide Funktionen in $|z| < 1$ regulär und absolut < 1 sind und auf γ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzen¹⁵⁾. Ferner ist $\arg f(z) = \arg z + \arg \frac{f(z)}{z}$, und weil der Zuwachs von $\arg \frac{f(z)}{z}$ auf γ nicht negativ ist, ist der Zuwachs von $\arg f(z)$ auf γ nicht kleiner als die Länge

¹⁴⁾ K. Löwner, Math. Annalen 89 (1923), S. 111f. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 124.

¹⁵⁾ Ist γ durch $|z| = |e^{i\theta}| = 1$, $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, $\vartheta_2 - \vartheta_1 \leq 2\pi$ dargestellt, so ist $\lg f(z) = \lg |f(z)| + i\theta(z)$ in $0 < \varrho = |z| < 1$, $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ eindeutig regulär, wenn für $\theta(z)$ in einem inneren Punkte dieses Kreissektors irgendeine Bestimmung gewählt wird und für alle anderen Werte $\theta(z)$ durch stetige Fortsetzung aus diesem festgelegt wird. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt dann:

$$\varrho \frac{\partial \lg |f(z)|}{\partial \varrho} = \frac{\partial \theta(z)}{\partial \vartheta}.$$

Da $f(z)$ längs jedes inneren Teilbogens des Kreisbogens γ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip fortsetzbar ist, so gilt diese Gleichung auch noch auf einem solchen Teilbogen: $\varrho = 1$, $\vartheta_1 < \vartheta'_1 \leq \vartheta \leq \vartheta'_2 < \vartheta_2$. Wegen $|f(z)| < 1$ für $|z| < 1$ ist für $0 < |z| < 1$ weiter

$$\frac{\lg |f(e^{i\vartheta})| - \lg |f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1 - \varrho} = - \frac{\lg |f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1 - \varrho} > 0, \quad \vartheta'_1 \leq \vartheta \leq \vartheta'_2,$$

und daher für $\varrho = |z| = 1$, $\vartheta'_1 \leq \vartheta \leq \vartheta'_2$

$$\frac{\partial \lg |f(z)|}{\partial \varrho} \geq 0 \quad \text{und somit auch} \quad \frac{\partial \theta(e^{i\vartheta})}{\partial \vartheta} \geq 0,$$

d. h. aber $\theta(e^{i\vartheta})$ ist eine monoton wachsende Funktion von ϑ . Analoges gilt für $\frac{f(z)}{z}$.

von γ (der Zuwachs von $\operatorname{arc} z$). Soll er gleich der Länge von γ sein, so muß notwendig $\frac{f(z)}{z} = \text{konst. auf } \gamma$ und daher nach einem bekannten Satz von Schwarz im Innern konstant sein, und zwar muß wegen $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \equiv 1$ auf γ $f(z) \equiv e^{i\tau} z$ sein.

Konforme Abbildung liefert sofort eine etwas allgemeinere Formulierung dieses Satzes:

G sei ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet in der w -Ebene, w_0 sei ein Punkt in G . Es sei ferner $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, $f(0) = w_0$, und es möge der Wertevorrat von $f(z)$ im Innern von G liegen. $f(z)$ möge überdies auf einem gewissen (von $f(z)$) abhängigen Bogen γ_f von $|z| = 1$ stetige Randwerte besitzen und γ_f auf ein festes (von f unabhängiges) Bogenstück c von C abbilden. $w = F(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf G ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ übergeht. Die zu $F(z)$ inverse Funktion $z = \Phi(w)$ führt c in den Kreisbogen γ_F über.

Dann ist $\gamma_f \leq \gamma_F$, und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $f \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist (τ reell).

Beweis. $\zeta = \Phi(w)$ bildet G auf den Einheitskreis einer ζ -Ebene so ab, daß $w = w_0$ in $\zeta = 0$ übergeht. $\zeta = \Phi(f(z))$ genügt den Voraussetzungen des Löwnerschen Satzes und bildet γ_f auf γ_F ab. Daher ist $\gamma_f \leq \gamma_F$. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\Phi(f(z)) \equiv e^{i\tau} z$ ist, also $f(z) \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist.

2. Für das Weitere führen wir noch die folgende Sprechweise ein: Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet, a ein Punkt in G . Wir bilden G so auf das Innere des Einheitskreises ab, daß a in den Nullpunkt übergeht. \mathfrak{M} sei eine Punktmenge auf C , die bei dieser Abbildung auf eine meßbare Punktmenge \mathfrak{M}' auf der Peripherie des Einheitskreises abgebildet wird. Dann nennen wir das Maß von \mathfrak{M}' das „konforme Maß von \mathfrak{M} bei dieser Abbildung“ — durch die es offenbar eindeutig festgelegt ist — und bezeichnen es mit $m_{G,a} \mathfrak{M}$ oder auch mit $m_{C,a} \mathfrak{M}$. Ist \mathfrak{M} insbesondere ein Bogen γ von C , so ist auch \mathfrak{M}' ein Bogen γ' der Kreisperipherie und $m_{G,a} \gamma$ ist die Länge von γ' , die wir auch als die „konforme Länge von γ “ bezeichnen wollen.

Wir formulieren nun den folgenden Spezialfall des obigen Satzes:

A. *Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve C begrenztes Gebiet, G_1 ein Teilgebiet von G , das von einer Jordankurve C_1 begrenzt wird, und es habe C einen Bogen c mit C_1 gemeinsam. a sei ein in beiden Gebieten liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G,a} c \geq m_{G_1,a} c,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $C \equiv C_1$ ist.

Hieraus ergibt sich sofort der folgende Satz:

B. *Es seien G und G_1 zwei von den Jordankurven C bzw. C_1 begrenzte Gebiete, und es möge C_1 ganz im Innern von G verlaufen bis auf endlich oder unendlich viele Bögen c_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), die C und C_1 miteinander gemeinsam haben. Die Gesamtheit der übrigen Bögen von C bzw. C_1 sei mit S bzw. S_1 bezeichnet. a sei ein im Innern von G und G_1 liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G_1, a} S_1 \geq m_{G, a} S,$$

und auch hier gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $C \equiv C_1$ ist.

Denn es ist ja nach dem Satze A: $m_{G, a} c_\nu \geq m_{G_1, a} c_\nu$ (wobei $m_{G, a} c_\nu = m_{G_1, a} c_\nu$ nur dann gilt, wenn $C \equiv C_1$ ist) und daher

$$m_{G_1, a} S_1 = 2\pi - \sum_\nu m_{G_1, a} c_\nu \geq 2\pi - \sum_\nu m_{G, a} c_\nu = m_{G, a} S.$$

3. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, $\bar{\beta}$ und β seien zwei echte Teilbögen von C , und β enthalte $\bar{\beta}$ ¹⁶⁾. P und Q seien die Endpunkte von β ; der komplementäre Bogen zu β werde mit α bezeichnet. Ferner sei a ein im Innern von C gelegener Punkt. Wir sagen dann, der Jordانبogen γ „schirmt“ $\bar{\beta}$ von a ab, wenn γ die Punkte P und Q miteinander verbindet und mit α eine geschlossene Jordankurve Γ bildet, die a in ihrem Innern, $\bar{\beta}$ (bis eventuell auf seine Endpunkte) in ihrem Äußeren enthält.

Dann gilt der folgende Satz:

C. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, a ein Punkt im Innern von C , $\bar{PQ} = \alpha$ ein echter Teilbogen von C , β der komplementäre Bogen und $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von β ¹⁶⁾. Der Bogen γ verbinde P und Q miteinander und möge dabei $\bar{\beta}$ von a abschirmen. Die von α und γ gebildete geschlossene Jordankurve sei mit Γ bezeichnet. Dann ist*

$$m_{C, a} \bar{\beta} \leq m_{\Gamma, a} \gamma.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze B, wenn der Bogen γ nicht außerhalb von C verläuft, s. Fig. 1. Es ist ferner auch noch sehr einfach, den Beweis für den Fall zu erbringen, daß γ zwar Punkte mit dem Äußeren von C gemeinsam hat, aber doch so verläuft, daß es möglich ist, eine die Bögen α und β als Teilbögen enthaltende geschlossene Jordankurve C^* zu finden, die sowohl das Innere von C als auch das von Γ enthält, s. Fig. 2¹⁷⁾. Für die weitere Anwendung, die wir von diesem Satze machen müssen, würde es genügen, den Satz für diesen

¹⁶⁾ Insbesondere darf $\bar{\beta}$ mit β identisch sein.

¹⁷⁾ Die Fig. 3 veranschaulicht eine Konfiguration, bei der diese Bedingungen über den Bogen γ offenbar in der schlichten Ebene nicht mehr erfüllt sind.

zuletzt genannten Fall zu beweisen. Allein um nicht den Begriff des „Abschirmens“ unnötigerweise einzuschränken, müssen wir den folgenden etwas komplizierteren Weg, als es der oben erwähnte ist, einschlagen.

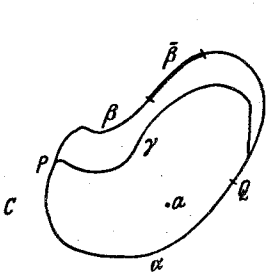


Fig. 1.

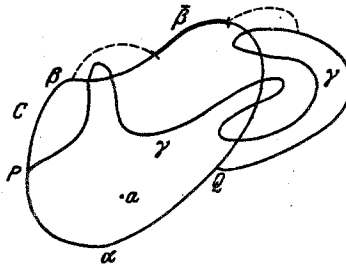


Fig. 2.

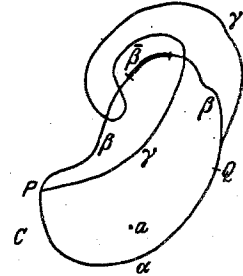


Fig. 3.

Zunächst bemerken wir, daß es sicher Bögen von γ gibt, die nicht zu C gehören. Denn der Bogen $\bar{\beta}$ von C liegt ja sicher außerhalb von Γ . Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Bögen von γ mit γ^* . Es sei nun G^* das größte einfach zusammenhängende Gebiet, das dem Durchschnitt des Innern von C und des Innern von Γ angehört und zugleich den Punkt a im Innern enthält. Nach einem Satze aus der Topologie der Kurven¹⁸⁾ besteht der Rand von G^* aus einer geschlossenen (sich aus Bögen von C und γ^* zusammensetzenden) Jordankurve Γ^* . Γ^* enthält notwendig Bögen von γ^* und von C . Denn enthielte Γ^* keinen Bogen von γ^* , so hieße dies doch offenbar, daß Γ^* nur aus Bögen besteht, die sämtlich (auch) zu C gehören. Da nun aber C doppeltpunktfrei ist, könnten nur dann Teilbögen von C eine geschlossene Jordankurve Γ^* bilden, wenn $\Gamma^* \equiv C$ wäre, und dies ist unmöglich, weil der Bogen $\bar{\beta}$ sicher außerhalb von Γ^* liegt. Enthielte andererseits Γ^* keinen Bogen von C , so müßte Γ^* aus lauter Bögen von γ bestehen. Teilbögen von γ können aber keine geschlossene Jordankurve bilden, da ja γ als doppeltpunktfrei und nicht geschlossen vorausgesetzt wurde.

Die beiden geschlossenen Jordankurven C und Γ^* , von denen Γ^* nicht außerhalb von C liegt, enthalten also beide a im Innern und besitzen gemeinsame Randbögen *ohne miteinander identisch zu sein*. Es bezeichne nun S die Gesamtheit derjenigen Bögen von C , die nicht zu Γ^* gehören, und Σ die Gesamtheit der Bögen von Γ^* , die nicht zugleich C angehören. Unter den zuerst genannten befindet sich sicher $\bar{\beta}$, die zuletzt erwähnten

¹⁸⁾ Vgl. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie Bd. 1, Berlin 1923, S. 87. Dieser Satz lautet: *Es seien j_1, j_2, \dots, j_n endlich viele einfache geschlossene Kurven (Jordankurven), von denen je zwei einander in wenigstens zwei Punkten treffen. Der Rand eines beliebigen von der Menge $j_1 + j_2 + \dots + j_n$ bestimmten Gebietes besteht aus einer einfachen geschlossenen Kurve.*

sind sämtlich im Bogen γ enthalten. Dann ist nach Satz B:

$$m_{C,a} S \leq m_{\Gamma^*,a} \Sigma$$

und daher auch wegen $m_{C,a} \bar{\beta} \leq m_{C,a} S$

$$(1, 1) \quad m_{C,a} \bar{\beta} \leq m_{\Gamma^*,a} \Sigma.$$

Nun betrachten wir Γ^* und Γ und bemerken, daß Γ^* nicht außerhalb von Γ liegt, sicher die Bögen Σ mit Γ gemeinsam hat, und daß schließlich beide Kurven a im Innern enthalten. Daher ist nach dem Satze A:

$$m_{\Gamma^*,a} \Sigma \leq m_{\Gamma,a} \Sigma$$

und somit wegen $m_{\Gamma,a} \Sigma \leq m_{\Gamma,a} \gamma$ und wegen (1, 1)

$$m_{C,a} \bar{\beta} \leq m_{\Gamma,a} \gamma, \quad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir besprechen nunmehr zwei geometrische Konfigurationen, auf die wir im folgenden unsere Sätze anwenden müssen. Unser Ziel wird hierbei im wesentlichen sein, die folgende Aufgabe zu lösen: Es sei C eine geschlossene Jordankurve, γ ein Bogen von C ; wir suchen dann nach einer Abschätzung für $m_{C,a} \gamma$ (bei beliebigem a im Innern von C) nach oben und unten. Unter Heranziehung von Kreisabbildungen werden wir nun diese Frage in einem für unsere Zwecke hinreichendem Umfange beantworten können.

Hilfssatz 1. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene, k ein die Kurve C in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis,*

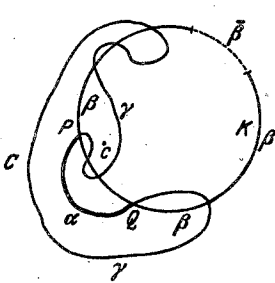


Fig. 4.

$\alpha = \widehat{PQ}$ irgendein von zwei Schnittpunkten P und Q von k und C begrenzter Bogen von C , der bis auf seine Endpunkte außerhalb von k verläuft, γ der zu α komplementäre Bogen von C . Der Kreisbogen \widehat{PQ} , der α zu einer geschlossenen, das Kreisinnere im Innern enthaltenden Jordankurve C_1 ergänzt, werde mit β bezeichnet. Es sei ferner c ein dem Durchschnitt der Innengebiete von k und C angehörender Punkt¹⁹⁾, so daß also auch c im Innern von C_1 liegt. Schließlich möge β ein Teil-

bogen des Bogens β , also auch der Kurve C_1 sein, der durch den Bogen γ von C von c abgeschirmt wird²⁰⁾ (s. Fig. 4). Dann ist

$$m_{k,c} \bar{\beta} \leq m_{C,c} \gamma.$$

¹⁹⁾ Offenbar gibt es einen solchen Punkt c , da ja k die Kurve C durchsetzen soll.

²⁰⁾ Es entspricht also die Kurve C_1 der Kurve, die wir in der Definition des Abschirmens mit C bezeichnet haben, und die Kurve C übernimmt die Rolle der dort mit Γ bezeichneten Kurve.

Beweis. Da der Bogen γ von C den Bogen $\bar{\beta}$ von C_1 von c abschirmt, ist nach Satz C

$$(1, 2) \quad m_{C_1, c} \bar{\beta} \leq m_{C, c} \gamma.$$

Nun ist aber das Innere des Kreises k im Innern von C_1 enthalten, und da der Bogen $\bar{\beta}$ beiden Kurven C_1 und k gemeinsam ist, so ist nach Satz A:

$$m_{k, c} \bar{\beta} \leq m_{C_1, c} \bar{\beta},$$

woraus in Verbindung mit (1, 2) die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, k ein die Kurve C in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis. Es sei ferner $\alpha = \widehat{PQ}$ ein von zwei Schnittpunkten von k und C begrenzter, sonst außerhalb von k verlaufender Bogen von C mit den folgenden weiteren Eigenschaften: Ergänzt man α durch einen solchen der beiden Kreisbögen \widehat{PQ} , etwa γ , zu einer geschlossenen Jordankurve Γ , daß das Innere von k dem Äußeren von Γ angehört, so möge im Innern von Γ ein Punkt c' aus dem Innern von C liegen. β sei der zu α in bezug auf C komplementäre Bogen, $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von β , der durch γ von c' abgeschirmt wird (s. Fig. 5). Dann ist

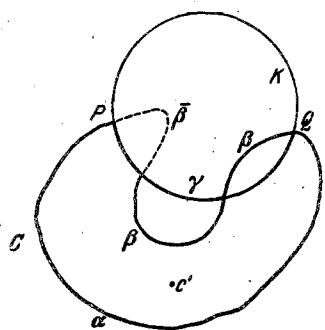


Fig. 5.

$$m_{C, c'} \bar{\beta} \leq m_{k, c'} \gamma.$$

Beweis. Da der Bogen γ von Γ den Bogen $\bar{\beta}$ von C von c' abschirmt, ist

$$(1, 3) \quad m_{C, c'} \bar{\beta} \leq m_{\Gamma, c'} \gamma.$$

Nun gehört aber das Innere von Γ ganz dem Äußeren von k an, und da der Bogen γ sowohl k wie Γ angehört, so folgt nach dem Satze A²¹⁾:

$$m_{\Gamma, c'} \gamma \leq m_{k, c'} \gamma,$$

woraus sich in Verbindung mit (1, 3) die Behauptung ergibt. —

5. Wir leiten nunmehr einen sehr einfachen Hilfssatz über Jordankurven her, den wir gleichfalls später (§ 4, Nr. 21 und Nr. 30) verwenden werden.

²¹⁾ Man beachte, daß es für die Gültigkeit der Sätze A und B (Nr. 2) gleichgültig ist, ob G bzw. G_1 das Innere oder das Äußere der diese Gebiete begrenzenden Jordankurven C bzw. C_1 sind.

Hilfssatz 3. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, c ein Punkt im Innern von C . g sei eine C in mindestens zwei Punkten durchsetzende Gerade, und $\alpha = \widehat{AB}$ sei ein Bogen von C , der (eventuell bis auf seine Endpunkte A, B , die auf g liegen dürfen) ganz auf der c abgewandten Seite von g verläuft. β sei der zu α komplementäre Bogen. Verbindet man dann A und B durch einen Jordanbogen γ , der die Kurve C höchstens in Punkten des Bogens α trifft und ganz auf derselben Seite von g bleibt wie α ,

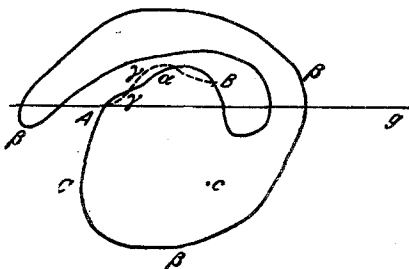


Fig. 6.

so enthält die von γ und β gebildete geschlossene Jordankurve Γ den Punkt c im Innern (s. Fig. 6).

Beweis. Wir benutzen im folgenden als Kriterium dafür, daß ein Punkt P im Innern von C liegt, die Tatsache, daß seine Ordnung $O(P, C)$ in bezug auf die Kurve C dann und nur dann gleich ± 1 ist, wenn P sich im Innern von C befindet²²⁾. Dabei versteht man unter der Ordnung $O(P, C)$ des Punktes P in bezug auf die geschlossene Jordankurve C den $\frac{1}{2\pi}$ -fachen Zuwachs des Winkels $\theta(Q)$, den der von P nach einem beliebigen Punkte Q von C gezogene Radiusvektor \vec{PQ} mit der positiven reellen Achse (oder allgemeiner irgendeiner festen Geraden) bildet, bei einem vollen Umlauf des Punktes Q längs der Kurve C . Bezeichnet man also die Änderung des Winkels $\theta(Q)$ bei dem genannten Umlauf von Q längs C mit $\Delta\theta$, so ist

$$O(P, C) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}.$$

Wir denken uns nun den Radiusvektor r vom Punkte c nach dem Punkte A gezogen; $\theta(A)$ sei der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der positiven reellen Achse bildet, und zwar werde $\theta(A)$ durch die Bedingung $0 \leq \theta(A) < 2\pi$ normiert. Der Endpunkt des Radiusvektors r möge nun stetig von A aus die Kurve C durchlaufen. Dabei ändert sich der Winkel θ , den r mit der positiven reellen Achse bildet, stetig mit dem Endpunkt Q , und wir denken uns diesen Winkel $\theta = \theta(Q)$ vom Werte $\theta(A)$ aus stetig fortgesetzt. Nach der Durchlaufung des Bogens α von A nach B möge der Winkel $\theta(Q)$ im Punkte B auf den Wert $\theta(B)$ und nach dem vollen Umlauf von C auf den Wert $\theta'(A)$ angewachsen sei. Da c im Innern von C liegt, ist $\theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi$. Ferner ist $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$, da ja c und der (offene) Bogen α auf verschiedenen Seiten von g liegen.

²²⁾ Vgl. z. B. B. von Kerékjártó loc. cit. S. 82f.

Nun denken wir uns die Kurve Γ zuerst von A nach B längs γ und dann von B nach A längs β durchlaufen. Im Punkte A bildet (bei der obigen Normierung) der von c nach A gezogene Radiusvektor r mit der positiven reellen Achse gleichfalls den Winkel $\theta(A)$. Nach der Durchlaufung von γ möge der stetig von $\theta(A)$ aus fortgesetzte Winkel $\theta = \theta(Q)$, den der von c nach dem Punkte Q von C gezogene Radiusvektor $r = r(Q)$, mit der positiven reellen Achse bildet, auf den Wert $\theta^*(B)$ angewachsen sein, nach dem vollen Umlauf von Γ möge sein Wert $\theta^*(A)$ sein. Es ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = [\theta(B) - \theta(A)] + 2\pi n,$$

wo n eine ganze Zahl ≥ 0 ist. Es muß notwendig $n = 0$ sein. Denn da c und der Bogen γ auf verschiedenen Seiten von g liegen, ist dieser Winkel seinem absoluten Betrage nach sicher $< \pi$, und da auch $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$ ist, ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = \theta(B) - \theta(A), \quad \theta^*(B) = \theta(B).$$

Da nun Γ den Bogen β mit C gemeinsam hat, ist

$$\theta^*(A) - \theta^*(B) = \theta'(A) - \theta(B),$$

und hieraus folgt wegen $\theta^*(B) = \theta(B)$

$$\theta^*(A) = \theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi, \quad \frac{\theta^*(A) - \theta(A)}{2\pi} = \pm 1,$$

w. z. b. w.

6. Wir werden im folgenden unsere Sätze über das Verhalten des Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion in einem Randpunkte P für Gebiete G formulieren, die von einer geschlossenen Jordankurve C begrenzt werden. Sie gelten dann aber auch für wesentlich allgemeinere Gebiete, nämlich für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete, deren Rand einen „freien“ Jordanbogen enthält, wenn der Randpunkt P innerer Punkt eines solchen Bogens ist. (Dabei verstehen wir unter einem „freien“ Randbogen einen solchen, der sich durch einen geeigneten Querschnitt von G so zu einer geschlossenen Jordankurve ergänzen läßt, daß ihr Inneres ganz G angehört.) Dies ergibt sich sofort aus dem folgenden

Hilfssatz 4. Sind G und G_1 zwei einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder einen freien Jordanbogen C' gemeinsam haben, und stoßen die beiden Gebiete von derselben Seite an C' an, bilden ferner $\varphi(w)$ bzw. $\varphi_1(w)$ G bzw. G_1 auf $|z| < 1$ ab, so konvergiert für einen festen inneren Punkt w_1 von C' der Quotient

$$(1, 4) \quad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}$$

gegen eine von 0 verschiedene Konstante c , wenn w auf C' oder aus der Teilumgebung von C' , die dem Durchschnitt von G und G_1 angehört gegen w_1 strebt. Es ist also

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \sim_c \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{w - w_1}.$$

Insbesondere gibt es also auch zwei Konstanten c_1 und c_2 , so daß

$$0 < c_1 \leq \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \right| \leq c_2$$

für solche w gilt.

Der Inhalt dieses Satzes kann etwas unpräzise auch so wiedergegeben werden: Das Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ hängt nur von der Umgebung des betrachteten Randpunktes ab, nicht aber von der Beschaffenheit der übrigen Teile von G .

Beweis. Zum Beweise darf man annehmen, daß G_1 im Innern von G (bis auf den Bogen C') liegt, da man sonst beide Gebiete G und G_1 mit einem dritten in beiden gelegenen vergleichen könnte. — Bei der Abbildung von G mittels $z = \varphi(w)$ geht dann G_1 in ein im Innern von $|z| = 1$ liegendes Gebiet D_1 über, das einen Bogen γ , das Bild von C' , mit der Peripherie gemeinsam hat. Man beachte nun, daß man die Abbildung von G_1 auf den Einheitskreis $|\zeta| < 1$ auch so durchführen kann, indem man G_1 mittels $z = \varphi(w)$ auf D_1 und D_1 mittels $\zeta = g(z)$ auf $|\zeta| < 1$ passend abbildet. $g(z)$ ist dann noch auf jedem festen inneren Teilbogen γ' von γ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip analytisch und von 0 verschieden. Wegen $\zeta = \varphi_1(w) = g(\varphi(w))$, $z_1 = \varphi(w_1)$ ist

$$\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} = \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1},$$

und da der Quotient $\frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1}$ mit $z \rightarrow z_1$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergiert, folgt hieraus die obige Behauptung.

7. Es seien nun G und G_1 zwei von den Jordankurven C und C_1 begrenzte Gebiete, wobei C_1 bis auf einen gemeinsamen Randbogen C' im Innern von G liegt. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, genauer zu wissen, in welcher Weise die eben erhaltenen Konstanten c_1 und c_2 von den Kurven C und C_1 abhängen, um für den Quotienten (1, 4) eine gleichmäßige Abschätzung auch für den Fall angeben zu können, daß es sich nicht nur um ein festes Paar solcher Kurven C und C_1 handelt, sondern um eine Schar von derartigen Kurvenpaaren C und C_1 . In dieser Richtung beweisen wir den folgenden Satz (den wir gleich in der für die spätere Anwendung geeigneten Form aussprechen).

Hilfssatz 5. *Es sei $w = f_1(z)$ in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig, und es möge $f_1(z)$ die Peripherie des Kreises in eine geschlossene Jordankurve C_1 überführen. Es sei γ ein den Punkt $z = 1$ im Innern enthaltender Bogen von $|z| = 1$. Sein Bild in der w -Ebene, das ein Teilbogen von C_1 ist, sei mit C' bezeichnet. Ferner möge eine volle Kreisscheibe mit dem Radius $d > 0$ um $f_1(0)$ als Mittelpunkt im Innern von C_1 Platz haben, und C_1 liege selbst innerhalb eines Kreises k_D mit dem Radius D um $f_1(0)$. C sei eine zweite im Innern von k_D verlaufende Jordankurve, die den Bogen C' mit C_1 gemeinsam hat und sonst C_1 im Innern enthält. $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere von C ab, daß $f(0) = f_1(0)$ und $f(1) = f_1(1) = w_1$ ist.*

Ist $z = \varphi_1(w)$ die zu $w = f_1(z)$, $z = \varphi(w)$ die zu $w = f(z)$ inverse Funktion, so gibt es eine nur von γ, d, D , sonst aber von den Kurven C, C_1 bzw. den Funktionen f, f_1 nicht weiter abhängige Konstante $c_2 \geq 1$, so daß für $w \rightarrow w_1$ (w aus dem Innern von C_1 oder auf C_1)

$$1 \leq \lim_{w \rightarrow w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \right| \leq c_2$$

gilt.

Beweis. Wir schicken die folgende Bemerkung voraus: Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w -Ebene, das die volle Kreisscheibe um den in G liegenden Punkt $w = a$ mit dem Radius $d > 0$ enthält und selber ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius D um $w = a$ liegt. Bildet $z = \Phi(w)$ G so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = a$ in $z = 0$ übergeht, so ist für alle w in G

$$(1,5) \quad \left| \frac{w-a}{D} \right| \leq |\Phi(w)| \leq \left| \frac{w-a}{d} \right|.$$

Um die rechte der in (1,5) steckenden Ungleichungen einzusehen, beachte man, daß $w' = \frac{w-a}{d}$ gesetzt, $\psi(w') = \Phi(dw' + a) = \Phi(w)$, in $|w'| < 1$ regulär, absolut < 1 ist und daß ferner $z = \psi(w')$ im Nullpunkt verschwindet. Daher ist nach dem Schwarzschen Lemma $|\Phi(w)| = |\psi(w')| \leq |w'| = \left| \frac{w-a}{d} \right|$, und da für $|w-a| > d$, $\left| \frac{w-a}{d} \right| > 1$ ist und $|\Phi(w)|$ in $G < 1$ ist, gilt diese Ungleichung für alle w in G . Um die linke der in (1,5) steckenden Ungleichungen zu beweisen, hat man nur das Schwarzsche Lemma auf die zu $z = \Phi(w)$ inverse Funktion $w = F(z)$ oder genauer auf die Funktion $w' = \frac{F(z) - a}{D}$ anzuwenden. Diese Funktion ist in $|z| < 1$ regulär und absolut kleiner als 1 und verschwindet in $z = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - a}{D} \right| &\leq |z| = |\Phi(w)|, \\ |\Phi(w)| &\geq \left| \frac{w-a}{D} \right|. \end{aligned}$$

Aus dieser Bemerkung folgt nun zunächst, daß die Werte der Funktion $w = f_1(z)$ für $1 \geq |z| \geq \frac{1}{2}$ sicher außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegen. Denn es ist für $|z| = |\varphi_1(w)| \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq |\varphi_1(w)| \leq \frac{|w - f(0)|}{d},$$

also $|w - f(0)| \geq \frac{d}{2}$. Wir wählen einen $z = 1$ als Mittelpunkt enthaltenen Teilbogen γ_z von γ so, daß das von γ_z und dem durch die Endpunkte von γ_z um $z = 1$ beschriebenen innerhalb von $|z| < 1$ liegenden Kreisbogen \mathfrak{F} begrenzte Kreisbogenzweieck Z_z ganz außerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{2}$ liegt. Das Bild des Innern von Z_z bei der Abbildung durch $f_1(z)$ in der w -Ebene ist dann ein von einer Jordankurve Z_w umschlossenes Gebiet, das ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegt.

Bei der Abbildung des Inneren von C mittels $u = \varphi(w)$ geht das Innere von C_1 in ein von einer geschlossenen Jordankurve Γ begrenztes Gebiet über. Z_w entspricht dabei einer geschlossenen, nirgends außerhalb von Γ verlaufenden Jordankurve Z_u , die einen (von den Funktionen f_1 und f abhängigen) Bogen γ_u mit der Peripherie gemeinsam hat. γ_u enthält $u = 1$ im Innern. Wir behaupten, Z_u verläuft außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$. Dies ergibt sich aus der links in (1, 5) stehenden Ungleichung, angewandt auf die Funktion $z = \varphi(w)$ (für $\Phi(w)$). Denn da Z_w außerhalb des Kreises $|w - f(0)| = \frac{d}{2}$ liegt, ist für Punkte w aus Z_w nach dieser Ungleichung

$$\frac{d}{2D} \leq |\varphi(w)|.$$

Jetzt beachte man, daß man die Funktion $z = \varphi_1(w)$ (analog wie im Beweise des obigen Hilfssatzes) auch so gewinnen kann, daß man das Innere von Γ auf $|z| < 1$ mittels $z = \Psi(u)$ so abbildet, daß $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ ist und die Funktion $z = \Psi(\varphi(w))$ bildet. Dann ist

$$\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} = \frac{\Psi(u) - \Psi(1)}{u - 1}.$$

Um den Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung absolut abzuschätzen, wenden wir wieder wie oben das Spiegelungsprinzip an. Es sei $u = \psi(z)$ die zu $z = \Psi(u)$ inverse Funktion. $u = \psi(z)$ bildet den (festen, d. h. von f und f_1 unabhängigen) Bogen γ_z auf den Bogen γ_u , das Innere des Kreisbogenzweiecks Z_z auf das Innere der Jordankurve Z_u ab. Spiegeln wir nun Z_z an γ_z , so erhalten wir ein Kreisbogenzweieck Z'_z das längs γ_z mit Z_z zusammenstößt und mit diesem zusammen ein Kreisbogenzweieck $(Z_z + Z'_z)$ bildet. Im Innern dieses neuen Kreisbogenzweiecks ist $u = \psi(z)$

regulär. Das durch $u = \psi(z)$ vermittelte Bild des Innern von Z'_z in der u -Ebene ist das Innere der durch Spiegelung von Z_u an γ_u entstehenden Jordankurve Z'_u , und das Bild des Innern von $(Z_z + Z'_z)$ ist das Innere derjenigen Jordankurve, die entsteht, wenn man von Z_u und Z'_u den Kreisbogen γ_u entfernt. Dieses Bildgebiet ist jedenfalls beschränkt, und zwar liegt es, da Z_u , wie oben gesagt, außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$ verläuft, ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{2D}{d}$ um $u = 0$. Es gibt nun eine nur von γ_z , also nur von γ abhängige Zahl $\varrho > 0$, so daß $\psi(z)$ in $|z - 1| \leq \varrho$ regulär ist. Daher ist nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$(1, 6) \quad |\psi'(z)| \leq \frac{2D}{d} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho}{2}} = \frac{2K}{\varrho}, \quad K = \frac{2D}{d}, \quad |z - 1| \leq \frac{\varrho}{2}.$$

Um eine Abschätzung für $|\psi'(1)|$ nach unten herzuleiten, beachte man, daß wegen $|\psi(z)| \leq |z|$ für positive $z < 1$ ²³⁾

$$\frac{|\psi(1) - \psi(z)|}{|1 - z|} = \frac{|1 - \psi(z)|}{1 - z} \geq \frac{1 - |z|}{1 - z} = \frac{1 - z}{1 - z} = 1$$

ist. Da $\psi(z)$ in $z = 1$ regulär ist, folgt daraus mit $z \uparrow 1$ $|\psi'(1)| \geq 1$, und hieraus ergibt sich dann in Verbindung mit (1, 6) die Behauptung des Hilfssatzes.

§ 2.

Weitere Hilfssätze.

8. Hilfssatz 6. *Es sei k der Kreis $|w - a| \leq \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\alpha_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von k . Ferner sei c ein Punkt im Innern von k im Abstände $\sigma \varrho$ von $w = w_1$, $0 < \sigma < 1$. Es werde $|c - a| = \lambda \varrho$ gesetzt, und $\chi (\geq 0)$ bezeichne den Winkel caw_1 im Dreieck caw_1 (siehe Fig. 7). Bildet man dann k vermittelt*

$$\zeta = \frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho} \cdot \frac{c-a}{\varrho}} e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(c-a)}$$

(γ reell)

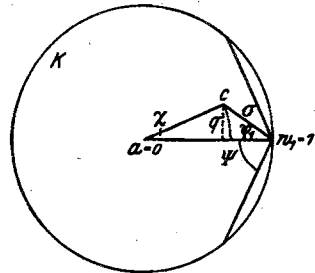


Fig. 7.

so auf den Einheitskreis ab, daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge α'_k eines an w_1 anstoßenden Bogens der Länge $\varrho \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$,

²³⁾ Vgl. für diese auf Herrn K. Löwner zurückgehende Überlegung L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, S. 124.

der Kreisperipherie

$$(2,1) \quad \alpha'_k \geq \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}} \cdot \frac{\alpha \varrho}{\varrho} = A \frac{\alpha \varrho}{\varrho}.$$

Zusatz. Der Punkt c liege im Innern des Winkelraumes W der Öffnung 2Ψ , $0 \leq \Psi < \frac{\pi}{2}$, der von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zum Radius in w_1 verlaufenden Kreissehnen gebildet wird. Macht man dann σ von α_0 abhängig, indem man für hinreichend kleine α_0 $\sigma = m\alpha_0^{3/2}(1 + \vartheta(\alpha_0))$ setzt, wo m eine beliebige positive Konstante und $\vartheta(\alpha_0)$ eine mit $\alpha_0 \rightarrow 0$ gleichfalls gegen 0 konvergierende Funktion von α_0 ist, so gilt gleichmäßig für alle oben definierten Punkte c in k und W mit dem Abstand $R = \sigma \varrho$ von w_1

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} A \sigma \geq 2 \cos \Psi,$$

d. h. zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gibt es ein von ε — sowie Ψ , m und der Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — abhängiges $\delta(\varepsilon)$, so daß für alle $\alpha_0 \leq \delta(\varepsilon)$ und für alle diese Punkte c mit dem Abstände R von w_1

$$A \sigma \geq 2(1 - \varepsilon) \cos \Psi, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

gilt.

Bemerkung. Dieser Zusatz bleibt, wie leicht zu sehen ist, auch noch richtig, wenn der Punkt c im Abstände $R = \sigma \varrho$ von w_1 nicht den Winkelraum W der Öffnung 2Ψ , sondern in dem analog gebildeten Winkelraum W' der Öffnung $2(\Psi + \omega)$, $\omega > 0$, angenommen wird, wo ω nur Funktion von α_0 ist und mit $\alpha_0 \rightarrow 0$ selber gegen 0 konvergiert. ($\delta(\varepsilon)$ hängt dann auch noch von $\omega(\alpha_0)$ ab.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Man beachte nun, daß ($w - a = e^{i\vartheta}$ gesetzt)

$$(2,2) \quad \alpha'_k = \left| \int_0^{\pm \alpha} \left| \frac{d\zeta}{d\vartheta} \right| d\vartheta \right| = \int \frac{1 - |c - a|^2}{|1 - (w - a)(\overline{c - a})|^2} d\vartheta$$

ist. Wir schätzen den Nenner des Integranden nach oben für $|\vartheta| \leq \alpha \leq \alpha_0$ ab. Es ist, wegen $c - a = \lambda e^{\pm i\chi}$

$$|1 - (w - a)(\overline{c - a})|^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\vartheta \mp \chi) = (1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\vartheta \mp \chi}{2}.$$

Wegen $|\vartheta| \leq \alpha \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \chi < \frac{\pi}{2}$ ²⁴⁾ ist weiter

$$|1 - (w - a)(\overline{c - a})|^2 \leq (1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}.$$

²⁴⁾ Wegen $\sigma < 1$.

(Zwischen λ und σ besteht dabei die Relation

$$(2, 3) \quad \sigma^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \chi = (1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Daher folgt aus (2, 2)

$$\alpha'_k \geq \frac{1 - \lambda^2}{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}} \alpha,$$

w. z. b. w.

Beweis des Zusatzes. Es ist nach (2, 1), (2, 3)

$$(2, 4) \quad \sigma A = \frac{(1 - \lambda^2) \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\chi}{2}}}{(1 - \lambda)^2 + 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}} = \frac{(1 + \lambda)(1 - \lambda)^2 \sqrt{1 + \frac{4\lambda \sin^2 \frac{\chi}{2}}{(1 - \lambda)^2}}}{(1 - \lambda)^2 \left(1 + \frac{4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}}{(1 - \lambda)^2}\right)},$$

$$\sigma A = \frac{(1 + \lambda) \sqrt{1 + \frac{4\lambda \sin^2 \frac{\chi}{2}}{(1 - \lambda)^2}}}{1 + \frac{4\lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}}{(1 - \lambda)^2}}.$$

Aus der Figur 7 folgt leicht (ψ_1 ist der Winkel $c w_1 a$ im Dreieck $c w_1 a$)

$$(2, 5) \quad \sin \chi = \frac{q}{\lambda} \geq \frac{1 - \lambda}{\lambda} \operatorname{tg} \psi_1$$

und daher

$$\sin \frac{\chi}{2} = \frac{\sin \chi}{2 \cos \frac{\chi}{2}} \geq \frac{\sin \chi}{2} \geq \frac{1 - \lambda}{2\lambda} \operatorname{tg} \psi_1.$$

Somit ergibt sich für den Zähler Z in (2, 4)

$$(2, 6) \quad Z \geq (1 + \lambda) \sqrt{1 + \frac{4\lambda(1 - \lambda)^2 \operatorname{tg}^2 \psi_1}{4\lambda^2(1 - \lambda)^2}}$$

$$= (1 + \lambda) \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \psi_1}{\lambda}} \geq (1 + \lambda) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1} = \frac{1 + \lambda}{\cos \psi_1}.$$

Bei der Abschätzung des Nenners in (2, 4) gehen wir so vor: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ mögen im folgenden Größen bezeichnen, die — bei festem Ψ , m und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — gleichmäßig in ψ_1 mit $\alpha_0 \rightarrow 0$ gegen 0 konvergieren. Dann folgt wegen

$$\lambda^2 = 1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \psi_1, \quad 1 - \lambda^2 = 2\sigma \cos \psi_1 - \sigma^2$$

und wegen $\cos \psi_1 \geq \cos \Psi > 0$ für hinreichend kleines α_0

$$1 - \lambda = \sigma(2 \cos \psi_1 - \sigma) \frac{1}{1 + \lambda} = \sigma(1 + \varepsilon_1) \cos \psi_1, \quad 1 + \varepsilon_1 > 0.$$

Daher wird (vgl. (2, 5))

$$\sin \chi = \frac{q}{\lambda} = \frac{\sigma \sin \psi_1}{\lambda} = (1 - \lambda) \cdot \frac{\operatorname{tg} \psi_1}{1 + \varepsilon_1},$$

$$\chi = (1 + \varepsilon_2)(1 - \lambda) \operatorname{tg} \psi_1$$

und somit

$$\alpha_0 + \chi = \alpha_0 + (1 + \varepsilon_2)(1 - \lambda) \operatorname{tg} \psi_1,$$

$$\sin \frac{\alpha_0 + \chi}{2} = \frac{1 + \varepsilon_3}{2} (\alpha_0 + (1 + \varepsilon_2)(1 - \lambda) \operatorname{tg} \psi_1),$$

$$\frac{4 \lambda \sin^2 \frac{\alpha_0 + \chi}{2}}{(1 - \lambda)^2} = (1 + \varepsilon_4) \left(\frac{\alpha_0}{1 - \lambda} + (1 + \varepsilon_2) \operatorname{tg} \psi_1 \right)^2$$

$$= (1 + \varepsilon_4) \left(\frac{\alpha_0}{\sigma(1 + \varepsilon_1) \cos \psi_1} + (1 + \varepsilon_2) \operatorname{tg} \psi_1 \right)^2$$

$$\leq (1 + |\varepsilon_4|) \left(\frac{\sigma^{3/2}}{m^{3/2} (1 + \vartheta)^{3/2} \sigma (1 + \varepsilon_1) \cos \psi_1} + (1 + \varepsilon_2) \operatorname{tg} \psi_1 \right)^2$$

$$= (1 + |\varepsilon_4|) \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{m^{3/2} (1 + \vartheta)^{3/2} (1 + \varepsilon_1) \cos \psi_1} + (1 + \varepsilon_2) \operatorname{tg} \psi_1 \right)^2.$$

Wir erhalten also für den Nenner N in (2, 4) die Abschätzung

$$N \leq 1 + \operatorname{tg}^2 \psi_1 (1 + \varepsilon_5) + C \sqrt{\sigma} \leq \frac{1}{\cos^2 \psi_1} + \varepsilon_5 \operatorname{tg}^2 \Psi + C \sqrt{\sigma},$$

wo C bei festem m und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ eine nur von Ψ abhängige Konstante ist, wenn α_0 hinreichend klein angenommen wird. Hieraus und aus (2, 6) ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Zusatzes.

9. Hilfssatz 7. *Es sei k der Kreis $|w - a| = \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\tau_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von k . Ferner bezeichne W den von zwei von $w = w_1$ ausgehenden symmetrisch zur Außennormalen in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung 2Ψ , $0 \leq \Psi < \frac{\pi}{2}$. c sei ein Punkt in W (mit Rand) im Abstände $\sigma \varrho$ von w_1 , $\sigma > 0$, so daß also c außerhalb von k liegt. Bildet man dann das Äußere des Kreises $|w - a| = \varrho$ vermittels*

$$(2, 7) \quad \zeta = \frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho} \cdot \frac{\bar{c}-\bar{a}}{\varrho}} e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(\bar{c}-\bar{a})} \quad (\gamma \text{ reell})$$

auf den Einheitskreis ab, so daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge α'_k eines Bogens der Länge $\alpha \varrho$ der Kreisperipherie

$$\alpha'_k \leq \frac{(2 + \sigma)^2}{2 \sigma \cos \Psi} \frac{\alpha \varrho}{\varrho} = A_1 \frac{\alpha \varrho}{\varrho}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Wegen (2, 7) ist dann

$$\left| \frac{d\zeta}{dw} \right| = \frac{|c-a|^2 - 1}{|1 - (w-a)(\bar{c}-\bar{a})|^2},$$

und daher ergibt sich durch Integration (ähnlich wie oben)

$$\alpha'_k \leq \frac{|c-a|^2 - 1}{(|c-a| - 1)^2} \alpha = \frac{|c-a| + 1}{|c-a| - 1} \alpha.$$

Nun ist $|c-a| = \sqrt{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos \psi_1}$ (siehe Fig. 8). Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{|c-a| + 1}{|c-a| - 1} &= \frac{\sqrt{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos \psi_1} + 1}{\sqrt{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos \psi_1} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{1 + \sigma^2 + 2\sigma \cos \psi_1} + 1)^2}{\sigma^2 + 2\sigma \cos \psi_1} \\ &\leq \frac{(2 + \sigma)^2}{2\sigma \cos \psi_1} \leq \frac{(2 + \sigma)^2}{2\sigma \cos \Psi}, \end{aligned}$$

und daher, wie behauptet,

$$\alpha'_k \leq \frac{(2 + \sigma)^2}{2\sigma \cos \Psi} \alpha.$$

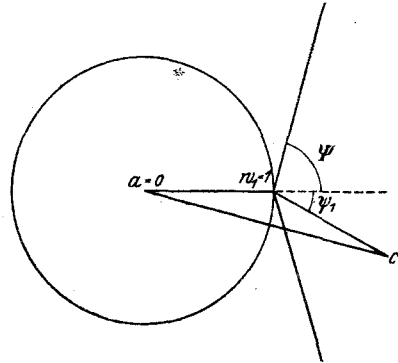


Fig. 8.

10. Wir leiten nun noch zwei Hilfssätze her, in denen wir die folgende Aufgabe behandeln. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, α ein fester Bogen von C . Wir bilden das Innere von C auf den Einheitskreis ab und zwar so, daß einmal ein im Innern von C liegender Punkt $w = w_0$ in den Nullpunkt, und ein anderes Mal ein in C liegender Punkt $w = c \neq w_0$ in den Nullpunkt übergeht. Wir fragen dann, wie sich die konforme Länge von α beim Übergang von einer Abbildung zur anderen ändert, insbesondere auch dann, wenn c gegen den Rand konvergiert und die Größe von α in bestimmter Weise von c abhängig gemacht wird.

Hilfssatz 8. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene, α ein Bogen von C . $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = w_0$ im Innern von C in $z = 0$ übergeht; $\zeta = \Phi(w)$ vermittele die Abbildung des Inneren von C auf $|\zeta| < 1$ so, daß $w = c \neq w_0$ $\zeta = 0$ entspricht. Hat das Bild von α bei der ersten Abbildung die Länge α' , bei der zweiten die Länge α'' , so ist*

$$\alpha' \frac{1 - |\varphi(c)|}{1 + |\varphi(c)|} \leq \alpha'' \leq \frac{1 + |\varphi(c)|}{1 - |\varphi(c)|} \alpha'.$$

Der Beweis ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß man $\Phi(w)$ aus $\varphi(w)$ gewinnen kann, indem man den Kreis $|z| < 1$ auf $|\zeta| < 1$ mittels

$$\zeta = \frac{z - b}{1 - z\bar{b}} e^{i\gamma}, \quad b = \varphi(c), \quad \gamma \text{ reell,}$$

abbildet, so daß $z=0$ in $\zeta=b$ übergeht. Dann ist $\Phi(w) = \frac{\varphi(w) - \varphi(c)}{1 - \varphi(w)\varphi(c)} e^{i\tau}$. Daher ist (vgl. den Beweis von Hilfssatz 6)²⁵⁾

$$\alpha'' = \left| \int_{(\alpha')} \frac{1 - |b|^2}{|1 - z\bar{b}|^2} d\vartheta \right| \leq \frac{1 - |b|^2}{(1 - |b|)^2} \alpha' = \frac{1 + |\varphi(c)|}{1 - |\varphi(c)|} \alpha',$$

$$\alpha'' \geq \frac{1 - |b|^2}{(1 + |b|)^2} \alpha' = \frac{1 - |\varphi(c)|}{1 + |\varphi(c)|} \alpha'.$$

Hilfssatz 9. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, $\widehat{PQ} = \alpha$ ein Bogen von C . $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = w_0$ (im Innern von C) in $z=0$, $P(w = w_1)$ in $z=1$ und α in einen Bogen der Länge α' der Kreisperipherie übergeht. $\zeta = \Phi(w) = \frac{\varphi(w) - \varphi(c)}{1 - \varphi(w)\varphi(c)}$ vermittele die Abbildung des Innern von C auf $|\zeta| < 1$, so daß $w = c + w_0$, $\zeta = 0$ und α einem Kreisbogen der Länge α'' entspricht. Der Punkt P werde als fest, der Punkt Q als variabel angenommen. Ferner möge für $Q \rightarrow P$ auch $c \rightarrow P$ konvergieren, und zwar so, daß der Bildpunkt $b = \varphi(c) = |b|e^{i\tau}$ von c in der z -Ebene innerhalb des Winkelraumes

$$\pi - \tau_1 \leq \text{arc}(z - 1) \leq \pi + \tau_1, \quad 0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2},$$

bleibt. Schließlich mögen Q und c so gegen P gehen, daß für hinreichend kleine \widehat{PQ} (und \widehat{Pc}) $\alpha'' \leq \delta < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \tau_1 \right)$ ist. Dann ist für genügend kleine \widehat{PQ} und \widehat{Pc}

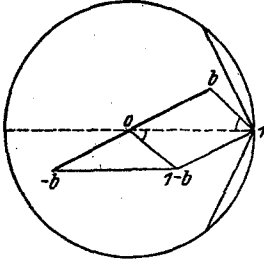


Fig. 9.

$$\alpha' \leq \frac{1 - |b|}{2|b| \cos^2 \left(\tau_1 + \frac{\delta + |\tau|}{2} \right)} \alpha'',$$

$$b = \varphi(c) = |b|e^{i\tau}.$$

Beweis. Es ist

$$\zeta_1 = \Phi(w_1) = \frac{1 - \varphi(c)}{1 - \varphi(c)} = \frac{1 - b}{1 - b}$$

und

$$\text{arc } \Phi(w_1) = \text{arc } \frac{1 - b}{1 - b} = \vartheta_1.$$

Aus der Figur 9 erkennt man, daß wegen unserer Annahme $|\vartheta_1| \leq 2\tau_1 < \pi$ ist²⁶⁾.

²⁵⁾ Das Zeichen $\int_{(\alpha')}$ soll bedeuten, daß über den Bildbogen von α in der z -Ebene von der Länge α' integriert werden soll.

²⁶⁾ Bei geeigneter Zählung des $\text{arc } \frac{1 - b}{1 - b}$. In der Figur 9 ist das Viereck mit den Endpunkten $1, b, 0, 1 - b$ ein Parallelogramm, bei dem die Seite $0 \dots 1 - b$ parallel und gleich der Seite $b \dots 1$ ist.

Wir haben nun, da $z = \varphi(w) = \frac{\zeta + b}{1 + \bar{b}\zeta}$, $\zeta = \Phi(w)$, ist,

$$\alpha' = \left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 \pm \alpha''} \frac{1 - |b|^2}{|1 + \bar{b}\zeta|^2} d\vartheta \right|$$

nach oben abzuschätzen. Zu diesem Zwecke wählen wir \overline{PQ} so klein, daß bereits $|\alpha''| \leq \delta < \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \tau_1)$ und $|\arccos b| = |\chi| \leq \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \tau_1)$ ist und schätzen den Nenner des Integranden für alle $\zeta = e^{i\vartheta}$ mit ϑ in $\langle \vartheta_1, \vartheta_1 \pm \delta \rangle$, $|\vartheta_1| \leq 2\tau_1$, ab. Dann ist

$$\begin{aligned} |1 + \bar{b}e^{i\vartheta}|^2 &= 1 + |b|^2 + 2|b|\cos(\vartheta - \chi) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b|\cos^2 \frac{\vartheta - \chi}{2} \\ &\geq (1 - |b|)^2 + 4|b|\cos^2 \left(\frac{2\tau_1 + \delta + |\chi|}{2} \right) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b|\cos^2 \left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2} \right); \end{aligned}$$

mithin wird

$$\alpha' \leq \frac{(1 - |b|)(1 + |b|)\alpha''}{4|b|\cos^2 \left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2} \right)} \leq \frac{1 - |b|}{2|b|\cos^2 \left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2} \right)} \alpha'',$$

w. z. b. w.

§ 3.

Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter einer Jordankurve.

11. Um das Verhalten eines Jordanbogens in der Umgebung eines seiner Punkte zu charakterisieren, wollen wir die folgenden Begriffsbildungen einführen.

Wir verstehen unter einem „Kurvenelement“ c einen Punkt P und einen durch diesen Punkt hindurchgehenden (stetigen) Kurvenbogen b , wobei das Kurvenelement — definitionsgemäß — als dasselbe anzusehen ist, wenn der Bogen b durch einen P als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen b' ersetzt wird. Die Beziehung zwischen dem Kurvenelement c , und dem Punkt P , der bei der Definition des Kurvenelements zugrunde gelegt wird, bringen wir zum Ausdruck, indem wir sagen, c gehe durch P hindurch.

12. Um das Verhalten eines solchen Kurvenelementes zu charakterisieren, führen wir die „Unbewalltheitsfunktion“ ein. Diese soll folgendermaßen definiert werden: Wir beschreiben um den Punkt P , durch den c hindurchgeht, einen Kreis k_ϵ mit so kleinem Radius $\epsilon > 0$, daß k_ϵ bereits das Kurvenelement c (in endlich oder unendlich vielen Punkten) schneidet.

Durchläuft man den Bogen b von P aus zuerst in der einen Richtung und dann in der entgegengesetzten, so möge in der einen Durchlaufungsrichtung der letzte Schnittpunkt von b mit k_ϵ der Punkt P_1 und in der anderen der letzte derartige Schnittpunkt P_2 sein. Wir betrachten dann die (abgeschlossene) Kreisscheibe k_Δ mit dem kleinsten Radius $\Delta = \Delta(\epsilon)$ um P , welche die beiden Kurvenbögen $\widehat{PP_1}, \widehat{PP_2}$ enthält (siehe Fig. 10).

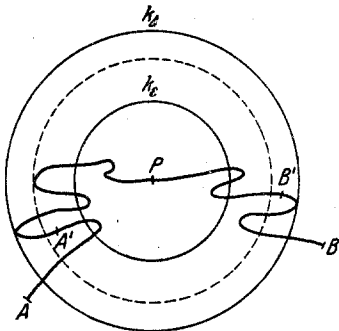


Fig. 10.

$\Delta(\epsilon)$ ist dann offenbar (wegen der Stetigkeit des Kurvenbogens b) eine mit $\epsilon \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmende von rechts (aber nicht notwendig von links) stetige Funktion. Ferner ist $\Delta(\epsilon)$ in dem folgenden Sinne von der „Ausdehnung“ des Bogens b von c unabhängig: Ersetzt man b durch einen P als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen b' , so hat offenbar $\Delta(\epsilon)$ für alle hinreichend kleinen ϵ ²⁷⁾ denselben Wert. Daher kann man $\Delta(\epsilon)$ zur Charakterisierung einer Eigenschaft des Kurvenelementes

benutzen, und wir bezeichnen $\Delta(\epsilon)$ als die „Unwalltheitsfunktion“ des Kurvenelementes c . — Im folgenden wird es vor allem auf den Quotienten $\frac{\Delta(\epsilon)}{\epsilon}$ ankommen. Wir werden verlangen, daß der $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\epsilon)}{\epsilon}$ endlich ist, oder also, daß $\Delta(\epsilon)$ der Bedingung $\Delta(\epsilon) = O(\epsilon)$ genügt.

13. Wir führen ferner zur weiteren Charakterisierung eines Kurvenelementes die sogenannte *Richtungsfunktion* ein. Ein Kurvenelement heiße „gerichtet“, wenn es im Punkte P , durch den es hindurchgeht, eine Tangente besitzt. Es möge nun c ein gerichtetes Kurvenelement sein. Es sei $\epsilon > 0$. Wir schließen dann die Tangente in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 ein, die mit der Tangente in P den Winkel ϵ bilden. Dann gibt es ein $r = r(\epsilon) > 0$, so daß der Kreis um P mit $r(\epsilon)$ nur Punkte von c im Innern oder auf dem Rande enthält, die zugleich

²⁷⁾ Dieses ϵ muß zunächst so klein gewählt werden, daß $\Delta(\epsilon)$ gleichzeitig für b und b' erklärt werden kann. Dies reicht aber unter Umständen nicht aus, wie aus der Figur 10 hervorgeht, sondern es muß eventuell ϵ noch kleiner angenommen werden, damit die Unwalltheitsfunktion bei beiden Erklärungen denselben Wert hat. In der Figur 10 ist nämlich das Kurvenelement c einmal durch den Bogen \widehat{AB} und dann durch dessen Teilbogen $\widehat{A'B'}$ repräsentiert. Der Kreis k_ϵ stellt den Kreis mit dem Radius ϵ um P dar, der Kreis k_1 ist der Kreis mit dem Radius Δ bei der Definition von $\Delta(\epsilon)$ für den Bogen $\widehat{AB} = b$, der kleinere (punktierter) Kreis stellt den Kreis mit dem Radius $\Delta(\epsilon)$ bei der Definition von $\Delta(\epsilon)$ für den Teilbogen $\widehat{A'B'} = b'$ von \widehat{AB} dar.

dem von g_1 und g_2 gebildeten Winkelraume (einschließlich der Schenkel) der Öffnung 2ε angehören. (Um ein solches $r(\varepsilon)$ eindeutig festzulegen, können wir, wenn c aus dem Winkelraum hinaustritt, für $r(\varepsilon)$ immer den größten der oben genannten Werte $r(\varepsilon)$ wählen. Sonst können wir $r(\varepsilon) > 0$ und sonst beliebig annehmen.) Wir bezeichnen eine solche Funktion $r(\varepsilon)$ als eine Richtungsfunktion von c . Verkürzt oder verlängert man den Bogen b , so bleibt von einem ε an jede solche Funktion $r(\varepsilon)$ Richtungsfunktion von c .

14. Um nun das Verhalten einer geschlossenen Jordankurve in der Umgebung eines ihrer Punkte zu charakterisieren, benutzen wir die eben eingeführten Begriffsbildungen in der folgenden Weise: *Wir verstehen unter der Unbewalltheitsfunktion von C im Punkte P und, falls C in P eine Tangente besitzt, unter der Richtungsfunktion von C im Punkte P die Unbewalltheitsfunktion bzw. Richtungsfunktion eines durch P hindurchgehenden Kurvenelementes von C .* Diese Funktionen bringen dann in der Tat nur eine Eigenschaft dieser Kurve in der Umgebung dieses Punktes zum Ausdruck. — Genügt insbesondere die Unbewalltheitsfunktion von C in P der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, so wollen wir sagen, C sei in P *linear unbewallt*. Existiert überdies der $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und ist er $= 1$ (dieser Fall wird in folgenden eine wichtige Rolle spielen), so nennen wir C in P *regulär unbewallt*.

Es sei noch für das Folgende darauf hingewiesen, daß die Bedingungen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ ($\varepsilon \downarrow 0$) invariant gegenüber einer Transformation der Form $u - u_1 = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, reell, bleibt, wo w_1 der Punkt P ist. Denn nach der Durchführung der Transformation wird dieser Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ gleich $\frac{\Delta^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$.

15. Es sei nun C eine geschlossene Jordankurve, P_0 ein Punkt von C , und es möge die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P_0 der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügen. Wir werden zeigen, daß dann eine gewisse für uns wichtige Parameterdarstellung der Kurve möglich ist. Unter dieser Annahme existieren nämlich ausgezeichnete Parameter t , die wir als metrische Parameter in bezug auf den Punkt P_0 bezeichnen wollen, mit der folgenden Eigenschaft: *Entspricht etwa P_0 der Parameterwert t_0 , so gibt es zwei positive Zahlen c_1, C_1 , $c_1 < C_1$, so daß*

$$(3, 1) \quad 0 < c_1 \leq \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < C_1$$

ist, wo, wenn $P(t)$ der dem Parameterwert t entsprechende Kurvenpunkt ist, $r(t)$ die Länge des Radiusvektors $\overline{P_0 P(t)}$ bedeutet. Umgekehrt folgt

aus der Existenz eines metrischen Parameters, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.

Da sich ein metrischer Parameter z. B. mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Konstanten multiplizieren läßt, ist nur der Quotient $\frac{C_1}{c_1}$ oder genauer, $L = \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$, $l = \underline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$ gesetzt, der Quotient $\frac{L}{l}$ wesentlich. Bei unserem Beweis für die oben behauptete Tatsache wird sich überdies ein einfacher Zusammenhang dieses Quotienten mit dem $\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa$ ergeben, nämlich: *Es ist für endliches κ stets $\kappa \leq \frac{L}{l}$, und es gibt geeignete metrische Parameter, für die dieser Quotient $\frac{L}{l} = \kappa$ ist.*

Beweis. a) Wir nehmen an, daß die Kurve C in irgendeiner Parameterdarstellung $P = P(t^*)$ gegeben ist, P_0 sei $= P(0)$. Zu jedem ν von einem $\nu = \nu_0$ an gehört ein größter Wert $t^* > 0$, den wir mit t^* bezeichnen, so daß $\overline{P(0)P(t^*)} = \frac{1}{\nu} = r_\nu$ ist. Dann bilden die Punkte t^* ($\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \dots$) eine Einteilung des Intervalls $t^*, \dots, 0$ in unendlich viele Teilintervalle. Wir bilden jedes Intervall $t_{\nu+1}^* \leq t^* \leq t_\nu^*$ ($\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \dots$) eineindeutig stetig und monoton (etwa linear) auf das t -Intervall $\frac{1}{\nu+1} \leq t \leq \frac{1}{\nu}$ ab; dadurch geht für $t_{\nu+1}^* \leq t^* \leq t_\nu^*$ $r(t^*)$ in $r(t^*(t))$ über. Für $\frac{1}{\nu+1} \leq t \leq \frac{1}{\nu}$ ist dann $\frac{1}{\nu+1} \leq r(t^*(t)) \leq \frac{\kappa(1+\omega_\nu)}{\nu}$, wo $\kappa = \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, $\omega_\nu > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \omega_\nu = 0$ ist, da wir ja für jedes ν den größten Wert t^* genommen hatten. Schreiben wir für $r(t^*(t))$ $r_1(t)$, so gilt für

$$(3,2) \quad \frac{1}{\nu+1} \leq t \leq \frac{1}{\nu} \quad \frac{\nu}{\nu+1} \leq \left| \frac{r_1(t)}{t} \right| \leq \frac{\kappa(\nu+1)(1+\omega_\nu)}{\nu}$$

woraus für $t > 0$ wegen $\frac{\nu+1}{\nu} \rightarrow 1$ die Behauptung folgt. Für $t < 0$ ist der Beweis analog. — Überdies folgt aus der Ungleichung (3,2), daß für den eben angegebenen metrischen Parameter der Quotient $\frac{L}{l} \leq \kappa$ ($L = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right|$, $l = \underline{\lim}_{t \rightarrow 0} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right|$) ist.

b) Wir beweisen nun die Umkehrung, und zwar zeigen wir: Ist t ein in bezug auf den Punkt P_0 metrischer Parameter von C , gilt also (3,1) oder

$$(3,3) \quad 0 < l = \underline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| \leq L = \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < \infty,$$

so gilt für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P_0 $\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa \leq \frac{L}{l}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_0 = P(0)$. Wäre nun die Behauptung falsch, so gäbe es für ein passendes $\sigma > 0$ eine Folge von Radien $r_\nu \downarrow 0$ und Punkten $P_\nu = P(t_\nu)$, $P'_\nu = P(t'_\nu)$ mit $\overline{P_0 P_\nu} = \overline{P_0 P'_\nu} = r_\nu$, die beide von derselben Seite²⁸⁾ gegen P_0 konvergieren, so daß der von P_ν, P'_ν begrenzte P_0 nicht enthaltende Bogen bis auf seine Endpunkte P_ν, P'_ν außerhalb des Kreises mit r_ν um P_0 läge und daß man auf ihm einen Punkt Q_ν finden könnte, für den

$$\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P'_\nu}} = \frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P_\nu}} > \frac{L}{l} + \sigma$$

wäre. Wir dürfen annehmen, daß die P_ν, P'_ν und Q_ν zugeordneten Parameterwerte bzw. $t_\nu, t'_\nu, \bar{t}_\nu$ positiv sind und der Ungleichung $t_\nu < \bar{t}_\nu < t'_\nu$ genügen; dann folgt aus (3,3), daß von einem ν an, etwa für $\nu \geq \nu_0$,

$$\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{t_\nu} = \frac{r(\bar{t}_\nu)}{t_\nu} \leq L + l \frac{\sigma}{2}$$

ist. Wegen $\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P'_\nu}} = \frac{r(\bar{t}_\nu)}{r(t'_\nu)} > \frac{L}{l} + \sigma$ folgt weiter

$$\frac{r(t'_\nu)}{t'_\nu} = \frac{r(t'_\nu)}{r(\bar{t}_\nu)} \cdot \frac{r(\bar{t}_\nu)}{t_\nu} \cdot \frac{\bar{t}_\nu}{t'_\nu} \leq \frac{L + l \frac{\sigma}{2}}{\frac{L}{l} + \sigma} = \frac{L + l \frac{\sigma}{2}}{L + l \sigma} \cdot l < l,$$

im Widerspruch mit der Annahme, daß $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{r(t)}{t} \right| = l$ ist.

Hieraus ergibt sich nun auch unmittelbar die zweite über den Zusammenhang von κ und $\frac{L}{l}$ ausgesprochene Behauptung. Denn aus dem unter b) Bewiesenen folgt, daß notwendig, wenn ein metrischer Parameter existiert: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa \leq \frac{L}{l}$ ist. Andererseits gibt es aber, wie in a) gezeigt, einen metrischen Parameter t , für den $\frac{L}{l} \leq \kappa$ gilt. Da für diesen aber auch notwendig $\frac{L}{l} \geq \kappa$ gelten muß, besteht also für diesen metrischen Parameter die Relation $\frac{L}{l} = \kappa$.

16. Insbesondere erhalten wir aus dem obigen Satze das folgende Resultat: Hinreichend und notwendig dafür, daß es einen Parameter t für die Kurve C gibt, für den $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| = \alpha > 0$ gilt, ist, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ mit $\varepsilon \downarrow 0$ besteht.

Denn ist $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, so gibt es nach dem obigen stets einen metrischen

²⁸⁾ D. h. es gibt einen von P verschiedenen Punkt Q von C , so daß alle Punkte P_ν einem und demselben Bogen \widehat{PQ} angehören.

Parameter t mit $\frac{L}{l} = 1$, also $L = l$. Existiert umgekehrt ein metrischer Parameter, für den $L = l = \alpha > 0$ ist, so folgt, daß für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ im betreffenden Punkte die Relation gilt $\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \alpha \leq 1$. Da aber andererseits wegen $\Delta(\varepsilon) \geq \varepsilon$ stets $1 \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist, muß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ existieren und gleich 1 sein, w. z. b. w.

17. Später werden uns noch die beiden folgenden Bemerkungen von Nutzen sein.

1. Ist t ein metrischer Parameter der Kurve C in bezug auf den Punkt P ($w = w_1$) und unterwirft man die Kurve C der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, so ist $\sigma = |t|^\alpha \operatorname{sgn} t$ ein metrischer Parameter der transformierten (nicht notwendig doppelpunktfreien Kurve Γ^{20}) in dem w_1 entsprechendem Punkte $u = 0$. Denn es gilt ja, wenn

$$0 < c_1 \leq \left| \frac{w(t) - w_1}{t} \right| \leq C_1$$

ist, auch, wenn wir $u(\sigma) = u(|t|^\alpha \operatorname{sgn} t) = (w(t) - w_1)^\alpha$ setzen,

$$0 < c_1^\alpha \leq \left| \frac{u(\sigma)}{\sigma} \right| \leq C_1^\alpha.$$

2. Wir werden uns im folgenden vor allem mit derjenigen Parameterdarstellung einer geschlossenen Jordankurve C befassen, welche durch die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ des Einheitskreises $|z| < 1$ auf das Innere von C für $z = e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, geliefert wird. Bleibt nun für ein ϑ_1 , $f(e^{i\vartheta_1}) = w_1$, der Quotient

$$(3, 4) \quad \frac{|f(e^{i\vartheta_1}) - w_1|}{|\vartheta - \vartheta_1|^\alpha}$$

zwischen zwei festen Schranken oder konvergiert er für $\vartheta \rightarrow \vartheta_1$ gegen einen endlichen Grenzwert, so ist definitionsgemäß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^\alpha \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von C in bezug auf $w = w_1$. Damit der Differenzenquotient (3, 4) zwischen zwei positiven Schranken bleibt resp. gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, ist also notwendig, daß die Kurve C einen metrischen Parameter t in bezug auf $w = w_1$ besitzt, für den im zweiten Falle $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{w(t) - w_1}{t} \right|$ existiert und > 0 ist, und somit also auch nach Nr. 16, daß für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in $w = w_1$ $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ gilt.

²⁰⁾ Wir hatten oben zwar den metrischen Parameter nur für eine doppelpunktfreie Kurve C definiert, doch kann diese Definition unverändert auf eine beliebige geschlossene Kurve übertragen werden, wenn ihre Punkte umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Parameter t bezogen werden können.

§ 4.

Formulierung und Beweis der Hauptgleichungen.

18. Satz 1. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene, die im Punkte P ($w = w_1$) eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzt. Ferner sei C in P linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere G von C so auf $|z| < 1$ ab, daß ein in G gelegener Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. W bezeichne den von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung 2ψ , $0 \leq \psi < \frac{\pi\tau}{2}$.*

Dann gibt es zwei positive Konstanten K_1 und q_1 , sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ ein $R > 0$, so daß für jeden Punkt c im Innern von C und W mit $|w_1 - c| = R$

$$(4, 1) \quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geq K_1 \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \cos^3\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$$

gilt. Dabei ist $R \leq \pi^\tau |w - w_1|^{3/\tau}$.⁸⁰⁾

Ist $\kappa = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, so kann $K_1 = (1 - \omega) \frac{1}{\kappa^{1/\tau}}$, $0 < \omega < 1$, gesetzt werden, wo ω beliebig klein gemacht werden kann, wenn q_1 hinreichend klein angenommen wird.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi(w_1) = 1$. — Es sei zunächst $\tau = 1$. Wir dürfen uns beim Beweise der Ungleichung (4, 1) auf den Fall beschränken, daß der Punkt w auf einem festen der von P ausgehenden Äste der Kurve C liegt, der etwa mit C^* bezeichnet werde. Es sei $\eta > 0$, $\eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Wir können die Tangente an C in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 einschließen, die mit dieser den Winkel η bilden (s. Fig. 11). Dann beschreiben wir um P den Kreis \mathfrak{K} mit so kleinem Radius $r \leq \eta$, daß sämtliche Punkte von C , die innerhalb oder auf \mathfrak{K} liegen, auch zugleich in das Innere der beiden von g_1 und g_2 gebildeten (Scheitel-) Winkelräume W_1 und W_2 der Öffnung 2η fallen, und daß ferner mit jedem Punkt Q von C innerhalb von \mathfrak{K} einer der Bögen \widehat{PQ} von C (bis auf den Endpunkt P) sich im Innern von W_1 oder W_2 befindet. Darüber hinaus wählen wir r noch so klein, daß für alle $\varepsilon \leq r \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\kappa$ ist. Da der Winkelraum W mit W_1 und W_2 (wegen $\eta < \frac{\pi}{2} - \psi$) keinen Punkt außer P gemeinsam hat, liegt dann der Sektor S_r , der von \mathfrak{K} aus dem

⁸⁰⁾ Man vgl. auch die Anmerkung am Schlusse des Beweises von Satz 1 (Nr. 25).

Winkelraum W herausgeschnitten wird, (bis auf P) ganz in G . — Wir werden η und r unten noch weiter einschränken; im übrigen sind aber η

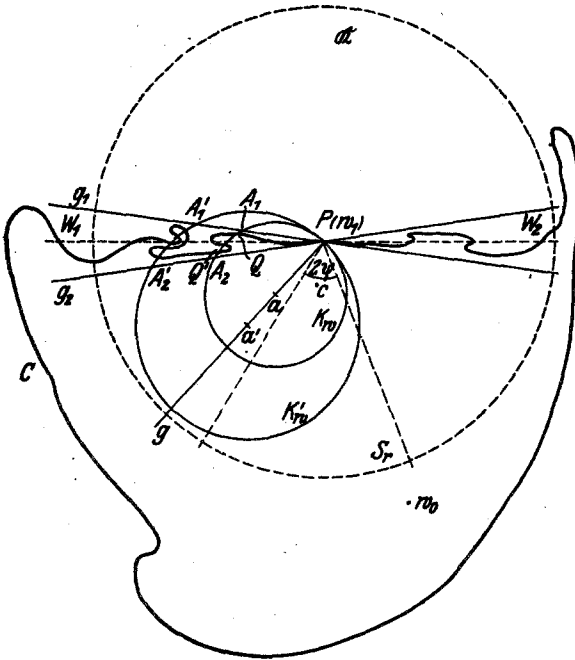


Fig. 11.

und r während des ganzen Beweises feste, wenn auch für unsere Zwecke hinreichend kleine Zahlen. — Nun ziehen wir von P aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die Normale in P auf der dem eben genannten Zweig C^* von C zugewandten Seite der Normalen einen Strahl g , der mit einem an P anstoßenden Stück in G verläuft. Wie oben gesagt, ist $\eta_1 = \sqrt{\eta} < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \nu_0$. Für jeden hinreichend nahe bei P gelegenen Punkt w auf C^* können wir einen durch P und w hindurchgehenden Kreis k'_w finden, dessen Mittelpunkt a' auf g liegt, dessen Radius dann gleich $\overline{a'w} = \rho'$ ist, und der ganz innerhalb von \mathfrak{R} liegt. Der Kreis k'_w wird dann die Kurve C in endlich oder unendlich vielen Punkten schneiden; sämtliche Schnittpunkte liegen jedenfalls innerhalb eines der Winkelräume W_1, W_2 , etwa in W_1 , und zwar auf derselben Seite der Normalen wie der Strahl g .

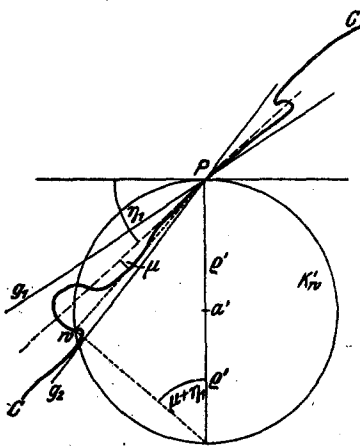


Fig. 12.

Man kann übrigens leicht den Zusammenhang zwischen dem Punkte w und dem Radius ρ' von k'_w formelmäßig ausdrücken. Bildet die von w_1 nach w gezogene Sehne von C mit der Tangente von C in P den Winkel μ (μ werde positiv gerechnet, wenn w auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Innennormale von C in P), so ist (s. Fig. 12)

(4, 2)

$$\rho' = \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\mu + \eta_1)} = \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\mu + \sqrt{\eta})},$$

$$-\eta \leq \mu \leq \eta.$$

Es sei schon jetzt erwähnt, daß für die im Satze genannte Zahl R sich später der Wert

$$(4,3) \quad R = (1 - \varepsilon) \eta^{\frac{1}{2}} \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\mu + \sqrt{\eta})} \cdot \frac{1}{\varkappa}, \quad -\eta \leq \mu \leq \eta, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

ergeben wird, wo ε mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 konvergiert.

19. Es werde nun eine positive Zahl $\varrho < \varrho'$ durch die Relation

$$\varrho = \frac{1 - \omega'}{\varkappa} \varrho' \frac{\sin(\eta_1 - \eta)}{\sin(\eta_1 + \eta)}$$

bestimmt, wo $0 < \omega' < 1$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \varkappa(1 + \omega')$ für alle $\varepsilon \leq r$ und $\lim_{r \rightarrow 0} \omega' = 0$ ist. Dann ist auch offenbar

$$(4,4) \quad \frac{1 - \omega'}{\varkappa} = \frac{2 \varrho \sin(\eta_1 + \eta)}{2 \varrho' \sin(\eta_1 - \eta)} < \frac{1}{\varkappa(1 + \omega')}.$$

Wir markieren den Punkt a auf g im Abstände ϱ von P und beschreiben mit dem Radius ϱ um a den Kreis k_w . Der Zähler des zweiten Gliedes in (4,4) ist dann gleich der Länge der längsten von P ausgehenden und in dem Winkelraum W_1 verlaufenden Sehne d (in der Fig. 11 PA_2) von k_w , der Nenner gleich der kürzesten derartigen Sehne d' von k_w (in der Fig. 11 PA_1). Es sei B ein Kurvenbogen von C , der von zwei von P verschiedenen Schnittpunkten von C und k_w begrenzt ist und sonst außerhalb von k_w verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Der im Winkelraum W_1 gelegene Kreisbogen von k_w liegt nun bis auf den einen seiner Endpunkte innerhalb des Kreises mit dem Radius d um P . Daher kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leq \varkappa \cdot \varepsilon (1 + \omega')$ und wegen (4,4) B nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $\varkappa d(1 + \omega') < d'$ um P eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes W_1 gelegene Kreisbogen von k_w nicht in das Innere des Kreises mit dem Radius d' um P eindringt, kann B den Kreis k_w nicht mehr treffen. Wenn man also C von P aus in den Winkelraum W_1 hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von k_w mit C vor dem Punkte w angetroffen. Ferner gilt auch für die Länge der kürzesten von P ausgehenden Sehne d_1 von k_w in W_1 ($= 2 \varrho \sin(\eta_1 - \eta)$) (in der Fig. PA_1) und die der längsten derartigen Sehne d'_1 von k_w ($= 2 \varrho' \sin(\eta_1 + \eta)$) (in der Fig. PA_2) die Relation

$$(4,5) \quad \frac{d_1}{d'_1} = \frac{2 \varrho \sin(\eta_1 - \eta)}{2 \varrho' \sin(\eta_1 + \eta)} = \frac{2 \varrho \sin(\eta_1 + \eta) \cdot \sin^2(\eta_1 - \eta)}{2 \varrho' \sin(\eta_1 - \eta) \cdot \sin^2(\eta_1 + \eta)} = \frac{(1 - \omega')}{\varkappa} \cdot \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)}.$$

Der Quotient $\frac{\sin(\eta_1 - \eta)}{\sin(\eta_1 + \eta)}$ konvergiert wegen $\eta_1 = \sqrt{\eta}$ mit $\eta \rightarrow 0$ gegen 1.

— Von dieser Gleichung werden wir später noch Gebrauch zu machen haben. —

20. Wir bemerken noch, daß offenbar die Länge des kleineren der durch g_2 abgeschnittenen Bögen von k_w gleich $2 \varrho(\eta_1 + \eta)$ ist. Dabei ist

der zuerst in das Innere der Kurve C eindringende Schenkel von W_1 gerade die eine Halbgerade von g_2 . Da jeder Schnittpunkt des Kreises k_w mit C innerhalb des Winkelraumes W_1 liegt, ist die Länge eines jeden (kleineren) Kreisbogens von P bis zu einem dieser Schnittpunkte höchstens gleich $2\rho(\eta_1 + \eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkt Q von C innerhalb von k_w oder auf k_w auch einer der Bögen \widehat{PQ} von C (bis auf P) im Innern des Winkelraumes W_1 . Dies folgt aus der Tatsache, daß k_w im Innern von \mathfrak{R} liegt, und aus der zweiten der oben genannten Eigenschaften von \mathfrak{R} .

21. Es sei nun Q der Schnittpunkt von k_w mit C , den man zuerst antrifft, wenn man k_w von P aus so durchläuft, daß man bei P das Innere der Kurve verläßt, Q' der erste Schnittpunkt, den man beim Durchlaufen der Kurve C in dem Sinne antrifft, daß man bei P das Innere von k_w verläßt. Insbesondere könnte auch $Q \equiv Q'$ sein. Den ersten dabei erhaltenen Kreisbogen \widehat{PQ} bezeichnen wir mit β , den zweiten (bis auf seine Endpunkte) außerhalb k_w verlaufenden Kurvenbogen $\widehat{Q'P}$ mit α . γ sei der zu α komplementäre Kurvenbogen $\widehat{PQ'}$ von C . — Es sei nun c ein Punkt in S_r im Abstände $R = \rho\sigma$ von P , wo zunächst $0 < \sigma < 2 \sin \frac{\nu_0}{2} < 1$ sei. (Es ist $\rho\sigma < \rho < \rho' < r$.) Der Punkt c liegt dann, wie man leicht einsieht³¹⁾, im Innern von k_w . Weiter unten werden wir noch σ in geeigneter Weise von η abhängig machen. Der kleinere Kreisbogen $\widehat{PQ'} = \beta$ bildet mit dem Bogen $\alpha = \widehat{PQ'}$ von C eine geschlossene Jordankurve C_1 . C_1 enthält den Punkt c und somit auch das Innere von k_w im Innern. Dies folgt sofort aus dem Hilfssatz 3, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\gamma = \widehat{PQ'}$ verläuft (bis auf P) nach dem am Schlusse der vorigen Nummer Gesagten ganz im Innern des Winkelraumes W_1 . Da ferner sowohl der

³¹⁾ Denn ist u der Abstand von c vom Mittelpunkt a des Kreises k_w und ist $\sphericalangle aw_1c = \psi_1$, so ist

$$u^2 = \rho^2 + \rho^2 \sigma^2 - 2\rho^2 \sigma \cos \psi_1 = \rho^2 (1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \psi_1),$$

und wegen

$$\psi_1 \leq \eta_1 + \psi \leq \nu_0 + \psi = \nu_0 + \frac{\pi}{2} - 2\nu_0 = \frac{\pi}{2} - \nu_0, \quad \cos \psi_1 \geq \cos \left(\frac{\pi}{2} - \nu_0 \right) = \sin \nu_0,$$

$$2 \cos \psi_1 \geq 2 \sin \nu_0 > 2 \sin \frac{\nu_0}{2}$$

ist

$$2\sigma \cos \psi_1 > 2\sigma \sin \frac{\nu_0}{2} > \sigma^2, \quad 2\sigma \cos \psi_1 - \sigma^2 > 0,$$

also

$$0 < 1 + \sigma^2 - 2\sigma \cos \psi_1 < 1$$

und

$$u < \rho,$$

d. h. c liegt in der Tat im Innern von k_w .

Kreisbogen $\widehat{PQ'} = \beta$ als auch γ vom Punkte P auf g_2 ausgehen, *sonst aber g_2 überhaupt nicht mehr treffen*³²⁾ und den gemeinsamen Endpunkt $Q' (\neq P)$ haben, müssen sie beide auf derselben Seite von g_2 bleiben und zwar auf der gleichen Seite wie die *Außennormale* von C in P . Der Punkt c dagegen liegt im Innern des Winkelraumes W (der Öffnung 2ψ). Dieser Winkelraum hat mit der Geraden g_2 nur den Punkt P gemeinsam (da nämlich g_2 um den Winkel $\eta < \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \psi)$ gegen die Tangente in P geneigt ist), liegt also ganz auf einer Seite von g_2 , und da er ferner die *Innennormale* von C in P (als Winkelhalbierende) enthält, befindet er sich auf der entgegengesetzten Seite von g_2 wie die Bögen γ und β . Daher ist in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar. Die Kurve C und der Kreis $k = k_w$ bilden dann offenbar eine Konfiguration, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 genügt, wobei für die dort genannten Bögen $\alpha, \gamma, \beta, \bar{\beta}$ sowie für die dort mit C und C_1 bezeichneten geschlossenen Jordankurven und den dort erwähnten Punkt c gerade die hier mit genau denselben Symbolen bezeichneten Gebilde gewählt werden können. Daher gilt

$$(4, 6) \quad m_{k,c} \bar{\beta} \leq m_{C,c} \gamma.$$

22. Δ bezeichne den Kurvenbogen $\widehat{ww_1}$, der bei P in das Innere von k_w eindringt. Nach dem oben (Nr. 19) über die Schnittpunkte von k_w mit C und den Punkt w Gesagten enthält Δ den Bogen γ und daher ist auch $(m_{C,w_0} \Delta = \Delta'_C$ gesetzt)

$$(4, 7) \quad m_{C,w_0} \gamma \leq m_{C,w_0} \Delta = \Delta'_C.$$

Nach Hilfssatz 8 gilt nun

$$(4, 8) \quad m_{C,c} \gamma \leq \frac{1 + |\varphi(c)|}{1 - |\varphi(c)|} m_{C,w_0} \gamma$$

³²⁾ Es bedarf vielleicht noch einer Erläuterung dafür, daß der Kreisbogen $\beta = \widehat{PQ'}$ die Gerade g_2 *nur* in P trifft: Die Geraden g_1 und g_2 schneiden k_w in je einem weiteren Punkte A_1 (auf g_1) bzw. A_2 (auf g_2). Durchläuft man die Strecke PA_2 von P nach A_2 , so tritt man zunächst in das Innere, durchläuft man die Strecke PA_1 von P nach A_1 , so tritt man zunächst in das Äußere von C . Da aber C — nach dem am Schlusse von Nr. 20 Gesagten liegen alle Punkte von C im Innern von k_w oder auf k_w auch zugleich im Innern von W_1 — weder PA_2 noch PA_1 treffen kann, liegt also auch noch A_2 ganz innerhalb und A_1 ganz außerhalb von C . Der Kreisbogen β tritt nun bei P in das Äußere von C und verläuft zunächst (nach der Konstruktion von k_w) außerhalb von W_1 und W_2 . Um nun die Kurve C zum erstenmal in Q zu treffen, muß k_w in das Innere des Winkelraumes W_1 gelangen, muß daher eine der beiden Geraden g_1 oder g_2 schneiden. Da dieser Schnittpunkt selber noch außerhalb von C liegen muß, kann er nur A_1 sein. Weil schließlich der Endpunkt Q' von β im Innern des Winkelraumes W_1 liegt, kann β überhaupt nur eine der beiden Geraden g_1 und g_2 treffen, er trifft also nur g_1 und nicht mehr g_2 .

und daher ist auch wegen (4, 6), (4, 8) und (4, 7)

$$(4, 9) \quad m_{k,c} \bar{\beta} \leq m_{c,c} \gamma \leq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|} m_{c,w_0} \gamma \leq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|} \Delta'_C.$$

Wir wollen nun $m_{k,c} \bar{\beta}$ zu $\bar{\beta}$ in Beziehung setzen und wenden zu diesem Zwecke den Hilfssatz 6 an. Beachtet man, daß nach dem in Nr. 20 Gesagten für den in diesem Hilfssatz genannten Winkel α_0 als obere Schranke von $\alpha = \frac{\bar{\beta}}{e} 2(\eta_1 + \eta)$ gesetzt werden kann, so folgt nach diesem Hilfssatz

$$(4, 10) \quad m_{k,c} \bar{\beta} \geq A \frac{\bar{\beta}}{e}, \quad A = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \sin^2\left(\eta_1 + \eta + \frac{\chi}{2}\right)}.$$

Dabei ist $\lambda = \frac{|c-a|}{e}$ und $\chi (\geq 0)$ der Winkel caw_1 im Dreieck caw_1 . Somit folgt schließlich, da die Länge des Kreisbogens $\bar{\beta} > \overline{PQ} \equiv \delta_w$ ist, wegen (4, 10) und (4, 9)

$$A \frac{\delta_w}{e} \leq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|} \Delta'_C, \quad \Delta'_C \geq \delta_w \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|} \frac{1}{e} A.$$

Nun beachte man, daß zwischen δ_w und der Länge der Sehne $\overline{ww_1} \equiv A_w$ nach (4, 5) die Relation

$$\frac{\delta_w}{A_w} \geq \frac{1-\omega'}{\kappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)}$$

besteht. Es gilt daher

$$\Delta'_C \geq A_w \frac{1-\omega'}{\kappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)} \frac{A\sigma}{\sigma e} \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}$$

und somit wegen $\sigma e = |w_1 - c|$, $1+|\varphi(c)| < 2$

$$(4, 11) \quad \Delta'_C \geq A_w \frac{1-\omega'}{\kappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)} \frac{A\sigma}{2} \frac{1-|\varphi(c)|}{|w_1 - c|}.$$

23. Wir können hier den Faktor $A\sigma$ noch weiter abschätzen, indem wir jetzt über σ geeignet verfügen und dann den Zusatz zum Hilfssatz 6 anwenden. Die im Hilfssatz 6 und Zusatz mit α_0 bezeichnete Größe kann hier, wie oben gesagt (Nr. 22), gleich $2(\sqrt{\eta} + \eta)$ gesetzt werden.

Wir wählen nun die in diesem Zusatz benutzten Größen $m = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$, $1 + \vartheta = (1 + \sqrt{\eta})^{-\frac{2}{3}}$; dann wird also $\sigma = \eta^{\frac{1}{3}}$. Ferner bemerken wir, daß die Voraussetzung der an diesen Zusatz angeschlossenen Bemerkung mit $\Psi = \psi$, $\omega = \eta_1 = \sqrt{\eta}$ erfüllt sind. (Eventuell muß η für die Anwendbarkeit dieses Zusatzes noch weiter verkleinert werden.) Nach diesem Zusatz und der anschließenden Bemerkung gibt es daher zu jedem hinreichend kleinen η ein nur von η abhängiges $\varepsilon_1(\eta)$ mit $0 < \varepsilon_1 < 1$, das mit $\eta \downarrow 0$ selber gegen 0 geht, so daß

$$(4, 12) \quad A\sigma \geq 2(1 - \varepsilon_1) \cdot \cos \psi, \quad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

ist. Wir denken uns η so gewählt, daß (4, 12) gilt.

Durch diese Festlegung von σ ist das im Satze genannte $R = \sigma \rho$ bestimmt, und es ist, wie bereits oben angegeben wurde,

$$(4, 3') \quad R = \frac{1 - \omega'}{\kappa} \frac{\sin(\eta_1 - \eta)}{\sin(\eta_1 + \eta)} \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\mu + \sqrt{\eta})} \eta^{\frac{1}{2}} = (1 - \varepsilon) \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\mu + \sqrt{\eta})} \frac{1}{\kappa} \eta^{\frac{1}{2}},$$

$$- \eta \leq \mu \leq \eta, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

wo ε nur von η und r abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ (wegen $r \leq \eta$) gleichfalls gegen 0 geht. Wegen $\sin(\mu + \sqrt{\eta}) \geq \sin(\sqrt{\eta}(1 - \sqrt{\eta})) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\eta}$, $|w - w_1| \leq r \leq \eta$ und $\kappa \geq 1$ ist $R \leq \pi \cdot |w - w_1|^{\frac{1}{2}}$. —

Schließlich wollen wir noch in (4, 11) $1 - |\varphi(c)|$ durch $|1 - \varphi(c)|$ zu ersetzen suchen und machen hierzu von der Tatsache Gebrauch, daß die Abbildung $z = \varphi(w)$ in $w = w_1$ winkeltreu ist. Denn danach³³⁾ wird der oben genannte Sektor S_r , den der Winkelraum W (der Öffnung 2ψ) aus dem Kreise \mathfrak{K} mit dem Radius r um w_1 herauschneidet, durch $z = \varphi(w)$ auf einen Bereich der z -Ebene abgebildet, der in dem Sektor

$$|z - 1| \leq \varepsilon'(r), \quad \pi - (\psi + \varepsilon''(r)) \leq \arg(z - 1) \leq \pi + \psi + \varepsilon''(r)$$

liegt, wo $\varepsilon'(r)$, $\varepsilon''(r) > 0$ sind — bei festem ψ — nur von r abhängen und mit $r \downarrow 0$ selber gegen 0 gehen. Schränkt man daher r auf hinreichend kleine Werte ein, so gibt es zu jedem solchen r ein nur von r abhängiges $\delta(r)$ mit $0 < \delta(r) < 1$, so daß für alle Punkte c in S_r im Abstände $R = \rho \sigma < r$ von w_1

$$(4, 13) \quad \frac{1 - |\varphi(c)|}{|1 - \varphi(c)|} \geq (1 - \delta(r)) \cos \psi, \quad 0 < \delta(r) < 1, \quad \lim_{r \downarrow 0} \delta(r) = 0,$$

gilt.

Somit gibt es also ein nur von η und r abhängiges $q_1 > 0$, so daß für alle w auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ und die ihnen zugeordneten Punkte c in S_r im Abstände R von w_1 nach (4, 11), (4, 12), (4, 13)

$$\frac{\Delta'_C}{\Delta''_m} \geq \frac{(1 - \omega')(1 - \delta(r))(1 - \varepsilon_1(\eta))}{\kappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)} \frac{|\varphi(w_1) - \varphi(c)|}{|w_1 - c|} \cos^2 \psi$$

ist. Hiermit ist die Relation (4, 1) mit $K_1 = \frac{(1 - \omega')(1 - \delta)(1 - \varepsilon_1)}{\kappa} \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)}$ — für den Fall $\tau = 1$ — bewiesen. Die Konstante K_1 hängt noch von η und r ab. Da nun aber wegen $r \leq \eta$ mit $\eta \downarrow 0$ auch sicher $r \rightarrow 0$ konvergiert, so strebt K_1 mit $\eta \downarrow 0$ gegen $\frac{1}{\kappa}$. Hieraus ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten Behauptung des Satzes 1 über die Konstante K_1 . Damit ist der Satz 1 für den Fall $\tau = 1$ bewiesen. —

³³⁾ Vgl. C. Carathéodory, Schwarz-Festschrift, S. 40–41 und E. Lindelöf, Comptes rendu du 4ième congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm 1916, S. 87.

24. Es sei allgemeiner τ beliebig, $0 < \tau \leq 2$. Man kann diesen Fall folgendermaßen auf den Fall $\tau = 1$ zurückführen.

Durch die Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ geht C in eine geschlossene Kurve Γ in der u -Ebene über, die in dem $w = w_1$ entsprechenden Punkte $u = 0$ eine Tangente besitzt. Γ braucht aber nicht notwendig (in der schlichten Ebene) doppelpunktfrei zu sein. Wählt man aber auf C einen P als inneren Punkt enthaltenden passenden Bogen C' und ergänzt man diesen geeignet durch einen bis auf die Endpunkte innerhalb von C verlaufenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve C_1 , so ist das Bild Γ_1 von C_1 bei dieser Transformation eine in der u -Ebene doppelpunktfreie geschlossene Jordankurve, die in $u = 0$ eine Tangente hat. — Der Winkelraum W (der Öffnung 2ψ) geht dabei in einen von zwei von $u = 0$ ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen von Γ_1 in $u = 0$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum W' der Öffnung $2\frac{\psi}{\tau}$ über. Bezeichnet man die Abbildungsfunktion des Innern von Γ_1 auf $|z| < 1$ mit $z = \psi_1(u)$, die des Inneren G_1 von C_1 auf $|z| < 1$ mit $z = \varphi_1(w)$, so ist

$$\left| \frac{\psi_1(u) - \psi_1(0)}{u} \right| = \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right|.$$

Berücksichtigt man nun ferner die am Schlusse von Nr. 14 gemachte Bemerkung über das Verhalten der Unbewalltheitsfunktion gegenüber der obigen Transformation, so sieht man, daß es auch für $\varphi_1(w)$ zu jedem ω mit $0 < \omega < 1$ ein $q'_1 > 0$ und zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q'_1$ ein $R' > 0$ gibt, so daß für alle c in W und G mit $|c - w_1| = R'$

$$(4, 14) \quad \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right| \geq \frac{1 - \omega}{x^{1/\tau}} \left| \frac{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}{(c - w_1)^{1/\tau}} \right| \cos^2 \left(\frac{\psi}{\tau} \right)$$

gilt. Ist nun $\varphi(w)$ die Abbildungsfunktion des Innern von C auf $|z| < 1$, so konvergieren nach dem Hilfssatz 4 die Quotienten

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(c) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}$$

mit $w \rightarrow w_1$ bzw. $c \rightarrow w_1$ gegen ein und dieselbe von 0 verschiedene Zahl. Daher darf man in (4, 14) $(\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(w) - \varphi(w_1))$ und gleichzeitig $(\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(c) - \varphi(w_1))$ ersetzen, wenn man q'_1 eventuell noch hinreichend verkleinert. — Damit ist der Satz 1 in allen Teilen bewiesen. —

25. Anmerkung. Für eine spätere Anwendung (Satz 6) ist es nützlich, über die im Satz 1 genannte Zahl R noch eine etwas genauere Angabe als dort zu machen. Aus der Relation (4, 3) folgt, daß der Quotient $\left| \frac{w - w_1}{R} \right|$ zwischen zwei von η und r abhängigen positiven Schranken liegt,

die aber gegen 0 konvergieren, wenn man $\eta \downarrow 0$ konvergieren läßt. Da nach der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$ der Quotient $\left| \frac{w - w_1}{R} \right|$ in $\left| \frac{w - w_1}{R} \right|^\alpha$ übergeht, so bleibt die analoge Behauptung über den entsprechenden Quotienten auch für den Fall einer beliebigen Ecke der Öffnung $\pi\tau$ richtig. Wir heben diese Tatsache besonders hervor: *Es sei ω mit $0 < \omega < 1$ fest vorgegeben, und es sei q_1 die nach Satz 1 zu $K_1 = \frac{1 - \omega}{\kappa^{1/\tau}}$ zugeordnete Konstante, so daß für alle $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ und die zugeordneten Punkte c in W und G mit $|c - w_1| = R$ die Ungleichung (4, 1) gilt. Dann wird nach dem bei unserem Beweise angegebenen Verfahren R zu w derart zugeordnet, daß der Quotient $\frac{|w - w_1|}{R}$ zwischen zwei positiven Schranken μ_1, μ_2 bleibt:*

$$0 < \mu_1 \leq \frac{|w - w_1|}{R} \leq \mu_2.$$

Die so erhaltenen Konstanten μ_1 und μ_2 konvergieren aber gegen 0, wenn man $\omega \rightarrow 0$, d. h. die Konstante $K_1 \rightarrow \frac{1}{\kappa^{1/\tau}}$ und somit auch $q_1 \rightarrow 0$ gehen läßt.

26. Wir leiten nunmehr eine der Ungleichung (4, 1) des Satzes 1 analoge Abschätzung für den Differenzenquotienten nach oben ab.

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satze 1 gibt es zwei positive Konstanten K_2 und q_2 , sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_2$ ein $R > 0$, so daß für alle Punkte c' in W und G im Abstände R von w_1*

$$(4, 15) \quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leq K_2 \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}$$

gilt.

Ist $\kappa = \lim_{s \downarrow 0} \frac{\Delta(s)}{s}$, so kann man $K_2 = (1 + \omega) \kappa^{1/\tau}$ setzen, wo ω beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur q_2 hinreichend klein angenommen wird. Es ist $R \leq \left(\frac{3}{2} \pi^2\right)^\tau \kappa |w - w_1|^{5/6}$.

Beweis. Es sei wieder $\varphi(w_1) = 1$ und zunächst $\tau = 1$. Es sei C^* einer der beiden in P zusammenstoßenden Kurvenzweige von C . Wie beim Beweise des Satzes 1 können wir die Tangente in P zwischen zwei durch P hindurchgehende Geraden g_1 und g_2 einschließen, die mit dieser einen Winkel der Öffnung η bilden, $0 < \eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Dann beschreiben wir um P den Kreis \mathfrak{K} mit so kleinem Radius $r \leq \eta$, daß alle innerhalb und auf \mathfrak{K} gelegenen Punkte von C in einen der beiden von g_1 und g_2 gebildeten (Scheitel-) Winkelräume W_1 oder W_2 der Öffnung 2η hinein-

fallen, und daß ferner mit jedem Punkte Q von C im Innern von \mathfrak{R} oder auf \mathfrak{R} auch einer der Bögen \widehat{PQ} von C (bis auf P) sich im Innern eines der Winkelräume befindet. Darüber hinaus sei r so klein, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\kappa$ für $\varepsilon \leq r$ ist. Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, auch der durch \mathfrak{R} aus dem Winkelraum W herausgeschnittene Sektor S_r ganz innerhalb von G .

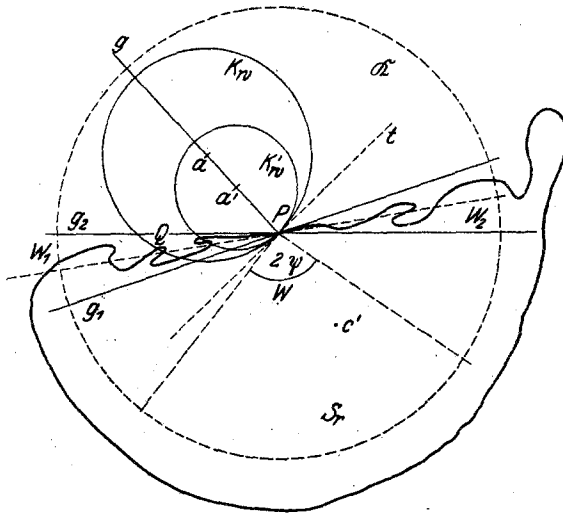


Fig. 13.

Dann ziehen wir von P aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die äußere Normale in P auf derselben Seite der Normalen wie der oben genannte Zweig C^* von C einen Strahl g , der mit einem an P anstoßenden Stück außerhalb von C verläuft. Für alle hinreichend nahe bei P gelegenen Punkte w von C^* können wir einen durch P und w hindurchgehenden Kreis k'_w finden, dessen Mittelpunkt a' auf g liegt, dessen Radius $\varrho' = \overline{a'w}$ ist,

und der ganz innerhalb von \mathfrak{R} liegt. Sämtliche Schnittpunkte von k'_w mit C liegen dann auf derselben Seite der Normalen in P wie der Strahl g , und alle innerhalb eines der beiden Winkelräume W_1, W_2 , etwa von W_1 . W_1 enthält also ein an P anstoßendes Stück von C^* . — Zwischen dem Punkte w und dem Radius von k'_w besteht die Relation

$$\varrho' = \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\sqrt{\eta} + \mu)}, \quad -\eta \leq \mu \leq \eta,$$

wo μ der Winkel ist, den die von w nach w_1 gezogene Sehne von C mit der Tangente an C in w_1 bildet (μ werde dabei positiv gerechnet, wenn w auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Außennormale von C in w_1). Für die im Satze genannte Zahl R wird sich später ganz ähnlich wie beim Satze 1 der Wert

$$(4, 16) \quad R = \frac{1}{1 - \varepsilon} \eta^{1/2} \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\sqrt{\eta} + \mu)} \kappa, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

ergeben, wo ε mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht.

27. Es werde nun $\varrho > \varrho'$ durch die Relation

$$(4, 17) \quad \varrho = \kappa \varrho' \frac{1}{1 - \omega'} \frac{\sin(\eta_1 + \eta)}{\sin(\eta_1 - \eta)}$$

bestimmt, wo $0 < \omega' \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{d(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq \kappa(1 + \omega')$ für alle $\varepsilon \leq r$ und $\lim_{r \downarrow 0} \omega' = 0$ ist. Dann gilt auch offenbar

$$(4, 18) \quad \kappa(1 + \omega') < \frac{2 \varrho \sin(\eta_1 - \eta)}{2 \varrho' \sin(\eta_1 + \eta)} = \kappa \frac{1}{1 - \omega'}.$$

Wir markieren den Punkt a auf g im Abstände ϱ von P und beschreiben um a den Kreis k_w durch P mit dem Radius ϱ . Dieser Kreis brauchte nun zunächst nicht mehr ganz im Innern von \mathfrak{R} zu liegen; da aber die Relation (4, 17) nur das Verhältnis von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ festlegt, können wir w in einer solchen Nähe von P annehmen und somit ϱ' derart verkleinern, daß ϱ beliebig klein ist und daher der Kreis k_w innerhalb von \mathfrak{R} zu liegen kommt. Wir denken uns w so nahe an w_1 gewählt. Der Zähler in (4, 18) ist gleich der Länge d der kürzesten von P -ausgehenden und im Winkelraum W_1 verlaufenden Sehne von k_w , der Nenner gleich der Länge d' der längsten derartigen Sehne von k'_w . Es sei B ein Kurvenbogen von C , der von zwei von P verschiedenen Schnittpunkten von k'_w mit C begrenzt ist und sonst außerhalb von k'_w verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Da der im Winkelraum W_1 gelegene Kreisbogen von k'_w innerhalb des Kreises mit dem Radius d' um P liegt, kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leq \kappa(1 + \omega') \cdot \varepsilon$ und wegen (4, 18) B nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $d' \kappa(1 + \omega') < d$ eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes W_1 liegende Kreisbogen von k_w außerhalb des Kreises mit dem Radius d um P liegt, kann B den Kreis k_w nicht mehr treffen. *Wenn man also C von P aus in den Winkelraum W_1 hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von k_w mit C hinter dem Punkte w angetroffen.* — Ferner gilt auch für die Länge der längsten von P -ausgehenden Sehne d_1 von k_w in W_1 ($= 2 \varrho \sin(\eta + \eta_1)$) und die der kürzesten derartigen Sehne d'_1 von k'_w ($= 2 \varrho' \sin(\eta_1 - \eta)$) die Relation

$$(4, 19) \quad \frac{d_1}{d'_1} = \frac{2 \varrho \sin(\eta_1 + \eta)}{2 \varrho' \sin(\eta_1 - \eta)} = \frac{\kappa \sin^2(\eta_1 + \eta)}{1 - \omega' \sin^2(\eta_1 - \eta)}.$$

28. Für das Folgende bemerken wir noch, daß die Länge des kleineren der von g_2 abgeschnittenen Kreisbögen von k_w gleich $2 \varrho(\eta_1 + \eta)$ ist. Dabei ist der in das Äußere von C eindringende Schenkel von W_1 gerade eine Halbgerade von g_2 . Da jeder Schnittpunkt des Kreises k_w mit C innerhalb des Winkelraumes W_1 liegt, ist die Länge eines jeden kleineren Kreisbogens von k_w von P bis zu einem solchen Schnittpunkt mit C höchstens gleich $2 \varrho(\eta_1 + \eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkte Q von C innerhalb von k_w oder auf k_w auch einer der Bögen \widehat{PQ} von C (bis auf P) im Innern des Winkelraumes W_1 , da ja k_w im Innern von \mathfrak{R} liegt (vgl. Nr. 26).

Damit haben wir unsere Annahme über die Unbewalltheitsfunktion, soweit sie für den Beweis in Betracht kommt, vollständig ausgenützt. —

29. Es sei nun Q der erste Schnittpunkt von k_w mit C , den man beim Durchlaufen von C von P aus in das Äußere von k_w hinein antrifft. Wir bezeichnen den hierbei durchlaufenen Kurvenbogen \widehat{PQ} mit α . Der zu ihm komplementäre Bogen auf C sei β . γ sei der Kreisbogen \widehat{PQ} von k_w , der bei P in das Innere von C eindringt. Der Teilbogen $\widehat{ww_1}$ von β werde mit $\bar{\beta}$ bezeichnet. Wir wählen nun die in der Formulierung des Satzes angegebene Größe $R = \sigma \rho$, wo $\sigma = \eta^{1/4}$ gesetzt sei, und nehmen in S_r einen Punkt c' im Abstände R von P an (es ist $R = \sigma \rho < \rho < r$). Nach (4, 17) hat also R in der Tat den in (4, 16) angegebenen Wert. Offenbar ist

$$R = \frac{|w - w_1|}{2 \sin(\sqrt{\eta} + \mu)} \frac{x \eta^{\frac{1}{2}}}{1 - \omega'} \frac{\sin(\sqrt{\eta} + \eta)}{\sin(\sqrt{\eta} - \eta)} \leq \frac{|w - w_1|}{2} \frac{x \eta^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\eta}}{2}} \frac{\frac{3}{2} \sqrt{\eta}}{\frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\eta}}$$

und wegen $\eta \geq r \geq |w - w_1|$

$$R \leq \frac{3}{2} \pi^2 x |w - w_1|^{3/4}.$$

30. Der Kreisbogen $\gamma = \widehat{PQ}$ bildet mit dem Bogen α von C offenbar eine geschlossene Jordankurve Γ . Γ enthält den Punkt c' im Innern. Dies folgt wieder aus dem Hilfssatz 3 in Nr. 5, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\widehat{PQ} = \beta$ liegt nach dem oben Gesagten ganz innerhalb des Winkelraumes W_1 . Da die Tangente t von k_w in P sicher außerhalb von W_1 und W_2 verläuft, trifft der Bogen $\beta = \widehat{PQ}$ diese Tangente t nur in P . Da aber auch der Kreisbogen $\gamma = \widehat{PQ}$ mit t nur den Punkt P gemeinsam hat, und also die beiden Bögen β und γ von P ausgehen und den gemeinsamen Endpunkt Q ($+P$) haben, so liegen sie beide auf derselben Seite von t , und zwar auf derselben Seite wie der Strahl g und die Außennormale von C in P . Der Sektor S_r , der wegen ($\eta_1 < r_0$) t nicht enthält, liegt ganz auf derselben Seite von t wie die Innennormale von C in P , also auf der entgegengesetzten. Auf dieser Seite befindet sich somit auch c' , so daß in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar ist. Die Kurve C und der Kreis $k = k_w$ stellen dann offenbar eine Konfiguration dar, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügt, wenn für die dort genannten Bögen $\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma$ und die geschlossene Jordankurve Γ , sowie den genannten Punkt c' gerade die hier mit denselben Buchstaben bezeichneten Gebilde gewählt werden. Daher gilt ($m_{c, c'} \bar{\beta} = \Delta_c''$ gesetzt)

$$\Delta_c'' = m_{c, c'} \bar{\beta} \leq m_{k_w, c'} \gamma.$$

31. Nach Hilfssatz 7 ist mit $\alpha'_k = m_{k,w,c'} \gamma$ und $\Psi = \psi_1 + \eta_1 \leq \psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$, wo ψ_1 der Winkel zwischen $c' w_1$ und der Innennormalen von C in w_1 ist,

$$(4, 20) \quad \Delta''_C \leq m_{k,w,c'} \gamma \leq \frac{(2 + \sigma)^2}{2 \sigma \cos(\psi_1 + \eta_1)} \frac{\gamma}{\varrho} = A_1 \frac{\gamma}{\varrho}.$$

Dabei ist die Länge von γ gleichfalls mit γ bezeichnet.

Da $\psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\sigma = \eta^{1/2}$ gesetzt ist, kann man den Ausdruck A_1 gleichmäßig für $0 \leq \psi_1 \leq \psi$ so abschätzen

$$A_1 = \frac{1}{\sigma} \frac{(2 + \sigma)^2}{2 \cos(\psi_1 + \eta_1)} \leq \frac{1}{\sigma} \frac{2}{\cos \psi_1} (1 + h(\eta)),$$

wo $h(\eta)$ nur von η abhängt und mit $\eta \rightarrow 0$ selber gegen 0 geht. Somit erhalten wir aus (4, 20)

$$(4, 21) \quad \Delta''_C \leq \frac{2}{\sigma \cos \psi_1} (1 + h(\eta)) \frac{\gamma}{\varrho}.$$

32. Hier wollen wir nun $\Delta''_C = m_{C,c'} \bar{\beta}$ durch $\Delta'_C = m_{C,w_0} \bar{\beta}$ ersetzen und schätzen zu diesem Zwecke den Quotienten $\frac{\Delta'_C}{\Delta''_C}$ nach oben nach dem Hilfssatz 9 ab. Für die Anwendung dieses Hilfssatzes und auch für die weiter unten folgenden Abschätzungen müssen wir die oben eingeführten und auf hinreichend kleinen Werte beschränkten Zahlen η und r noch weiter einschränken. Wir bezeichnen den weiter unten zu benutzenden Ausdruck $4A_1 \sqrt{\eta}$ mit δ und nehmen η so klein an, daß

$$(4, 22) \quad \delta = 4A_1 \sqrt{\eta} \leq \frac{(2 + \eta^{1/2})^2}{2 \eta^{1/2} \cos(\psi + \sqrt{\eta})} 4 \sqrt{\eta} = \frac{4(2 + \eta^{1/2})^2 \eta^{1/2}}{2 \cos(\psi + \sqrt{\eta})} < \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right)$$

ist. Wegen der Winkeltreue der durch $z = \varphi(w)$ vermittelten Abbildung in $w = w_1$ folgt²⁴⁾, daß das Bild des oben genannten Sektors S_r in der z -Ebene innerhalb des Bereiches

$$(4, 23) \quad |z - 1| \leq l(r), \quad \pi - (\psi + l'(r)) \leq \arg(z - 1) \leq \pi + (\psi + l'(r))$$

liegt, wo $l(r)$ und $l'(r)$ positiv sind, nur von r abhängen und mit $r \rightarrow 0$ selber gegen 0 konvergieren. Wir wählen nun r so klein, daß $l'(r) < \nu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right)$ und $l(r) < \sin \frac{\nu_0}{2}$ ist. (Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, der Sektor (4, 23) (bis auf den Punkt $z = 1$) ganz im Innern des Einheitskreises.)

33. Unter diesen Annahmen sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 9 für $\alpha' = \Delta'_C$, $\alpha'' = \Delta''_C$, $c = c'$,

$$\tau_1 = \psi + l'(r) < \psi + \nu_0 < \frac{\pi}{2}$$

²⁴⁾ Vgl. die in der Fußnote ²³⁾ zitierten Abhandlungen.

sicher erfüllt. Man beachte noch, daß, wie in Nr. 28 gesagt, der Bogen $\gamma \leq 2\rho(\eta + \sqrt{\eta})$ ist, so daß für den Bogen $\Delta''_C = m_{c,c'}\bar{\beta}$ sicher wegen (4, 22) die Ungleichung gilt

$$\Delta''_C \leq A_1 \frac{\gamma}{\rho} \leq A_1 2(\sqrt{\eta} + \eta) \leq 4\sqrt{\eta} A_1 = \delta < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \tau_1 \right).$$

Schließlich gilt für $\chi = |\text{arc } \varphi(c')|$ wegen $l(r) \leq \sin \frac{\nu_0}{2}$

$$\sin \chi \leq l(r) \leq \sin \frac{\nu_0}{2}, \quad \chi \leq \frac{\nu_0}{2} \quad \text{und} \quad \chi \leq \frac{\pi}{2} l(r).$$

Daher gilt für jedes nach der obigen Konstruktionsvorschrift in \mathfrak{R} wählbare w nach dem Hilfssatz 9

$$(4, 24) \quad \Delta'_C \leq \frac{1 - |b|}{2|b| \cos^2 \left(\psi + l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2} \right)} \Delta''_C, \quad b = \varphi(c'),$$

wo

$$l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2} \leq \nu_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_0}{2} + \frac{\nu_0}{2} \right) = \frac{3}{2} \nu_0 = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) < \frac{\pi}{2} - \psi$$

ist. Da $\chi \leq \frac{\pi}{2} l(r)$ ist und $\delta \rightarrow 0$ mit $\eta \rightarrow 0$ geht und $||b| - 1| \leq l(r)$ ist, können wir (4, 24) weiter abschätzen

$$(4, 25) \quad \Delta'_C \leq \frac{1 - |b|}{2 \cos^2 \psi} \Delta''_C (1 + h_1(\eta)) (1 + \delta_1(r)),$$

wo $h_1(\eta)$, $\delta_1(r)$ nur von η bzw. r abhängen und mit $\eta \rightarrow 0$ bzw. $r \rightarrow 0$ gleichfalls gegen 0 gehen.

34. Nun beachte man, daß der Bogen $\widehat{PQ} = \gamma$ die Länge $2\rho(\mu' + \sqrt{\eta})$ hat, wo μ' der mit Vorzeichen genommene Winkel ist, den die Sehne \overline{PQ} mit der Tangente in P bildet. Daher ist (wegen $|\mu'| \leq \eta$), unter d_w die Länge der Sehne \overline{PQ} verstanden,

$$(4, 26) \quad \frac{\gamma}{d_w} = \frac{2\rho(\mu' + \sqrt{\eta})}{2\rho \sin(\mu' + \sqrt{\eta})} \leq 1 + h_2(\eta),$$

wo $h_2(\eta)$ nur von η abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht. Ferner gilt nach (4, 19) zwischen der Länge D_w der Sehne $\overline{ww_1}$ und der Sehne \overline{PQ} die Relation

$$(4, 27) \quad \frac{D_w}{d_w} \geq \frac{(1 - \omega') \sin^2(\eta_1 - \eta)}{\kappa \sin^2(\eta_1 + \eta)}.$$

Schließlich beachte man, daß wegen der obigen Annahme ((4, 23)) über r

$$(4, 28) \quad \frac{1 - |\varphi(c')|}{|1 - \varphi(c')|} \leq (1 + \delta_2(r)) \cos \psi_1$$

ist, wo $\delta_2(r)$ nur von r abhängt und mit $r \rightarrow 0$ gegen 0 geht.

Somit gibt es ein nur von η und r abhängiges $q_2 > 0$, so daß für alle w auf C mit $|w - w_1| \leq q_2$ und die zugeordneten Punkte c' in G und W im Abstände R von w_1 wegen (4, 25), (4, 21), (4, 26), (4, 27), (4, 28)

$$\frac{A'_c}{D_w} \leq \left| \frac{\varphi(c') - \varphi(w_1)}{c' - w_1} \right| \frac{(1 + h(\eta))(1 + h_1(\eta))(1 + h_2(\eta))(1 + \delta_1(r))(1 + \delta_2(r))}{\cos^2 \psi} \\ \times \frac{\sin^2(\eta_1 + \eta)}{\sin^2(\eta_1 - \eta)} \frac{\varkappa}{1 - \omega'}$$

gilt. Hiermit ist die Relation (4, 15) — für den Fall $\tau = 1$ — mit

$$K_3 = \frac{\varkappa(1 + h(\eta))(1 + h_1(\eta))(1 + h_2(\eta))(1 + \delta_1(r))(1 + \delta_2(r)) \sin^2(\eta_1 + \eta)}{(1 - \omega') \sin^2(\eta_1 - \eta)}$$

bewiesen. K_3 hängt noch von η und r ab. Da wegen $r \leq \eta$ mit $\eta \rightarrow 0$ auch $r \rightarrow 0$ strebt, so konvergiert $K_3 \rightarrow \varkappa$ mit $\eta \downarrow 0$. Hieraus folgt die zweite Behauptung des Satzes 2 über die Konstante K_3 — für den Fall $\tau = 1$.

Der Fall $\tau \neq 1$ kann durch wörtlich dieselben Überlegungen wie beim Satze 1 (Nr. 24) auf den Fall $\tau = 1$ zurückgeführt werden.

Auch hier gilt eine ganz analoge Bemerkung über den Quotienten $\left| \frac{w - w_1}{R} \right|$ wie beim Satze 1 (Nr. 25).

35. Wir formulieren noch das folgende, sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 ergebende

Korrolar. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzt und die in w_1 linear unbewallt ist (d. h. ihre Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ in w_1 genügt der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$). $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere G von C ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ (w_0 in G), $z = 1$ in $w = w_1$ übergeht. Es sei L eine in $z = 1$ mündende Jordankurve, die bis auf den Endpunkt $z = 1$ ganz in $|z| < 1$, und zwar innerhalb eines von zwei symmetrisch-zum Radius in $z = 1$ verlaufenden Kreissehnen gebildeten Winkelraumes der Öffnung 2ψ , $0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}$, liegt. Dann gibt es zwei positive Konstanten M_1 und M_2 und ein zugehöriges $q' > 0$, sowie zu jedem $z \neq 1$ mit $|z| = 1$, $|z - 1| \leq q'$ ein geeignetes $b(z)$ und ein $b'(z)$, auf L , die mit z gegen 1 gleichfalls gegen 1 konvergieren, so daß*

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{(z - 1)^\tau} \right| \leq M_1 \left| \frac{f(b) - f(1)}{(b - 1)^\tau} \right|$$

und

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{(z - 1)^\tau} \right| \geq M_2 \left| \frac{f(b') - f(1)}{(b' - 1)^\tau} \right|$$

gilt.

Dabei kann man auch

$$M_1 = (1 + \omega) \varkappa \cos^{-2\tau} \left(\frac{\psi}{\tau} \right) \quad \text{und} \quad M_2 = (1 - \omega') \frac{\cos^{2\tau} \left(\frac{\psi}{\tau} \right)}{\varkappa}$$

wählen, wo $0 < \omega, \omega' < 1$ ist, $\kappa = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist und ω, ω' beliebig klein gemacht werden können, wenn man q' hinreichend klein annimmt.

Zum Beweise hat man nur zu beachten, daß das Bild von L in der w -Ebene ein in $w = w_1$ mündender Jordanbogen L' ist, der wegen der Quasikonformität der Abbildung schließlich innerhalb eines von zwei von w_1 ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen in w_1 verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraumes der Öffnung $\psi\tau + \delta$, bleibt, wo $\psi\tau + \delta < \frac{\pi}{2}\tau$ ist. Dann ergibt sich der Beweis durch Anwendung der Sätze 1 und 2 auf die von $f(z)$ inverse Funktion $z = \varphi(w)$, indem wir die Punkte c und c' jeweils auf L' annehmen und $b = \varphi(c)$, $b' = \varphi(c')$ wählen.

§ 5.

Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2.

36. Wir beweisen zunächst eine Folgerung aus den Sätzen 1 und 2, die sich auf die Existenz der *allseitig* genommenen Ableitung bezieht.

Satz 3. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $P: w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzen möge; $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C auf $|z| < 1$ ab. Es sei L ein in $w = w_1$ mündender, sonst innerhalb von C verlaufender Jordanbogen, und zwar möge L innerhalb eines Winkelraumes liegen, der von zwei von w_1 ausgehenden, zuerst im Innern von C verlaufenden und symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei w_1 liegenden Strahlen gebildet wird. Ferner möge bei der Annäherung längs L*

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \gamma \quad 35)$$

existieren und von 0 und ∞ verschieden sein.

Hinreichend und notwendig dafür, daß auch auf C und daher (wie wir zeigen werden) allseitig

$$(5, 1) \quad \lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$$

existiert und gleich γ ist, ist, daß C in P regulär unbewallt ist.

37. Wir schicken dem Beweise den folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 10. *Es sei Γ eine geschlossene Jordankurve, $f(z)$ eine im Innern G von Γ reguläre und auf $G + \Gamma$ stetige Funktion. Es sei z_1 ein*

³⁵⁾ Wir denken uns die Potenz $(w - w_1)^{1/\tau}$ etwa für einen Wert w auf der Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei w_1 im Innern von C irgendwie normiert. Dann bleibt diese Potenz im Innern von C und auf C eindeutig und stetig.

Punkt auf Γ . Gilt für beliebige z auf Γ

$$\frac{|f(z) - f(z_1)|}{|z - z_1|^a} \leq \Omega, \quad a > 0,$$

so gilt dies gleichmäßig auch für alle z im Innern von Γ .

Beweis. Wir bilden G mittels $z = g(\zeta)$ auf $|\zeta| < 1$ so ab, daß etwa $\zeta = 1$ in $z = z_1$ übergeht. Dann zeigen wir, daß, $f^*(\zeta) = f(g(\zeta))$ gesetzt, $h(\zeta) = \frac{f^*(\zeta) - f^*(1)}{(g(\zeta) - g(1))^a}$ ³⁶⁾ durch das Poissonsche Integral — mit den Randwerten $h(e^{i\vartheta})$ — darstellbar ist, und leiten aus dieser Darstellung dann in üblicher Weise die behauptete Ungleichung ab.

38. Um nun einzusehen, daß man $h(\zeta)$ durch das Poissonsche Integral darstellen kann, braucht man nur die folgende Tatsache zu beachten:

Ist $\psi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und besitzt $\psi(z)$ integrierbare radiale Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ außer auf einer ϑ -Menge vom Maße 0, ist ferner

$$(5, 2) \quad \int_0^{2\pi} \lg^+ |\psi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq C, \quad 0 \leq r < 1 \quad 37),$$

so ist $\psi(z)$ durch das Poissonsche Integral, $z = re^{i\varphi}$, $r < 1$,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) K(r, \vartheta - \varphi) d\vartheta$$

gegeben.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich sofort aus einem Satze von Herrn Ostrowski ³⁸⁾, der besagt, daß eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\psi(z)$

³⁶⁾ Wir denken uns die Potenz in $h(\zeta)$ für einen Wert $|\zeta| < 1$ in bestimmter Weise normiert. Dann bleibt $h(\zeta)$ wegen $g(\zeta) \neq g(1)$ in $|\zeta| < 1$ eindeutig und regulär und hat für $|\zeta| \uparrow 1$, $\text{arc } \zeta \neq \text{arc } 1$ eindeutige, beschränkte und integrierbare Randwerte.

³⁷⁾ Dabei ist für $a \geq 0$ $\lg a = \lg a$, wenn $a \geq 1$, und $= 0$, wenn $a \leq 1$ ist.

³⁸⁾ A. Ostrowski, Acta litterarum ac scientiarum Reg. Univ. Hung. Franciscus Josph. T. I, Fasc. II, p. 87, Fußnote. Dort ist der Satz folgendermaßen formuliert: Ist $F(z)$ in $|z| < 1$ regulär, hat $F(z)$ auf einer ϑ -Menge positiven Maßes ($z = re^{i\vartheta}$) die Randwerte 0 und ist $\int_0^{2\pi} \lg^+ |F(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq C_1$, $0 < r < 1$, so ist $F(z) \equiv 0$. Um einzusehen, daß die obige Fassung mit dieser äquivalent ist, hat man nur zu beachten, daß, wenn zwei in $|z| < 1$ reguläre Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ fast überall die gleichen radialen Randwerte haben und den Bedingungen genügen

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |F_1(re^{i\vartheta})| d\vartheta = C_1, \quad \int_0^{2\pi} \lg^+ |F_2(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq C_1,$$

$F = F_1 - F_2$ fast überall die Randwerte 0 besitzt und daß ferner

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |F_1 - F_2| d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} \lg^+ |F_1| d\vartheta + \int_0^{2\pi} \lg^+ |F_2| d\vartheta + \lg 2 \leq 2C_1 + \lg 2$$

gilt.

durch die Angabe ihrer Randwerte auf einer Menge positiven Maßes eindeutig bestimmt ist, wenn (5, 2) gilt. Da nämlich nach Fatou

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) K(r, \vartheta - \varphi) d\vartheta$$

für fast alle ϑ die Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ besitzt und da ferner

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\vartheta})| d\vartheta$$

gleichmäßig in r beschränkt³⁹⁾ und somit auch

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |\Psi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq C_1$$

für alle $0 \leq r < 1$ bleibt, sind $\psi(z)$ und $\Psi(z)$ miteinander identisch.

Für $h(\zeta)$ ist nun diese Voraussetzung erfüllt. Denn wegen der Beschränktheit von $|f(z) - f(z_1)|$ und $|g(\zeta) - g(1)|$ für $|\zeta| \leq 1$ bleibt auch ($\zeta = re^{i\vartheta}$):

$$\int_0^{2\pi} \lg^+ |f(g(\zeta)) - f(g(1))| d\vartheta, \quad \int_0^{2\pi} \lg^+ |g(\zeta) - g(1)| d\vartheta$$

für $0 \leq r < 1$ beschränkt, und dies ist bereits hinreichend dafür⁴⁰⁾, daß

³⁹⁾ Dies gilt ja sogar für eine allgemeinere Klasse von Funktionen $\Psi(z)$, nämlich für alle $\Psi(z)$, die durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral darstellbar sind (siehe A. Ostrowski, die in der Fußnote ³⁸⁾ zitierte Arbeit. Für die ausführliche Darstellung des Beweises vgl. die in Fußnote ³⁾ zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski, S. 255 ff. Vgl. auch die Darstellung von G. C. Evans, Logarithmic potential, S. 46.)

⁴⁰⁾ Denn ist $\Phi(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion, so gilt für $\lg |\Phi(z)|$ bekanntlich die Jensensche Ungleichung ($\Phi(0) \neq 0$, sonst betrachte man $\frac{\Phi(z)}{z^n}$ für passendes ganzes $n > 0$)

$$\lg |\Phi(0)| \leq \int_0^{2\pi} \lg |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \quad (r < 1)$$

oder

$$\lg |\Phi(0)| \leq \int_0^{2\pi} \lg^+ |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta + \int_0^{2\pi} \lg^- |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta,$$

wobei für $a > 0$

$$\lg^+ a = \lg a \text{ für } a \geq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \leq 1,$$

$$\lg^- a = \lg a \text{ für } a \leq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \geq 1$$

ist. (Man beachte, daß mit $\lg |\Phi|$ auch $\lg^+ |\Phi|$ und $\lg^- |\Phi|$ integrable Funktionen von ϑ sind.) Da nun $\int_0^{2\pi} \lg |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq 0$, $-\int_0^{2\pi} \lg^- |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \geq 0$ ist, ist

$$\int_0^{2\pi} \lg^- |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta = -\int_0^{2\pi} \lg |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} \lg^+ |\Phi(re^{i\vartheta})| d\vartheta - \lg |\Phi(0)| \leq K,$$

(Fortsetzung der Fußnote ⁴⁰⁾ auf nächster Seite.)

auch, für $0 \leq r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg \frac{|f(z) - f(z_1)|}{|z - z_1|^\alpha} \right| d\vartheta, \quad z = g(re^{i\vartheta}),$$

beschränkt bleibt.

Es gilt daher

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\vartheta}) - f^*(1)}{(g(e^{i\vartheta}) - g(1))^\alpha} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta, \quad \zeta = re^{i\varphi},$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

39. Beweis von Satz 3. Offenbar genügt es, den Satz für den Fall $\tau = 1$ zu beweisen.

a) Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung $\frac{A(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 1$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ hinreichend für das Bestehen von (5, 1) ist.

Zunächst folgt aus dem Satze 2, daß die für w in C reguläre und für $w \neq w_1$ auf C stetige Funktion $\Phi(w) = \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ gleichmäßig für alle w auf C und daher auch nach dem vorausgeschickten Hilfsatz für alle w innerhalb von C beschränkt ist. Daraus ergibt sich auf Grund unserer Voraussetzung nach einem Satze von Lindelöf⁴¹⁾, daß $\lim_{w \rightarrow w_1} \Phi(w) = \gamma = \varphi'(w_1)$ auch gleichmäßig bei Annäherung „im Winkelraum“ gilt, also auch insbesondere längs der Normalen in w_1 . Daher gilt nach Satz 1 und Satz 2 für hinreichend kleine $|w - w_1|$, $w \neq w_1$,

$$(1 - \omega) \left| \frac{\varphi(c) - \varphi(w_1)}{(c - w_1)} \right| \leq \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right| \leq (1 + \omega) \left| \frac{\varphi(c') - \varphi(w_1)}{c' - w_1} \right|,$$

wo c, c' die dem Punkte w nach Satz 1 und Satz 2 zugeordneten Punkte im Abstände R von w_1 auf der Innennormalen in P sind. Somit gilt für $w \rightarrow w_1$

$$|\varphi'(w_1)|(1 - \omega) \leq \overline{\lim}_{w \rightarrow w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right| \leq |\varphi'(w_1)|(1 + \omega).$$

und daher auch ($0 < r < 1$)

$$\int_0^{2\pi} |\lg |\Phi(re^{i\vartheta})|| d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} |\lg |\Phi(re^{i\vartheta})|| d\vartheta - \int_0^{2\pi} |\lg |\Phi(re^{i\vartheta})|| d\vartheta \leq \text{konst.}$$

Vgl. für die obige Bedingung für den Mittelwert von \lg sowie diese Überlegung die in der Fußnote ⁹⁾ zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski S. 261. Die Bedeutung dieser Bedingung für \lg besteht darin, daß sie für einen Quotienten zweier analytischer Funktionen erfüllt ist, wenn sie für jede einzeln gilt.

⁴¹⁾ E. Lindelöf, Sur un principe général de l'analyse, et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc. scient. Fennicae 46 (1915), Nr. 3, p. 10-11.

Also ist auch mit $\omega \downarrow 0$

$$|\varphi'(w_1)| \leq \overline{\lim}_{w \rightarrow w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right| \leq |\varphi'(w_1)|,$$

und somit folgt, daß $\lim_{w \rightarrow w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right|$ existiert und $= |\varphi'(w_1)|$ ist.

Um nunmehr die Behauptung (5, 1) herzuleiten, beachte man, daß wegen der Existenz der Tangente in $w = w_1$ ⁴²⁾

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \operatorname{arc} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} = \operatorname{arc} \varphi'(w_1)$$

ist. Damit ist die Relation $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/r}} = \gamma$ für w auf dem Rande bewiesen. Die allseitige Konvergenz des Ausdrucks (5, 1) folgt dann wegen der Beschränktheit aus einem Hilfssatz von Lindelöf ⁴³⁾.

b) Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes beachte man die am Schluß von Nr. 17 bewiesene Tatsache. Bezeichnet man die zu $\varphi(w)$ inverse Funktion mit $w = f(z)$ und ist $\varphi(w_1) = 1$, so besagt die Aussage, daß

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left| \frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta} \right|$$

existieren und von 0 und ∞ verschieden sein soll (vgl. Nr. 17, Bemerkung 2):

ϑ ist ein metrischer Parameter für C in w_1 , für den $\left| \frac{r(\vartheta)}{\vartheta} \right| \rightarrow \alpha > 0$ für $\vartheta \rightarrow 0$ gilt, wobei $r(\vartheta)$ die Länge des oben angeführten, von P_0 ($w = w_1$, $\vartheta = 0$) nach dem Punkte $P = P(\vartheta)$ gezogenen Radiusvektors ist. Hierfür ist aber nach dem in der Nr. 17 Gesagten *notwendig*, daß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ist.

40. Aus dem Satze 1 und 2 sowie aus dem in Nr. 35 formulierten Korrolar und dem Satze 3 ergibt sich nun das folgende

Korrolar. Es möge $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere einer Jordankurve C abbilden, die in $f(1) = w_1$ eine Tangente besitzt und deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt. Bleibt bei Annäherung längs eines in $z = 1$ mündenden, aus dem Innern des Einheitskreises kommenden Jordanbogens L mit stetiger Tangente, welcher die Peripherie des Einheitskreises nicht berührt, $|f'(z)| \leq M$, so hat $f(z)$ in $z = 1$ nach oben allseitig beschränkten Differenzenquotienten.

⁴²⁾ Vgl. E. Lindelöf, die in der Fußnote ⁴³⁾ zitierte Abhandlung, S. 85–87.

⁴³⁾ Siehe z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 21 ff. Dieser Satz ist ein Spezialfall des oben zitierten.

Existiert bei Annäherung längs L $\lim_{z \rightarrow 1} f'(z) = \gamma$ ⁴⁴⁾ und ist $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\epsilon)}{\epsilon} = 1$,
 so existiert auch allseitig $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$ und ist $= \gamma$.

Beweis. Wegen $|f'(z)| \leq M$ für z auf L ist

$$|f(z) - f(1)| = \left| \int_z^{(L)} f'(z) dz \right| \leq Ml,$$

wo längs L von z bis 1 zu integrieren ist und l die Länge des Kurvenbogens L von z bis 1 bedeutet. Daher ist

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} \right| \leq M \frac{l}{|z - 1|},$$

und wegen der Stetigkeit der Tangente von L ist $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{l}{|z - 1|} = 1$, woraus die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten bei allseitiger Annäherung aus dem Korollar zum Satze 1 und 2 und dem Hilfssatz 10 folgt.

Aus $\lim f'(z) = \gamma$ und der eben benutzten Integraldarstellung von $f(z) = f(1) + \int_1^z f'(z) dz$, die ja bis in den Punkt $z = 1$ hinein gilt, folgt, daß auch

$$(5, 3) \quad \lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} = \gamma$$

für z auf L gilt. Denn z bleibt dabei im Stetigkeitsintervall von $f'(z)$. Nach Satz 3 folgt hieraus die Behauptung, falls $\gamma \neq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so folgt wegen (5, 3) die Behauptung direkt aus dem Korollar zum Satz 1 und 2, Nr. 35 (1. Behauptung).

§ 6.

Heranziehung der Vergleichskurven.

41. Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve \mathfrak{C} sei eine innere (resp. äußere) Vergleichskurve der geschlossenen Jordankurve C im Punkte P (oder C besitze in P die innere (resp. äußere) Vergleichskurve \mathfrak{C}), wenn \mathfrak{C} den Punkt P mit C gemeinsam hat und nirgends außerhalb von C verläuft (resp. nirgends innerhalb von C liegt und C in ihrem Innern enthält).

Dann gilt der folgende

Satz 4. Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte P ($w = w_1$) eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzt, und die im

⁴⁴⁾ Hier darf auch $\gamma = 0$ sein.

Punkte P linear unbewallt ist (für deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ also in P die Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ gilt). Ferner möge C in P eine innere oder äußere Vergleichskurve \mathfrak{C} besitzen, die in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ haben möge. Dabei werde angenommen, daß die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels der Ecke in P von C zugleich auch den Eckenwinkel von \mathfrak{C} in P halbiert. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C , $z = \Phi(w)$ das von \mathfrak{C} so auf $|z| < 1$ ab, daß ein im Innern von C und \mathfrak{C} liegender Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. Dann gibt es:

a) falls \mathfrak{C} eine innere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten K'_1 und q_1 sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ ein c auf der Winkelhalbierenden s , so daß

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geq K'_1 \frac{|\Phi(c) - \Phi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}}$$

gilt, und

b) falls \mathfrak{C} eine äußere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten K'_2 und q_2 sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_2$ ein c' auf s , so daß

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leq K'_2 \frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

ist⁴⁵⁾.

Dabei dürfen für K'_1 und K'_2 die Werte $\frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ bzw. $(1+\omega)\varkappa^{1/\tau}$ gesetzt werden, wo $\varkappa = \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist und ω , $0 < \omega < 1$, beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur q_1 bzw. q_2 hinreichend klein angenommen wird.

Der Beweis ergibt sich aus dem Satze 1 und dem Satze 2, wenn man beachtet, daß nach dem sogenannten Lindelöf'schen Prinzip⁴⁶⁾ im Falle a) für c im Innern von \mathfrak{C} $|\Phi(c)| \geq |\varphi(c)|$ und also $1 - |\Phi(c)| \leq 1 - |\varphi(c)|$, im Falle b) für c' im Innern von C $|\Phi(c')| \leq |\varphi(c')|$ und daher $1 - |\Phi(c')| \geq 1 - |\varphi(c')|$ ist, und wenn man in beiden Fällen die Quasikonformität⁴⁷⁾ der Abbildung in w_1 berücksichtigt. Denn danach ist sowohl

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{1 - |\varphi(w)|}{|\varphi(w_1) - \varphi(w)|} = 1 \quad \text{als auch} \quad \lim_{w \rightarrow w_1} \frac{1 - |\Phi(w)|}{|\Phi(w_1) - \Phi(w)|} = 1,$$

⁴⁵⁾ Man könnte an Stelle der Winkelhalbierenden s auch allgemeiner einen beliebigen in P mündenden Jordanbogen L wählen, der ganz innerhalb eines von zwei von P ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraumes bleibt, die ihrerseits mit an P anstoßenden Stücken im Innern von C und von \mathfrak{C} verlaufen. Wir brauchen aber diesen Satz nicht in dieser Allgemeinheit und beweisen ihn daher nur in der obigen Fassung.

⁴⁶⁾ E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités de la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta societatis scientiarum Fennicae 35 (1908), Nr. 7, pp. 3 ff. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 117.

⁴⁷⁾ Vgl. die in der Fußnote³⁹⁾ zitierten Abhandlungen.

wenn w auf s angenommen ist. Man erhält somit beispielsweise im Falle a)

$$\frac{|\varphi(w_1) - \varphi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}} \geq \frac{1 - |\varphi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}} \geq \frac{1 - |\Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}} \geq \frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}} (1 - \omega')$$

und mithin nach Satz 1 (mit $\psi = 0$) bei vorgegebenem ω und passendem $q_1 > 0$ für alle $w \neq w_1$ auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ und die ihnen zugeordneten c

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geq \frac{1 - \omega}{x^{1/\tau}} \frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}}.$$

Bemerkung. Berücksichtigt man die am Schluß des Beweises von Satz 1 und Satz 2 gemachten Bemerkungen über den Quotienten $\left| \frac{w - w_1}{c - w_1} \right|$ bzw. $\left| \frac{w - w_1}{c' - w_1} \right|$, so sieht man, daß auch hier Analoges gilt: Ist ω , $0 < \omega < 1$, beliebig vorgegeben, und sind q_1 bzw. q_2 die zu $K_1' = \frac{1 - \omega}{x^{1/\tau}}$ bzw. $K_2' = (1 + \omega)x^{1/\tau}$ nach dem Satze 4 zugeordneten Zahlen, so gibt es zwei positive Konstanten μ_1 und μ_2 , so daß

$$0 < \mu_1 \leq \left| \frac{w - w_1}{c - w_1} \right| \leq \mu_2, \quad 0 < \mu_1 \leq \left| \frac{w - w_1}{c' - w_1} \right| \leq \mu_2$$

für alle w auf C mit $|w - w_1| \leq q_1$ bzw. $|w - w_1| \leq q_2$ gilt. Diese (beim Beweise der Sätze 1 und 2 angegebenen) Konstanten konvergieren aber gegen 0, wenn man $\omega \rightarrow 0$ konvergieren läßt.

42. Zusatz zum Satz 4. *Dieser Satz bleibt noch richtig, wenn der Punkt, den man bei der Abbildung des Innern von \mathfrak{C} in den Nullpunkt übergehen läßt, nicht derselbe ist wie der, der bei der Abbildung des Innern von C in $z = 0$ übergeht.*

Es sei beispielsweise \mathfrak{C} eine innere Vergleichskurve. Bildet man dann vermittels $z = \varphi^*(w)$ das Innere von C so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = w_0$ (w_0 nicht notwendig im Innern von \mathfrak{C}) in $z = 0$ übergeht, und vermittels $z = \varphi(w)$, daß $w = w_0$ (in C und \mathfrak{C}) in $z = 0$ übergeführt wird, so hat man

$$\varphi^*(w) = \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{1 - \varphi(w)\varphi(w_0)} e^{i\gamma} \quad (\gamma \text{ reell}).$$

Ist daher der Satz 4 auf $\varphi(w)$ mit der Konstanten K_1' anwendbar, so gilt er auch für $\varphi^*(w)$, wenn man K_1' durch $K_1'(1 - \varepsilon)$ ersetzt, wo $0 < \varepsilon < 1$ ist und ε beliebig klein durch genügende Verkleinerung von q_1 gemacht werden kann. Denn es ist ja zunächst

$$\frac{|\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} = \frac{|\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)|}{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|} \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}}$$

und analog

$$\frac{|\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} = \left| \frac{\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(c) - \varphi(w_1)} \right| \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}},$$

so daß

$$(6, 1) \quad \frac{|\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geq \left| \frac{\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} \right| \cdot K_1' \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \\ = \left| \frac{\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} \right| \cdot \left| \frac{\varphi(c) - \varphi(w_1)}{\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)} \right| \cdot K_1' \frac{|\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}}$$

ist. Ferner gilt, $\varphi^*(w) = \zeta^*$, $\varphi(w) = \zeta$ gesetzt,

$$\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} = \lim_{c \rightarrow w_1} \frac{\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(c) - \varphi(w_1)} = \left(\frac{d\zeta^*}{d\zeta} \right)_{\zeta = \varphi(w_1)} \\ = \frac{1 - |\lambda|^2}{(1 - \bar{\lambda} \varphi(w_1))^2} e^{i\gamma} \neq 0, \quad \lambda = \varphi(w_0),$$

bei beliebiger Annäherung von w und c an w_1 auf C oder aus dem Innern von C . Daher konvergiert das Produkt in (6, 1)

$$\left| \frac{\varphi^*(w) - \varphi^*(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} \right| \left| \frac{\varphi(c) - \varphi(w_1)}{\varphi^*(c) - \varphi^*(w_1)} \right| \rightarrow 1,$$

wenn $w \rightarrow w_1$ und $c \rightarrow w_1$ streben. Hieraus und aus (6, 1) entnimmt man die Richtigkeit der Behauptung im Falle a). Analoges gilt im Falle b).

43. Wir definieren noch die folgenden beiden Begriffsbildungen:

Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve C besitze in P ($w = w_1$) eine „konforme Ecke“ der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$,⁴⁸⁾ wenn C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und wenn für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innern von C auf den Einheitskreis bei allseitiger Annäherung von w an w_1 die Relation gilt

$$0 < K_1 \leq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leq K_2,$$

wo K_1, K_2 Konstanten sind, die natürlich von der Normierung von $\varphi(w)$ abhängen. Wir sagen weiter, C besitze in P eine „generalisierte konforme Ecke“ der Öffnung $\pi\tau$, wenn C in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und es eine innere und äußere Vergleichskurve \mathcal{C}_i und \mathcal{C}_a gibt, die beide in P eine konforme Ecke derselben Öffnung besitzen⁴⁹⁾.

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Jordankurve C , die im Punkte P eine generalisierte konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, besitzt, eine konforme Ecke derselben Öffnung in P hat, ist, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ in C in P der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.*

⁴⁸⁾ Vgl. die Fußnote 9).

Daß diese Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Satze 4. Sie ist aber auch notwendig, und zwar auch dann, wenn das Bestehen einer generalisierten konformen Ecke nicht vorausgesetzt wird. Denn bildet $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere von C ab und ist $w_1 = f(e^{i\vartheta_1})$, so bestehen die Ungleichungen

$$0 < c_1 \leq \frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(e^{i\vartheta_1})|}{|\vartheta - \vartheta_1|^\tau} \leq c_2.$$

Dies bedeutet aber (vgl. die Bemerkung 2 in Nr. 17), daß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^\tau \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von C in bezug auf $w = w_1$ ist, und daher gilt notwendig $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

44. Als eine Anwendung des Satzes 4 beweisen wir noch den folgenden

Satz 6. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau < 2$, besitzt. Ferner sei C in P linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion von C in P genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C auf $|z| < 1$ ab. Dann konvergiert für jedes feste $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \tau$) gleichmäßig für gegen w_1 aus dem Innern von C oder auf C konvergierendes w*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \rightarrow \infty, \quad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau + \varepsilon}}} \rightarrow 0. \quad 49)$$

Beweis. Da C in P Halbtangenten besitzt, kann man ein sich nicht überschneidendes Polygon mit endlich vielen Seiten konstruieren, das den Punkt P mit C gemeinsam hat, in P eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ besitzt, wo sich τ' um beliebig wenig von τ unterscheidet, und sonst entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von C verläuft und in dem zuletzt genannten Falle C im Innern enthält. (Im ersten Falle muß $\tau' < \tau$, im zweiten $\tau' > \tau$ vorausgesetzt werden.)

Sei nun erstens $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \tau$) und \mathfrak{C}_ε ein solches „inneres Vergleichspolygon“, das in P eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ besitzt; wir dürfen annehmen, daß die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels von C in P zugleich den Eckenwinkel von \mathfrak{C}_ε in P halbiert. $z = \Phi(w)$ bilde das Innere von \mathfrak{C}_ε auf $|z| < 1$ ab. Daher gibt es nach dem Satze 4 in § 6 (unter Berücksichtigung der im Anschluß an ihn gemachten Bemerkung und des Zusatzes zu diesem Satze) eine Konstante K_1 und zu jedem $w \neq w_1$ auf C mit hinreichend kleinem $|w - w_1|$ ein c auf s mit $0 < \mu_1 \leq \frac{|w - w_1|}{|c - w_1|} \leq \mu_2$, derart, daß

$$(6, 2) \quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geq K_1 \frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}}$$

⁴⁹⁾ Unter der Annahme, daß C in der Umgebung von P stetige Tangente besitzt, ist die Behauptung dieses Satzes bereits in der in der Fußnote ⁹⁾ zitierten C. R.-Note von Herrn Laurentieff hergeleitet worden.

gilt. Nun gilt bekanntlich für die Abbildungsfunktion $z = \Phi(w)$ eines Polygons in einer Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ für alle c auf s

$$\frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \geq \kappa_1 > 0,$$

wo κ_1 eine Konstante ist. Hieraus ergibt sich wegen (6, 2)

$$(6, 3) \quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau}}} \geq K_1 \cdot \frac{|\Phi(c) - \Phi(w_1)|}{|c - w_1|^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \cdot \frac{1}{|c - w_1|^{-\frac{\varepsilon}{\tau(\tau - \varepsilon)}}} \geq K_1 \kappa_1 |c - w_1|^{\frac{\varepsilon}{\tau(\tau - \varepsilon)}},$$

und indem man (6, 3) und die Relation $0 < \mu_1 \leq \left| \frac{w - w_1}{c - w_1} \right| \leq \mu_2$ beachtet, erhält man

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \geq K_2.$$

Da dieses für jedes feste $\varepsilon > 0$ mit einer von ε abhängigen Konstanten $K_2 = K_2(\varepsilon)$ gilt, ergibt sich daraus leicht die erste Behauptung für alle w auf C . Für w im Innern von C folgt sie dann aus dem Hilfssatz 10.

46. Wir konstruieren nun zweitens für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon + \tau \leq 2$) ein „äußeres Vergleichspolygon“ \mathcal{C}_ε , das in P eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau + \varepsilon)$ hat, und zwar so, daß sein Winkel bei P durch die Winkelhalbierende s des Eckenwinkels von C bei P halbiert wird. $\Phi(w)$ bilde das Innere von \mathcal{C}_ε auf $|z| < 1$ ab. Indem man nun beachtet, daß für jedes c' auf s

$$\frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|w_1 - c'|^{\frac{1}{\tau + \varepsilon}}} \leq \kappa'_1,$$

wo κ'_1 eine nur von ε und nicht von c' abhängige Konstante ist, und die zweite Hälfte des Satzes 4 analog wie eben die erste Hälfte dieses Satzes anwendet, erkennt man durch ganz analoge Schlüsse die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

II. Kapitel.

§ 7.

Formulierung des Hauptsatzes über konforme Ecken und Vorbemerkungen.

47. Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, Bedingungen für das Vorhandensein einer konformen Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, bei einer geschlossenen Jordankurve C , resp. für die *allseitige* Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ für die Abbildungsfunktionen ihres Innern $z = \varphi(w)$ auf das Innere des Einheitskreises anzugeben. *Wir nehmen dabei von vorn-*

herein an, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Kurven C , die wir betrachten wollen, in dem zu untersuchenden Punkte P_0 der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt. Wir wählen dann zu ihrer Parameterdarstellung $w = w(t) = x(t) + iy(t)$ einen metrischen Parameter t . Dem Punkte P_0 entspreche dabei $t = 0$. Durchläuft t das Intervall $-T \leqq t < T$, so möge $P(t)$ die Kurve C durchlaufen. Unser Resultat läßt sich dann am einfachsten formulieren, wenn wir die folgenden Größen einführen: den senkrechten Abstand $\xi(t)$ eines Punktes $P = P(t) \neq P_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von P_0 der Kurve C von derjenigen Halbtangente, gegen die der Radiusvektor $\overline{P_0 P}$ für $t \downarrow 0$ bzw. $t \uparrow 0$ konvergiert, die Länge der Projektion $\eta(t)$ des Radiusvektors $\overline{P_0 P}$ auf diese Halbtangente und schließlich die nur für hinreichend kleine $|t|$ definierte stetige und monoton gegen 0 abnehmende Funktion von t :

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \text{Max}_{0 < \tau \leqq t} \xi(\tau) & \text{für } t > 0; \\ \text{Max}_{0 > \tau \geqq t} \xi(\tau) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

$\xi^*(t)$ ist also der größte Abstand des Kurvenbogens $0 \dots t$ von der entsprechenden Halbtangente. — Dann lautet unser Satz:

Satz 7. Ist C eine geschlossene Jordankurve, die in einem Punkte P_0 der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt, und ist das mit der oben eingeführten

Funktion $\xi^*(t)$ gebildete Integral $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$ konvergent ($\varepsilon, \delta > 0$), so hat C in P_0 ($w = w_1$) eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$ ($0 < \tau \leqq 2$).

Ist darüber hinaus $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, so existiert sogar für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innern von C auf $|z| < 1$ der $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung und ist von 0 und ∞ verschieden.

48. Wir schicken dem Beweise dieses Satzes (den wir im § 9 erbringen) einige Vorbemerkungen und Hilfssätze voraus.

Vorbemerkung 1. Die Tatsache der Konvergenz von $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\xi^*(t) dt}{t^2}$ ist unabhängig von der Wahl des metrischen Parameters t . Denn ist t' ein anderer metrischer Parameter, bei dem gleichfalls P_0 der Wert $t' = 0$ entspricht und der dasselbe Vorzeichen wie t hat, so sind t und t' offenbar monotone und stetige Funktionen voneinander: $t' = g_1(t)$, $t = g_2(t')$, und es gilt wegen $r(t) = \bar{r}(t') = r(g_2(t'))$, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$,

$$(7,1) \quad 0 < x_1 \leqq \left| \frac{t'}{t} \right| = \left| \frac{\frac{t'}{r}}{\frac{t}{r}} \right| \leqq x_2.$$

Ferner ist die mit dem Parameter t' definierte ξ^* -Funktion: $\bar{\xi}^*(t') = \bar{\xi}^*(g_1(t)) = \xi^*(t)$. Hieraus wollen wir folgern, daß auch das Integral

$$\int_0^{\bar{\delta}} \frac{\bar{\xi}^*(t')}{t'^2} dt' \text{ gleichzeitig mit } \int_0^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$$

konvergiert. Wir setzen dabei $\bar{\delta}$, $\delta > 0$ voraus; für $\bar{\delta}$, $\delta < 0$ ist alles analog.

Nun bemerken wir, daß für eine beliebige Funktion $X(t)$ mit $X(t) \downarrow 0$ für $t \downarrow 0$ die Integrale

$$\int_0^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t} \quad {}^{50)}$$

gleichzeitig konvergieren und divergieren. Wir tragen übrigens den Beweis hierfür als den ersten der unten folgenden Hilfssätze nach. Hiernach genügt es also, nur die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\xi}^*(t)}{t}$$

für $\bar{\varepsilon} \downarrow 0$ nachzuweisen. Dies folgt aber sofort aus der Bemerkung, daß für jede Definitionssumme dieses Stieltjes-Integrals wegen (7, 1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2} \sum_{v=0}^n \frac{1}{\bar{t}_v} [\xi^*(t_{v+1}) - \xi^*(t_v)] &\leq \sum_{v=0}^n \frac{1}{\bar{t}'_v} [\bar{\xi}^*(t'_{v+1}) - \bar{\xi}^*(t'_v)] \\ &\leq \frac{1}{x_1} \sum_{v=0}^n \frac{1}{\bar{t}_v} [\xi^*(t_{v+1}) - \xi^*(t_v)] \end{aligned}$$

ist (wo $\bar{\varepsilon} = t'_0 < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{n+1} = \bar{\delta}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $\langle \bar{\varepsilon}, \bar{\delta} \rangle$ ist, \bar{t}'_v irgendwelche Zwischenwerte aus $\langle t'_v, t'_{v+1} \rangle$ sind und $t_v = g_2(t'_v)$, $\bar{t}_v = g_2(\bar{t}'_v)$ ist) und daher

$$\frac{1}{x_2} \int_{\bar{\varepsilon}}^{\delta} \frac{d\xi^*(t)}{t} \leq \int_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\xi}^*(t)}{t} \leq \frac{1}{x_1} \int_{\bar{\varepsilon}}^{\delta} \frac{d\xi^*(t)}{t}$$

ist. —

49. Hilfssatz 11. Für eine beliebige Funktion $X(t)$ mit $X(t) \downarrow 0$ für $t \downarrow 0$ konvergieren und divergieren die Integrale

$$\int_0^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t} \quad (\delta > 0)$$

gleichzeitig⁵¹⁾.

⁵⁰⁾ Dieses Integral ist als ein Stieltjes-Integral aufzufassen.

⁵¹⁾ Für den Fall monoton ins Unendliche wachsender Funktionen wurde dieser Satz von Herrn Ostrowski hergeleitet (s. die in der Fußnote ⁹⁾ zitierte Abhandlung S. 202). Unser Beweis ist seinem nachgebildet.

Beweis. Es ist $(0 < \varepsilon < \delta)$

$$(7,2) \quad \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt = -\frac{X(t)}{t} \Big|_{\varepsilon}^{\delta} + \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}.$$

Ist $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt$ konvergent, so folgt für festes $\gamma > 1$

$$\int_t^{\gamma t} \frac{X(t)}{t^2} dt \geq \frac{X(t)}{(t\gamma)^2} \cdot (\gamma t - t) = \frac{X(t)}{t} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma^2}$$

und daher

$$\frac{X(t)}{t} \leq \frac{\gamma^2}{\gamma - 1} \cdot \int_t^{\gamma t} \frac{X(t)}{t^2} dt \rightarrow 0 \quad \text{für } t \downarrow 0;$$

daraus folgt dann wegen (7,2) auch die Konvergenz des Integrals $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$ für $\varepsilon \downarrow 0$.

Ist umgekehrt dieses letzte Integral konvergent, so folgt wegen

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t dX(t) \leq \int_0^t \frac{dX(t)}{t} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \downarrow 0$$

aus (7,2), daß auch das Integral $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt$ für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergiert. —

50. Vorbemerkung 2. Die auf die Funktion $\xi^*(t)$ bezügliche Voraussetzung des Satzes 7 ist offenbar mit der Bedingung äquivalent, daß es eine monotone mit $t \downarrow 0$, $t \uparrow 0$ gegen 0 abnehmende Funktion $X(t)$

gibt, so daß $\xi(t) \leq X(t)$ ist und das Integral $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt$ konvergiert. $\xi^*(t)$ ist nur die „kleinste“ derartige Funktion. —

51. Vorbemerkung 3. Die Voraussetzung des Satzes 7 ist, wie nun gezeigt werden soll, invariant gegenüber einer Transformation der Kurve von der Form $u = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, reell. Da andererseits auch die Tatsache, daß in $w = w_1$ eine konforme Ecke vorhanden ist resp. der $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\alpha}}$ existiert⁵²⁾, gleichfalls bei einer solchen Transformation erhalten bleibt, so folgt hieraus insbesondere, daß man beim Beweise des Satzes 7 sich z. B. auf den Fall einer Ecke der Öffnung π beschränken darf.

Aus der Bemerkung 1 in Nr. 17 folgt bereits, daß $t' = |t|^\alpha \operatorname{sgn} t$ ein metrischer Parameter der transformierten Kurve \bar{C} in bezug auf $u = 0$ ist.

⁵²⁾ Vgl. Nr. 24.

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß, unter $\xi^*(t')$ die zu $\xi^*(t)$ analoge

Funktion bei \bar{C} verstanden, $\int_{-e'}^{\delta'} \frac{\xi^*(t')}{t'^2} dt'$ konvergiert. Zu diesem Zwecke be-

weisen wir die folgende nach Vorbemerkung 2 mit dieser äquivalente Tatsache: Ist $X(t)$ irgendeine (für hinreichend kleine $|t|$ definierte) monotone Majorante von $\xi(t)$, wo $\xi(t)$ die in Nr. 47 eingeführte Funktion ist, mit

konvergentem Integral $\int_{-e}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt$, so gibt es eine monotone Majorante $\bar{X}(t')$

von $\xi(t')$, wo $\xi(t')$ die zu $\xi(t)$ analoge Funktion bei \bar{C} in $u=0$ ist, so

daß das Integral $\int_{-e'}^{\delta'} \frac{\bar{X}(t')}{t'^2} dt'$ konvergiert.

Beim Beweise dieser Behauptung dürfen wir uns aus Symmetriegründen etwa auf $t > 0$, das heißt auf die Betrachtung eines der in P zusammenstoßenden Kurvenzweige beschränken.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w_1 = 0$, und der Winkel, den die rechtsseitige Halbtangente an C in $w=0$ mit der positiven reellen Achse bildet, sei gleich 0. Ist dann $w = x + iy = R e^{i\lambda}$, so ist $u = w^\alpha = R^\alpha e^{i\alpha\lambda}$. Daher gilt

$$\xi(t) = R \sin |\lambda|$$

und analog für die $\xi(t)$ entsprechende Funktion $\bar{\xi}(t')$, zunächst als Funktion $\bar{\xi}_1(t)$ von t ,

$$\bar{\xi}_1(t) = R^\alpha \sin |\alpha\lambda|.$$

Nun ist wegen $\xi(t) \leq X(t)$ auch $\sin |\lambda| \leq \frac{X(t)}{R}$, so daß

$$\bar{\xi}_1(t) \leq R^{\alpha-1} X(t) \cdot (1 + \varepsilon)^\alpha$$

ist, wo $\varepsilon > 0$ ist und mit $t \downarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Da wegen der für den metrischen Parameter gültigen Relation $\left| \frac{R}{t} \right|$ zwischen zwei positiven Schranken bleibt, ist sowohl für $\alpha > 1$ als auch für $\alpha < 1$

$$\bar{\xi}(t') = \bar{\xi}_1(t) \leq K t^{\alpha-1} X(t) = K X_2(t), \quad X_2(t) = t^{\alpha-1} X(t),$$

wo K eine passende positive Konstante ist.

Die Funktion $X_2(t) = t^{\alpha-1} X(t)$ ist für $\alpha < 1$ im allgemeinen nicht notwendig monoton; sie ist aber, wenn man $X_2(0) = 0$ setzt, im Nullpunkt

stetig (weil wegen der Konvergenz von $\int_0^\delta \frac{X(t)}{t^2} dt$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(t)}{t} = 0$ ist, siehe

Nr. 49) und durchweg von beschränkter Variation. Denn zunächst ist in jedem abgeschlossenen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervall

von $\langle 0, \delta \rangle$ sowohl $t^{\alpha-1}$ als auch $X(t)$ und somit auch $t^{\alpha-1}X(t)$ von beschränkter Variation. Daher kann man $X(t)$ in der Form darstellen

$$X_2(t) - X_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^t d(t^{\alpha-1}X(t)) = \int_{\varepsilon}^t t^{\alpha-1}dX(t) + (\alpha-1) \int_{\varepsilon}^t X(t)t^{\alpha-2}dt,$$

wo die beiden ersten hier vorkommenden Integrale Stieltjes-Integrale sind. Da ferner die beiden Integrale in der rechts stehenden Summe für $\varepsilon \downarrow 0$ einzeln konvergieren, folgt, daß

$$X_2(t) = \int_0^t t^{\alpha-1}dX(t) + (\alpha-1) \int_0^t X(t)t^{\alpha-2}dt = Z_1(t) + (\alpha-1)Z_2(t),$$

$$Z_1(t) = \int_0^t t^{\alpha-1}dX(t), \quad Z_2(t) = \int_0^t X(t)t^{\alpha-2}dt$$

ist, also entweder selbst monoton ($\alpha > 1$) oder die Differenz zweier monotoner Funktionen ($Z_1(t)$ und $-(\alpha-1)Z_2(t)$), somit also von beschränkter Variation ist. Bezeichnen wir die Totalvariation von $X_2(t)$ in $0 \dots t$ mit $V(t)$, und setzen wir

$$V(t) = V(t'^{1/\alpha}) = \bar{V}(t'), \quad Z_1(t) = \bar{Z}_1(t'), \quad Z_2(t) = \bar{Z}_2(t'),$$

so konvergiert, wie wir zeigen wollen,

$$\int_0^{\delta'} \frac{\bar{V}(t')}{t'^2} dt'.$$

Wegen $\bar{V}(t') \leq \bar{Z}_1(t') + |\alpha-1| \bar{Z}_2(t')$ und der daraus folgenden Ungleichung

$$(7,3) \quad \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{V}(t')}{t'^2} dt' \leq \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{Z}_1(t')}{t'^2} dt' + |\alpha-1| \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{Z}_2(t')}{t'^2} dt'$$

genügt es, die Konvergenz der beiden in (7,3) rechts stehenden Integrale, oder also auch (nach Hilfssatz 11) die der beiden Integrale

$$\int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{d\bar{Z}_1(t')}{t'} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_1(t)}{t^{\alpha}} \quad \text{und} \quad \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{d\bar{Z}_2(t')}{t'} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_2(t)}{t^{\alpha}}$$

zu beweisen. Dies folgt aber wegen⁵³⁾

⁵³⁾ Hierbei benutzen wir den folgenden Satz: Sind $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ stetig, und ist $\Psi(t)$ dort monoton, so gilt, wenn

$$\Psi(t) = \int_{\alpha}^t \varphi_1(t) d\psi(t)$$

gesetzt wird,

$$\int_{\alpha}^t \varphi_2(t) d\Psi(t) = \int_{\alpha}^t \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) d\psi(t).$$

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_1}{t^\alpha} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{t^{\alpha-1} dX(t)}{t^\alpha} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$$

und

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_2}{t^\alpha} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t) t^{\alpha-2}}{t^\alpha} dt = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2} dt$$

aus der Voraussetzung unter Benutzung des Hilfssatzes 11.

Wir können daher für die oben genannte Funktion $\bar{X}(t')$ die Totalvariation $\bar{V}(t')$ als Funktion von t' setzen. — Hiermit ist dann die obige Behauptung bewiesen. —

§ 8.

Hilfssätze.

52. Wir beweisen nunmehr die folgenden Hilfssätze, von denen wir beim Beweise des Satzes 7 Gebrauch machen werden, und wenden uns erst dann dem Beweise dieses Satzes zu.

Hilfssatz 12. *Es sei $X(t)$ eine in $-\delta \leq t \leq +\delta$ ($0 < \delta < \frac{\pi}{2}$) definierte nicht negative Funktion, die für $t \downarrow 0$ und $t \uparrow 0$ monoton gegen 0 abnimmt und für die das Integral $\int_0^{\varepsilon} \frac{X(t)}{t^2} dt$ für $\varepsilon \geq 0$, $|\varepsilon| \leq \delta$ ⁵⁴⁾ konvergiert. Dann gibt es zu $X(t)$ eine gleichfalls in $-\delta \leq t \leq +\delta$ definierte nicht negative durchweg mit stetiger Ableitung $Q(t)$ versehene Funktion $V(t) = \int_0^t Q(t) dt$, die gleichfalls für $t \downarrow 0$, $t \uparrow 0$ monoton gegen 0 abnimmt mit den folgenden weiteren Eigenschaften:*

1. *Es ist*

$$(8,1) \quad \frac{X(t)}{V(t)} \rightarrow 0 \quad \text{für } |t| \downarrow 0.$$

2. *$Q(t)$ läßt sich für $-\pi \leq t \leq \pi$ so geeignet stetig fortsetzen und alsdann für alle t periodisch mit der Periode 2π definieren, daß für alle reellen t $|Q(t)| \leq \text{Max}_{|\sigma| \leq \delta} |Q(\sigma)|$, $Q(0) = 0$, $Q(t) > 0$ in $(0, \pi)$, $Q(t) < 0$ in $(-\pi, 0)$ ist und daß ferner für jedes reelle t das Integral*

⁵⁴⁾ Nach dem Hilfssatz 11 ist die Konvergenz dieses Integrals äquivalent mit der des Stieltjes-Integrals $\int_0^{\varepsilon} \frac{dX(t)}{t}$.

$$(8, 2) \quad \int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$$

existiert und gleichmäßig für alle reellen t beschränkt ist⁵⁵⁾.

Zusatz. Unser Konstruktionsverfahren der Funktionen $Q(t)$ und $V(t)$ aus $X(t)$ wird überdies die folgende Eigenschaft besitzen:

Ist allgemein $\left| \int_0^a \frac{dX(t)}{t} \right| \leq \eta$ für $|a| \leq \delta(\eta)$, ist ferner d eine positive Zahl, die von mindestens einem Wert der Funktion $\delta(\eta)$ übertroffen wird, so gilt für die im Beweise des Hilfssatzes 12 für $|t| \leq d$ ⁵⁶⁾ konstruierte und auf die dort angegebene Weise für $|d| \leq |t| \leq \pi$ fortgesetzte Funktion $Q(t)$:

1. Zu jedem $\omega > 0$ gibt es ein nur von ω, d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängiges $\delta_1 = \delta_1(\omega; d, \delta(\eta)) \leq d$, so daß $|Q(t)| \leq \omega$ für $|t| \leq \delta_1$ ist.

2. Es gibt eine nur von d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstante $k = k(d, \delta(\eta))$, so daß für alle reellen t

$$|Q(t)| \leq \text{Max}_{|t| \leq d} |Q(t)| \leq k$$

ist.

3. Zu jedem $S > 0$ gibt es ein gleichfalls nur von S, d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängiges $\delta_2 = \delta_2(S; d, \delta(\eta))$, so daß

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leq \frac{1}{S} \quad \text{für } 0 < |t| \leq \delta_2$$

ist.

4. Es gibt eine nur von d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstante $K = K(d, \delta(\eta))$, so daß für alle reellen t

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq K(d, \delta(\eta))$$

ist.

⁵⁵⁾ Dieser Satz hängt eng mit dem bekannten Reihensatze zusammen, daß es zu jeder Reihe mit positiven Gliedern eine „schwächer“ konvergierende Reihe gibt, und wir werden auch von diesem Satze beim Beweise unseres Satzes Gebrauch machen. Jedoch würde die jenem Satze in unserem Falle entsprechende Aussage etwa dahin

lauten, daß es eine Funktion $V(t) = \int_0^t Q(\sigma) d\sigma$ mit der Eigenschaft (8, 1) gibt, für

die das Integral $\int_0^t \frac{dV(t)}{t} = \int_0^t \frac{Q(t)}{t} dt$ auch noch konvergiert. Unser Satz behauptet

darüber hinaus noch die gleichmäßige Beschränktheit des Integrals (8, 2), eine Behauptung, die wesentlich weiter geht als jene.

⁵⁶⁾ Es ist also d die im Hilfssatz 12 mit δ bezeichnete Größe.

53. Vorbemerkungen. 1. Offenbar darf $Q(t)$ mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden. Wir wollen im folgenden (bei der Anwendung dieses Hilfssatzes) uns $Q(t)$ stets so normiert denken, daß $|Q(t)| \leq \frac{\pi}{8}$ ist. Genügt $X(t)$ den Voraussetzungen des Zusatzes und ist k die im Zusatz unter 2. genannte Konstante, so soll im folgenden unter $Q(t)$ stets diejenige Funktion verstanden sein, die aus der im Hilfssatz konstruierten Funktion durch Multiplikation mit $\frac{\pi}{8k}$ hervorgeht, so daß also $|Q(t)| \leq \frac{\pi}{8}$ ist.

2. Offenbar darf die Funktion $Q(t)$ als eine *ungerade* Funktion vorausgesetzt werden: $Q(t) = -Q(-t)$. Denn man braucht ja nur an Stelle von $Q(t)$ die Funktion $\bar{Q}(t) = Q(t) - Q(-t)$ zu wählen. Auch $|\bar{Q}(t)|$ darf immer $\leq \frac{\pi}{8}$ vorausgesetzt werden. —

Beweis des Hilfssatzes 12. Wir führen den Beweis in zwei Schritten: Der erste Schritt besteht darin, daß wir unter Zuhilfenahme des konver-

genten Integrals $\int_0^{\pm a} \frac{dX(t)}{t}$, $a > 0$, eine für $|t| \leq \delta$ stetige Funktion $q(t)$ konstruieren, die für $t > 0$ positiv, für $t < 0$ negativ ist, im Nullpunkt verschwindet und für die

$$(8,3) \quad |X(t)| = \left| \int_0^t dX(t) \right| \leq \left| \int_0^t |q(\sigma)| d\sigma \right| \quad \text{für jedes } |t| \leq \delta$$

gilt.

Der zweite Schritt besteht darin, aus $q(t)$ die in dem Satze genannte Funktion $Q(t)$ zu bilden.

54. Es sei zunächst $0 < t \leq \delta$. Wir markieren in dem Intervall $0 \dots \delta$ die Punkte $t_\nu = \frac{\delta}{2^\nu}$ ($\nu = 0, 1, \dots$) und schreiben

$$\int_0^\delta \frac{dX(t)}{t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t} \geq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{\delta} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} dX(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu,$$

wo a_ν den Mittelwert $\frac{1}{t_\nu - t_{\nu+1}} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} dX(t)$ bezeichnet. Die durch

$$q_1(t) = \begin{cases} a_0 & \text{für } t_1 \leq t \leq t_0 \\ a_\nu & \text{„ } t_{\nu+1} \leq t < t_\nu \\ 0 & \text{„ } t = 0 \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

definierte „Treppenfunktion“ $q_1(t)$ ist im Nullpunkte stetig, und es existiert

das Integral

$$\int_0^t \frac{q_1(t)}{t} dt \leq \int_0^\delta \frac{q_1(t)}{t} dt = \lg 2 \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu$$

für jedes t mit $0 < t \leq \delta$.

Die Funktion $q_1(t)$ ändern wir noch etwas ab, indem wir sie stellenweise noch vergrößern. Wir setzen

$$\begin{aligned} q_2(t) &= 1 + a_0 && = q_0 \quad \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_0 = \delta, \\ q_2(t) &= \frac{1}{2^\nu} + a_\nu + 2a_{\nu-1} = q_\nu, \quad n \quad t_{\nu+1} \leq t < t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \\ q_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Auch das Integral $\int_0^t \frac{q_2(t)}{t} dt$ existiert, da für $t \leq t_n$, $n \geq 1$

$$\int_0^t \frac{q_2(t)}{t} dt \leq \int_0^{t_n} \frac{q_2(t)}{t} dt = \lg 2 \sum_{\nu=n}^\infty q_\nu$$

und wegen der Definition der a_ν und wegen $\frac{1}{2}t_\nu = t_\nu - t_{\nu+1}$:

$$\begin{aligned} (8,4) \quad \sum_{\nu=n}^\infty q_\nu &\leq 3 \sum_{\nu=n-1}^\infty a_\nu + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 \sum_{\nu=n-1}^\infty \frac{t_\nu}{t_\nu - t_{\nu+1}} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t_\nu} + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 3 \sum_{\nu=n-1}^\infty 2 \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}} = 6 \int_0^{t_{n-1}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

ist. Für $n = 0$ gilt wegen

$$q_0 = 1 + a_0 \leq 1 + \frac{t_0}{t_0 - t_1} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dX(t)}{t} \leq 1 + 2 \int_0^\delta \frac{dX(t)}{t}$$

$$(8,4^*) \quad \sum_{\nu=0}^\infty q_\nu \leq 6 \int_0^\delta \frac{dX(t)}{t} + 1.$$

55. Analog können wir für $t < 0$ eine ähnliche Funktion $q_2(t)$ konstruieren, die bis auf Sprungstellen in $t = -t_\nu = -\frac{\delta}{2^\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) konstant ist, die durchweg negativ ist und für die das Integral $\int_0^t \frac{q_2(\sigma)}{\sigma} d\sigma$

für jedes t mit $-\delta \leq t < 0$ existiert. Es genügt zu diesem Zwecke offenbar, die obigen Überlegungen auf die Funktion $X(-t)$ für $t > 0$ an-

zuwenden und dann in der resultierenden Funktion das Vorzeichen umzukehren. Es sei dann etwa

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \bar{q}_0 \quad \text{für} \quad -t_0 \leq t \leq -t_1, \\ q_2(t) &= \bar{q}_v \quad \text{„} \quad -t_v < t \leq -t_{v+1}, \\ q_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

so daß also die Reihe $\sum \bar{q}_v$ absolut konvergiert (weil alle \bar{q}_v negativ sind).

56. Wir bemerken weiter, daß für jedes t mit $|t| \leq \delta$

$$(8,5) \quad \left| \int_0^t dX(t) \right| \leq \left| \int_0^t q_2(\sigma) d\sigma \right|$$

ist. Es genügt aus Symmetriegründen, dies für $t > 0$ zu beweisen. Es sei $t_{n+1} \leq t < t_n$. Dann ist

$$\int_0^t dX(t) \leq \int_0^{t_n} dX(t) = \sum_{v=n}^{\infty} \int_{t_{v+1}}^{t_v} dX(t) = \sum_{v=n}^{\infty} a_v \frac{\delta}{2^{v+1}}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_0^t q_2(t) dt &\geq \int_0^{t_{n+1}} q_2(t) dt = \sum_{v=n+1}^{\infty} \int_{t_{v+1}}^{t_v} q_2(t) dt = \sum_{v=n+1}^{\infty} q_v \frac{\delta}{2^{v+1}} \geq \sum_{v=n+1}^{\infty} (a_v + 2a_{v-1}) \frac{\delta}{2^{v+1}} \\ &= \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \frac{\delta}{2^{v+1}} + \sum_{v=n+1}^{\infty} a_{v-1} \frac{\delta}{2^v} = \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \frac{\delta}{2^{v+1}} + \sum_{\mu=n}^{\infty} a_{\mu} \frac{\delta}{2^{\mu+1}} \end{aligned}$$

Da $\sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \frac{\delta}{2^{v+1}} \geq 0$ ist, so folgt hieraus die Behauptung.

57. Wir machen nun aus der Funktion $q_2(t)$ eine stetige Funktion, indem wir sie in der Umgebung der Sprungstellen $\pm t_v$ etwas abändern, und zwar auf die folgende Weise: Ist (zunächst $t > 0$ vorausgesetzt) $q_v > q_{v+1}$, so verbinden wir den Punkt $P_v(t_{v+1}, q_v)$ mit dem Punkte $M_v\left(\frac{t_{v+1} + t_v}{2}, 0\right)$ durch eine Strecke, welche die Gerade im Abstände q_{v+1} parallel zur t -Achse in S_{v+1} schneiden möge. Dann ersetzen wir das horizontale Stück der Kurve $y = q_2(t)$ von S_{v+1} bis (t_{v+1}, q_{v+1}) durch $\overline{S_{v+1}P_v}$ (s. Fig. 14). Ist dagegen $q_v < q_{v+1}$ (in der Fig. 14 z. B. q_{v-1}, q_v), so verbinden wir den Punkt $P_v(t_{v+1}, q_{v+1})$ mit dem Punkte $\left(\frac{t_{v+1} + t_v}{2}, 0\right)$ durch eine Strecke, die dann die Gerade im Abstände q_v parallel zur t -Achse in S'_v schneiden möge. Wir ersetzen nun das Stück der Kurve $y = q_2(t)$ von

S'_r bis (t_{r+1}, q_r) durch $\overline{S'_r P_r}$. Ist $q_r = q_{r+1}$, so nehmen wir keine Änderung am Streckenzug an der Stelle t_r vor. Der so entstehende Polygonzug definiert für $t > 0$ eine stetige „stückweise“ differenzierbare Funktion, die in den Ecken des Streckenzuges rechtsseitige und linksseitige Ableitungen besitzt, und deren Ableitung in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \delta)$, das 0 nicht enthält, nur endlich vieler Werte fähig ist. Hieraus folgt, daß diese Funktion in jedem derartigen abgeschlossenen Teilintervall beschränkte Differenzenquotienten hat. — Für negative t ist die Konstruktion ganz analog. Diese neue, für positive und negative Werte von t definierte stetige Funktion sei mit $q(t)$ bezeichnet. Auch für $q(t)$ existiert

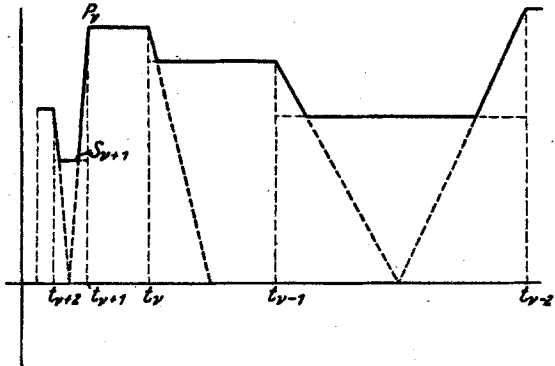


Fig. 14.

$\int_0^t \left| \frac{q(t)}{t} \right| dt$, da die Änderung, die dieses Integral gegenüber $\int_0^t \left| \frac{q_n(t)}{t} \right| dt$ erfährt, absolut den Wert

$$2 \lg 2 \sum_{r=0}^{\infty} |q_{r+1} - q_r| \quad \text{bzw.} \quad 2 \lg 2 \sum_{r=0}^{\infty} |\bar{q}_{r+1} - \bar{q}_r|$$

nicht übersteigt. Ferner gilt offenbar wegen $|q(t)| \geq |q_n(t)|$ nach (8, 5)

$$(8, 3) \quad \left| \int_0^t |q(\sigma)| d\sigma \right| \geq \left| \int_0^t dX(t) \right|.$$

58. Zu der Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} q_r$ konstruieren wir nun eine „schwächer“ konvergierende Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} Q'_r$, $Q'_r > 0$, so daß also

$$\frac{\sum_{r=n}^{\infty} Q'_r}{\sum_{r=n}^{\infty} q_r} \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt, indem wir etwa (auf die von Hadamard angegebene Weise)

$\sum_{r=n}^{\infty} q_r = r_n$ setzen und Q'_r durch $Q'_r = \sqrt{r_r} - \sqrt{r_{r+1}}$ definieren. Analog verfahren wir mit $\sum(-\bar{q}_r)$; die entsprechende Reihe sei $\sum(-\bar{Q}'_r)$, $\bar{Q}'_r < 0$. Wir definieren dann eine neue Funktion

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) &= Q'_0 = Q_0 && \text{für } t_1 \leq t \leq t_0, \\
 Q_1(t) &= Q'_\nu + Q'_{\nu+1} + Q'_{\nu-1} = Q_\nu && \text{„ } t_{\nu+1} \leq t < t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \\
 Q_1(0) &= 0, \\
 Q_1(t) &= \bar{Q}'_0 = \bar{Q}_0 && \text{„ } -t_1 \geq t \geq -t_0, \\
 Q_1(t) &= \bar{Q}'_\nu + \bar{Q}'_{\nu+1} + \bar{Q}'_{\nu-1} = \bar{Q}_\nu && \text{„ } -t_{\nu+1} \geq t > -t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

und machen dann $Q_1(t)$ auf genau dieselbe Weise stetig wie $q_2(t)$. Die so entstandene stetige („stückweise“ differenzierbare) Funktion ist nun die in der Formulierung des Satzes mit $Q(t)$ bezeichnete Funktion. Alle Derivierten von $Q(t)$ sind in jedem Intervall $0 < \delta_1 \leq |t| \leq \delta$ nur endlich vieler Werte fähig. Ferner ist für $|t| < |t_{n+1}|$

$$(8,6) \quad |Q(t)| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|), \text{ und dies ist } \leq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} (Q'_\nu + |\bar{Q}'_\nu|) \text{ für } n \geq 1.$$

Hieraus erhält man insbesondere die obere Schranke $\sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|)$ für $|Q(t)|$ für $|t| \leq \frac{\delta}{2}$. Beachtet man aber, daß für $\frac{\delta}{2} \leq |t| \leq \delta$ sicher $|Q(t)| \leq Q_0 + |\bar{Q}_0| + Q_1 + |\bar{Q}_1|$ ist, so erkennt man, daß

$$(8,7) \quad |Q(t)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|) \text{ für alle } |t| \leq \delta$$

gilt. — Es wird bei den späteren Betrachtungen nützlich sein, sich vor Augen zu halten, daß die zur Funktion $-q(-t)$, die ja gleichfalls vom Typus $q(t)$ ist, nach unserem Verfahren konstruierte Funktion gerade $-Q(-t)$ ist. Schließlich bemerken wir noch, daß wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q'_\nu$ das Integral

$$\int_0^t \frac{Q(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

für $|t| \leq \delta$ konvergiert. Für später sei bemerkt:

$$\int_0^{\delta/2} \frac{Q(\sigma)}{\sigma} d\sigma \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (Q_{\nu-1} + Q_\nu + Q_{\nu+1}) \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dt}{t} \leq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu$$

und daher, da Analoges für $\int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(-\sigma)}{-\sigma} \right| d\sigma$ gilt,

$$(8,7^*) \quad \int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(\sigma) - Q(-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \int_0^{\delta/2} (\left| \frac{Q(\sigma)}{\sigma} \right| + \left| \frac{Q(-\sigma)}{\sigma} \right|) d\sigma \leq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|).$$

Wegen (8,3) folgt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung etwa für $t > 0$ (für $t_{n+1} \leqq t < t_n$)

$$(8,8) \quad \frac{X(t)}{V(t)} = \frac{\int_0^t dX(\sigma)}{\int_0^t Q(\sigma) d\sigma} \leqq \frac{\int_0^t q(\sigma) d\sigma}{\int_0^t Q(\sigma) d\sigma} = \frac{q(\vartheta t)}{Q(\vartheta t)} \quad (0 < \vartheta < 1),$$

und dies ist weiter (da für $t_{\lambda+1} \leqq t < t_\lambda$ $q(t) \leqq \text{Max}(q_{\lambda-1}, q_\lambda, q_{\lambda+1})$, $Q(t) \geqq Q'_{\lambda+1}, Q'_\lambda, Q'_{\lambda-1}$ ist)

$$\leqq \frac{q_\mu}{Q'_\mu} = \frac{r_\mu - r_{\mu+1}}{\sqrt{r_\mu} - \sqrt{r_{\mu+1}}} = \sqrt{r_\mu} + \sqrt{r_{\mu+1}} \quad (\mu \geqq n - 1).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Eigenschaft 1.

59. Wir weisen nunmehr die Eigenschaft 2 für die Funktion $Q(t)$ nach. Wir setzen $Q(t)$ für $-\pi \leqq t < -\delta$ und $\delta < t \leqq \pi$ fort, indem wir etwa $Q(-\pi) = Q(\pi) = 0$ setzen und

$$Q(t) = \begin{cases} -(t - \delta) \frac{Q(\delta)}{\pi - \delta} + Q(\delta) & \text{für } \delta \leqq t \leqq \pi \\ -(t + \delta) \frac{Q(-\delta)}{-\pi + \delta} + Q(-\delta) & \text{für } -\delta \geqq t \geqq -\pi \end{cases}$$

definieren. Das graphische Bild von $Q(t)$ in diesem Intervall ist dann einfach die die Punkte $(\delta, Q(\delta))$ und $(\pi, Q(\pi) = 0)$ bzw. $(-\delta, Q(-\delta))$ und $(-\pi, Q(-\pi))$ verbindende Gerade. Ferner setzen wir $Q(t + 2\pi) = Q(t)$. Dann ist $Q(t)$ offenbar für alle t stetig und periodisch mit der Periode 2π , und die Relation (8,7) bleibt offenbar für alle t noch richtig. Für das Folgende sei noch bemerkt, daß für alle t $|Q(t)| \leqq \text{Max}_{t \leqq \delta} |Q(t)|$ und für $\frac{\delta}{2} \leqq |t| \leqq \pi$ der Differenzenquotient

$$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| \leqq \frac{\text{Max}_{-\pi \leqq t \leqq \pi} |Q(t)|}{\frac{\delta}{8}}$$

ist. — Nun existiert das Integral

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$$

für jedes feste t . Dies folgt sofort aus der Existenz der Integrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \left| \frac{Q(t-\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma$$

für jedes feste t mit $-\pi \leqq t \leqq \pi$. Die Existenz dieser beiden Integrale aber kann man so einsehen: Ist $t = 0$, so haben wir sie am Schluß von

Nr. 58 bewiesen. Ist t ein von 0 verschiedener Punkt, so beachte man, daß der Integrand für feste von 0 verschiedene t eine für alle σ bis auf eventuell $\sigma = 0$ stetige und gleichmäßig beschränkte Funktion ist. (Man beachte das über die Derivierten in Nr. 58 Gesagte und die Definition von $Q(t)$ in $-\pi \leq t \leq -\delta$, $\delta \leq t \leq \pi$.)

60. Wir behaupten nun, daß *das Integral (8, 2) gleichmäßig für alle reellen t beschränkt bleibt*. Es genügt, die Behauptung für $-\pi \leq t \leq \pi$ zu beweisen. Wir weisen dies zunächst für $-\frac{\delta}{2} \leq t \leq \frac{\delta}{2}$ nach. Da das Integral

$$\int_{\delta/2}^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{2}{\delta} \cdot (\pi - \frac{\delta}{2}) \cdot 2M$$

gleichmäßig für alle t bleibt, wo $|Q(t)| \leq M$ vorausgesetzt ist, so genügt es

$$\int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma, \quad -\frac{\delta}{2} \leq t \leq \frac{\delta}{2}$$

abzuschätzen. Nach dem oben über $Q(t)$ und $-Q(-t)$ Bemerkten (Nr. 58) genügt es, diese Behauptung nur für positive t , $0 < t \leq \frac{\delta}{2}$, zu beweisen. Es sei also $0 < t \leq \frac{\delta}{2}$. Dann ist

$$(8, 9) \int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma = \int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_t^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma.$$

Wir schätzen zuerst den ersten Summanden der rechten Seite dieser Gleichung ab:

$$(8, 10) \int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_0^t \left| \frac{Q(t-\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma.$$

Es gibt ein n , so daß $t_{n+1} \leq t < t_n$ ist. Dann ergibt sich für den Integranden des ersten der beiden Integrale auf der rechten Seite von (8, 10), wenn $|Q(t)| \leq M$ ist, für alle σ mit $0 < \sigma \leq t$

$$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| \leq \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{2^{n+1}}} = 2^{n+2} \frac{M}{\delta}.$$

Denn die Steigung der vom Punkte $(t, Q(t))$ nach dem Punkte $((t+\sigma), Q(t+\sigma))$ gezogenen Sehne der Kurve $y = Q(t)$ kann, wie man sich leicht überlegt, den Wert $\frac{M}{\frac{1}{2}(t_n - t_{n+1})} = \frac{M}{\frac{1}{2} \frac{\delta}{2^{n+1}}} = \frac{M}{\left(\frac{\delta}{2^{n+2}}\right)}$ nicht über-

schreiten⁵⁷⁾. Daher ist

$$\int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{\delta}{2^n} \cdot \frac{2^{n+2}}{\delta} \cdot M = 4M.$$

Ferner erkennt man, daß auch

$$\int_0^t \left| \frac{Q(t-\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{M \cdot |t|}{\frac{1}{2}(t_{n+1} - t_{n+2})} = \frac{M}{\frac{1}{2} \frac{\delta}{2^{n+2}}} \cdot \frac{\delta}{2^n} = 8M$$

ist, so daß

$$(8, 11) \quad \int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq 12M$$

ist.

61. Jetzt schätzen wir den *zweiten* Summanden auf der rechten Seite von (8, 9) ab. Zu diesem Zwecke schreiben wir, falls $t_{n+1} \leq t < t_n$ ist, für $n \geq 3$

$$(8, 12) \quad \int_t^{\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma = \int_t^{t+\frac{\delta}{2^{n-1}}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \\ + \sum_{\nu=2}^{n-2} \int_{t+\frac{\delta}{2^{n-\nu+1}}}^{t+\frac{\delta}{2^{n-\nu}}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_{t+\frac{\delta}{2^2}}^{\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma.$$

Ist $n \leq 2$, so zerlegen wir das Integral links überhaupt nicht.

Es sei zunächst $n \geq 3$. Für den ersten der in dieser Gleichung rechts stehenden Summanden erhalten wir sofort (wegen $\sigma \geq t \geq \frac{\delta}{2^{n+1}}$) die Abschätzung

$$\int_t^{t+\frac{\delta}{2^{n-1}}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{\delta}{2^{n-1}} \cdot \frac{2M}{\left(\frac{\delta}{2^{n+1}}\right)} = 2^3 M = 8M.$$

⁵⁷⁾ Dies kann man sich geometrisch an Hand der Figur leicht überlegen. Man kann dies aber auch aus einem allgemeinen Satze von Scheefer folgern, der besagt, daß sämtliche Differenzenquotienten einer in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion zwischen der unteren und oberen Grenze sämtlicher Derivierten dieser Funktion in diesem Intervall liegen. Man hat nur diesen Satz auf $Q(t)$ in $\langle t_{n+1}, \delta \rangle$ anzuwenden.

Für den letzten dieser Summanden ergibt sich ähnlich:

$$\int_{t+\frac{\delta}{4}}^{t+\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{\delta}{4} \cdot \frac{2M}{\frac{\delta}{4}} = 2M.$$

Die übrigbleibenden Summanden schätzen wir folgendermaßen ab: Setzen wir $\sigma_\nu = t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n-2$) und tragen wir auf der t -Achse des Diagramms von $Q(t)$ die Punkte $-y_\nu = t - \sigma_\nu = -\frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ und $\bar{y}_\nu = t + \sigma_\nu = 2t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ ab, so fallen die Punkte $-y_\nu$ mit den Punkten $-t_{n-1}, -t_{n-2}, \dots, -t_2$ zusammen; von den Punkten \bar{y}_ν dagegen, die rechts von t liegen, fällt keiner mit einem der $t_\mu = \frac{\delta}{2^\mu}$ zusammen, sondern es liegt in jedem offenen Intervall $(t_\mu, t_{\mu-1})$ für $2 \leq \mu \leq n-1$ genau ein Punkt y_ν , und zwar liegt der Punkt \bar{y}_ν in dem Intervall $(t_{n-\nu}, t_{n-\nu-1})$. Denn es ist ja

$$\frac{\delta}{2^n} = 2t_{n+1} \leq 2t < 2t_n = \frac{2\delta}{2^n} = \frac{\delta}{2^{n-1}}$$

und daher

$$\frac{\delta}{2^{n-\nu}} < \bar{y}_\nu = 2t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}} < \frac{\delta}{2^{n-\nu-1}}.$$

Liegt σ in $(\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1})$, so liegt $t + \sigma$ in $(\bar{y}_\nu, \bar{y}_{\nu+1})$ und $(t - \sigma)$ in $(-y_{\nu+1}, -y_\nu)$. Da ferner in jedem der abzuschätzenden Integrale der Nenner des Integranden nicht kleiner als die Integrationsstrecke ist, ist daher

$$\int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{\text{Max}_{\bar{y}_\nu \leq y \leq \bar{y}_{\nu+1}} |Q(y)| + \text{Max}_{-y_{\nu+1} \leq y \leq -y_\nu} |Q(y)|}{(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu)} (\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu).$$

62. Um die genannten Integrale abzuschätzen, haben wir nun einfach die Summe der rechts stehenden Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \left(\text{Max}_{\bar{y}_\nu \leq y \leq \bar{y}_{\nu+1}} |Q(y)| + \text{Max}_{-y_{\nu+1} \leq y \leq -y_\nu} |Q(y)| \right)$$

abzuschätzen. Da auf der negativen t -Achse die Endpunkte eines Intervalles $-y_{\nu+1}, -y_\nu$ mit den Punkten $-t_{\nu+1}, -t_\nu$ zusammenfallen, kommen in dem festen Integrationsintervall $(\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1})$ nur drei aufeinanderfolgende $|\bar{Q}_\mu|$ -Werte der oben konstruierten Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{Q}_\mu$ (die ja den wesentlichen Bestandteil der Funktion $Q(t)$ ausmachen) als ein solches Maximum in $(-y_{\nu+1}, -y_\nu)$ in Frage. Es ist daher dieses Maximum $\leq |\bar{Q}_{\nu-1}| + |\bar{Q}_\nu| + |\bar{Q}_{\nu+1}|$.

Mithin ist

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \text{Max}_{-\bar{y}_{\nu+1} \leq y \leq -\bar{y}_{\nu}} |Q(y)| \leq \sum_{\nu=1}^{n-3} (|\bar{Q}_{\nu-1}| + |\bar{Q}_{\nu}| + |\bar{Q}_{\nu+1}|) \leq 3 \sum_{\nu=0}^n |\bar{Q}_{\nu}|.$$

Jedes Intervall $\langle \bar{y}_{\nu}, \bar{y}_{\nu+1} \rangle$ enthält den Teilpunkt $t_{n-\nu-1}$ im Innern und ist in der Vereinigungsmenge der in $t_{n-\nu-1}$ anstoßenden Intervalle enthalten. Daher ist das gesamte

$$\text{Max}_{\bar{y}_{\nu} \leq y \leq \bar{y}_{\nu+1}} |Q(y)| \leq (Q_{n-\nu} + Q_{n-\nu-1} + Q_{n-\nu-2} + Q_{n-\nu-3}),$$

somit ist die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \text{Max}_{\bar{y}_{\nu} \leq y \leq \bar{y}_{\nu+1}} |Q(y)| \leq \sum_{\nu=0}^{n-3} (Q_{n-\nu} + Q_{n-\nu-1} + Q_{n-\nu-2} + Q_{n-\nu-3}) \leq 4 \sum_{\nu=0}^n Q_{\nu}.$$

Wir haben also für das abzuschätzende Integral (8,12), falls $n \geq 3$ ist,

$$(8,13) \quad \int_t^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq 10M + 3 \sum_{\nu=0}^n |\bar{Q}_{\nu}| + 4 \sum_{\nu=0}^n Q_{\nu} \\ < 10M + 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{Q}_{\nu}| + 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{\nu}.$$

Für $n \leq 2$, d. h. $\frac{\delta}{8} \leq t \leq \frac{\delta}{2}$, gilt offenbar

$$\int_t^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \left(\frac{\delta}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\delta}{8}\right)} \cdot 2M \leq 6M,$$

so daß also die Abschätzung (8,13) in jedem Falle richtig ist.

Da nun die in (8,13) rechts stehende Reihe unabhängig von der Stelle t ist, folgt hieraus in Verbindung mit (8,11) die Behauptung für t in $0 < t \leq \frac{\delta}{2}$. Damit erkennt man dann (vgl. (8,7*) und Nr. 60) die Richtigkeit der Behauptung für $-\frac{\delta}{2} \leq t \leq \frac{\delta}{2}$. Da schließlich bei unserer Definition von $Q(t)$ für alle t mit $\frac{\delta}{2} \leq |t| \leq \pi$ der Quotient

$$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| \leq \frac{\text{Max}_t |Q(t)|}{\frac{\delta}{8}}$$

(siehe Nr. 59) bleibt, ist in der Tat das Integral (8,2) gleichmäßig für $-\pi \leq t \leq \pi$ beschränkt. Insbesondere ergibt sich, da man $M \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_{\nu} + |\bar{Q}_{\nu}|)$ (vgl. (8,7)) annehmen kann, nach der Abschätzung (8,11), (8,13) und (8,7*)

$$(8,14) \quad \int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq 26 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_{\nu} + |\bar{Q}_{\nu}|), \quad |t| \leq \frac{\delta}{2}.$$

63. Beweis des Zusatzes. Nach (8,4) gilt für $n \geq 1$

$$r_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} q_{\nu} \leq 6 \int_0^{\frac{d}{2^{n-1}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \bar{r}_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} |\bar{q}_{\nu}| \leq \left| 6 \int_0^{\frac{d}{2^{n-1}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{1}{2^{n-1}},$$

und nach (8,4*)

$$(8,15) \quad r_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\nu} \leq 6 \int_0^d \frac{dX(t)}{t} + 1, \quad \bar{r}_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{q}_{\nu}| \leq \left| 6 \int_0^d \frac{dX(t)}{t} \right| + 1.$$

Daher ist wegen ($n \geq 2$)

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} Q_{\nu} \leq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} Q'_{\nu} = 3\sqrt{r_{n-1}} \leq \sqrt{54 \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{9}{2^{n-2}}},$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |\bar{Q}_{\nu}| \leq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} |\bar{Q}'_{\nu}| = 3\sqrt{\bar{r}_{n-1}} \leq \sqrt{54 \left| \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{9}{2^{n-2}}}$$

für $|t| \leq \frac{d}{2^{n+1}}$ für $n \geq 2$ nach (8,6)

$$|Q(t)| \leq \sqrt{54 \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-6}}} + \sqrt{54 \left| \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{1}{2^{n-6}}}.$$

Nun ist aber auch für alle $|t| \leq d$ (s. (8,7))

$$|Q(t)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_{\nu} + |\bar{Q}_{\nu}|) \leq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q'_{\nu} + |\bar{Q}'_{\nu}|),$$

und daher ist wegen (8,15)

$$(8,16) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_{\nu} + |\bar{Q}_{\nu}|) \leq \sqrt{54 \int_0^d \frac{dX}{t} + 2^6} + \sqrt{54 \left| \int_0^d \frac{dX}{t} \right| + 2^6},$$

$$(8,17) \quad |Q(t)| \leq \sqrt{54 \int_0^d \frac{dX}{t} + 2^6} + \sqrt{54 \left| \int_0^d \frac{dX}{t} \right| + 2^6},$$

$$|t| \leq d.$$

1. Ist $\omega > 0$ vorgegeben, so bestimme man zunächst ein n_0 so, daß

$$\frac{1}{2^{n-6}} \leq \frac{\omega^2}{8} \quad \text{und} \quad \frac{d}{2^{n-8}} \leq \delta \left(\frac{\omega^2}{8 \cdot 54} \right) \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \geq 2$$

ist. Dann ist für $|t| \leq \delta_1 = \frac{d}{2^{n_0+1}}$, wo n_0 nur von ω , d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt,

$$|Q(t)| \leq \omega.$$

2. Da d so gewählt ist, daß es ein $\eta = \eta_0 > 0$ gibt, so daß $\delta(\eta_0) > d$ ist, ist nach (8,17)

$$|Q(t)| \leq 2\sqrt{54\eta_0 + 2^6} = k = k(d, \delta(\eta))$$

und daher für alle reellen t

$$(8,18) \quad |Q(t)| = \text{Max}_{|t| \leq d} |Q(t)| \leq k.$$

3. Aus der Abschätzung (8,8) ergibt sich für $0 < t < t_n$

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leq \sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n-1}}.$$

und Analoges gilt auch für negatives t . Ist $S > 0$ vorgegeben, so bestimme man ein n_1 , so daß

$$\frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(2S)^2}, \quad \frac{d}{2^{n-2}} \leq \delta\left(\frac{1}{6 \cdot 2 \cdot (2S)^2}\right) \quad \text{für alle } n \geq n_1$$

ist. Dann ist für alle t mit $0 < |t| \leq \frac{d}{2^{n_1}} = \delta_2(S; d, \delta(\eta))$

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leq \frac{1}{S}.$$

4. Ist (wie in 2.) $\delta(\eta_0) > d, \eta_0 > 0$, so ist wegen (8,16)

$$\sum_{v=0}^{\infty} (Q_v + |\bar{Q}_v|) \leq 2\sqrt{54\eta_0 + 2^6} = k,$$

wo k nur von d und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt. Nach (8,14) ist daher für

$$|t| \leq \frac{d}{2}$$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leq 26k.$$

Das Integral

$$\int_{\frac{d}{2}}^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma, \quad -\frac{d}{2} \leq t \leq \frac{d}{2},$$

ist offenbar (wegen (8,18))

$$\leq \left(\pi - \frac{d}{2}\right) \frac{2}{d} \cdot 2k \leq \frac{4\pi}{d} k.$$

Um weiter das Integral $\int_0^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$ für alle t in $\frac{d}{2} \leq |t| \leq \pi$

abzuschätzen, beachte man, daß (Nr. 59) für diese t der Differenzenquotient

$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| \leq \frac{\text{Max}_t |Q(t)|}{\frac{d}{8}}$ ist. Hieraus folgt dann, daß dieses

Integral (wegen (8, 18))

$$\leq \frac{8\pi k}{d}$$

ist, und somit ergibt sich in Verbindung mit dem Obigen die Behauptung 4 des Zusatzes. —

64. Für unsere späteren Betrachtungen ist es nützlich, den folgenden von Lindelöf⁶⁸⁾ herrührenden Satz hervorzuheben:

Ist $w = \Phi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und bildet $\Phi(z)$ die Peripherie dieses Kreises auf eine geschlossene Jordankurve ab, die längs eines Bogens c eine sich stetig drehende Tangente hat, so existiert in jedem Punkte des entsprechenden Bogens $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ der Peripherie

$$\lim_{\vartheta' \rightarrow \vartheta} \operatorname{arc} \frac{\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}} = A_\Phi(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \uparrow 1} \operatorname{arc} \Phi'(r e^{i\vartheta}),$$

und es ist $A_\Phi(e^{i\vartheta})$ längs dieses Bogens eine stetige Funktion von ϑ .

Hieraus ergibt sich für den Winkel $\theta = \theta(\vartheta)$, den die im mathematisch positiven Durchlaufungssinne von C gerichtete Tangente im Punkte $\Phi(e^{i\vartheta})$ mit der positiven reellen Achse bildet (bei geeigneter Normierung der Winkel $\bmod 2\pi$) wegen

$$\theta(\vartheta) = \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \operatorname{arc} (\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})) = \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \operatorname{arc} \frac{\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}} + \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \operatorname{arc} (e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}),$$

$$(8, 19) \quad \theta(\vartheta) = A_\Phi(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

65. Hilfssatz 13. *Es sei $w = \Phi(z)$ in $|z| < 1$ regulär, in $|z| \leq 1$ stetig und es möge $\Phi'(z)$ in $|z| < 1$ nach unten beschränkt sein, d. h. es möge ein $N > 0$ existieren, so daß*

$$|\Phi'(z)| \geq N > 0$$

ist. Ferner besitze die in $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion $\operatorname{arc} \Phi'(z)$ auf $|z| = 1$ stetige Randwerte $A_\Phi(z)$, und es gelte insbesondere für einen Punkt $z = z_1$ von $|z| = 1$

$$(8, 20) \quad |\operatorname{arc} \Phi'(z) - A_\Phi(z_1)| \leq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \text{für } |z - z_1| \leq \delta(\varepsilon), \quad |z| < 1.$$

Dann ist für alle z', z'' mit $|z' - z_1| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z'' - z_1| \leq \delta(\varepsilon)$, $|z'| < 1$, $|z''| < 1$

$$(8, 21) \quad |\Phi(z'') - \Phi(z')| \geq N(1 - \varepsilon)|z'' - z'|,$$

oder, mit anderen Worten: in einer allseitigen Umgebung von $z = z_1$ besitzen alle Differenzenquotienten von $\Phi(z)$ absolut eine positive untere Schranke.

⁶⁸⁾ E. Lindelöf, Comptes rendus du quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves 1916, p. 89 ff.

Das Innere des von dem um $z = z_1$ mit dem Radius $\delta(\varepsilon)$ beschriebenen in $|z| \leq 1$ liegenden Kreisbogen und dem z_1 enthaltenden Peripheriebogen gebildeten Kreisbogenzweiecks Z wird durch $w = \Phi(z)$ auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve abgebildet.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A_\varphi(z_1) = 0$. Es ist bei geradliniger Integration von z'' nach z' für z'' und z' in der $\delta(\varepsilon)$ -Umgebung von z_1 ($|z''| < 1, |z'| < 1$)

$$\Phi(z'') - \Phi(z') = \int_{z'}^{z''} \Phi'(z) dz = e^{i\alpha} \int_0^l \Phi'(z' + e^{i\alpha} \lambda) d\lambda,$$

wo

$$z = z' + \lambda e^{i\alpha}, \quad 0 \leq \lambda \leq l, \quad z'' = z' + l e^{i\alpha}$$

ist. Nun ist aber

$$|\Phi(z'') - \Phi(z')| = \left| \int_0^l |\Phi'| \cdot e^{i \operatorname{arc} \Phi'} d\lambda \right| \geq \int_0^l |\Phi'| \cos(\operatorname{arc} \Phi') d\lambda,$$

und dies ist wegen $|\operatorname{arc} \Phi'(z)| \leq \varepsilon < 1, |\sin \operatorname{arc} \Phi'(z)| \leq \varepsilon < 1$ und wegen

$$\begin{aligned} \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} &= \sqrt{(1 + |\sin \beta|)(1 - |\sin \beta|)} \geq \sqrt{1 - |\sin \beta|} \geq 1 - |\sin \beta| \\ &\geq \int_0^l |\Phi'| \cdot (1 - \varepsilon) d\lambda \geq Nl(1 - \varepsilon) = N(1 - \varepsilon) |z'' - z'|, \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (8, 21) bewiesen ist.

Um die zweite Behauptung einzusehen, beachte man, daß das Bild des Randes des in der Behauptung genannten Kreisbogenzweiecks Z wegen der Stetigkeit von $\Phi(z)$ in $|z| \leq 1$ und der Ungleichung (8, 21) eine doppelpunktfreie stetige Kurve ist.

66. Schließlich brauchen wir nach dem folgenden potentialtheoretischen

Hilfssatz 14. *Es sei $g(t)$ eine für alle reellen t definierte reelle, integrable und periodische Funktion mit der Periode 2π . Wir bilden die für $|z| = |r e^{i\varphi}| < 1$ reguläre Potentialfunktion*

$$(8, 22) \quad u(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta$$

und die zu ihr konjugierte Potentialfunktion

$$(8, 23) \quad v(r e^{i\varphi}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{2r \sin(\vartheta - \varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta.$$

Gibt es dann für ein $\varphi = \psi$ eine reelle Konstante A derart, daß das Integral

$$(8, 24) \quad \int_0^\pi \left| \frac{g(\psi + \vartheta) + g(\psi - \vartheta) - 2A}{\vartheta^2} \right| d\vartheta$$

konvergiert, so hat die Ableitung $\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}$ an der Stelle $\varphi = \psi$ einen radialen Randwert. Ferner gilt für diesen Randwert

$$(8, 25) \quad h(\psi) = \lim_{r \uparrow 1} \left(\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\psi} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{g(\psi + \vartheta) + g(\psi - \vartheta) - 2A}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta. \text{ 59)}$$

Vorbemerkungen. 1. Da wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$r \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial r} = \frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}$$

ist, liefert dieser Satz auch eine Bedingung für die Existenz von $\lim_{r \uparrow 1} \frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial r}$.

2. Ist $g(t)$ in $t = \psi$ stetig, so ist $A = g(\psi)$. Ist $g(t)$ zweimal stetig differenzierbar, so ist $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\psi + t) + g(\psi - t) - 2g(\psi)}{t^2} = g''(\psi)$. Dies veranschaulicht die Bedeutung des Integranden in (8, 24) in diesem Zusammenhange.

3. Gibt es insbesondere für zwei Konstanten A und B , so daß das Integral

$$\int_0^{\pm\pi} \left| \frac{g(\psi + t) - A - Bt}{t^2} \right| dt$$

konvergiert, so ist offenbar die Voraussetzung des Hilfssatzes 14 erfüllt und also der Hilfssatz anwendbar.

67. Beweis des Hilfssatzes 14. Man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\psi = 0$, $A = 0$ annehmen. Denn sonst setze man $g^*(t) = g(\psi + t) - A$

⁵⁹⁾ Dieser Satz läßt sich dem folgenden Satz von Herrn A. Pleßner (Dissertation, Gießen 1923, S. 2) zur Seite stellen:

Es sei $g(t)$ eine für alle reellen t integrierbare, reelle und periodische Funktion mit der Periode 2π . Ferner möge für ein $t = \psi$ der

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_0^t (g(\psi + t) + g(\psi - t) - 2g(\psi)) dt$$

existieren. Man betrachte die Funktionen (8, 22) und (8, 23). Dann ist notwendig und hinreichend, damit die Funktion $\frac{\partial}{\partial \varphi} v(re^{i\varphi})$ an der Stelle $\varphi = \psi$ einen radialen Randwert besitzt, daß das Integral

$$\int_0^\pi \frac{g(\psi + t) + g(\psi - t) - 2g(\psi)}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt$$

existiert. Ferner gilt für diesen Randwert die Relation (8, 25).

und beachte, daß, wie wir sogleich zeigen werden, ($\Phi = \varphi - \psi$)

$$(8, 26) \quad v(re^{i\varphi}) = v(re^{i\psi} \cdot e^{i(\varphi-\psi)}) \\ = v^*(re^{i\Phi}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^*(\vartheta) \frac{2r \sin(\vartheta - \Phi) d\vartheta}{1+r^2-2r \cos(\vartheta - \Phi)}$$

ist und betrachte $\frac{\partial}{\partial \Phi} v^*(re^{i\Phi})$ an der Stelle $\Phi = 0$. Die Richtigkeit von (8, 26) ergibt sich so: Nach (8, 23) ist

$$v(re^{i\varphi}) = v(re^{i\psi} e^{i(\varphi-\psi)}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{2r \sin(\vartheta - \psi - (\varphi - \psi))}{1+r^2-2r \cos(\vartheta - \psi - (\varphi - \psi))} d\vartheta \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi} g(\vartheta' + \psi) \frac{2r \sin(\vartheta' - (\varphi - \psi))}{1+r^2-2r \cos(\vartheta' - (\varphi - \psi))} d\vartheta'$$

und wegen der Periodizität des Integranden ist daher auch

$$(8, 27) \quad v(re^{i\varphi}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta + \psi) \frac{2r \sin(\vartheta - (\varphi - \psi))}{1+r^2-2r \cos(\vartheta - (\varphi - \psi))} d\vartheta.$$

Da nun ferner

$$(8, 28) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} A \frac{2r \sin(\vartheta - (\varphi - \psi))}{1+r^2-2r \cos(\vartheta - (\varphi - \psi))} d\vartheta = 0$$

ist, so ergibt sich (8, 26), indem man (8, 28) zu (8, 27) addiert.

Wir bilden nun

$$\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi} = -\frac{2r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta) \frac{-(1+r^2-2r \cos(\vartheta - \varphi)) \cos(\vartheta - \varphi) + \sin(\vartheta - \varphi) 2r \sin(\vartheta - \varphi)}{(1+r^2-2r \cos(\vartheta - \varphi))^2} d\vartheta \\ = -\frac{2r}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{2r - (1+r^2) \cos(\vartheta - \varphi)}{(1+r^2-2r \cos(\vartheta - \varphi))^2} d\vartheta,$$

und daher ist

$$\left(\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{(1-r)^2 - (1+r^2)(1 - \cos \vartheta)}{\left((1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2} d\vartheta \\ = \frac{r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta) \frac{(1-r)^2 - 2(1+r^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\left((1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^2} d\vartheta.$$

Da hier der Faktor von $g(\vartheta)$ im Integranden eine gerade Funktion von ϑ ist, so wird schließlich

$$(8, 29) \quad \left(\frac{\partial v(r e^{i\varphi})}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \{g(\vartheta) + g(-\vartheta)\} \frac{(1-r)^2 - 2(1+r^2) \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\left((1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} d\vartheta.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung am schnellsten nach dem Integralsatz von Lebesgue über Konvergenz von Integralfolgen, wenn man beachtet, daß 1. der Integrand in (8, 29) für jedes von 0 verschiedene ϑ mit $r \uparrow 1$ gegen $-\frac{g(\vartheta) + g(-\vartheta)}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$ konvergiert und daß 2. der Integrand für $\frac{1}{2} \leq r < 1$,

$$0 < \vartheta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|g(\vartheta) + g(-\vartheta)|}{\vartheta^2} \left\{ \frac{(1-r)^2 \vartheta^2}{\left((1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} + \frac{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \vartheta^2}{\left((1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} \right\} \\ &\leq \frac{|g(\vartheta) + g(-\vartheta)|}{\vartheta^2} \left\{ \frac{(1-r)^2 \vartheta^2}{\left((1-r)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} + \frac{\vartheta^4}{\left(4 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} \right\} \\ &\leq \frac{|g(\vartheta) + g(-\vartheta)|}{\vartheta^2} \left\{ \frac{\vartheta^2}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{\vartheta^4}{4 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \right\} \end{aligned}$$

und das Integral $\int_0^{\pi} \frac{|g(\vartheta) + g(-\vartheta)|}{\vartheta^2} d\vartheta$ nach Voraussetzung existiert.

§ 9.

Beweis des Hauptsatzes (Satz 7). Zusätze und Ergänzungen.

68. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise des Satzes 7 durchweg annehmen, daß $\tau = 1$ (siehe Vorbemerkung 3), $w_1 = 0$ und die Innennormale von C in w_1 in die Richtung der positiven reellen Achse gelegt ist, so daß insbesondere die Tangente mit der imaginären Achse zusammenfällt. Es ist dann $\xi(t) = |x(t)|$, $\eta(t) = |y(t)|$ (siehe Nr. 47).

Wir erbringen zuerst in den Nrn. 69 bis 82 den Beweis für den ersten Teil des Satzes, daß nämlich in w_1 eine konforme Ecke vorliegt. Hieraus folgt dann die Richtigkeit der zweiten auf die Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ bezüglichen Behauptung leicht in Nr. 83 — im wesentlichen unter Zuhilfenahme des Hilfssatzes 14. Der Beweis des ersten Teiles läuft darauf hinaus, daß wir eine geeignete *innere* und *äußere Vergleichskurve* von C im

Nullpunkt konstruieren und dann den Satz 4 des § 6 anwenden. Durch die Konstruktion der *inneren* Vergleichskurve, die wir in Nr. 69 bis 77 besprechen, beweisen wir die Beschränktheit des allseitig genommenen Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ nach unten, durch die der *äußeren* Vergleichskurve (Nr. 78 bis 82) die nach oben.

69. I. Nachweis der Existenz der konformen Ecke. A. Konstruktion der inneren Vergleichskurve. Es sei $\bar{X}(t)$ irgendeine für $|t| \leq \delta \leq \frac{\pi}{8}$ definierte monotone Majorante von $|x(t)| = \xi(t)$ in der Umgebung des Nullpunktes mit konvergentem Integral $\int_0^\infty \frac{\bar{X}(t)}{t^2} dt$ (z. B. $\bar{X}(t) = \xi^*(t)$). Wir konstruieren dann zu $\bar{X}(t)$ nach dem Hilfssatz 12 eine Funktion $Q(t)$ (und $V(t)$) mit den dort angegebenen Eigenschaften 1 und 2. Wie in der Vorbemerkung 1 zu diesem Hilfssatz gesagt, setzen wir stets $|Q(t)| \leq \frac{\pi}{8}$ voraus. Wir benutzen nun $Q(t)$ dazu, um eine im Einheitskreise $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion $\Phi(\zeta)$ zu bilden, die eine geeignete „Halbumgebung“ des Punktes $\zeta = 1$ ($|\zeta| \leq 1$) auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve \mathfrak{C} abbildet. Diese Kurve \mathfrak{C} wird gerade eine *innere Vergleichskurve* für C in $w = 0$ sein. Und zwar gehen wir folgendermaßen vor: Wir wollen $\Phi(\zeta)$ so bestimmen, daß $\text{arc } \Phi'(\zeta)$ in $|\zeta| \leq 1$ stetig ist. Dann ist $\Phi(\zeta)$ schon bis auf drei reelle Konstanten eindeutig bestimmt, wenn die Randwerte von $\text{arc } \Phi'(\zeta)$ als stetige Funktion von $\text{arc } \zeta$ vorgegeben sind. Dabei wird $Q(t) + \pi = \text{arc } \Phi'(\zeta)$ auf $|\zeta| = 1$ und $t = \text{arc } \zeta$ sein.

70. Wir bilden mittels des Poissonschen Integrals die in $|\zeta| < 1$ reguläre und (wegen der Stetigkeit von $Q(t)$) in $|\zeta| \leq 1$ stetige Potentialfunktion

$$(9, 1) \quad -Q_1(\varrho e^{i\vartheta}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Q(\sigma) + \pi] \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos(\vartheta - \sigma)} d\sigma.$$

Die zu $-Q_1(\varrho e^{i\vartheta})$ konjugierte Potentialfunktion $P_1(\varrho e^{i\vartheta})$ hat nach einem wichtigen Satze von Fatou⁶⁰⁾ wegen der gleichmäßigen Beschränktheit des

⁶⁰⁾ P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. 30 (1905), p. 360. — Aus der Voraussetzung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |Q(t + \sigma) - Q(t - \sigma)| \cotg \frac{\sigma}{2} d\sigma \leq k$$

folgt man leicht mittels der Fatouschen Umformungen, daß für $0 \leq \varrho \leq 1$ $|P_1(\varrho e^{i\vartheta})| \leq k + |P_1(0)|$ ist.

Integrals

$$(9, 2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Q(\vartheta + \sigma) - Q(\vartheta - \sigma)] \cotg \frac{\sigma}{2} d\sigma$$

durchweg für $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ gleichmäßig beschränkte Randwerte, die bis auf eine additive Konstante ($= P_1(0)$) durch (9, 2) gegeben sind. Diese Konstante soll so angenommen werden, daß $P_1(\rho e^{i\vartheta}) \leq \lg \frac{c_1}{2}$ ist, wo c_1 die kleinere der beim metrischen Parameter auftretenden Konstanten ist, also

$$(9, 3) \quad 0 < c_1 \leq \left| \frac{r(t)}{t} \right|, \quad -T \leq t < T$$

ist.

Wir bilden nun die in $|\zeta| = |\rho e^{i\vartheta}| < 1$ reguläre Funktion

$$\frac{1}{i} \lg \Phi'(\zeta) = +Q_1(\rho e^{i\vartheta}) - iP_1(\rho e^{i\vartheta})$$

($-P_1$ ist zu Q_1 konjugiert). Dann hat

$$\lg \Phi'(\zeta) = P_1(\rho e^{i\vartheta}) + iQ_1(\rho e^{i\vartheta})$$

und mit $\lg \Phi'(\zeta)$ auch $\Phi'(\zeta)$ eine gleichmäßig beschränkte Randfunktion (für radiale Annäherung). Ferner gibt es eine Zahl $N > 0$, so daß

$$(9, 4) \quad 0 < N \leq |\Phi'(\zeta)| = e^{P_1(\rho e^{i\vartheta})} \leq \frac{c_1}{2}$$

für alle $|\zeta| \leq 1$ gilt. Wegen der Stetigkeit der Funktion $Q(t)$ in $t = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta_1(\varepsilon)$, so daß⁶¹⁾

$$(9, 5) \quad |Q_1(\zeta) - Q_1(1)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } |\zeta - 1| \leq \Delta_1(\varepsilon), \quad |\zeta| \leq 1$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\vartheta} &= \Phi'(\zeta) \frac{d\zeta}{d\vartheta} = \Phi'(\rho e^{i\vartheta}) i \rho e^{i\vartheta} \\ &= e^{P_1(\rho e^{i\vartheta})} \rho [i \cos(\vartheta + Q_1(\rho e^{i\vartheta})) - \sin(\vartheta + Q_1(\rho e^{i\vartheta}))] \end{aligned}$$

wird

$$(9, 6) \quad \begin{aligned} &\Phi(\rho e^{i\vartheta}) - \Phi(\rho) \\ &= \int_0^\vartheta \rho e^{P_1(\rho e^{i\vartheta})} [-\sin(\vartheta + Q_1(\rho e^{i\vartheta})) + i \cos(\vartheta + Q_1(\rho e^{i\vartheta}))] d\vartheta. \end{aligned}$$

⁶¹⁾ Dies folgert man aus der Darstellung von $Q_1(\rho e^{i\vartheta})$ durch das Poissonsche Integral (9, 1) unter Benutzung der Stetigkeit von $Q(t)$. Achtet man beim Beweise darauf, in welcher Weise $\Delta_1(\varepsilon)$ von den Eigenschaften von $Q(t)$ abhängt, so erhält man das folgende Resultat: Ist für alle t $|Q(t)| \leq M$ und ist die „Stetigkeitsfunktion“ von $Q(t)$ in $t = 0$ $\delta_1(\omega)$, d. h. ist

$$|Q(t) - Q(0)| \leq \omega \quad \text{für } |t| \leq \delta_1(\omega),$$

so hängt die Funktion $\Delta_1(\varepsilon)$ nur noch von M und der Funktion $\delta_1(\omega)$ ab, $\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon; M; \delta_1(\omega))$. Vgl. H. A. Schwarz, Ges. Abhdl. II, S. 186. Vgl. ferner A. Ostrowski, Über das Poissonsche Integral und fast stetige Funktionen, Jahresber. d. Deutsch. Math.-V. XXXVI, (1927), S. 349–353, insbesondere S. 350 f.

In diesem Integral darf man $\varrho \uparrow 1$ gehen lassen⁶³⁾. Es konvergiert dann gegen

$$\int_0^\vartheta e^{P_1(e^{i\sigma})} [-\sin(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})) + i \cos(\sigma + Q_1(e^{i\sigma}))] d\sigma.$$

Da (wegen (9, 4))⁶³⁾ $\Phi(\zeta)$ stetige Randwerte besitzt, konvergiert die linke Seite von (9, 6) gegen $\Phi(e^{i\vartheta}) - \Phi(1)$. Normieren wir $\Phi(\zeta)$ so, daß $\Phi(1) = 0$ ist, so wird (wegen $Q_1(e^{i\sigma}) = \pi + Q(\sigma)$)

$$\begin{aligned} \Phi(e^{i\vartheta}) &= \int_0^\vartheta e^{P_1(e^{i\sigma})} [-\sin(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})) + i \cos(\sigma + Q_1(e^{i\sigma}))] d\sigma \\ &= \int_0^\vartheta e^{P_1(e^{i\sigma})} [\sin(\sigma + Q(\sigma)) - i \cos(\sigma + Q(\sigma))] d\sigma \\ &= X(\vartheta) + i Y(\vartheta). \end{aligned}$$

$\Phi(\zeta)$ bildet die Peripherie des Einheitskreises auf eine stetige geschlossene Kurve Γ ab. Ferner ist für alle $|\vartheta| \leq \delta$ $X(\vartheta) \geq 0$ und $Y(\vartheta) < 0$ für $\vartheta > 0$ und > 0 für $\vartheta < 0$ (wegen unserer Annahme $\delta \leq \frac{\pi}{8}$, $|Q(t)| \leq \frac{\pi}{8}$ für $|t| \leq \delta$)⁶⁴⁾.

⁶³⁾ Nach dem Konvergenzatz von Lebesgue wegen der Beschränktheit des Integranden (siehe etwa L. Schlesinger und A. Pleßner, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, S. 105).

⁶⁴⁾ Denn aus ($\zeta_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta}$, $\zeta_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta}$, $\varrho_1 < 1$, $\varrho_2 < 1$)

$$\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta} \int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \Phi'(\varrho e^{i\vartheta}) d\varrho$$

folgt wegen $|\Phi'(\zeta)| \leq \frac{c_1}{2}$

$$|\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta})| \leq \frac{c_1}{2} |\varrho_1 - \varrho_2|.$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so ist für alle ϑ und ϱ_1, ϱ_2 mit $|\varrho_1 - \varrho_2| \leq \frac{2\varepsilon}{c_1}$

$$|\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta})| \leq \varepsilon.$$

Hieraus folgt (nach Cauchy-Bolzano) die gleichmäßige Konvergenz von $\Phi(\varrho e^{i\vartheta})$ mit $\varrho \uparrow 1$ gegen eine stetige Funktion $\Phi(e^{i\vartheta})$.

⁶⁴⁾ Für spätere Anwendung sei noch folgendes angemerkt: Es sei allgemein $\left| \int_0^a \frac{d\bar{X}(t)}{t} \right| \leq \eta$ für $|a| \leq \delta(\eta)$. Wir werden im folgenden gelegentlich $\delta(\eta)$ als „Konvergenzfunktion“ des Integrals $\int_0^a \frac{d\bar{X}(t)}{t}$ bezeichnen. Es sei ferner δ irgendeine positive Zahl $< \frac{\pi}{8}$, die von mindestens einem der Werte von $\delta(\eta)$ übertroffen wird. Nun gelten für die zu $\bar{X}(t)$ konstruierte Funktion $Q(t)$, die nach Voraussetzung

(Fortsetzung der Fußnote ⁶⁴⁾ auf nächster Seite.)

71. Nun behaupten wir, daß man einen so kleinen $\zeta = 1$ als *Mittelpunkt enthaltenden Bogen* γ_ζ von $|\zeta| = 1$ finden kann, daß das Bild γ_w von γ_ζ vermöge $w = \Phi(\zeta)$ bis auf $w = 0$ ganz innerhalb von C liegt.

Den Beweis hierfür erbringen wir in den Nrn. 72 bis 74. Hier schicken wir zunächst die folgende Bemerkung über die Funktion

$$(9,7) \quad Y(t) = - \int_0^t e^{P_1(e^{i\sigma})} \cos(\sigma + Q(\sigma)) d\sigma$$

voraus, die wir bei diesem Beweise brauchen werden. Es ist wegen (9,4) und wegen $|\sigma + Q(\sigma)| \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ für $|\sigma| \leq \delta$

$$(9,8) \quad |t| \frac{1}{2} \sqrt{2} N \leq |t| N \cos \frac{\pi}{4} \leq |Y(t)| \leq \frac{c_1}{2} |t|.$$

Ferner ist $Y(t)$ für $|t| \leq \delta$ (stetig und eigentlich) monoton und daher für $|t| \leq \delta$ eindeutig umkehrbar. Es sei $t = t(y)$ die (sicher für $|y| \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} \delta N$) eindeutig definierte Umkehrfunktion von $Y(t)$. Dann kann man $X(t)$ als Funktion von y darstellen: $x = X^*(y)$.

72. Es sei nun $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion der Kurve C in $w = 0$, d. h. schließt man die Tangente in $w = 0$ zwischen zwei Geraden durch $w = 0$ ein, die mit dieser den Winkel $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{\pi}{2}$) bilden, so liegen alle Punkte $P(t)$ von C im Innern oder auf dem Rande des Kreises K_{r^*} mit dem Radius $r^*(\varepsilon)$ um $w = 0$ zugleich auch im Innern der beiden von diesen Geraden gebildeten Scheitelwinkelräume der Öffnung 2ε . Es sei $r_0 \leq r^*(\frac{\pi}{4})$, und es werde darüber hinaus $r_0 \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$ angenommen. Dann ist für alle Punkte $P(t)$ von C innerhalb oder auf K_{r_0} wegen $|t| \leq \frac{r(t)}{c_1}$ ((9,3)), $r(t) \leq r_0 \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$, $\frac{N}{c_1} < 1$: $|t| \leq \delta$. Ferner gilt für die Ordinaten $y(t)$ aller dieser Punkte $P(t)$ ($x(t) + iy(t)$):

$$(9,9) \quad |y(t)| \geq r(t) \cos \frac{\pi}{4} \geq r(t) \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

absolut durchweg $\leq \frac{\pi}{8}$ ist (vgl. die Vorbemerkung 1 zum Hilfssatz 12), die in dem Satze des Hilfssatzes 12 ausgesprochenen Behauptungen. Hieraus folgt, daß die in (9,5) angegebene Funktion $A_1(\varepsilon)$ (außer von ε) nur von der Zahl δ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt, da ja nach dem in der Fußnote ⁶¹⁾ Gesagten $A_1(\varepsilon)$, abgesehen von ε , nur noch von der oberen Schranke $M = \frac{\pi}{8}$ von $Q(t)$ und der „Stetigkeitsfunktion“ $\delta_1 = \delta_1(\omega)$ von $Q(t)$ in $t = 0$ abhängt. Diese ist aber wiederum nur Funktion der Zahl δ und der Konvergenzfunktion $\delta(\eta)$ (Zusatz 1). Schließlich folgt aus dem Satze 4, daß die Konstante N in (9,4) nur Funktion von $\delta, \delta(\eta)$ und natürlich der Konstanten c_1 in (9,3) ist.

73. Wir zeigen nun: *Es gibt ein $R \leq r_0$, so daß für alle Punkte $P(t)$ von C im Innern oder auf dem Rande des Kreises K_R um $w = 0$ mit dem Radius R*

$$(9,10) \quad |x(t)| < X^*(y(t)), \quad t \neq 0,$$

gilt, d. h. jeder innerhalb oder auf K_R liegende Punkt $P(t)$ von C liegt in dem folgenden Sinne „links“ vom Kurvenbogen β auf Γ : $x = X^(y)$, $|y| \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$. Legt man durch den Punkt $P(t)$ ($x(t) + iy(t)$), $P(t) \neq 0$, die Parallele zur x -Achse im Abstände $y = y(t)$, so ist die Abszisse des — einzigen — Schnittpunktes Q von β mit dieser Geraden (absolut) größer als die von $P(t)$. (Man beachte, daß wegen $|y(t)| \leq R \leq r_0 \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$ $X^*(y(t))$ sicher für alle diese $y(t)$ definiert ist.)*

Zum Beweise von (9,10) bemerken wir zunächst, daß für $0 < |t| \leq \delta$

$$\frac{|x(t)|}{X(t)} = \frac{|x(t)|}{\int_0^t e^{P_1(e^{i\sigma})} \sin(\sigma + Q(\sigma)) d\sigma}$$

ist, und dies ist wegen $|x(t)| \leq \bar{X}(t)$ und $|e^{P_1(e^{it})}| = |\Phi'(e^{it})| \geq N$ sowie wegen $|t + Q(t)| \leq \frac{\pi}{4}$ für $|t| \leq \delta$

$$(9,11) \quad \leq \frac{\bar{X}(t)}{N \int_0^t \sin(\sigma + Q(\sigma)) d\sigma} \leq \frac{\bar{X}(t)}{N \frac{2}{\pi} \int_0^t Q(\sigma) d\sigma}.$$

Nach der im Hilfssatz 12 ausgesprochenen Eigenschaft 1 der Funktion $Q(t)$ gibt es nun ein $\Delta_2 > 0$, so daß dieser letzte Quotient und daher

$$(9,12) \quad \frac{|x(t)|}{X(t)} \leq \frac{1}{SN} < 1 \quad \text{für } 0 < |t| \leq \Delta_2$$

ist. Wählen wir daher $R = \text{Min}(c_1 \Delta_2, r_0)$, so ist für alle $P(t)$ innerhalb oder auf K_R $|t| \leq \frac{R}{c_1} \leq \Delta_2$ und somit (9,12) erfüllt.

Nun ist aber offenbar $X(t)$ im allgemeinen noch *nicht* die Abszisse $X^*(y(t))$ des Punktes Q , in dem die Gerade $y = y(t)$ den Kurvenbogen β trifft. Es sei nun τ der diesem (einzigem) Schnittpunkt zugeordnete Parameterwert in der Parameterdarstellung $(X(t), Y(t))$ von β , so daß also $y(t) = Y(\tau)$, $X^*(y(t)) = X(\tau)$ ist. Wegen (9,7) ist

$$|y(t)| = |Y(\tau)| \leq \frac{c_1}{2} |\tau|.$$

Da ferner wegen (9,9) und (9,3) $|y(t)| \geq r(t) \frac{\sqrt{2}}{2} \geq |t| \cdot \frac{c_1}{\sqrt{2}}$ ist, wird

$$\frac{c_1}{\sqrt{2}} |t| \leq \frac{c_1}{2} |\tau|,$$

$$\sqrt{2} |t| \leq |\tau|, \quad \text{d. h. } |t| < |\tau|.$$

Da wegen $|Y(\tau)| \leq R \leq r_0 \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\delta N < Y(\delta)$ — wegen der Monotonie von $Y(t)$ — auch $|\tau| = |t(Y(\tau))| < \delta$ ist, ist $X(t)$ für $|t| \leq |\tau|$ sicher monoton und daher ist

$$X^*(y(t)) = X(\tau) > X(t)$$

und also wegen

$$X^*(y(t)) > X(t) > |x(t)| \quad \text{für } 0 < x(t)^2 + y(t)^2 < R^2,$$

womit (9, 10) bewiesen ist.

74. Hieraus ergibt sich nunmehr leicht, daß man für den gesuchten Bogen γ_ζ z. B. den Bogen

$$(9, 13) \quad |\zeta - 1| \leq \frac{R}{c_1}, \quad |\zeta| = 1$$

wählen kann⁶⁵⁾. Denn da wegen der aus (9, 4) und wegen $\Phi(1) = 0$ folgenden Relation

$$(9, 14) \quad |\Phi(\zeta)| \leq \frac{c_1}{2} |\zeta - 1| \quad \text{für } |\zeta| \leq 1 \quad (\zeta \neq 1)$$

das Bild γ_w von γ_ζ mittels $w = \Phi(\zeta)$ sicher im Innern von K_R verläuft, kann γ_w C nur in Punkten $P(t)$ treffen, die innerhalb K_R liegen. Nun ist aber (wegen $R \leq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$) γ_w sicher ein Teilbogen des Kurvenbogens β ,

⁶⁵⁾ Auch die oben im Text für γ_ζ angegebene obere Schranke hängt nur von den Zahlen δ und c_1 sowie von der Funktion $\delta(\eta)$ ab. Denn man hat offenbar nur zu zeigen, daß der oben angegebene Radius R des Kreises K_R nur von den genannten Größen abhängt. Um dies einzusehen, beachte man: 1. Man kann in $w = 0$ eine Richtungsfunktion $r^*(s)$ angeben, die außer von s nur noch Funktion von diesen Größen ist. Denn aus $\left| \int_0^t \frac{d\bar{X}}{t} \right| \leq \eta$ für $|t| \leq \delta(\eta)$ folgt $\left| \frac{1}{t} \int_0^t d\bar{X}(t) \right| \leq \eta$, $\left| \frac{1}{t} \bar{X}(t) \right| \leq \eta$ und wegen $|x(t)| \leq X(t)$ und $\left| \frac{r(t)}{t} \right| \geq c_1$

$$\left| \frac{x(t)}{r(t)} \right| \leq \frac{\eta}{c_1}.$$

Ist $\alpha(t)$ der (nicht größere) Winkel zwischen der Tangente in $w = 0$ und dem von 0 nach $P(t)$ gezogenen Radiusvektor $r(t)$, so ist $\frac{x(t)}{r(t)} = \sin \alpha(t)$. Ist $s > 0$, so ist demnach

$$\alpha(t) \leq 2 \sin \alpha(t) = 2 \left| \frac{x(t)}{r(t)} \right| \leq s \quad \text{für } r(t) \leq r^*(s) = \text{Min}(\delta c_1, c_1 \delta(s c_1)).$$

2. Nach dem Zusatz 3 zum Hilfssatz 12 sowie nach dem in der Fußnote ⁶⁴⁾ über die Zahl N Gesagten, folgt, wie aus der Abschätzung (9, 11), (9, 12) hervorgeht, daß die Zahl A_2 nur noch von δ , c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt.

Da nun

$$R = \text{Min}(c_1 A_2, r_0), \quad r_0 = \text{Min}\left(\delta N \frac{1}{2}\sqrt{2}, r^*\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ist, so ist hiermit die obige Behauptung über R bewiesen.

so daß (da nach dem oben Gesagten jeder von 0 verschiedene Punkt von C in oder auf K_R ganz links von β liegen muß) C γ_w nur in $w = 0$ treffen kann. Da im übrigen der Bogen γ_w in der Umgebung von $w = 0$ auf derselben Seite von C wie die Innennormale im Nullpunkte verläuft, muß er (bis auf $w = 0$) im Innern von C liegen, womit die am Anfang der Nr. 71 aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

75. Es sei hieran noch die folgende Bemerkung geknüpft: Der Bogen β ($x = X^*(y)$, $|y| \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$) werde vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten durchlaufen, und es seien A resp. B die zuerst dabei angetroffenen — wegen $R \leq \frac{1}{2} \delta N \sqrt{2}$ sicher existierenden — Schnittpunkte von β mit K_R . A und B liegen auf verschiedenen Seiten der reellen Achse, wie aus der Darstellung von β durch die (monotone) Funktion $x = X^*(y)$, $-\frac{\delta N}{2} \sqrt{2} \leq y \leq +\frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$ folgt. Ferner liegt der Kreisbogen $\widehat{AB} = \alpha$, der die positive reelle Achse trifft, ganz im Innern von C . Denn jeder Punkt $P(t)$ von C auf α würde ja entgegen dem in Nr. 73 Bewiesenen (in dem oben gebrauchten Sinne) rechts von β liegen. *Daher liegt das Kurvenbogenzweieck AOB , dessen eine Seite der Bogen α ist, bis auf $w = 0$ ganz innerhalb von C .*

76. Wir wollen nun γ_ζ einer weiteren Einschränkung unterwerfen: Es soll für γ_ζ der Bogen

$$(9, 15) \quad |\zeta - 1| \leq \varrho = \text{Min} \left(\frac{R}{c_1}, A_1 \left(\frac{1}{2} \right) \right)^{66), \quad |\zeta| = 1,$$

gewählt werden, wo $A_1(\varepsilon)$ die in (9, 5) definierte „Stetigkeitsfunktion“ von $Q_1(\zeta)$ in $\zeta = 1$ ist. Dann ergibt sich aus der eben gemachten Bemerkung unter Zuhilfenahme des Hilfssatzes 13 das folgende Resultat: *Beschreibt man durch die Endpunkte dieses Bogens γ_ζ um $\zeta = 1$ den Kreis k mit dem Radius ϱ , so wird das Innere des von γ_ζ und dem in $|\zeta| \leq 1$ liegenden Kreisbogen \mathfrak{K} von k gebildeten Kreisbogenzweiecks Z durch $w = \Phi(\zeta)$ in das Innere einer geschlossenen Jordankurve \mathfrak{C} übergeführt, die selber bis auf $w = 0$ ganz im Innern von C liegt. Daß nämlich das Bild des Kreisbogenzweiecks Z eine geschlossene Jordankurve ist, folgt wegen (9, 15) aus dem Hilfssatz 13. Nun besteht aber \mathfrak{C} aus einem Teilbogen des Kurvenbogens AOB von Γ und einem weiteren Bogen, der einen Punkt von OA mit einem Punkt von OB verbindet. Da wegen (9, 15) und (9, 4) \mathfrak{C} ganz im Innern von K_R liegt und ferner der Umlaufsinn von \mathfrak{C} derselbe ist wie von Z , so liegt \mathfrak{C} nicht außerhalb des Kurvenbogenzweiecks AOB , und also auch ganz in C .*

⁶⁶⁾ Offenbar hängt ϱ nach dem in der Fußnote ⁶⁵⁾ über R und dem in der Fußnote ⁶⁴⁾ über $A_1(\varepsilon)$ Gesagten nur von c_1 , δ und der Funktion $\delta(\eta)$ ab.

77. \mathfrak{C} ist also eine innere Vergleichskurve von C in $w=0$. Wir zeigen, daß jede Funktion $F(z)$ mit $F(1)=0$, die $|z| < 1$ auf das Innere \mathfrak{C} von \mathfrak{C} abbildet, in $z=1$ eine im Winkelraum gebildete von 0 und ∞ verschiedene Ableitung besitzt. Man kann eine solche Funktion herstellen, indem man $|z| < 1$ auf das Innere von Z mittels $\zeta = g(z)$ so abbildet, daß $g(1)=1$ ist und dann die Funktion $w = \Phi(g(z))$ bildet. $g(z)$ ist in einer Umgebung von $z=1$ noch analytisch und $|g'(1)| = \alpha_1$ ist dort positiv. Nun existiert, wie oben gesagt, $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \Phi'(\zeta) = \alpha_2$, und es ist nach (9, 4) $N \leq |\alpha_2| \leq \frac{c_1}{2}$. Daher existiert auch wegen der Beschränktheit von $|\Phi'(\zeta)|$ nach einem schon oben zitierten Satze von Lindelöf der $\lim_{\zeta \rightarrow 1} \Phi'(\zeta)$, wenn ζ „im Winkelraum“ gegen 1 konvergiert, und ist gleich α_2 . Somit ist auch

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d\Phi(g(z))}{dz} = \lim_{z \rightarrow 1} \Phi'_\zeta(\zeta) g'(z)$$

vorhanden und absolut gleich $|\alpha_1 \alpha_2|$ und somit also von 0 und ∞ verschieden. Aus der Integraldarstellung

$$\Phi(g(z)) - \Phi(g(1)) = \int_1^z \frac{d}{dz} \Phi(g(z)) dz$$

ergibt sich dann leicht, daß $\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{\Phi(g(z)) - \Phi(g(1))}{z-1} \right| = |\alpha_1 \alpha_2|$ ist, wenn $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“ konvergiert, d. h. die obige Behauptung. Nach dem Satze 4a des § 6 folgt unter Berücksichtigung der im Zusatz zu diesem Satze gegebene Formulierung — angewandt auf die Kurven C und \mathfrak{C} resp. die Funktionen $z = \varphi(w)$ und die zu $\Phi(g(z))$ inverse Funktion $z = \psi(w)$ — die Beschränktheit des Differenzenquotienten $\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right|$ bei allseitiger Annäherung nach unten⁶⁷⁾.

⁶⁷⁾ Normiert man die im Text genannte Funktion $\zeta = g(z)$ so, daß $z=0$ in den Mittelpunkt μ der Verbindungsstrecke der beiden Ecken des Kreisbogenzweiecks Z und $z=1$ in $w=0$ übergeht, so bildet $w = \Phi(g(z))$ den Punkt $z=0$ auf einen im Innern von \mathfrak{C} liegenden Punkt $w=a$ ab, dessen Minimalabstand vom Rande von \mathfrak{C} und somit vom Rande von C $>$ als eine nur von δ , c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige positive Zahl d ist. Da nämlich Z in der $\Delta_1(\frac{1}{2})$ -Umgebung von $\zeta=1$ gewählt ist, gilt nach dem Hilfssatz 13 für alle ζ, ζ' in Z

$$|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta')| \geq N_1 |\zeta - \zeta'|, \quad N_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) N = \frac{N}{2}.$$

Nehmen wir $\Delta_1(\frac{1}{2}) < 1$ an — was natürlich erlaubt ist —, so ist der Minimalabstand von μ vom Rande von Z gleich $1 - \mu$ und daher $d \geq (1 - \mu) \frac{N}{2}$.

Bildet nun $\varphi(w)$ insbesondere das Innere der Kurve C so auf das Innere des Einheitskreises ab, daß $w=a$ in $z=0$, $w=0$ in $z=1$ übergeht, und gilt für die Unbewall-

(Fortsetzung der Fußnote ⁶⁷⁾ auf nächster Seite.)

78. B. Konstruktion der äußeren Vergleichskurve. Wir gehen ähnlich wie oben vor.

Wir bilden nach Hilfssatz 12 zu $\bar{X}(t)$ (siehe Nr. 69) für $|t| \leq \delta < \frac{\pi}{8}$ die Funktionen $Q(t)$ und $V(t)$ mit den dort angegebenen Eigenschaften. Nach der an diesen Hilfssatz angeschlossenen Bemerkung kann $Q(t)$ als eine *ungerade* Funktion angenommen werden. Dies wollen wir tun⁶⁸). Dann setzen wir

$$Q^*(t) = -Q(t) - 2t \quad \text{für } 0 \leq t \leq \delta,$$

$$Q^*(t) = -Q(t) - 2 \frac{\delta}{\pi - \delta} (\pi - t) \quad \text{„ } \delta \leq t \leq \pi,$$

und

$$Q^*(t) = -Q(t) - 2t \quad \text{für } 0 \geq t \geq -\delta,$$

$$Q^*(t) = -Q(t) + 2 \frac{\delta}{\pi - \delta} (\pi + t) \quad \text{„ } -\delta \geq t \geq -\pi.$$

Dann ist $Q^*(t)$ für alle t stetig, verschwindet für $t = 0$ und $t = \pm \pi$ und bleibt stetig für alle reellen t , wenn $Q^*(t + 2\pi) = Q^*(t)$ gesetzt wird. Ferner ist in $(-\pi, +\pi)$ $Q^*(t) > 0$ für $t < 0$, $Q^*(t) < 0$ für $t > 0$ und für $|t| \leq \delta$ ist $|Q^*(t)| \geq 2|t|$. Weiter gilt offenbar für $Q^*(t)$

$$(9, 16) \quad \frac{\bar{X}(t)}{\int_0^t \sin(Q^*(\sigma) + \sigma) d\sigma} \leq \frac{\bar{X}(t)}{\frac{2}{\pi} \int_0^t Q(\sigma) d\sigma} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0,$$

und $-Q^*(t)$ hat ebenso wie $Q(t)$ die Eigenschaften 2 des Hilfssatzes⁶⁹). Schließlich bemerken wir noch, daß auch $Q^*(t)$ eine *ungerade* Funktion ist, es gilt also $Q^*(t) = -Q^*(-t)$.

Wir nehmen wie bisher an, daß für $|t| \leq \delta$ $|Q(t)| \leq \frac{\pi}{8}$ und somit

$$|Q^*(t) + t| \leq \frac{\pi}{4}$$

ist. Ferner ist für $|t| \leq \delta$ und daher durchweg $|Q^*(t)| \leq \frac{3}{8}\pi$.

heitsfunktion $\Lambda(s)$ von C im Punkte $w = 0$ $\overline{\lim}_{s \rightarrow 0} \frac{\Lambda(s)}{s} = \alpha$, so gilt nach dem Satze 4

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w} \right| \geq \frac{2}{\alpha c_1 \alpha_1}$$

für beliebige w aus dem Innern und auf dem Rande von C . Dabei ist $\alpha_1 = |g'(1)|$ eine nur von dem Kreisbogenzweieck Z , also nur von den Größen δ, c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Zahl.

⁶⁸) Dies wird zur Folge haben, daß die der obengenannten Funktion $\Phi(\zeta)$ hier entsprechende weiter unten zu definierende Funktion $\Phi_1(\zeta)$ für $-1 \leq \zeta \leq 1$ reell ist. Von dieser Tatsache werden wir im Text *keinen* Gebrauch machen. Sie wird nur in Fußnote ⁷⁴) benutzt werden und uns dort einige Abkürzungen zum Beweise gestatten.

⁶⁹) Man beachte noch, daß die Zusätze 1 bis 4 zum Hilfssatz 12 wörtlich richtig bleiben, wenn man die Funktion $Q(t)$ durch $Q^*(t)$ ersetzt.

79. Nunmehr verfahren wir analog wie in Nr. 70, um eine geeignete äußere Vergleichskurve an C in $w = 0$ zu konstruieren. Wir bilden die in $|\zeta| = |\rho e^{i\vartheta}| < 1$ reguläre, in $|\zeta| \leq 1$ stetige Potentialfunktion

$$\begin{aligned} -Q_1^*(\rho e^{i\vartheta}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Q^*(\sigma) + \pi) \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(\sigma-\vartheta)} d\sigma \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (Q^*(\sigma) + \pi) \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(\sigma-\vartheta)} d\sigma; \end{aligned}$$

wegen $Q^*(t) = -Q^*(-t)$ ist für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q^*(\sigma) \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho \cos(\sigma-\vartheta)} d\sigma = 0,$$

so daß $Q_1^*(\zeta)$ für $-1 \leq \zeta \leq 1$ konstant gleich $+\pi$ ist. Die zu $-Q_1^*(\zeta)$ konjugierte Potentialfunktion $P_1^*(\zeta)$ ist in $|\zeta| < 1$ regulär und wegen der Beschränktheit des Integrals

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{Q^*(t+\sigma) - Q^*(t-\sigma)}{\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}} \right| d\sigma$$

(vgl. 60)) gleichmäßig beschränkt. Daher ist auch

$$\Phi_1'(\zeta) = e^{P_1^*(\zeta) + iQ_1^*(\zeta)}$$

in $|\zeta| < 1$ regulär und beschränkt. Da $Q_1^*(\zeta)$ in $-1 \leq \zeta \leq 1$ konstant gleich $+\pi$ ist, so ist $\Phi_1'(\zeta)$ für diese ζ (negativ) reell. Wir normieren $P_1^*(\rho e^{i\vartheta})$ so, daß $P_1^*(\rho e^{i\vartheta}) \leq \lg \frac{c_1}{2}$ ist; dann gibt es ein $N > 0$, so daß

$$(9, 17) \quad 0 < N \leq |\Phi_1'(\zeta)| \leq \frac{c_1}{2}$$

ist. Ferner hat $\Phi_1'(\zeta)$ in jedem Punkte von $|\zeta| = 1$ einen radialen Randwert.

Wegen der Stetigkeit von $Q_1^*(\zeta)$ in $\zeta = 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta_1(\varepsilon)$, so daß

$$|Q_1^*(\zeta) - Q_1^*(1)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } |\zeta - 1| \leq \Delta_1(\varepsilon), \quad |\zeta| \leq 1$$

gilt. Die Funktion

$$\Phi_1(\zeta) - \Phi_1(\rho) = \int_{\rho}^{\zeta} \Phi_1'(\zeta) d\zeta$$

ist in $|\zeta| < 1$ regulär und in $|\zeta| \leq 1$ stetig⁷⁰⁾. $\Phi_1(\zeta)$ bildet daher $|\zeta| < 1$ auf ein (eventuell mehrfach überdecktes) von einer stetigen Kurve begrenztes Gebiet ab. Normieren wir die additive Konstante in $\Phi_1(\zeta)$ durch $\Phi_1(1) = 0$, so wird⁷¹⁾

⁷⁰⁾ Vgl. Fußnote 63).

⁷¹⁾ Vgl. Fußnote 62).

$$\begin{aligned} \Phi_1(e^{i\vartheta}) &= \int_0^\vartheta e^{P_1^*(e^{i\sigma})} [-\sin(\sigma + Q_1^*(e^{i\sigma})) + i \cos(\sigma + Q_1^*(e^{i\sigma}))] d\sigma \\ &= \int_0^\vartheta e^{P_1^*(e^{i\sigma})} [\sin(\sigma + Q^*(\sigma)) - i \cos(\sigma + Q^*(\sigma))] d\sigma \\ &= X_1(\vartheta) + i Y_1(\vartheta). \end{aligned}$$

Es ist hier für $|\vartheta| \leq \delta$: $X_1(\vartheta) \leq 0$, während $Y_1(\vartheta) < 0$ für $\vartheta > 0$ und > 0 für $\vartheta < 0$ ist. (Man beachte, daß $2|t| \leq |Q^*(t)| \leq \frac{3}{2}\pi$ für $|t| < \delta$ ist.) Ferner ist, da, wie oben gesagt, $\Phi_1'(\zeta)$ für $-1 \leq \zeta \leq 1$ reell ist, wegen $\Phi_1(1) = 0$ auch $\Phi_1(\zeta)$ auf diesem Intervall reell.

80. Analog wie in den Nrn. 71 bis 74 zeigt man auch hier, daß es einen $\zeta = 1$ als Mittelpunkt enthaltenden Bogen γ_ζ von $|\zeta| = 1$ gibt, so daß sein Bild γ_w vermittels $w = \Phi_1(\zeta)$ in der w -Ebene (bis auf $w = 0$) ganz außerhalb von C verläuft: Man zeigt unter Benutzung der Ungleichung (9,17) wie in Nr. 71, daß für hinreichend kleine $|y|$ (z. B. $|y| \leq \frac{\delta N}{2} \sqrt{2}$) $X_1(t)$ als Funktion von y darstellbar ist ($x = X_1^*(y)$), und beweist sodann — vgl. Nr. 72, 73 — unter Benutzung der Relationen (9,16), (9,17), daß es ein $R > 0$ gibt, so daß für alle Punkte $P(t) (x(t) + iy(t))$ von C im Innern oder auf dem Rande des Kreises K_R mit dem Radius R um $w = 0$

$$|x(t)| < -X_1^*(y(t)) \quad (t \neq 0)$$

gilt. Dies besagt, daß alle in K_R liegenden Punkte $P(t)$ von C (wegen $X_1^*(y) \leq 0$) rechts vom Kurvenbogen $x = X^*(y)$ liegen. (Die Zahl R soll dabei — ähnlich wie in Nr. 72 — $< r^*(\frac{\pi}{4})$ gewählt werden, wo $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion von C in $w = 0$ ist.) Hieraus findet man dann wie in Nr. 74 unter Benutzung der Relation (9,17) eine positive Schranke für die Länge des Bogens γ_ζ .⁷²⁾

⁷²⁾ Auch hierbei sei bemerkt, daß die Länge des Bogens γ_ζ als nur von den Konstanten δ, c_1 und von der in der Fußnote ⁶⁴⁾ genannten „Konvergenzfunktion“ $\delta(\eta)$

des Integrals $\int_0^a \frac{d\bar{X}(t)}{t}$ abhängig gewählt werden kann. Dies folgt ganz ähnlich wie

die entsprechende Behauptung im Teil A unseres Beweises, indem man beachtet, daß die dem Zusatz zum Hilfssatz 12 entsprechenden Behauptungen für $Q(t)$ auch für $Q^*(t)$ wörtlich zutreffen: Man zeigt zuerst (Benutzung der Behauptung 1 dieses Zusatzes), daß die Funktion $A_1(\varepsilon)$, abgesehen von ε , nur noch von diesen Größen abhängt (vgl. Fußnote ⁶¹⁾). Wie in Fußnote ⁶⁴⁾ zeigt man ferner, daß das gleiche für N gilt. Indem man noch schließlich die in Fußnote ⁶⁵⁾ unter 1. bewiesene Tatsache benutzt, daß man für C in $w = 0$ eine (abgesehen von ihrem Argument ε) nur von diesen Größen abhängige Richtungsfunktion $r^*(\varepsilon)$ angeben kann, und im übrigen ganz ähnlich wie dort schließt, erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung.

81. Beschreibt man nun um $\zeta = 1$ den Kreis k durch die Endpunkte von γ_ζ mit dem Radius ϱ , so braucht das Bild der Begrenzung des Kreisbogenzweiecks Z

$$|\zeta - 1| \leq \varrho, \quad |\zeta| \leq 1$$

vermittels $w = \Phi_1(\zeta)$ noch keine doppeltpunktfreie Kurve zu sein. Die Anwendung des Hilfssatzes 13 jedoch lehrt, daß dies der Fall ist, wenn ϱ weiter hinreichend klein angenommen wird. Wir denken uns nun γ_ζ und damit ϱ ⁷³⁾ so klein gewählt; die geschlossene Jordankurve \mathfrak{C}_1 sei dann das Bild des Randes von Z .

82. Liegt nun C innerhalb von \mathfrak{C}_1 , so ist \mathfrak{C}_1 eine äußere Vergleichskurve von C in $w = 0$. Wir bilden dann den Einheitskreis $|z| < 1$ vermittle $\zeta = g(z)$ auf das Innere von Z so ab, daß $g(1) = 1$ ist. Dann ist $g(z)$ in $z = 1$ noch analytisch, und ferner ist $|g'(1)| = \alpha > 0$. ⁷⁴⁾ Weiter

⁷³⁾ Wir wählen $\varrho = \text{Min} \left(\frac{R}{c_1}, \Delta_1 \left(\frac{1}{2} \right) \right)$, wo R der im Texte genannte Radius von K_R ist und $\Delta_1 \left(\frac{1}{2} \right) < 1$ angenommen werde, so daß insbesondere wegen (9, 17) \mathfrak{C}_1 innerhalb K_R liegt. ϱ hängt dann nach dem in Fußnote ⁷²⁾ Gesagten nur von δ, c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ ab.

⁷⁴⁾ Für spätere Anwendung sei noch hervorgehoben: Normiert man die Funktion $\zeta = g(z)$ so, daß $z = 0$ in den Mittelpunkt $\zeta = \mu$ der Verbindungsstrecke der beiden Eckpunkte von Z übergeht, so führt $w = \Phi_1(g(z))$ $z = 0$ in einen (reellen) Punkt $w = a'$ im Innern von \mathfrak{C}_1 und C über, dessen Abstand vom Rande dieser beiden Kurven oberhalb einer nur von δ, c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängigen positiven Konstanten d' bleibt.

Da nämlich Z in der $\Delta_1 \left(\frac{1}{2} \right)$ -Umgebung von $\zeta = 1$ liegt und $\Delta_1 \left(\frac{1}{2} \right) < 1$ angenommen worden ist, ist der Minimalabstand von μ vom Rande von Z gleich $1 - \mu$, und es ist daher wegen der nach dem Hilfssatz 13 für alle ζ, ζ' in Z geltenden Relation

$$|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta')| \geq |\zeta - \zeta'| \frac{N}{2}$$

der Minimalabstand von a' von $\mathfrak{C}_1 \geq (1 - \mu) \frac{1}{2} N$. N hängt nach Fußnote ⁷³⁾ nur von den genannten Größen ab. Da hier nun aber \mathfrak{C}_1 *nicht* im Innern von C liegt, müssen wir die Behauptung über den Minimalabstand von a' von C noch besonders beweisen: Wie oben bemerkt (s. Fußnote ⁷³⁾), war ϱ so gewählt, daß das Bild \mathfrak{C}_1 von Z vermittle $w = \Phi_1(\zeta)$ ganz im Kreise K_R mit dem Radius $R < r^* \left(\frac{\pi}{4} \right)$ um $w = 0$ liegt, wobei $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion von C in $w = 0$ ist. Schließt man daher die Tangente an C in $w = 0$ zwischen zwei Graden g_1 und g_2 durch $w = 0$ ein, die mit dieser den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden, so liegen alle Punkte von C in oder auf K_R im Innern der von diesen Geraden gebildeten Winkelräume der Öffnung $\frac{\pi}{4}$. Da auch \mathfrak{C}_1 innerhalb K_R liegt, genügt es zu zeigen, daß der Abstand von a' von den Geraden g_1 und g_2 oberhalb einer nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ abhängigen positiven Schranke bleibt. Dies folgt nun aber so: Da, wie oben hervorgehoben (Nr. 79, s. auch Fußnote ⁶⁹⁾), $\Phi_1(\zeta)$ für $-1 \leq \zeta \leq 1$ und daher $\Phi_1(g(z))$ für $-1 \leq z \leq 1$ reell ist, ist $a' = \Phi_1(\mu)$ reell. Daher beträgt sein Abstand von g_1 und g_2 nach dem oben Gesagten mindestens $(1 - \mu) \frac{N}{2} \sin \frac{\pi}{4} = (1 - \mu) \frac{N}{4} \sqrt{2}$.

gilt, wie aus der Ungleichung (8, 21) des Hilfssatzes 13 leicht folgt,

$$(9, 18) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left| \frac{\Phi(\zeta) - \Phi(1)}{\zeta - 1} \right| \geq N \quad \text{und daher} \quad \lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{\Phi(g(z)) - \Phi(g(1))}{z - 1} \right| \geq N\alpha > 0.$$

Hieraus ergibt sich dann die Behauptung sofort aus dem Satz 4 b.

Liegt aber C noch nicht innerhalb von \mathfrak{C}_1 , so ergänze man γ_w so zu einer geschlossenen Jordankurve \mathfrak{C} , daß sie sowohl \mathfrak{C}_1 (bis auf γ_w) als auch C (bis auf $w = 0$) im Innern enthält, wende dann auf \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C} den Hilfssatz 4 in Nr. 7 und dann auf C und \mathfrak{C} den eben genannten Satz 4 b an ⁷⁵⁾. — Hiermit ist die Behauptung des Satzes 7 über die konforme Ecke bewiesen.

83. II. Der Beweis für die Existenz des $\lim_{w \rightarrow w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ ergibt sich folgendermaßen: Da nach dem bisher Bewiesenen auch unter unseren jetzigen Annahmen C in $w = 0$ eine konforme Ecke hat, also für die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion $w = f(z) = u + iv$ ($f(1) = 0$) die Relation

$$(9, 19) \quad 0 < \mu_1 \leq \left| \frac{f(e^{i\delta}) - f(1)}{\delta} \right| \leq \mu_2$$

⁷⁵⁾ Da $g(z)$ eine eindeutig bestimmte Abbildungsfunktion von $|z| < 1$ auf Z ist und Z nur von den Größen $\delta, c_1, \delta(\eta)$ abhängt, so hängt auch $|g'(1)| = \alpha$ und damit auch die Zahl $N\alpha$ in (9, 18) nur von diesen Größen ab. Es sei $w = a'$ der Punkt, der bei der in Fußnote ⁷⁴⁾ besprochenen Normierung von $g(z)$ bei der Abbildung $w = \Phi_1(g(z))$ dem Nullpunkt entspricht. In dem Falle, in dem man \mathfrak{C}_1 zu einer geschlossenen \mathfrak{C}_1 (bis auf den gemeinsamen Boden γ_w) und C im Innern enthaltenden Jordankurve \mathfrak{C} ergänzt, die innerhalb des Kreises mit dem Radius D' um $w = 0$ liegt, gibt es nach Hilfssatz 5 eine nur von d', γ_ζ, D' , also nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und D' abhängige Konstante $\lambda \geq 1$, so daß für die durch $\psi(a') = 0, \psi(0) = 1$ normierte Abbildungsfunktion $z = \psi(w)$ des Innern von \mathfrak{C} auf $|z| < 1$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{\psi(w) - \psi(0)}{w} \right| \leq \frac{\lambda}{N\alpha}$$

für beliebige w aus dem Innern von C oder auf C gilt.

Liegt C in einem Kreise mit dem Radius D , so kann man offenbar erreichen, daß \mathfrak{C} im konzentrischen Kreise mit dem Radius $D' = D + R$ verläuft, wo R die in Nr. 80 genannte Zahl ist. λ hängt dann nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und D ab.

Bildet man nun auch das Innere von C mittels $z = \varphi(w)$ so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = a'$ in $z = 0$ ($w = 0$ in $z = 1$) übergeht, und gilt für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(s)$ von C in $w = 0$ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa$, so ist für beliebige w aus dem Innern von C oder auf C

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w} \right| \leq \frac{\lambda \kappa}{N\alpha} = M' \cdot \kappa,$$

wo die rechts stehende Konstante M' nur von den genannten Größen δ, c_1, D und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt und der Minimalabstand von a' von C größer ist als ein nur von diesen Größen abhängiges $d' > 0$. D ist der Radius einer C enthaltenden Kreisscheibe.

gilt, so ist ϑ ein metrischer Parameter der Kurve C in $w = 0$. Es bezeichne nun $\Xi^*(\vartheta)$ die Funktion $\xi^*(t)$ als Funktion des Parameters ϑ . Dann konvergiert nach der Vorbemerkung 1 auch das Integral

$$(9, 20) \quad \int_0^a \frac{\Xi^*(\vartheta)}{\vartheta^2} d\vartheta$$

und somit wegen $|u(e^{i\vartheta})| \leq \Xi^*(\vartheta)$ auch die Integrale

$$\int_0^a \frac{|u(e^{i\vartheta})|}{\vartheta^2} d\vartheta, \quad \int_0^a \frac{|u(e^{-i\vartheta})|}{\vartheta^2} d\vartheta.$$

Hieraus folgt aber nach dem Hilfssatz 14 (nach Vorbemerkung 3, mit $A = B = 0$), daß die Funktion $r \frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r} = \frac{\partial v(re^{i\vartheta})}{\partial \vartheta}$ in $\vartheta = 0$ für $r \uparrow 1$ einen Randwert besitzt. Da ferner aus der Konvergenz von (9, 20) $\frac{\Xi^*(\vartheta)}{\vartheta} \rightarrow 0$ folgt, so hat nach einem bekannten Satze von Fatou $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ in $\vartheta = 0$ für $r \uparrow 1$ den radialen Randwert 0. Daher hat ($z = re^{i\vartheta}$ gesetzt)

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + i \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) \frac{1}{iz}$$

für $z \uparrow 1$ einen Randwert. Hieraus folgt aber nach dem Korollar zum Satze 3, daß

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1},$$

wenn z allseitig gegen 1 strebt, existiert und wegen (9, 19) von 0 und ∞ verschieden ist, w. z. b. w.

84. Aus den in den Fußnoten ⁶⁷⁾, ⁷⁶⁾ beim Beweise des Satzes 7 gemachten Bemerkungen ergibt sich der folgende

Zusatz zum Satze 7. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die durch den Punkt $w = 0$ hindurchgeht und dort die imaginäre Achse zur Tangente hat. Sie sei in der Parameterdarstellung $w(t) = x(t) + iy(t)$, $-T \leq t < T$, gegeben. Dabei sei t ein von $w = 0$ aus gezählter metrischer Parameter, d. h. es gelte für den von $w = 0$ zum Punkte $P(t)$ gezogenen Radiusvektor $r(t)$*

$$(9, 21) \quad 0 < c_1 \leq \left| \frac{r(t)}{t} \right| \leq C_1.$$

Ferner sei für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in $w = 0$ $\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \kappa$.⁷⁸⁾ Schließlich gelte für das mit einer monotonen Majorante $\bar{X}(t)$ der in Nr. 47

⁷⁸⁾ Man beachte, daß unter der Annahme (9, 21) für κ die Relation $\kappa \leq \frac{C_1}{c_1}$ gilt (Nr. 15).

eingeführten Funktion $\xi(t)$ gebildete Integral

$$\left| \int_0^\omega \frac{d\bar{X}(t)}{t} \right| \leq \eta \quad \text{für} \quad |\omega| \leq \delta(\eta).$$

δ sei eine beliebige positive Zahl, die von mindestens einem der Werte der Funktion $\delta(\eta)$ übertroffen wird, und es sei $\bar{X}(t)$ für alle $|t| \leq \delta$ sicher definiert. C liege innerhalb des Kreises mit dem Radius D um $w = 0$. Dann gibt es

1. einen Punkt $w = a$ im Innern von C und zwei positive nur von den Konstanten δ, c_1 und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstanten d und M , so daß der Kreis mit dem Radius d um $w = a$ im Innern von C liegt, und daß für die Funktion $z = \varphi(w)$, die das Innere von C auf $|z| < 1$ abbildet und durch $\varphi(a) = 0, \varphi(0) = 1$ normiert ist, für alle w aus dem Innern oder auf dem Rande von C

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w} \right| \geq \frac{M}{\kappa} > 0$$

gilt.

Es gibt 2. einen Punkt $w = a'$ im Innern von C und zwei nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und D abhängige Konstanten d' und M' , so daß der Kreis mit dem Radius d' um $w = a'$ ganz im Innern von C liegt, und daß für die Funktion $z = \varphi(w)$, die das Innere von C auf $|z| < 1$ abbildet und durch $\varphi(a') = 0, \varphi(0) = 1$ normiert ist, für alle w aus dem Innern oder auf dem Rande von C

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w} \right| \leq M' \cdot \kappa$$

gilt.

85. Die Bedingung für $\xi^*(t)$ des Satzes 7 ist, was die Größenordnung von $\xi^*(t)$ anbetrifft, die schärfste. Genauer gilt der folgende

Satz 8. $w = f(z)$ bilde $|z| = |r e^{i\vartheta}| < 1$ auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve C ab, die im Punkte $w_1 = f(1) (= P)$ eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau, 0 < \tau \leq 2$, hat und in der Umgebung des Punktes P ganz innerhalb eines der beiden von den Halbtangenten in P gebildeten Winkelräume bleibt. Darüber hinaus möge der Abstand $\xi(\vartheta)$ (siehe Nr. 47) des Punktes $f(e^{i\vartheta})$ auf einem jeden der beiden in P zusammenstoßenden Kurvenzweige von der entsprechenden Halbtangente in P eine monotone Funktion von ϑ sein. Dann ist $\sigma = |\vartheta|^\tau \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer

Parameter von C in bezug auf P , und es konvergiert das Integral $\int_0^\delta \frac{\xi_1(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$, wo $\delta \geq 0$ und $\xi_1(\sigma) = \xi(\vartheta)$ ist.

Beweis. Nach der Vorbemerkung 3 zum Satze 7 genügt es, den Satz für eine Ecke der Öffnung π zu beweisen. Ferner dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_1 = f(1) = 0$ voraussetzen.

Daß $\sigma = |\vartheta|^r \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer Parameter von C in bezug auf P ist, folgt aus der Voraussetzung, daß C in P eine konforme Ecke besitzt (siehe Nr. 17).

Die Konvergenz des Integrals $\int_0^{\delta} \frac{\xi_1(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$ folgt leicht mit Hilfe des Poissonschen Integrals. Es gilt nämlich für den Realteil $x = x(re^{i\vartheta})$ von $f(z)$

$$x(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\vartheta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta.$$

Da C in P eine konforme Ecke besitzt, so muß insbesondere $\left| \frac{f(r)}{1-r} \right|$ zwischen zwei festen Schranken liegen. Daher muß auch

$$(9, 22) \quad \left| \frac{x(r)}{1-r} \right| \leq \kappa$$

sein. Es sei etwa $x(e^{i\vartheta})$ in der Umgebung des Punktes $\vartheta = 0$ (bis auf $\vartheta = 0$ selbst) positiv. (Wenn $x(e^{i\vartheta})$ negativ ist, so braucht man in der folgenden Betrachtung nur x durch $-x(e^{i\vartheta})$ zu ersetzen.) Es sei also für $-\delta_1 \leq \vartheta \leq \delta_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $x(e^{i\vartheta}) \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(r)}{1-r} \right| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_1}^0 \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta \\ &\quad - \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_1} \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta \right|, \end{aligned}$$

und da das dritte Integral rechts für alle r mit $0 \leq r \leq 1$ beschränkt bleibt, ist wegen (9, 22) für hinreichend kleines $(1-r)$

$$\kappa_1 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{1+r^2-2r\cos\vartheta} d\vartheta > \frac{1}{2\pi} \int_{1-r}^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}} d\vartheta.$$

Da auf der Integrationsstrecke $(1-r)^2 \leq \vartheta^2$ und $4r\sin^2\frac{\vartheta}{2} \leq \vartheta^2$ ist, ist

$$\kappa_1 \geq \frac{1}{4\pi} \int_{1-r}^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{\vartheta^2} d\vartheta$$

und ebenso

$$\kappa_1 \geq \frac{1}{4\pi} \int_{-\delta_1}^{-(1-r)} \frac{x(e^{i\vartheta})}{\vartheta^2} d\vartheta,$$

woraus mit $r \uparrow 1$ die Behauptung folgt⁷⁷⁾.

⁷⁷⁾ An Stelle des im Beweise eingeschlagenen Weges hätte man auch den in Fußnote ⁶⁹⁾ genannten Satz von Herrn Pleßner verwenden können.

§ 10.

Anwendungen des Hauptsatzes auf rektifizierbare Kurven.

86. Wir wenden in diesem Paragraphen den Satz 7 aus dem § 7 auf rektifizierbare Kurven an, die in einem Punkte P_0 (den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als den Nullpunkt annehmen) eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$, haben. Wir stellen sie durch die Gleichungen

$$w = w(s) = x(s) + iy(s), \quad -\frac{S}{2} \leq s < \frac{S}{2},$$

dar, wo s die vom Nullpunkt aus in der einen Richtung positiv in der entgegengesetzten Richtung negativ gezählte Bogenlänge und S die Gesamtlänge von C ist. Dann existieren bekanntlich fast überall $x'(s) = \cos \theta(s)$, $y'(s) = \sin \theta(s)$, wo $\theta(s)$ der nur mod 2π bestimmte Tangentenwinkel (= Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der im Sinne wachsender s gerichteten Tangente) in den entsprechenden Punkten ist, und es gilt

$$x(s) = \int_0^s x'(s) ds, \quad y(s) = \int_0^s y'(s) ds.$$

θ_+ und θ_- seien die Richtungswinkel der rechtsseitigen resp. linksseitigen Halbtangente im Nullpunkt. Dann gilt der folgende

Satz 9. Ist $\int_0^{\pm\delta} \frac{|\cos \theta(s) - \cos \theta_{\pm}|}{s} ds$ ($\delta > 0$) konvergent und bleibt

$\frac{r(s)}{|s|} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|s|}$ zwischen zwei festen positiven Schranken, so hat C in P_0 eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$.

Ist darüber hinaus der $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{r(s)}{|s|}$ vorhanden und $\neq 0$, so existiert für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innern von C auf $|z| < 1$ der $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung.

Zum Beweise haben wir zu zeigen, daß für jeden der beiden Kurvenäste in $w = 0$ die Voraussetzungen des Satzes 7 selbst erfüllt sind. Wir zeigen dies etwa für $s > 0$ und denken uns dazu die rechtsseitige Halbtangente in die Richtung der positiven y -Achse gebracht ($\cos \theta_+ = 0$).

Dann ist $\xi(s) = |x(s)|$, so daß also $X(s) = \int_0^s |x'(s)| ds$ eine monotone Majorante von $\xi(s) = |x(s)| \leq X(s) = \int_0^s |x'(s)| ds$ ist. Daher ergibt sich wegen $\cos \theta_+ = 0$ aus der (vorausgesetzten) Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{x'(s)}{s} \right| ds = \int_0^{\delta} \frac{dX(s)}{s} \text{ nach Hilfssatz 11 die Konvergenz von } \int_0^{\delta} X(s) \frac{ds}{s^2}.$$

Da ferner aus $0 < c_1 \leq \frac{r(s)}{|s|} \leq C_1$ für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in $P_0 \Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ resp. aus $\lim_{s \downarrow 0} \left| \frac{r(s)}{s} \right| = \alpha > 0$: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ folgt, so sind die Voraussetzungen des Satzes 7 in der Tat erfüllt.

87. Für das Folgende brauchen wir noch zwei Hilfssätze. Um sie kurz zu formulieren, ist es nützlich, die folgende Begriffsbildung einzuführen: Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, ϱ eine positive Zahl. Wir sagen, eine in G verlaufende doppelpunktfreie stetige Kurve \mathfrak{C} sei eine ϱ -Kurve in bezug auf G , wenn der Kreis mit dem Radius ϱ um einen beliebigen Punkt von \mathfrak{C} ganz im Innern von G liegt.

Hilfssatz 15. *Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve begrenztes Gebiet, das vollständig im Innern eines Kreises mit dem Radius M enthalten ist. w_1 und w_2 seien Punkte im Innern von G , die sich durch eine ϱ -Kurve in bezug auf G verbinden lassen. $z = \varphi(w; w_1; G)$ und $z = \varphi(w; w_2; G)$ mögen G so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $w = w_1$ bzw. $w = w_2$ in $z = 0$ übergeht. Dann existiert für jedes w in $G + C$*

$$\lim_{w' \rightarrow w} \frac{\varphi(w; w_1; G) - \varphi(w'; w_1; G)}{\varphi(w; w_2; G) - \varphi(w'; w_2; G)} \quad (w' \neq w \text{ in } G + C)$$

und liegt absolut zwischen zwei nur von M und ϱ abhängigen positiven Schranken λ_1, λ_2 .

Existiert ferner der $\lim_{w' \rightarrow w} \frac{\varphi(w; w_1; G) - \varphi(w'; w_1; G)}{w - w'}$, so existiert auch $\lim_{w' \rightarrow w} \frac{\varphi(w'; w_2; G) - \varphi(w; w_2; G)}{w' - w} = \varphi'(w; w_2; G)$, und es gilt

$$\lambda_1 \leq \left| \frac{\varphi'(w; w_1; G)}{\varphi'(w; w_2; G)} \right| \leq \lambda_2.$$

Beweis. a) Es sei \mathfrak{K} ein in G gelegener Kreis mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ϱ , a' ein Punkt aus \mathfrak{K} mit $|a - a'| \leq \frac{\varrho}{2}$. $z = \varphi(w; a)$ und $z = \varphi(w; a')$ mögen G so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $w = a$ bzw. $w = a'$ in $z = 0$ übergeht. Dann ist für die im Satze genannten w, w'

$$\frac{1}{3} \leq \lim_{w' \rightarrow w} \left| \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} \right| \leq 3.$$

Denn nach dem Schwarzschen Lemma (angewandt auf die in $|w - a| \leq \varrho$ reguläre Funktion $\varphi(w; a)$, die in $|w - a| \leq \varrho$ sicher absolut < 1 ist und in $w = a$ verschwindet) ist zunächst

$$|\varphi(w; a)| \leq \frac{|w - a|}{\varrho}, \quad |w - a| \leq \varrho,$$

und somit

$$(10, 1) \quad |\varphi(a'; a)| \leq \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}.$$

Nun ist,

$$\zeta = \varphi(w; a), \quad \zeta' = \varphi(w'; a), \quad \zeta_1 = \varphi(a'; a)$$

gesetzt,

$$\varphi(w; a') = S(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta \bar{\zeta}_1} e^{i\tau}, \quad \tau \text{ reell,}$$

und daher

$$\frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{w - w'} = \frac{S(\zeta) - S(\zeta')}{\zeta - \zeta'} \cdot \frac{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)}{w - w'},$$

so daß

$$\lim_{w' \rightarrow w} \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} = S'(\zeta) = \frac{1 - |\zeta_1|^2}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_1)^2} e^{i\tau}$$

ist. Nun ist für $|\zeta| \leq 1$

$$\frac{1 - |\zeta_1|}{1 + |\zeta_1|} \leq |S'(\zeta)| \leq \frac{1 + |\zeta_1|}{1 - |\zeta_1|}$$

und also (wegen (10, 1))

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1 - |\zeta_1|}{1 + |\zeta_1|} \leq \lim_{w' \rightarrow w} \left| \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} \right| \leq \frac{1 + |\zeta_1|}{1 - |\zeta_1|} \leq 3,$$

wie behauptet.

88. Ist nun $|w_1 - w_2| \leq \frac{\rho}{2}$, so ist der Hilfssatz 17 bewiesen. Es sei also $|w_1 - w_2| > \frac{\rho}{2}$.

b) Es sei nun $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\rho$ die ρ -Kurve in bezug auf das Gebiet G , welche die im Satze genannten Punkte w_1 und w_2 miteinander verbindet⁷⁸⁾. Wir behaupten nun: *Es gibt eine Folge von endlich vielen Kreisen $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{n+1}$ in G mit dem festen Radius ρ und den Mittelpunkten a_0, a_1, \dots, a_{n+1} auf \mathfrak{C}_ρ mit $a_0 \equiv w_1, |a_{n+1} - w_2| \leq \frac{\rho}{2}, |a_\nu - a_{\nu+1}| = \frac{\rho}{2}, |a_\nu - a_\mu| \geq \frac{\rho}{2}$ ($0 \leq \nu, \mu \leq n+1, \nu \neq \mu$).* Zum Beweise dieser Behauptung geben wir ein Verfahren zur Konstruktion dieser Kreise an. \mathfrak{K}_0 ist der Kreis um $w = w_1 \equiv a_0$ mit ρ als Radius. Wir beschreiben sodann um a_0 den Kreis \mathfrak{f}_0 mit dem Radius $\frac{\rho}{2}$. Dieser trifft \mathfrak{C}_ρ in endlich oder unendlich vielen Punkten; wir suchen denjenigen Schnittpunkt von \mathfrak{C}_ρ mit \mathfrak{f}_0 auf, den man beim Durchlaufen der Kurve \mathfrak{C}_ρ von w_2 aus zuerst antrifft, und bezeichnen ihn mit a_1 . *Das Stück der Kurve \mathfrak{C}_ρ von w_2 bis a_1 liegt dann ganz außerhalb von \mathfrak{f}_0 .* Liegt nun w_2 innerhalb des Kreises \mathfrak{f}_1 mit $\frac{\rho}{2}$ um a_1 , so ist die Behauptung bereits bewiesen. Falls nicht, so sei a_2 derjenige Schnittpunkt von \mathfrak{f}_1 mit \mathfrak{C}_ρ , den man beim Durchlaufen von \mathfrak{C}_ρ von w_2 aus nach a_1 zuerst antrifft. *Der Teil der Kurve \mathfrak{C}_ρ von w_2 bis a_2 liegt sicher außerhalb der Kreise \mathfrak{f}_0*

⁷⁸⁾ Bei der Redaktion von b) und c) haben wir eine Überlegung aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von Herrn Ostrowski benutzt.

und \mathfrak{k}_1 . Ferner ist offenbar $|a_0 - a_2| \geq \frac{\rho}{2}$. Liegt nun w_2 innerhalb des Kreises \mathfrak{k}_2 mit $\frac{\rho}{2}$ um a_2 , so ist der Beweis vollendet; sonst verfahren wir in analoger Weise wie bei a_0 und a_1 bei a_2 und gelangen zu einem neuen Mittelpunkt a_3 und so fort. Dies Verfahren muß schließlich abbrechen, indem w_2 entweder in das Innere oder auf die Peripherie eines Kreises \mathfrak{k}_{n+1} mit dem Radius $\frac{\rho}{2}$ um einen der konstruierten Punkte a_{n+1} auf \mathfrak{C}_ρ fällt. Denn da für alle so konstruierten Punkte a_ν $|a_\nu - a_\mu| \geq \frac{\rho}{2}$ gilt und da alle a_ν im Innern von G also auch im Innern des Kreises mit dem Radius M liegen, so kann es nur endlich viele Punkte a_ν und somit nur endlich viele Kreise \mathfrak{k}_ν geben. Beschreibt man nun um jeden Punkt a_ν den Kreis \mathfrak{R}_ν mit dem Radius ρ , so liegt wegen der Eigenschaft von \mathfrak{C}_ρ und weil ferner a_ν auf \mathfrak{C}_ρ liegen, \mathfrak{R}_ν in G . Hiermit ist die Behauptung b) bewiesen.

c) Aus der zuletzt angegebenen Überlegung folgt noch genauer: Die Anzahl $n+2$ der Kreise \mathfrak{R}_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n+1$) der w_1 und w_2 verbindenden „Kreiskette“ bleibt für jede Wahl von $w_1 \equiv a_0$, w_2 und \mathfrak{C}_ρ gleichmäßig unterhalb einer festen nur von M und ρ abhängigen Schranke. (Sie hängt also *nicht* von G , w_1 , w_2 , \mathfrak{C}_ρ ab, wofern natürlich w_1, w_2 sich nur durch eine ρ -Kurve in bezug auf G verbinden lassen.) Dies folgt aus der Tatsache: Ist a_0 irgendein Punkt im Innern des Kreises K_M mit dem Radius M , sind a_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) beliebige Punkte, für die nur die Relation $|a_\nu - a_\mu| \geq \frac{\rho}{2}$ ($\nu, \mu = 0, 1, 2, \dots$) gilt, so ist die Anzahl N der Punkte a_ν in K_M sicher $\leq \left[\frac{16M}{\rho} + 1 \right]^2$. Dies kann man nun leicht einsehen, indem man ein quadratisches „Gitter“ mit der „Maschenweite“ $\frac{\rho}{8}$ zeichnet, das den Kreis K_M vollständig überdeckt. Liegt dann ein Punkt a_ν im Innern eines der Quadrate dieses „Gitters“, so liegt sicher keiner auf dem Rande dieses Quadrates, da ja $\frac{\rho}{2} > \frac{\rho}{8} \sqrt{2}$, also größer als die Diagonale dieses Quadrates ist. Liegt aber ein Punkt a_ν auf dem Rande eines Quadrates, so gibt es sicher zwei an diesem Rande aneinanderstoßende Quadrate, in deren Innerem und auf deren Rande kein Punkt a_ν liegt. Daher sind sicher nicht mehr Punkte a_ν in K_M vorhanden als es Quadrate gibt, die den Kreis K_M überdecken. Deren Anzahl ist aber sicher $\leq \left[\frac{2M}{\frac{\rho}{8}} + 1 \right]^2 = \left[\frac{16M}{\rho} + 1 \right]^2$.

d) Durch sukzessive Anwendung des unter a) Bewiesenen folgt nun die Behauptung des Satzes: Bezeichnen wir nämlich mit $z = \varphi(w; a_\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n+1$, diejenige Funktion, die G so auf $|z| < 1$ abbildet, daß $w = a_\nu$ in $z = 0$ übergeht, so ist wegen der Eigenschaft der Kreise \mathfrak{R}_ν ,

für die im Satze genannten w, w'

$$\frac{1}{3} \leq \lim_{w' \rightarrow w} \left| \frac{\varphi(w; a_\nu) - \varphi(w'; a_\nu)}{\varphi(w; a_{\nu+1}) - \varphi(w'; a_{\nu+1})} \right| \leq 3.$$

Multiplizieren wir alle diese Ungleichungen für $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$ miteinander und der entsprechenden für $\varphi(w, a_{n+1})$ und $\varphi(w, w_2)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{3^{n+2}} \leq \lim_{w' \rightarrow w} \left| \frac{\varphi(w; w_1) - \varphi(w'; w_1)}{\varphi(w; w_2) - \varphi(w'; w_2)} \right| \leq 3^{n+2}$$

und wegen $n \leq \left[\frac{16M}{\epsilon} + 1 \right]^2$ ist hiermit der Hilfssatz 17 bewiesen.

89. Nun brauchen wir noch den folgenden einfachen geometrischen

Hilfssatz 16. *Es sei C eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve. Ist $r(P_1, P_2)$ der geräddlinige Abstand zweier Punkte P_1, P_2 von C , $\sigma(P_1, P_2)$ die Länge des sie verbindenden (kleineren) Bogens von C , so gelte für beliebige P_1, P_2 auf C*

$$(10, 2) \quad \frac{r(P_1, P_2)}{\sigma(P_1, P_2)} \geq c_1 > 0 \quad (c_1 < 1),$$

wo c_1 eine feste Konstante ist. w_1 und w_2 seien schließlich zwei im Innern von C liegende Punkte, die Mittelpunkte je einer ganz im Innern von C gelegenen Kreisscheibe vom Radius $\varrho > 0$ sind. Dann lassen sich w_1 und w_2 durch eine r -Kurve in bezug auf das Innere G von C für $r = \frac{\epsilon}{2} c_1$ miteinander verbinden.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß $|w_1 - w_2| > \varrho$ ist, da man sonst offenbar w_1 mit w_2 durch eine $\frac{\epsilon}{2}$ -Kurve in bezug auf G verbinden kann. — Wir denken uns zunächst durch die Mittelpunkte w_1 und w_2 der Kreise \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit dem Radius ϱ die Geraden g_1 und g_2 gezogen, und zwar so, daß g_1 und g_2 im Innern von C oder auf C einander nicht treffen, und daß ferner weder g_1 den Kreis \mathfrak{R}_2 noch g_2 den Kreis \mathfrak{R}_1 trifft. (Man beachte, daß $|w_1 - w_2| > \varrho$ vorausgesetzt wurde.) Wir verfolgen nun zunächst g_1 von w_1 aus nach beiden Seiten bis zu den so zuerst angetroffenen Schnittpunkten A_1, B_1 (die w_1 zwischen sich enthalten). Dann zerfällt C durch A_1 und B_1 in zwei Teile, von denen jeder zusammen mit der Strecke $A_1 B_1$ eine geschlossene Jordankurve bildet. C_1 sei diejenige dieser beiden Jordankurven, in deren Äußerem der Kreis \mathfrak{R}_2 liegt, C_2 die andere. C_1 enthält sicher einen Halbkreis von \mathfrak{R}_1 (vom Radius ϱ) im Innern, und da dessen Mittelpunkt auf $A_1 B_1$ liegt, so muß die Länge desjenigen Teiles der Kurve C_1 , den C_1 mit C gemeinsam hat, sicher $\geq \pi \varrho > 2\varrho$ sein. — Analog denken wir uns auch g_2 von w_2 aus nach beiden Richtungen bis zu den beiden auf diese Weise zuerst angetroffenen Schnittpunkten A_2, B_2 durchlaufen. Diese liegen notwendig auf dem Teile

von C_2 , den C_3 mit C gemeinsam hat, da ja die Strecke $A_1 B_1$ von g_2 nach der Konstruktion nicht getroffen werden kann. Durch $A_2 B_2$ zerfällt nun C_2 in zwei Teilkurven C_3, C_4 , von denen die eine, etwa C_3 , als Begrenzung u. a. die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ hat. Die Länge desjenigen Bogens von C_4 , den C_4 mit C_2 und somit auch mit C gemeinsam hat, ist sicher $\geq \pi \rho > 2 \rho$.

90. Wir betrachten nun genauer die Kurve C_3 . Diese besteht aus den beiden getrennt liegenden geradlinigen Stücken $A_1 B_1, A_2 B_2$ und den beiden punktfremden Kurvenbögen $\gamma_1 = \widehat{A_1 A_2}$ und $\gamma_2 = \widehat{B_1 B_2}$ von C , welche die Endpunkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 dieser Strecken miteinander verbinden. Ferner hat jeder Punkt P_1 von γ_1 von jedem Punkte P_2 von γ_2 einen größeren Abstand als $2 \rho c_1$. Denn es ist ja nach der Bemerkung über die Längen der Bögen $\widehat{A_1 B_1}$ von C_1 und $\widehat{A_2 B_2}$ von C_4 , die diese Kurven mit C gemeinsam haben: $\sigma(P_1, P_2) \geq \pi \rho > 2 \rho$ und daher nach (10, 2)

$$(10, 3) \quad r(P_1, P_2) > 2 \rho c_1.$$

Es sei nun \mathfrak{M}_1 die Menge aller Punkte in der w -Ebene, deren Abstand von $\gamma_1 \leq \frac{\rho c_1}{2}$, \mathfrak{M}_2 die Gesamtheit aller Punkte, deren Abstand von $\gamma_2 \leq \frac{\rho c_1}{2}$ ist. Sowohl \mathfrak{M}_1 als auch \mathfrak{M}_2 bilden ein Kontinuum. Denn beide Mengen sind abgeschlossen, und sind etwa P_1 und P_2 Punkte von \mathfrak{M}_1 , so liegt jeder von ihnen im Innern oder auf dem Rande eines ganz zu \mathfrak{M}_1 gehörenden Kreises mit dem Radius $\frac{\rho c_1}{2}$ um einen geeigneten Punkt von γ_1 ;

mit beide (durch Radien) mit γ_1 und daher auch miteinander berühren. Analoges gilt für \mathfrak{M}_2 . Ferner ist $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = 0$; denn hätte ein Punkt P , der zugleich zu \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 gehörte, so gäbe es

einen Punkt Q_1 auf γ_1 mit $|Q_1 - P| \leq \frac{\rho c_1}{2}$ und einen Punkt Q_2 auf γ_2 mit $|P - Q_2| \leq \frac{\rho c_1}{2}$, so daß $|Q_1 - Q_2| \leq \rho c_1$ wäre — im Gegensatz zu

dem nach einem bekannten Satz⁷⁹⁾ gibt es dann aber ein geschlossenes Polygon II mit endlich vielen Seiten, das sich nicht selber überschneidet und das \mathfrak{M}_1 im Innern enthält und \mathfrak{M}_1 von \mathfrak{M}_2 trennt. Dieses Polygon muß nun notwendig die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (in je endlich vielen Punkten) treffen, und es gibt einen ganz im Innern von C_3 verlaufenden Streckenzug S von II , der einen Punkt A von $A_1 B_1$ mit einem Punkte B von $A_2 B_2$ verbindet. Der Streckenzug \mathfrak{C} , der sich aus der Strecke $w_1 A$, dem Streckenzug S und der Strecke $w_2 B$ zusammensetzt — ist $w_1 = A$

⁷⁹⁾ Siehe L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, S. 84.

oder $w_2 = B$, so ist die Strecke w_1A bzw. w_2B als der Punkt $w_1 = A$ bzw. $w_2 = B$ aufzufassen — ist dann offenbar eine r -Kurve in bezug auf G mit $r = \frac{\varrho c_1}{2}$. Denn jeder Punkt dieses Streckenzuges \mathcal{C} hat offenbar von der Kurve C einen größeren Abstand als $\frac{\varrho c_1}{2}$. —

91. Satz 10. *Es sei C eine geschlossene Jordankurve, die längs eines Teilbogens c eine sich stetig drehende Tangente besitzt. Dieser Teilbogen möge durch die Gleichung*

$$(10, 4) \quad w = w(s) = x(s) + iy(s), \quad 0 \leq s \leq a,$$

dargestellt sein, wo s die längs c gemessene Bogenlänge ist. Ferner mögen für jedes feste α' und β' , $0 < \alpha' < \beta' < a$, und ein geeignetes $\varepsilon > 0$ die Integrale

$$(10, 5) \quad \int_0^\varepsilon \left| \frac{x'(s \pm \sigma) - x'(s)}{\sigma} \right| d\sigma, \quad \int_0^\varepsilon \left| \frac{y'(s \pm \sigma) - y'(s)}{\sigma} \right| d\sigma \quad {}^{80)}$$

gleichmäßig für alle s mit $0 < \alpha' \leq s \leq \beta' < a$ konvergieren.

Bildet man dann das Innere G von C auf $|z| < 1$ mittels $z = \varphi(w)$ ab, so existiert in jedem inneren Punkte w von c die allseitige Ableitung $\varphi'(w)$, und es ist auf jedem inneren Teilbogen von c $\varphi'(w)$ stetig und von 0 verschieden.

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß man für den Beweis annehmen darf, daß C *durchweg* eine sich stetig drehende Tangente besitzt. Sonst verfähre man folgendermaßen: Es seien c' , c'' zwei feste *innere* Teilbögen von c , und c'' enthalte c' . Dann kann man bekanntlich c'' durch einen (bis auf seine Endpunkte) ganz im Innern von C verlaufenden Jordanbogen zu einer geschlossenen, durchweg mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve C^* ergänzen. Bei der durch $z = \varphi(w)$ vermittelten Abbildung gehen die Bögen c' , c'' in Bögen γ' bzw. γ'' von $|z| = 1$ und C^* in eine geschlossene Jordankurve Γ^* über, die den Bogen γ'' mit der Peripherie gemeinsam hat und sonst ganz innerhalb dieses Kreises verläuft. $z = g(\zeta)$ bilde nun den Kreis $|\zeta| < 1$ einer ζ -Ebene auf das Innere von Γ^* ab, und es entspreche bei dieser Abbildung dem Bogen γ' von $|z| = 1$ der Bogen b' von $|\zeta| = 1$. Dann ist nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip $g(\zeta)$ auf dem *abgeschlossenen* Bogen b' noch analytisch und $g'(\zeta)$ ist dort von 0 verschieden. Es sei nun $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion; dann bildet $w = F(\zeta) = f(g(\zeta))$ $|\zeta| < 1$ auf das Innere der ge-

⁸⁰⁾ Die Voraussetzung, daß beide Integrale in (10, 5) konvergieren, ist insofern unnötig, da aus der gleichmäßigen Konvergenz des einen der beiden Integrale auch die des anderen folgt, wie leicht zu sehen ist. Für unsere Zwecke ist es aber bequem, diese Annahme zu machen.

geschlossenen durchweg mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve C^* ab, die den Bogen c'' mit C gemeinsam hat. Ist nun unter der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale (10, 5) für alle s auf c' ($\alpha' \leq s \leq \beta'$) für $F(\zeta)$ bewiesen, daß $F'(\zeta)$ auf b' existiert und zugleich mit $\frac{1}{F'(\zeta)}$ stetig ist, so folgt wegen

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \frac{F(\zeta) - F(\zeta_1)}{\zeta - \zeta_1} \cdot \frac{\zeta - \zeta_1}{g(\zeta) - g(\zeta_1)} = F'(\zeta) \frac{1}{g'(\zeta)}$$

($z = g(\zeta)$, $z_1 = g(\zeta_1)$, ζ, ζ_1 auf b' , z, z_1 auf γ'),

daß $f'(z)$ auf γ' existiert und dort zugleich mit $\frac{1}{f'(z)}$ stetig ist. —

92. Da wegen der Stetigkeit der Tangente C in jedem Punkte P regulär unbewallt ist (d. h. für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von C in P die Bedingung $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ gilt) und ferner in jedem inneren Punkte P von c die Integrale (10, 5) konvergieren, sind die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt, und es folgt daraus, daß $\varphi(w)$ in jedem inneren Punkte von c eine *allseitige* von 0 und ∞ verschiedene Ableitung besitzt. —

Um die Stetigkeit von $\varphi(w)$ zu zeigen, beweisen wir zuerst: *Ist c' ($\alpha' \leq s \leq \beta'$) ein fester innerer Teilbogen von c , so gibt es zwei für alle w auf c' feste Konstanten K_1, K_2 , so daß für alle w auf c'*

$$(10, 6) \quad 0 < K_1 \leq |\varphi'(w)| \leq K_2$$

ist. Der Beweis für diese Behauptung wird sich aus dem Zusatz zum Satze 7 ergeben. — Da C nach der Annahme durchweg stetige Tangente besitzt, können wir für die analytische Darstellung von C durchweg die Bogenlänge als Parameter benutzen und also annehmen, daß C durchweg durch die Gleichung (10, 4) mit $0 \leq s < S$ (S Gesamtlänge von C) gegeben ist, wobei s bei der Durchlaufung von C in *mathematisch positivem Sinne wächst*. (Der Bogen c werde, wie in der Formulierung des Satzes angegeben wird, durch diese Gleichung für $0 \leq s \leq a \leq S$ geliefert.) Wir denken uns die Funktionen $w(s), w'(s)$ sogleich für alle reellen s stetig und periodisch fortgesetzt, indem wir $w(s + \nu S) = w(s), w'(s + \nu S) = w'(s)$ ($\nu \geq 0$, ganz), $0 \leq s < S$, annehmen. Ähnlich können wir den Tangentenwinkel $\theta(s)$ von C etwa für $s = 0$ beliebig normieren und zunächst für alle s mit $0 \leq s < S$ und sodann für alle reellen s stetig fortsetzen, indem wir $\theta(s + \nu S) = \theta(s) + 2\pi\nu$ ($\nu \geq 0$, ganz), $0 \leq s < S$, annehmen.

93. Es sei nun $P(s_0)$ ein beliebiger Punkt von C . Dann ist jeder Punkt P von C eindeutig dadurch festgelegt, daß wir seinen längs C gemessenen kürzesten Abstand σ von $P\left(-\frac{S}{2} \leq \sigma < \frac{S}{2}\right)$, mit einem Vorzeichen versehen, angeben. (Dabei soll natürlich σ in der Richtung wachsender s

von s_0 aus positiv gerechnet werden.) Wegen der Stetigkeit der Tangente gibt es dann ein c_1 mit $0 < c_1 < 1$, so daß, unter $r(P_0, P)$ den geradlinigen Abstand zweier Punkte $P_0 = P(s_0)$, $P = P_s(\sigma)$, unter σ (wie eben gesagt) die Länge des kürzesten sie verbindenden Bogens von C verstanden,

$$(10, 7) \quad 0 < c_1 \leq \frac{r(P_0, P)}{\sigma} \leq 1$$

gilt und also die Bogenlänge „gleichmäßig“ für alle Punkte $P_0 = P(s_0)$ von C (und also insbesondere auch von c') metrischer Parameter von C ist.

94. Es sei nunmehr $P(s_0)$ ein Punkt auf c' , $\xi_{s_0}(\sigma)$, $\eta_{s_0}(\sigma)$ seien die in Nr. 47 eingeführten Größen (der Abstand des Punktes $P_{s_0}(\sigma)$ von der Tangente in $P(s_0)$ bzw. die Projektion des Radiusvektors $\overline{P(s_0)P_{s_0}(\sigma)}$ auf die Tangente in $P(s)$). Wir denken uns die Tangente und die Normale in $P(s_0)$ als die Achsen eines Koordinatensystems (x^*, y^*) aufgefaßt (ähnlich wie es in der Differentialgeometrie üblich ist: das „mitbewegte Zweibein“), und zwar fassen wir die innere Normale als positive x^* -Achse, diejenige Halbgerade der Tangente, die aus ihr durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch-positivem Sinne hervorgeht, als die positive y^* -Achse auf. Dann ist, wenn $\alpha = \alpha(s_0)$ den Winkel zwischen der positiven x - und der positiven x^* -Achse bezeichnet und $w^* = x^* + iy^*$ gesetzt wird, bei geeigneter Zählung von α $w^* = (w - w(s_0)) e^{i\alpha}$ oder

$$\begin{aligned} x^* &= (x - x(s_0)) \cos \alpha - (y - y(s_0)) \sin \alpha, \\ y^* &= (x - x(s_0)) \sin \alpha + (y - y(s_0)) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Sind $x^*(\sigma)$, $y^*(\sigma)$ die Koordinaten des Punktes $P_{s_0}(\sigma)$, so ist $\xi_{s_0}(\sigma) = |x^*(\sigma)|$, $\eta_{s_0}(\sigma) = |y^*(\sigma)|$, $r^2 = x^*(\sigma)^2 + y^*(\sigma)^2$. Ferner gilt — man beachte, daß $\sigma = s - s_0$ bzw. $= s - s_0 \pm S$ ist, wo $P_{s_0}(\sigma)$ der Parameterwert s der Bogenlänge entspricht —

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{d\sigma} &= x^{*'} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, & x^{*'}(0) &= 0, \\ \frac{dy^*}{d\sigma} &= y^{*'} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, & y^{*'}(0) &= -1, \end{aligned} \quad |\sigma| < \frac{S}{2}.$$

Wir können $x^{*'}$ auch in der Form schreiben

$$(10, 8) \quad x^{*'}(\sigma) = (x'(s) - x'(s_0)) \cos \alpha - (y'(s) - y'(s_0)) \sin \alpha,$$

da wegen $x'(s_0) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $y'(s_0) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ der hinzugefügte Bestandteil $\sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$ ist.

Dann ergibt sich wegen (10, 8), daß

$$\left| \int_0^{\sigma} \frac{x^{*'}(t)}{t} dt \right| \leq \left| \int_0^{\sigma} \frac{x'(s_0+t) - x'(s_0)}{t} dt \right| + \left| \int_0^{\sigma} \frac{y'(s_0+t) - y'(s_0)}{t} dt \right|$$

für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ gilt; es ist also, wenn $\xi_{s_0}^*(t)$ die in Nr. 47 definierte Funktion von C im Punkte $P(s_0)$ ist, für die „Majorante“

$$X(t) = X_{s_0}(t) = \left| \int_0^t |x^{*\prime}(\sigma)| d\sigma \right| \text{ von } \xi_{s_0}^*(t) \text{ für jedes } \eta > 0$$

$$\left| \int_0^\omega \frac{dX(t)}{t} \right| = \left| \int_0^\omega \left| \frac{x^{*\prime}(t)}{t} \right| dt \right| \leq \eta \text{ für } |\omega| \leq \delta' \left(\frac{\eta}{2} \right)$$

gleichmäßig für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$, wo $\delta'(\eta)$ die „Konvergenzfunktion“ der Integrale (10, 5) ist.

95. Es werde nun σ auf das Intervall $|\sigma| \leq \delta < \frac{S}{2}$ beschränkt, wo δ so klein gewählt ist, daß es von mindestens einem Wert der eben genannten Funktion $\delta'(\eta)$ übertroffen wird⁸¹⁾. Da nun die Kurve ganz im Endlichen verläuft, also einen endlichen Durchmesser D hat, so sind für die Kurve C im Punkte $P(s_0)$ gleichmäßig für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$, im Koordinatensystem (x^*, y^*) betrachtet, sämtliche Voraussetzungen des Zusatzes zum Satze 7 erfüllt. Daher gibt es zu jedem Punkte $P(s)$ erstens einen Punkt $w^* = a_{s_0} = a$ in G und zwei für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ feste positive Konstanten d, M , so daß der Kreis mit d um a_{s_0} in G liegt, und daß für die durch $\varphi_{s_0}(\alpha') = 0, \varphi_{s_0}(0) = 1$ normierte Abbildungsfunktion $z = \varphi_{s_0}(w^*)$ von G auf $|z| < 1$ für alle w^* auf C

$$|\varphi'_{s_0}(0)| = \lim_{w^* \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi_{s_0}(w^*) - \varphi_{s_0}(0)}{w^*} \right| \geq M > 0$$

für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ gilt. Zweitens gibt es zu jedem $P(s_0)$ einen Punkt $w^* = a'_{s_0} = a'$ in G und zwei für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ feste positive Konstanten d', M' , so daß der Kreis mit d' um a'_{s_0} in G liegt, und daß ferner für die durch $\varphi_{s_0}(\alpha') = 0, \varphi_{s_0}(0) = 1$ normierte Abbildungsfunktion $z = \varphi_{s_0}(w^*)$ von G auf $|z| < 1$ für alle w^* auf C

$$|\varphi'_{s_0}(0)| = \lim_{w^* \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi_{s_0}(w^*) - \varphi_{s_0}(0)}{w^*} \right| \leq M'$$

für alle s_0 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ gilt⁸²⁾. Hieraus folgt nun nach dem Hilfssatz 15

⁸¹⁾ Für den Fall, daß die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle s auf C konvergieren und dieselbe „Konvergenzfunktion“ $\delta'(\eta)$ besitzen, wollen wir δ genauer festlegen. Ist $S \geq l > 0$, so soll $\delta = \frac{1}{2} \text{Min}(l, \delta'(l))$ gesetzt werden (δ hängt also nur von l und der Funktion $\delta'(\eta)$ ab).

⁸²⁾ Man beachte, daß die Zahlen d, M und d', M' nach dem Zusatz zum Satze 7 nur von der Konstanten c_1 in (10, 7), dem Durchmesser D von C , von δ und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängen. Da in dem Falle, daß die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle s auf C konvergieren, die Zahl δ nach Fußnote ⁸¹⁾ als nur von der unteren Schranke l von S und von der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängig gewählt werden kann und soll, so hängen dann d, M, d', M' nur von c_1, l, D und der Funktion $\delta'(\eta)$ ab.

(10, 6)⁸³), sobald wir zeigen, daß man jeden der den Punkten a_{s_0} bzw. a'_{s_0} im (x, y) -System entsprechenden Punkte A_{s_0}, A'_{s_0} mit dem Punkte w_0 , für den $\varphi(w) = 0$ ist, durch eine ϱ -Kurve in bezug auf G für ein passendes $\varrho > 0$ verbinden kann. Dies folgt aber wegen (10, 7) sofort aus dem Hilfssatz 16. Denn ist ϱ' der Radius einer Kreisscheibe um w_0 , die ganz in G liegt, und ist $r = \frac{1}{2} \text{Min}(d, d', \varrho')$, wo d resp. d' die eben genannten unteren Schranken für die Abstände von a_{s_0} resp. a'_{s_0} von C sind, so kann man nach Hilfssatz 16 wegen (10, 7) jeden Punkt A_{s_0} bzw. A'_{s_0} mit w_0 durch eine ϱ -Kurve mit $\varrho = \frac{rc_1}{2}$ verbinden, wobei c_1 die in (10, 7) definierte Konstante ist⁸⁴). —

96. Jetzt beweisen wir die *Stetigkeit* von $\varphi(w)$. Nach dem Satze von Lindelöf in Nr. 64 ist der Tangentenwinkel $\theta^*(\vartheta)$ von C als Funktion des Zentriwinkels ϑ stetig, und es gilt (bei geeigneter Normierung der Winkel mod 2π)

$$(10, 9) \quad \theta^*(\vartheta) = \arccos f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

Weiterhin bemerken wir, daß wegen der Beschränktheit der Ableitung $f'(e^{i\vartheta})$ von $f(e^{i\vartheta})$ ⁸⁵) für die Bogenlänge s von C als Funktion des Parameters ϑ die Relationen gelten

$$s(\vartheta_1) - s(\vartheta_2) = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} |f'(e^{i\vartheta})| d\vartheta,$$

und fast überall

$$\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} = |f'(e^{i\vartheta})|, \quad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{|f'(e^{i\vartheta})|} = |\varphi'(w(s))|.$$

Schließlich gilt auf dem c' entsprechenden Bogen γ' von $|z| = 1$

⁸³) Nach Hilfssatz 15 dürfen die Konstanten $K_1 = \lambda_1 M$, $K_2 = \lambda_2 M'$ gesetzt werden, wo λ_1, λ_2 als nur von dem Durchmesser D von C und dem Radius ϱ der ϱ -Kurve in bezug auf G abhängig gewählt werden können, durch die ein jeder Punkt A_{s_0} resp. A'_{s_0} mit w_0 verbunden werden kann.

⁸⁴) Da für den Fall, daß die Integrale (10, 5) durchweg auf C gleichmäßig konvergieren, die Zahlen d, d' , wie in Fußnote ⁸³) gesagt, nur von D , der unteren Schranke l von S , c_1 und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängig sind, so folgt hieraus, daß auch ϱ nur von D, l, c_1 , der Funktion $\delta'(\eta)$ und ϱ' abhängt. Da aber auch M, M' (nach Fußnote ⁸³) und λ_1, λ_2 (nach Fußnote ⁸³) nur von diesen Größen abhängen, erhalten wir in diesem Falle das Resultat: *Konvergieren die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle s auf C , so gilt die Relation (10, 6) für alle w auf C mit den nur von D, l, c_1, ϱ' und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängigen Konstanten $K_1 = \lambda_1 M, K_2 = \lambda_2 M'$, wobei D der Durchmesser von C, l eine untere Schranke für die Gesamtlänge S von C, c_1 die in (10, 7) definierte Konstante und ϱ' der Radius einer ganz in G liegenden Kreisscheibe mit dem Mittelpunkte w_0 ($\varphi(w_0) = 0$) ist.*

⁸⁵) H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, 2. éd., pp. 62 ff.

$(\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2, |z| = 1)$ wegen (10, 6)

$$(10, 10) \quad \frac{1}{K_2} \leq \frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} \leq \frac{1}{K_1},$$

$$(10, 11) \quad \left| \frac{s(\vartheta) - s(\vartheta')}{\vartheta - \vartheta'} \right| \leq \frac{1}{|\vartheta - \vartheta'|} \left| \int_{\vartheta'}^{\vartheta} \frac{ds}{d\vartheta} d\vartheta \right| \leq \frac{1}{K_1}.$$

Nach einem (oben mehrfach benutzten) Satze von Fatou⁸⁶⁾ hat nun die zu $-\text{arc } f'(z)$ konjugierte Potentialfunktion $\text{lg } |f'(z)|$ an der Stelle ϑ dann und nur dann einen Randwert bei radialer Annäherung, wenn das Integral

$$(10, 12) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \text{arc } f'(e^{i(\vartheta-t)})}{\text{tg } \frac{t}{2}} dt$$

existiert, und dieser Randwert ist bis auf eine feste additive Konstante ($K = \log |f'(0)|$) durch das Integral (10, 12) gegeben. Existiert insbesondere dieses Integral für $\vartheta_1 < \tau_1 \leq \vartheta \leq \tau_2 < \vartheta_2$ gleichmäßig, so sind die Randwerte $\text{lg } |f'(e^{i\vartheta})|$ auf diesem abgeschlossenen Bogen $\tau_1 \leq \vartheta \leq \tau_2$ (gleichmäßig) stetig. Wenn wir also die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (10, 12) nachweisen, so ist damit die Stetigkeit von $f'(z)$ auf diesem Bogen und somit die von $\varphi'(w)$ auf dem entsprechenden Bogen von C dargetan. Um dies aber zu beweisen, genügt es, die gleichmäßige Konvergenz der Integrale

$$(10, 13) \quad \int_0^{\omega'} \left| \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt, \quad \int_0^{\omega''} \left| \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta-t)}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt$$

nachzuweisen. Nun beachte man, daß es nach der Voraussetzung zu jedem $\eta > 0$ ein $\beta > 0$ gibt⁸⁷⁾, so daß gleichmäßig für alle s_0 in (α', β')

⁸⁶⁾ P. Fatou, loc. cit. S. 360.

⁸⁷⁾ Da nämlich, $\theta(s_0 + \sigma) = \theta$, $\theta(s_0) = \theta_0$ gesetzt,

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \theta_0) &= \sin \theta \cdot \cos \theta_0 - \cos \theta \cdot \sin \theta_0 \\ &= \sin \theta \cdot \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 - \cos \theta \cdot \sin \theta_0 + \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0, \end{aligned}$$

also

$$(a) \quad |\sin(\theta - \theta_0)| \leq |\cos \theta_0| |\sin \theta - \sin \theta_0| + |\sin \theta_0| |\cos \theta - \cos \theta_0|$$

ist, ist für $|\theta - \theta_0| < \frac{\pi}{2}$, $|\sin(\theta - \theta_0)| < 1$, also sicher für hinreichend kleines $|\sigma|$ wegen

$$|\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2} \sin |\theta - \theta_0|, \quad |\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2} [|x'(s_0 + \sigma) - x'(s_0)| + |y'(s_0 + \sigma) - y'(s_0)|].$$

Hieraus folgt nun die im Text aufgestellte Behauptung. —

Wir knüpfen an die Ungleichung (a) noch eine weitere Bemerkung, die uns weiter unten (beim Beweise des Zusatzes 2 vom Satze 10) nützlich sein wird. Ist die „Stetigkeitsfunktion“ von $x'(s)$, $y'(s)$: $\delta(s)$, d. h. gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$,

(Fortsetzung der Fußnote⁸⁷⁾ auf nächster Seite.)

$$(10, 14) \quad \int_0^\omega \left| \frac{\theta(s_0 \pm \sigma) - \theta(s_0)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \eta \quad (\omega > 0)$$

gilt, sobald $\omega \leq \beta$ ist. Nach (10, 9) ist $(0 < t_1 < t_2)$

$$(10, 15) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\theta^*(\vartheta+t) - \theta^*(\vartheta)}{t} \right| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{(\vartheta+t) - \vartheta}{t} \right| dt.$$

Da nun für $\tau_1 \leq \vartheta \leq \tau_2$ ($0 < t_1 < t_2 < \vartheta_2 - \tau_2$)⁸⁸⁾

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\theta^*(\vartheta+t) - \theta^*(\vartheta)}{t} \right| dt = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| \frac{\sigma}{t} \frac{d\vartheta}{ds} (s+\sigma) d\sigma,$$

und dieses wegen (10, 10), (10, 11), sowie wegen $0 < \sigma_1 < \sigma_2$

$$\leq \frac{K_2}{K_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| d\sigma \leq \frac{K_2}{K_1} \int_0^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| d\sigma$$
⁸⁹⁾

so daß für alle reellen s und s_0 mit $|s - s_0| \leq \delta(\varepsilon)$

$$|x'(s) - x'(s_0)| \leq \varepsilon, \quad |y'(s) - y'(s_0)| \leq \varepsilon$$

gilt, so folgt aus (a) für $\varepsilon < \frac{1}{2}$, daß

$$(b) \quad |\sin(\theta - \theta_0)| \leq 2\varepsilon < 1$$

ist. Hieraus ergibt sich weiter, da ja (b) für alle s mit $0 \leq |s - s_0| = |\sigma| \leq \delta(\varepsilon)$ gilt und $\theta(s)$ stetig ist und für $s \rightarrow s_0$ in $\theta(s_0)$ übergeht, daß auch für alle $|s - s_0| \leq \delta(\varepsilon)$

$$|\theta - \theta_0| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} = \varepsilon\pi$$

ist, und also

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |s - s_0| \leq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right), \quad \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

ist. Somit ist auch für den Fall, daß die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle s auf C konvergieren, für alle reellen s_0 das Integral

$$(c) \quad \left| \int_0^a \left| \frac{\theta(s_0+t) - \theta(s_0)}{t} \right| dt \right| \leq \eta$$

für $|a| \leq \beta(\eta) = \text{Min}\left(\delta'\left(\frac{\eta}{\pi}\right), \delta\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, so daß die „Konvergenzfunktion“ des Integrals in (c) nur von den Funktionen $\delta'(\eta)$ und $\delta(\varepsilon)$ abhängt.

⁸⁸⁾ Für die Rechtfertigung der Variablentransformation vergleiche etwa Hobson, Theorie of functions of a real variable, Cambridge 1907, p. 410 f.

⁸⁹⁾ Die „Konvergenzfunktion“ $\delta''(\eta)$ des Integrals

$$\int_0^a \left| \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta \pm \tau)}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta})}{\tau} \right| d\tau \quad (\vartheta \text{ beliebig, reell})$$

darf also $= \beta\left(\frac{K_2}{K_1} \eta\right)$ gesetzt werden, wo $\beta(\eta)$ die am Schlusse der Fußnote ⁸⁷⁾ angegebene Funktion ist, und nur von der „Stetigkeitsfunktion“ $\delta(s)$ von $x'(s)$ und $y'(s)$ und der „Konvergenzfunktion“ $\delta'(\eta)$ der Integrale (10, 5) abhängt.

ist, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (10, 14) und (10, 15) die gleichmäßige Konvergenz des ersten der Integrale (10, 14) für $\tau_1 \leq \vartheta \leq \tau_2$. Die des zweiten ergibt sich ganz analog. — Damit ist der Satz 10 bewiesen. —

97. Wir formulieren nun noch das in der Fußnote ⁸⁴⁾ gewonnene Ergebnis besonders als

Zusatz 1 zum Satze 10. *Es sei C eine geschlossene durchweg mit stetiger Tangente versehene Jordankurve, die unter Zugrundelegung der Bogenlänge s als Parameter durch die Gleichungen (10, 4) dargestellt sein möge, und es sei insbesondere:*

1. *Der Durchmesser von C $\leq D$ und die Gesamtlänge S von C $\geq l > 0$.*

2. *Ist $r(P_1, P_2)$ der geradlinige Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 auf C, $\sigma(P_1, P_2)$ die Länge des sie verbindenden (nicht größeren) Bogens von C, so gelte*

$$\frac{r(P_1, P_2)}{\sigma(P_1, P_2)} \geq c_1 > 0.$$

3. *Die Integrale*

$$(10, 5) \quad \int_0^\varepsilon \left| \frac{x'(s \pm \sigma) - x'(s)}{\sigma} \right| d\sigma, \quad \int_0^\varepsilon \left| \frac{y'(s \pm \sigma) - y'(s)}{\sigma} \right| d\sigma \quad (\varepsilon > 0)$$

mögen für alle reellen Werte von s existieren und sie mögen durchweg die „Konvergenzfunktion“ $\delta'(\eta)$ besitzen, d. h. sie mögen absolut $\leq \eta$ für $\varepsilon \leq \delta'(\eta)$ sein.

w = f(z) bilde dann $|z| < 1$ so auf das Innere G von C ab, daß z = 0 in einen Punkt $w = w_0$ übergeht, der mitsamt einer vollen Kreisscheibe mit dem Radius ϱ um w_0 ganz in G liegt. Dann ist $f'(z)$ in $|z| \leq 1$ stetig, und es gibt zwei positive nur von c_1, l, D und ϱ , sowie der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängige Konstanten μ_1 und μ_2 , so daß für $|z| = 1$ und daher für alle $|z| \leq 1$

$$(10, 16) \quad 0 < \mu_1 \leq |f'(z)| \leq \mu_2$$

ist.

98. Wir heben nun noch den folgenden weiteren Zusatz zum Satze 10 hervor.

Zusatz 2 zum Satze 10. *Ist außer den in Zusatz 1 genannten Eigenschaften der Kurve C noch bekannt, daß für jedes $\varepsilon > 0$*

$$(10, 17) \quad |x'(s_1) - x'(s_2)| \leq \varepsilon, \quad |y'(s_1) - y'(s_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |s_1 - s_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

gleichmäßig für alle reellen s_1 und s_2 ist, so gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von D, l, c_1, ϱ und den Funktionen $\delta(\varepsilon), \delta'(\eta)$ abhängiges $\delta_1(\varepsilon)$, so daß für die Ableitung der im Zusatz 1 eingeführten Funktion $w = f(z)$ gilt:

$$|f'(z_1) - f'(z_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |z_1 - z_2| \leq \delta_1(\varepsilon), \quad |z_1| = |z_2| = 1.$$

Beweis. Es sei $\theta(s)$ der Tangentenwinkel von C als Funktion der Bogenlänge s , $s = s(\vartheta)$ vermittele den Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel in der z -Ebene und der Bogenlänge s von C . Dann folgt aus der Voraussetzung (10, 17), daß auch

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| \leq \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \text{ für } |s_1 - s_2| \leq \bar{\delta}(\varepsilon) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^{90)}$$

gilt. Nun ist bei geeigneter Normierung von $\theta(s(\vartheta)) = \theta^*(\vartheta)$

$$\theta^*(\vartheta) = \theta(s(\vartheta)) = \arccos f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

Da nach dem Zusatz 1 zum Satze 10 $0 < \mu_1 \leq |f'(e^{i\vartheta})| \leq \mu_2$ ist, ist auch

$$|s_1 - s_2| = |s(\vartheta_1) - s(\vartheta_2)| \leq \mu_2 |\vartheta_1 - \vartheta_2|.$$

Daher ist für $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \bar{\delta}(\varepsilon) = \text{Min}\left(\frac{\bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\mu_2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$|\arccos f'(e^{i\vartheta_1}) - \arccos f'(e^{i\vartheta_2})| \leq \varepsilon$$

Hieraus werden wir herleiten: Die zu $-\arccos f'(z)$ konjugierte Potentialfunktion $\lg |f'(z)|$ hat für $|z| = 1$ durchweg stetige Randwerte $\lg |f'(e^{i\vartheta})|$, und zwar gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von D, c_1, l, ρ und den Funktionen $\delta(\varepsilon)$ und $\delta'(\eta)$ abhängiges $\delta_2(\varepsilon)$, derart, daß

$$|\lg |f'(e^{i\vartheta_1})| - \lg |f'(e^{i\vartheta_2})|| \leq \varepsilon \text{ für } |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \delta_2(\varepsilon)$$

für alle reellen ϑ_1, ϑ_2 , die dieser Bedingung genügen, ist.

Hieraus ergibt sich dann sofort in Verbindung mit dem über $\arccos f'(e^{i\vartheta})$ Gesagten wegen

$$\begin{aligned} |f'(z_1) - f'(z_2)| &= |e^{\lg f'(z_1)} - e^{\lg f'(z_2)}| = |e^{\lg f'(z_1)}| \cdot |e^{\lg f'(z_1) - \lg f'(z_2)} - 1| \\ &\leq |f'(z_2)| \cdot [e^{|\lg f'(z_1) - \lg f'(z_2)|} - 1]^{91}, \quad |z_1| = |z_2| = 1, \end{aligned}$$

und wegen $|f'(z)| \leq \mu_2$ die Richtigkeit der Behauptung des Zusatzes 2.

99. Die Behauptung über die Randwerte von $\lg |f'(z)|$ ergibt sich nun aus der Fatouschen Darstellung dieser Randwerte durch das in unserem Falle sicher für alle reellen ϑ gleichmäßig konvergente Integral (s. die Fußnote 86))

$$\lg |f'(e^{i\vartheta})| - \lg |f'(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\arccos f'(e^{i(\vartheta+\tau)}) - \arccos f'(e^{i(\vartheta-\tau)})}{\text{tg } \frac{\tau}{2}} d\tau,$$

⁹⁰⁾ Vgl. die Fußnote 87).

⁹¹⁾ Man beachte, daß für beliebiges (komplexes) a

$$|e^a - 1| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a|^\nu}{\nu!} = e^{|a|} - 1$$

ist.

und zwar stützt sich der Beweis nur auf die beiden folgenden Tatsachen: 1. Auf die eben gemachte Bemerkung über die Stetigkeitsfunktion von $\text{arc } f'(e^{i\vartheta})$ und 2. auf die Bemerkung in der Fußnote ⁸⁰⁾, nach der es eine Konvergenzfunktion des Integrals

$$\int_0^{\omega} \left| \frac{\text{arc } f'(e^{i(\vartheta+\tau)}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta})}{\tau} \right| d\tau$$

gibt, die, abgesehen von ihrem Argument, nur von μ_1, μ_2 , der Funktion $\delta(\varepsilon)$ und der Konvergenzfunktion $\delta'(\eta)$ der Integrale (10, 5), also auch nach Zusatz 1 zum Satze 10 nur von D, c_1, l, ρ und den Funktionen $\delta(\varepsilon)$ und $\delta'(\eta)$ abhängt. Es gilt nämlich allgemein die

Bemerkung. Ist $g(\vartheta)$ für alle reellen ϑ stetig, d. h. ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$|g(\vartheta_1) - g(\vartheta_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \beta(\varepsilon),$$

ist ferner

$$(10, 18) \quad \int_0^{\omega} \left| \frac{g(\vartheta \pm t) - g(\vartheta)}{t} \right| dt, \quad \omega > 0,$$

gleichmäßig für alle reellen ϑ konvergent, und ist $\beta'(\eta)$ eine Konvergenzfunktion von (10, 18), so ist auch

$$h(\vartheta) = \int_0^{\pi} \frac{g(\vartheta+t) - g(\vartheta-t)}{\text{tg } \frac{t}{2}} dt + \text{konst.}$$

stetig und $h(\vartheta)$ hat eine nur von den Funktionen $\beta(\varepsilon), \beta'(\eta)$ abhängige Stetigkeitsfunktion $\beta^*(\varepsilon)$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und es sei ω_1 eine positive Zahl $< \beta'(\frac{\varepsilon}{16})$. Wir bilden dann die Differenz

$$(10, 19) \quad h(\vartheta_1) - h(\vartheta_2) = \int_0^{\pi} \frac{g(\vartheta_1+t) - g(\vartheta_1-t) - g(\vartheta_2+t) + g(\vartheta_2-t)}{\text{tg } \frac{t}{2}} dt$$

und zerlegen in dem Integral in (10, 19) die Integrationsstrecke $0 \dots \pi$ in die beiden Teile $0 \dots \omega_1$ und $\omega_1 \dots \pi$:

$$(10, 20) \quad \int_0^{\pi} = \int_0^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\pi}.$$

Dann sind die Integrale ($\nu = 1, 2$)

$$\int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_{\nu}+t) - g(\vartheta_{\nu}-t)}{\text{tg } \frac{t}{2}} \right| dt \leq \int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_{\nu}+t) - g(\vartheta_{\nu})}{t} \right| dt + \int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_{\nu}-t) - g(\vartheta_{\nu})}{t} \right| dt \leq 2 \frac{2 \cdot \varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daher liefert das erste Integral in (10, 20) absolut genommen höchstens den Beitrag $\frac{\varepsilon}{2}$. Nunmehr denken wir uns ω_1 festgehalten und wählen $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leq \beta\left(\frac{\varepsilon \omega_1}{8\pi}\right)$. Dann wird auch für $t \geq \omega_1$

$$\left| \frac{g(\vartheta_1 \pm t) - g(\vartheta_2 \pm t)}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right| \leq \left| \frac{g(\vartheta_1 \pm t) - g(\vartheta_2 \pm t)}{t} \right| \leq \frac{2}{\omega_1} \cdot \frac{\varepsilon \omega_1}{8\pi} = \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

und daher auch das zweite Integral in (10, 20) sicher $\leq \frac{\varepsilon}{2}$. Wir können somit $\beta^*(\varepsilon) = \beta\left(\frac{\varepsilon \omega_1}{8\pi}\right)$ setzen, wo ω_1 nur von ε und der Funktion $\beta'(\eta)$ abhängt.

§ 11.

Kurven mit stetiger Tangente: Lipschitzbedingung für die Tangente.

100. Wir betrachten nunmehr Kurven C , mit einer Ecke der Öffnung $\pi\tau$ $0 < \tau \leq 2$, in einem ihrer Punkte, die von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildet wird. Man kann bei diesen Kurven auch nach einer Bedingung für den Tangentenwinkel als Funktion der Bogenlänge in der Umgebung der Ecke fragen, die hinreichend für eine konforme Ecke in diesem Punkte P_0 ist. Aus dem Satze 7 können wir eine für die *Größenordnung* der Änderung des Tangentenwinkels notwendige und hinreichende Bedingung folgern. Wir charakterisieren sie, ganz entsprechend wie bei der allgemeineren Fragestellung des Satzes 7, durch die Angabe einer Lipschitzschen Bedingung, und zwar folgendermaßen: Bildet die (im Sinne wachsender Bogenlänge gerichtete) Tangente in P mit der positiven reellen Achse den Winkel $\theta = \theta(s)$, wobei s die von P aus gezählte Bogenlänge bedeutet ($-\delta \leq s \leq \delta$), und haben die Halbtangenten in P die Richtungswinkel θ_+ und θ_- , so möge

$$(11, 1) \quad \begin{aligned} |\theta(s) - \theta_+| &\leq \omega(s), & |\theta(s) - \theta_-| &\leq \omega(|s|) \\ (0 < s \leq \delta) & & (0 > s \geq -\delta) & \end{aligned}$$

sein, wo $\omega(\sigma)$ eine für $\sigma \downarrow 0$ monoton nach 0 abnehmende stetige Funktion von σ ist, $0 < \sigma \leq \delta$. Wir bezeichnen $\omega(|s|)$ als den *Lipschitzschen Modul* von $\theta(s)$ in $s=0$. Wir fassen alle geschlossenen Jordankurven, deren Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der Bogenlänge s in einer von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildeten Ecke P_0 ($s=0$) für hinreichend kleine δ der Lipschitzschen Bedingung (11, 1) genügen, zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ zusammen.

Satz 11. *Hinreichend und notwendig dafür, daß alle Kurven der Klassen $L(\omega(\sigma))$ in dem betrachteten Punkte P_0 eine konforme Ecke*

besitzen, ist, daß das Integral

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma, \quad \varepsilon > 0,$$

konvergiert.

101. Vorbemerkung. Die Bedingung dieses Satzes ist invariant gegenüber einer Transformation der Form $w^* - w_1^* = (w - w_1)^\alpha$, d. h. nach Ausführung dieser Transformation geht die Kurve C in eine Kurve C^* über mit einer Ecke $\pi\tau\alpha$, in $w^* = w_1^*$, und es gibt gleichfalls eine Funktion $\omega^* = \omega^*(|s^*|)$ der Bogenlänge s^* der transformierten Kurve, so daß der Tangentenwinkel $\theta^* = \theta^*(s^*)$ von C^* in der Umgebung von $w^* = w_1^*$ der Bedingung genügt ($\theta_+^* = \lim_{s^* \downarrow 0} \theta^*(s^*)$, $\theta_-^* = \lim_{s^* \uparrow 0} \theta^*(s^*)$):

$$|\theta^*(s^*) - \theta_\pm^*| \leq \omega^*(|s^*|),$$

und das Integral

$$\int_0^{s_1^*} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma} d\sigma \quad \text{gleichzeitig mit} \quad \int_0^{s_1} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

konvergiert und divergiert. Wir berechnen zuerst den Winkel $\theta^*(s^*)$, in den $\theta(s)$ durch die obige Transformation übergeht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w_1 = 0$, $w_1^* = 0$. Dann ist für w^* auf C^* , wenn $w = R e^{i\beta} = x(s) + iy(s)$ gesetzt wird,

$$(11, 2) \quad \frac{dw^*}{ds} = \alpha w^{\alpha-1} \frac{dw}{ds} = \alpha R^{\alpha-1} e^{i\beta(\alpha-1)} (x'(s) + iy'(s)) \\ = \alpha R^{\alpha-1} e^{i(\beta(\alpha-1) + \theta)}$$

Beachtet man nun, daß ($w^* = x^* + iy^*$ gesetzt)

$$(11, 3) \quad \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{x^{*\prime 2}(s) + y^{*\prime 2}(s)} = \left| \frac{dw^*}{ds} \right| = \alpha R^{\alpha-1}, \quad s^* = \int_0^s \frac{ds^*}{ds} ds,$$

ist, so findet man aus (11, 2) und (11, 3)

$$\frac{dw^*}{ds^*} = \frac{dw^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = e^{i(\beta(\alpha-1) + \theta)}.$$

Hieraus folgt, daß (bei geeigneter Normierung der Winkel) der Tangentenwinkel des transformierten Kurvenastes

$$\theta^*(s^*) = \beta(\alpha-1) + \theta(s), \quad s^* = \int_0^s \frac{ds^*}{ds} ds,$$

ist. Dann gilt für $s^* > 0$, $s > 0$ (man beachte, daß wegen (11, 3) $\text{sgn } s^* = \text{sign } s$ ist)

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| = |(\alpha-1)\beta + \theta - (\alpha-1)\theta_+ - \theta_+| \leq |\alpha-1| |\beta - \theta_+| + |\theta - \theta_+|.$$

Nun ist nach dem Satze von Rolle β gleich einem Werte von $\theta(s)$ an einer zwischen 0 und s gelegenen Stelle γs , $0 < \gamma < 1$: $\beta = \theta(\gamma s)$, also

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| \leq |\alpha - 1| \cdot \omega(|\gamma s|) + \omega(|s|),$$

und dies ist wegen der Monotonie von $\omega(|s|)$

$$\leq |\alpha - 1| \omega(|s|) + \omega(|s|) = (|\alpha - 1| + 1) \omega(|s|).$$

Nun ist aber wegen (11, 3) $|s^*| \sim |s|^\alpha$, also ist für hinreichend kleines $|s|$:

$$|s^*| \geq \left| \frac{s}{2} \right|^\alpha.$$

Daher ist wegen der Monotonie von $\omega(|s|)$

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| \leq (|\alpha - 1| + 1) \omega\left(2|s^*|^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \omega^*(|s^*|),$$

wo $\int_0^{\delta_1} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma} d\sigma$ gleichzeitig mit $\int_0^{\delta_1} \frac{\omega(t)}{t} dt$ konvergiert. Denn setzt man

$u = 2\sigma^\alpha$, so wird

$$\begin{aligned} \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma} d\sigma &= \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \frac{\omega\left(2\sigma^{\frac{1}{\alpha}}\right) (|\alpha - 1| + 1)}{\sigma} d\sigma = \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u) (|\alpha - 1| + 1)}{u^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha} \cdot \frac{d\sigma}{du} du \\ &= 2^\alpha \cdot (|\alpha - 1| + 1) \cdot \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u)}{u^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot \alpha \cdot u^{\alpha-1} du = (|\alpha - 1| + 1) \alpha \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u)}{u} du. \end{aligned}$$

102. Der Beweis des Satzes 11 ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 9 und dem Satze 8. Daß die Bedingung des Satzes *hinreichend* ist, folgt sofort aus dem Satze 9, da offenbar seine Voraussetzungen hier erfüllt sind. Um zu beweisen, daß sie *notwendig* ist, konstruieren wir auf eine einfache Weise zu einer beliebig vorgegebenen Funktion $\omega(\sigma)$, $0 < \sigma \leq \delta$, $\delta > 0$, die mit $\sigma \downarrow 0$ selbst monoton gegen 0 abnimmt, und

für die das Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$ divergiert, eine geschlossene Jordankurve Γ

mit den folgenden Eigenschaften: 1. Γ besitzt in einem ihrer Punkte P eine von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildete Ecke von vorgeschriebener Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leq 2$. 2. Für den Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der (von P aus in der einen Durchlaufungsrichtung positiv, in der entgegengesetzten negativ gerechneten) Bogenlänge s gelten die Relationen

$$(11, 4) \quad \begin{array}{ccc} |\theta(s) - \theta_+| = \omega(s), & |\theta(s) - \theta_-| = \omega(|s|), \\ s > 0 & s < 0 \end{array}$$

unter θ_+ , θ_- wie oben die Winkel verstanden, welche die Halbtangenten in P mit der positiven reellen Achse einschließen. 3. Γ hat in P sicher keine konforme Ecke. Wir verfahren bei dieser Konstruktion folgendermaßen: Wir ziehen durch $w=0$ zwei Strahlen s_1 und s_2 , die mit der positiven reellen Achse die Winkel $\tau \frac{\pi}{2}$ resp. $-\tau \frac{\pi}{2}$ bilden, und senkrecht zu s_1 die Gerade g_1 , senkrecht zu s_2 die Gerade g_2 . Wir fassen s_1 als die positive η -Achse und g_1 als die zugehörige ξ -Achse eines üblichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems (ξ, η) und analog s_2 und g_2 als die entsprechenden $+\eta$ - bzw. ξ -Achsen eines zweiten derartigen Koordinatensystems auf. Dann betrachten wir den für hinreichend kleine $s \geq 0$ sicher doppelpunktfreien Kurvenbogen

$$(11,5) \quad \xi(s) = \int_0^s \sin \omega(\sigma) d\sigma, \quad \eta(s) = \int_0^s \cos \omega(\sigma) d\sigma$$

in bezug auf ein jedes dieser Koordinatensysteme und erhalten so zwei in $w=0$ zusammenstoßende Kurvenbögen, welche die Strahlen s_1 bzw. s_2 (die entsprechenden $+\eta$ -Achsen) in diesem Punkte zu Halbtangenten besitzen und somit dort eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ bilden. Wegen der Monotonie von $\omega(\sigma)$ liegt ferner ein jeder dieser beiden Kurvenbögen *ganz auf einer Seite* der entsprechenden Achse, und zwar — wegen unserer Normierung der $+\eta$ -Achse — ganz im Innern des Winkelraumes (s_1, s_2) der Öffnung $\pi\tau$. Ergänzen wir nun diese Bögen durch einen die (nicht gemeinsamen) Endpunkte verbindenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve Γ , so ist Γ bereits die Kurve mit den angegebenen Eigenschaften. Denn daß der Tangentenwinkel in der Umgebung des Nullpunktes als Funktion der Bogenlänge s der Bedingung (11,4) genügt, folgt sofort aus (11,5). Daß aber Γ in $w=0$ keine konforme Ecke besitzen kann, ist eine Folgerung aus dem Satze 8. Sonst wäre nämlich, wenn der Kreis $|z| = |re^{i\theta}| < 1$ auf das Innere von Γ so abgebildet wird, daß $z=1$ in $w=0$ übergeht, $t' = |\vartheta|^\tau \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer Parameter von Γ in bezug auf $w=0$ (Nr.17), und es müßte das mit der Abszisse $\xi_1(t')$

von Γ als Funktion von t' gebildete Integral $\int_0^{\delta} \frac{\xi_1(t')}{t'^2} dt'$ konvergieren.

Dann müßte aber nach der Vorbemerkung 1 zum Satze 7 auch das Integral

$$\int_0^{\delta} \frac{\xi(s)}{s^2} ds \text{ und damit auch wegen } \left| \frac{\xi(s)}{s} \right| \leq 1 \text{ und}$$

$$\int_{\epsilon}^{\delta} \frac{\xi(s)}{s^2} ds = \left(-\xi(s) \frac{1}{s} \right)_{\epsilon}^{\delta} + \int_{\epsilon}^{\delta} \frac{\sin \omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma,$$

das Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(s)}{\sigma} d\sigma$ konvergieren, da ja die Bogenlänge s wegen der Stetigkeit der Tangente von Γ in der Umgebung des Punktes $w = 0$ sicher ein metrischer Parameter ist. Dies aber widerspricht der Voraussetzung. —

103. Wir machen noch zu dem Satze 11 den folgenden

Zusatz. Es möge C längs des Teilbogens c eine sich stetig drehende Tangente besitzen, und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ genüge auf einem festen inneren Bogen c' von c gleichmäßig einer Lipschitzschen Bedingung, d. h. es möge

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leq \omega(|s - s_0|)$$

sein. Dann ist die Ableitung $\varphi'(w)$ der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Inneren von C auf $|z| < 1$ auf dem Bogen c' gleichmäßig stetig, falls das Integral

$$\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

existiert.

Der Beweis dieses Zusatzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 10, da offenbar seine Voraussetzungen erfüllt sind. —

104. Man kann nun insbesondere, indem man spezielle Funktionen für $\omega(|s - s_0|)$ einsetzt, Kriterien für die Existenz einer konformen Ecke bzw. für die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ und $f'(z)$ am Rande herleiten. So kann man z. B. $\omega(\sigma) = K\sigma^\alpha$, $\alpha > 0$, setzen; das mit dieser Funktion gebildete

Integral $\int_0^{\delta_1} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma = K \int_0^{\delta_1} \sigma^{\alpha-1} d\sigma$ konvergiert. Für den Fall, daß C längs

eines Bogens c eine sich stetig drehende Tangente besitzt und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ dort gleichmäßig in s auf c einer solchen Lipschitzschen Bedingung genügt, also

$$(11, 6) \quad |\theta(s) - \theta(s_0)| \leq K|s - s_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad K > 0, \text{ fest,}$$

ist, erhalten wir den *Satz von Kellogg*⁹²⁾. Wir beweisen zugleich etwas mehr:

Satz 12. C besitze längs des Bogens c eine sich stetig drehende Tangente. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von C auf $|z| < 1$ ab. Es sei c' ein innerer Teilbogen von c . Bei dieser Abbildung entspricht c' einem Bogen γ' der Peripherie des Einheitskreises.

⁹²⁾ Kellogg, Harmonic functions and Greens integral, Transactions of the Am. Mathemat. Society 13 (1912), pp. 109—132.

Notwendig und hinreichend dafür, daß $\varphi'(w)$ und die Ableitung der zu $\varphi(w)$ inversen Funktion $f(z)$ auf c' bzw. γ' stetig sind und dort gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung mit festen Exponenten α , $0 < \alpha < 1$, und festem K in ihren Argumenten genügen, ist, daß der Tangentenwinkel $\theta(s)$ gleichmäßig in s auf c' der Bedingung (11,6) genügt.

Beweis. Ist die Voraussetzung (11,6) erfüllt, so folgt die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ bzw. $f'(z)$ auf c' bzw. γ' aus dem obigen Zusatz zum Satze 11. Es genügt nun zu beweisen, daß $f'(z)$ für z auf γ' einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α , $0 < \alpha < 1$, genügt, da wegen ($z = \varphi(w)$, $z_0 = \varphi(w_0)$)

$$\left| \frac{z - z_0}{w - w_0} \right|^\alpha \leq k, \quad |f'(z)| \geq m > 0$$

und wegen

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi'(w) - \varphi'(w_0)|}{|w - w_0|^\alpha} &= \frac{\left| \frac{1}{f'(z)} - \frac{1}{f'(z_0)} \right|}{|z - z_0|^\alpha} \cdot \frac{|z - z_0|^\alpha}{|w - w_0|^\alpha} = \frac{|f'(z) - f'(z_0)|}{|f'(z) \cdot f'(z_0)| |z - z_0|^\alpha} \cdot \left| \frac{z - z_0}{w - w_0} \right|^\alpha \\ &\leq \frac{k}{m^2} \frac{|f'(z) - f'(z_0)|}{|z - z_0|^\alpha} \end{aligned}$$

dann auch $\varphi'(w)$ einer solchen Bedingung mit demselben α genügt.

105. Zum Nachweis dafür, daß nun $f'(z)$ einer solchen Bedingung genügt, dürfen wir annehmen, daß $c \equiv C$ ist, daß also C durchweg eine sich stetig drehende Tangente besitzt und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ von C für alle s mit $0 \leq s \leq S$ (S Gesamtlänge von C) einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α genügt. Denn sonst kann man den Bogen c durch einen bis auf seine Endpunkte ganz innerhalb von C verlaufenden Jordانبogen J zu einer geschlossenen Jordankurve C^* ergänzen, die durchweg diese Eigenschaft besitzt⁹³⁾. Vermittels $z = \varphi(w)$ wird der Bogen c auf einen Bogen γ von $|\bar{z}| = 1$, die Kurve C^* auf eine geschlossene Jordankurve Γ^* abgebildet, die den Bogen γ mit $|z| = 1$ gemeinsam hat und sonst ganz innerhalb von $|z| = 1$ liegt. $z = g(\zeta)$ bilde den Kreis $|\zeta| < 1$ auf das Innere von Γ^* ab; entspricht dabei dem im Satze genannten Teilbogen γ' von γ der Bogen b' von $|\zeta| = 1$, so ist $g(\zeta)$ auf b' analytisch und $g'(\zeta)$ ist dort von 0 verschieden, so daß also auch insbesondere $\frac{1}{g'(\zeta)}$

⁹³⁾ Man kann J stückweise aus endlich vielen Bögen j_v so zusammensetzen, daß $C^* = c' + J$ durchweg stetige Tangente hat und daß ferner auf jedem Bogen j_v

$$\frac{|w'(\sigma + h) - w'(\sigma)|}{|h|^\alpha} \leq k$$

ist (σ die längs C^* gemessene Bogenlänge, $w(\sigma)$, $w(\sigma + h)$ auf j_v). Dann gilt, wie leicht zu sehen ist, eine solche Ungleichung durchweg auf C^* .

auf b' sicher eine stetige Ableitung nach ζ besitzt und somit a fortiori einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α genügt. $w = F(\zeta) = f(g(\zeta))$ vermittelt dann die Abbildung von $|\zeta| < 1$ auf das Innere der Kurve C^* . Ist nun für $w = F(\zeta)$ bewiesen, daß $F'(\zeta)$ durchweg auf $|\zeta| = 1$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α genügt, so folgt wegen $f'(z) = F'(\zeta) \cdot \frac{1}{g'(\zeta)}$ (z auf γ' , ζ auf b') nach dem eben über $\frac{1}{g'(\zeta)}$ Gesagten, daß auch $f'(z)$ für alle z auf γ' einer solchen Bedingung in z genügt. —

106. Wir nehmen jetzt also an, daß C durchweg stetige Tangente besitzt und daß der Tangentenwinkel $\theta(s)$ für alle s mit $0 \leq s \leq S$ (S Gesamtlänge von C) der Bedingung (11, 6) genügt, und zeigen, daß dann $f'(z)$ für alle $z = e^{i\vartheta}$ auf $|z| = 1$, oder, was auf dasselbe hinausläuft, für alle ϑ in $\langle 0, 2\pi \rangle$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α genügt. Hierzu benützen wir den folgenden Satz von Herrn J. Privaloff⁹⁴⁾, der eine Verschärfung eines Satzes von Herrn Fatou darstellt: *Ist $g(z) = u + iv$ in $|z| < 1$ regulär und genügt die Randfunktion von $v(re^{i\vartheta})$ für alle reellen ϑ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten α , ist also*

$$|v(e^{i\vartheta_1}) - v(e^{i\vartheta_2})| \leq K |\vartheta_1 - \vartheta_2|^\alpha,$$

so genügt auch die dann sicher existierende Randfunktion von $u(re^{i\vartheta})$ für alle diese ϑ einer solchen Bedingung mit demselben α

$$|u(e^{i\vartheta_1}) - u(e^{i\vartheta_2})| \leq K' |\vartheta_1 - \vartheta_2|^\alpha.$$

$s(\vartheta)$ bezeichne (wie oben) die Bogenlänge s als Funktion des Parameters ϑ . Wir denken uns nun den Tangentenwinkel $\theta(s)$ etwa für $s = 0$ beliebig normiert und für alle s stetig fortgesetzt und sodann die (nach dem Satze von Lindelöf in Nr. 64) in $|z| \leq 1$ stetige Potentialfunktion $\text{arc } f'(z)$ so normiert, daß durchweg

$$\theta(s(\vartheta)) = \theta^*(\vartheta) = \text{arc } f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}$$

besteht. Dann sind sowohl $\text{arc } f'(z)$ als auch $\lg f'(z)$ in $|z| < 1$ eindeutig festgelegt. Ferner gilt für $0 \leq \vartheta_0, \vartheta \leq 2\pi$

$$(11, 7) \quad \frac{|\text{arc } f'(e^{i\vartheta}) - \text{arc } f'(e^{i\vartheta_0})|}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \leq \frac{|\theta(s) - \theta(s_0)|}{|s - s_0|^\alpha} \left| \frac{s - s_0}{\vartheta - \vartheta_0} \right|^\alpha + |\vartheta - \vartheta_0|^{1-\alpha} \leq K_1, \quad 95)$$

⁹⁴⁾ J. Privaloff, Bull. de la société math. de France 44 (1916), p. 100—103. Geht man den Beweis von Herrn Privaloff durch, so erkennt man, daß die Lipschitz-Konstante K' von $u(e^{i\vartheta})$ nur von dem Exponenten α und von der Lipschitz-Konstanten K von $v(e^{i\vartheta})$ abhängt.

⁹⁵⁾ Man beachte, daß die Konstante K_1 nur von α , der oberen Schranke μ_2 von $|f'(z)|$ und der Lipschitz-Konstanten K in (11, 6) abhängt.

und daher auch für alle reellen ϑ, ϑ_0

$$\left| \frac{\operatorname{arc} f'(e^{i\vartheta}) - \operatorname{arc} f'(e^{i\vartheta_0})}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \right| \leq 2K_1.$$

Somit ist nach dem genannten Satz von Herrn Privaloff

$$\frac{|\lg |f'(e^{i\vartheta})| - \lg |f'(e^{i\vartheta_0})||}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} = \frac{1}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \left| \lg \left| \frac{f'(e^{i\vartheta})}{f'(e^{i\vartheta_0})} \right| \right| \leq K_2. \quad 96)$$

Nun ist (man beachte, daß $\lg f'(z)$ in $|z| < 1$ eindeutig und regulär und auf $|z| = 1$ stetig ist)

$$\begin{aligned} |f'(e^{i\vartheta}) - f'(e^{i\vartheta_0})| &= |e^{\lg f'(e^{i\vartheta})} - e^{\lg f'(e^{i\vartheta_0})}| = |e^{\lg f'(e^{i\vartheta_0})}| |e^{\lg f'(e^{i\vartheta}) - \lg f'(e^{i\vartheta_0})} - 1| \\ &\leq \mu_2 [e^{|\lg f'(e^{i\vartheta}) - \lg f'(e^{i\vartheta_0})|} - 1] \leq \mu_2 (e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1). \quad 91) \end{aligned}$$

Bekanntlich ist nun $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_0} \frac{e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} = 2K_1 + K_2$, so daß

$$\frac{|f'(e^{i\vartheta}) - f'(e^{i\vartheta_0})|}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \leq \mu_2 \frac{e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha}$$

in der Tat beschränkt bleibt, wenn ϑ, ϑ_0 in einem festen endlichen Intervall bleiben⁹⁷⁾.

107. Die Umkehrung des Kelloggschen Satzes ergibt sich unmittelbar aus der folgenden etwas allgemeineren Tatsache.

Es sei c ein Kurvenstück mit durchweg stetiger Tangente. $w = g(t) = u(t) + iv(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, sei eine beliebige Parameterdarstellung dieses Kurvenstücks mit durchweg stetiger und nirgends verschwindender Ableitung $g'(t) = u'(t) + iv'(t)$. s sei die von dem Endpunkt $g(\alpha)$ von c an längs c gemessene Bogenlänge s , und $w = G(s)$ sei die Parameterdarstellung vermöge der Bogenlänge s ($a \leq s \leq b$). Genügt dann $g(t)$ gleichmäßig in $\langle \alpha, \beta \rangle$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten γ , $0 < \gamma < 1$, d. h. ist also gleichmäßig für alle t_1 und t_2 in $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$(11, 8) \quad \left| \left(\frac{dg(t)}{dt} \right)_{t=t_1} - \left(\frac{dg(t)}{dt} \right)_{t=t_2} \right| \leq k |t_1 - t_2|^\gamma \quad (k \text{ fest}),$$

so gilt das analoge auch für $G'(s) = x'(s) + iy'(s)$.

⁹⁶⁾ Man beachte, daß nach dem in der Fußnote ⁹⁴⁾ Gesagten K_2 nur von α und der Lipschitz-Konstanten K_1 in (11, 7), also nach Fußnote ⁹⁵⁾ nur von α, μ_2 und der Lipschitz-Konstanten K in (11, 6) abhängt.

⁹⁷⁾ Man beachte, daß die Lipschitz-Konstante von $f'(e^{i\vartheta})$ nach den Fußnoten ⁹⁵⁾ und ⁹⁶⁾ nur von α , der Lipschitz-Konstanten K in (11, 6) und der Schranke μ_2 von $|f'(z)|$ abhängt.

Beweis. Es gibt eine feste Konstante $m > 0$, so daß für alle t in $\langle \alpha, \beta \rangle$ $|g'(t)| \geq m > 0$ ist. Wir zeigen, daß gleichmäßig für alle s, s_0 in $\langle a, b \rangle$

$$\begin{aligned} |x'(s) - x'(s_0)| &= |\cos \theta(s) - \cos \theta(s_0)| \leq K |s - s_0|^\gamma, \\ |y'(s) - y'(s_0)| &= |\sin \theta(s) - \sin \theta(s_0)| \leq K |s - s_0|^\gamma \\ &\quad (K > 0, \text{ fest}) \end{aligned}$$

gilt. Dies beweisen wir für $x'(s)$ (für $y'(s)$ ist der Beweis analog). — Wegen

$$\cos \theta(s) = x'(s) = \frac{u'_t}{|g'(t)|} = u'_t \cdot \frac{dt}{ds}, \quad y'(s) = \frac{v'_t}{|g'(t)|} = v'_t \frac{dt}{ds}$$

gilt, wenn die Werte t, t_0 den Werten s bzw. s_0 entsprechen,

$$\frac{|x'(s) - x'(s_0)|}{|s - s_0|^\gamma} \leq \frac{|u'_t(t) - u'_t(t_0)|}{|t - t_0|^\gamma} \left| \frac{t - t_0}{s - s_0} \right|^\gamma \frac{dt}{ds} + \frac{\left| \frac{dt}{ds}(t) - \frac{dt}{ds}(t_0) \right|}{|t - t_0|^\gamma} \left| \frac{t - t_0}{s - s_0} \right|^\gamma |u'_t(t_0)|.$$

Man beachte nun, daß $\left| \frac{t - t_0}{s - s_0} \right|^\gamma$ und $\frac{dt}{ds}$ wegen der Beschränktheit von $\left| \frac{1}{g'(t)} \right| = \frac{dt}{ds}$ gleichmäßig beschränkt sind. Da ferner der erste Faktor des ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung beschränkt bleibt, genügt es zu beweisen, daß

$$\frac{\left| \frac{dt}{ds}(t) - \frac{dt}{ds}(t_0) \right|}{|t - t_0|^\gamma} \leq \text{konst.}$$

gilt. Dies folgt aber sofort aus der Voraussetzung (11, 8), wenn man beachtet, daß

$$\frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left| \frac{1}{|g'(t)|} - \frac{1}{|g'(t_0)|} \right| \leq \frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left| \frac{1}{g'(t)} - \frac{1}{g'(t_0)} \right| = \frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left| \frac{g'(t) - g'(t_0)}{g'(t)g'(t_0)} \right|$$

ist, und dieses wegen $|g'(t)| \geq m > 0$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ und wegen (1, 8)

$$\leq \frac{k}{m^2}$$

ist.

108. Unter Berücksichtigung der Fußnote ⁹⁷⁾ ergibt sich noch der folgende

Zusatz zum Satz 11. *Es sei C eine geschlossene durchweg mit stetiger Tangente versehene Jordankurve, für die die Voraussetzungen 1 und 2 des Zusatzes 1 zum Satz 10 erfüllt sind. Darüber hinaus gelte für den Tangentenwinkel $\theta(s)$ von C als Funktion der Bogenlänge s ($0 \leq s < S$, S Gesamtlänge von C)*

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leq K |s - s_0|^\alpha, \quad 0 \leq s, \quad s_0 < S, \quad 0 < \alpha < 1.$$

$w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere G von C ab, daß $z = 0$ in einen Punkt $w = w_1$ übergeht, der mitsamt einer vollen Kreisscheibe vom Radius ϱ in G liegt. Dann gibt es eine nur von den in der Voraussetzung genannten Zahlen $l, \varrho, D, c_1, K, \alpha$ abhängige Konstante L derart, daß für alle z, z_1 mit $|z| = |z_1| = 1$

$$|f'(z) - f'(z_1)| \leq L |z - z_1|^\alpha, \quad L = L(l, \varrho, D, c_1; K, \alpha)$$

gilt.

Ist ferner bei dieser Abbildung $s = s(\vartheta)$ die Bogenlänge längs C als Funktion des Zentriwinkels ϑ , so ist wegen $\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} = |f'(e^{i\vartheta})|$ und wegen

$$\left| \left(\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_1} - \left(\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_2} \right| \leq |f'(e^{i\vartheta_1}) - f'(e^{i\vartheta_2})|$$

auch

$$\left| \left(\frac{ds}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_1} - \left(\frac{ds}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\vartheta_2} \right| \leq L |\vartheta_1 - \vartheta_2|^\alpha, \quad L = L(l, \varrho, D, c_1; K, \alpha).$$

Beweis. Aus dem genannten Zusatz 1 zum Satz 10 folgt — man beachte, daß die dort genannte Konvergenzfunktion der Integrale (10, 5)

$\delta'(\eta) = \left(\frac{\alpha \eta}{K} \right)^\alpha$ ist —, daß es eine Konstante $\mu_2 > 0$ gibt, die nur von $l, D, c_1, \varrho, K, \alpha$ abhängt, so daß

$$|f'(z)| \leq \mu_2 \quad \text{in} \quad |z| \leq 1$$

ist. Hieraus folgt nach der Fußnote 97) die Behauptung.

Anhang.

Wir gehen noch auf die in der Einleitung erwähnte Verallgemeinerung der Sätze der Herren Carathéodory und Valiron über die Existenz einer endlichen, im Winkelraum gebildeten Ableitung ein. Es bezeichne G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, P ($w = w_1$) einen Randpunkt von G , $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ auf G ab. Dann lautet das oben erwähnte Resultat von Herrn Carathéodory: Gibt es einen Kreis K_1 , der P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz in G verläuft, und einen Kreis K_2 , der gleichfalls den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb von G verläuft, so gibt es einen Punkt z_1 der Peripherie $|z| = 1$, so daß $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z) = w_1$ ist, wenn z „im Winkelraum“ gegen z_1 konvergiert, und ferner $f(z)$ in z_1 eine „im Winkelraum“ gebildete Ableitung besitzt. Das Resultat von Herrn Valiron kann nach Durchführung einer trivialen Transformation folgendermaßen formuliert werden: Es sei G ein im Einheitskreis $|w| = 1$ liegendes Gebiet, das den Punkt $w = 1$ zum

einfachen Randpunkt hat. $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ konform auf G ab, und es sei in $|z| < 1$ $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1$. Ferner möge es zwei bis auf $w = 1$ in G verlaufende, in $w = 1$ mündende und sich dort unter dem Winkel π treffende Kurvenbögen γ_1, γ_2 geben, die in der Umgebung des Punktes $w = 1$ durch eine Gleichung der Form

$$(1) \quad x = \frac{C|y|}{\lg \frac{1}{|y|} \lg \lg \frac{1}{|y|} \dots \left(\lg_\alpha \frac{1}{|y|}\right)^{1+\varepsilon}}, \quad w - 1 = x + iy,$$

dargestellt werden, wo $\varepsilon > 0$, C eine Konstante und $\lg_\alpha \frac{1}{|y|}$ den α -fach iterierten Logarithmus von $\frac{1}{|y|}$ bedeutet. Dann besitzt $f(z)$ in $z = 1$ eine endliche „im Winkelraum“ gebildete Ableitung. Weiterhin zeigt Herr Valiron, daß der $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-f(z)}{1-z}$ (für $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“) nicht endlich ist, wenn der Rand von G in der Umgebung von $w = 1$ von zwei in $w = 1$ unter dem Winkel π zusammenstoßenden Kurvenzweigen gebildet wird, von dem jeder durch eine Gleichung der Form

$$(2) \quad x = \frac{C|y|}{\lg \frac{1}{|y|} \lg \lg \frac{1}{|y|} \dots \lg_\alpha \frac{1}{|y|}} \quad (C \text{ Konstante}),$$

dargestellt wird.

Dieser Ansatz von Herrn Valiron hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem unsrigen: Die Einführung der Kurvenbögen (1) bzw. (2) entspricht bei unserem Ansatz der Einführung der „Majorante“ $\xi^*(t)$ von $\xi(t)$ in § 7, und zwar für den Spezialfall

$$\xi^*(t) = \frac{C|t|}{\lg \frac{1}{|t|} \lg \lg \frac{1}{|t|} \dots \left(\lg_\alpha \frac{1}{|t|}\right)^{1+\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \xi(t) = \frac{C|t|}{\lg \frac{1}{|t|} \lg \lg \frac{1}{|t|} \dots \lg_\alpha \frac{1}{|t|}}.$$

Man beachte, daß im ersten Falle das Integral $\int_{-z}^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$ konvergiert, im zweiten Falle divergiert.

Wir wollen nun diese Sätze folgendermaßen verallgemeinern: Analog wie in der in Nr. 41 gegebenen Definition bei einer Jordankurve C sagen wir auch von einem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet G , es besitze im Randpunkte P die *innere* bzw. *äußere Vergleichskurve* \mathfrak{C}_i bzw. \mathfrak{C}_a , wenn es eine geschlossene Jordankurve \mathfrak{C}_i bzw. \mathfrak{C}_a gibt, die den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz im Innern von G bzw. ganz außerhalb von G verläuft und im letzten Falle G in ihrem Innern enthält. Dann beweisen wir die folgende naheliegende Verallgemeinerung der obigen Sätze:

Es sei G ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, P ($w=w_1$) ein Randpunkt von G , und es möge G in P eine innere (\mathfrak{C}_i) und eine äußere (\mathfrak{C}_a) Vergleichskurve besitzen, die eine gemeinsame Tangente in P haben. $z = \psi_i(w)$ und $z = \psi_a(w)$ mögen das Innere von \mathfrak{C}_i bzw. von \mathfrak{C}_a auf das Innere des Einheitskreises $|z|=1$ abbilden. Ferner möge $\psi_a(w)$ in w_1 eine allseitig genommene endliche und von 0 verschiedene Ableitung besitzen, während über $\psi_i(w)$ nur vorausgesetzt werde, daß für eine in einem „festen Winkelraum“ gegen w_1 konvergierende Punktfolge ζ_μ ($\mu=1, 2, \dots$)

$$(3) \quad \left| \frac{1 - \psi_i(\zeta_\mu)}{1 - \zeta_\mu} \right| \geq m > 0$$

bleibt, unter m eine positive Konstante verstanden.

Bildet dann $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf G ab, so gibt es einen Punkt α von $|z|=1$, so daß $f(z)$ bei Annäherung von z an α „im Winkelraum“ gegen w_1 konvergiert und ferner in α eine „im Winkelraum“ genommene (endliche) Ableitung besitzt.

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\psi_i(w_1) = \psi_a(w_1) = 1$ ist und daß ferner die zu $w = f(z)$ inverse Funktion $z = \varphi(w)$ und $z = \psi_i(w)$ denselben Punkt $w = w_0$ im Innern von \mathfrak{C}_i in den Nullpunkt überführen. Ferner bemerken wir, daß der Punkt P ($w = w_1$) ein mehrfacher Randpunkt von G sein kann; alle Punkte w^* jedoch, die im Innern von \mathfrak{C}_i gegen w_1 streben, konvergieren gegen einen und denselben Randpunkt in w_1 , da ja das Innere von \mathfrak{C}_i ganz dem Innern von G angehört. Daher konvergieren ihre Bildpunkte $z = \varphi(w^*)$ nach bekannten Sätzen über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung gegen einen und denselben Punkt $z = \alpha$ der Peripherie des Einheitskreises. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha = 1$ (sonst betrachte man $f\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ und $\frac{\varphi(w)}{\alpha}$ statt $f(z)$ bzw. $\varphi(w)$). Da nun auch die Punkte ζ_μ in \mathfrak{C}_i gegen w_1 streben, konvergieren auch ihre Bildpunkte $z_\mu = \varphi(\zeta_\mu)$ gegen 1 für $\zeta_\mu \rightarrow w_1$.

Endlich bemerken wir noch, daß wegen der Winkeltreue der durch $z = \psi_i(w)$ vermittelten Abbildung die Punkte $\psi_i(\zeta_\mu)$ in einem festen Winkelraum gegen den Punkt $z = 1$ konvergieren. Daher gibt es eine positive Konstante λ , so daß

$$(4) \quad 0 < \lambda \leq \frac{1 - |\psi_i(\zeta_\mu)|}{|1 - \psi_i(\zeta_\mu)|} \leq 1$$

gilt.

Nun ist nach dem Lindelöfschen Prinzip, angewandt auf $\varphi(w)$ und $\psi_i(w)$ (da beide Funktionen im Innern von \mathfrak{C}_i regulär und absolut < 1 sind, in w_0 verschwinden, und da $\psi_i(w)$ die Abbildungsfunktion des Innern

von \mathfrak{C}_i auf $|z| < 1$ ist), für alle w im Innern von \mathfrak{C}_i

$$|\varphi(w)| \leq |\psi_i(w)|, \quad \frac{1-|\varphi(w)|}{|w_1-w|} \geq \frac{1-|\psi_i(w)|}{|w_1-w|}$$

und daher insbesondere für $w = \zeta_\mu$

$$\frac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geq \frac{1-|\psi_i(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|}.$$

Nach (4) und der Voraussetzung (3) ist daher

$$(5) \quad \frac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geq \lambda \frac{1-|\psi_i(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geq \lambda m > 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion $F(z) = \psi_a(f(z))$. $F(z)$ ist in $|z| < 1$ regulär und absolut < 1 . Daher existiert nach dem in der Einleitung zitierten Satz a) auf S. 327 (Satz 4 der in Fußnote ¹⁰) genannten Carathéodoryschen Abhandlung) der

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-F(z)}{1-z},$$

wenn z „im Winkelraum gegen“ $z = 1$ konvergiert. Wir zeigen, daß dieser Grenzwert endlich und von 0 verschieden ist. Hierzu genügt es nach dem Satze 1 in der eben zitierten Abhandlung von Herrn Carathéodory zu zeigen, daß für die Folge der Punkte $z_\mu = \varphi(\zeta_\mu)$ für die (siehe oben) die Relationen

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} z_\mu = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} F(z_\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \psi_a(\zeta_\mu) = 1$$

bestehen, der Quotient

$$(6) \quad \frac{1-|F(z_\mu)|}{1-|z_\mu|} \leq k,$$

also beschränkt bleibt. Für diesen ergibt sich aber

$$\frac{1-|F(z_\mu)|}{1-|z_\mu|} = \frac{1-|\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{|w_1-\zeta_\mu|}{1-|z_\mu|} = \frac{1-|\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{1}{\frac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|}}$$

und dies ist wegen $1-|\psi_a(\zeta_\mu)| \leq |1-\psi_a(\zeta_\mu)|$ und (5)

$$\leq \frac{|1-\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{1}{\lambda m}.$$

Da nun $\psi_a(w)$ in w , eine allseitig genommene Ableitung besitzt, ist $\left| \frac{1-\psi_a(\zeta_\mu)}{w_1-\zeta_\mu} \right|$ sicher beschränkt, womit (6) bewiesen ist. Aus der Tatsache, daß

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-F(z)}{1-z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-\psi_a(w)}{w_1-w} \frac{w_1-f(z)}{1-z}$$

für gegen 1 „im Winkelraum“ konvergierendes z existiert und endlich ist,

und daß ferner $\lim \frac{1 - \psi_a(w)}{w_1 - w}$ existiert und von 0 und ∞ verschieden ist, folgt nun, daß auch

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{w_1 - f(z)}{1 - z}$$

für $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“ vorhanden und endlich ist. Hieraus ergibt sich auch unmittelbar die Konvergenz von $f(z) \rightarrow w_1$ für $z \rightarrow 1$ „im Winkelraum“. — Hiermit ist der Satz bewiesen. —

Besitzt nun insbesondere das Gebiet G Vergleichskurven \mathfrak{C}_i und \mathfrak{C}_a , bei denen im Punkte $w = w_1$ die Voraussetzungen unseres Satzes 7 (oder auch der Sätze 9 oder 11) (für den Fall $\tau = 1$) anwendbar sind, so haben die Funktionen $\psi_i(w)$ und $\psi_a(w)$ in w_1 sicher „im Winkelraum“ gebildete Ableitungen, so daß also dieser Satz anwendbar ist. Hierin sind offenbar die oben angegebenen Resultate der Herren Carathéodory und Valiron als spezielle Fälle enthalten.

(Eingegangen am 2. Juli 1930.)