

## Die numerische Behandlung eines Schrankenverfahrens mit Anwendung auf axialsymmetrisches Stauchen

Von

K. Andresen, Braunschweig, BRD

Mit 7 Abbildungen

(Eingegangen am 27. Juni 1972)

### Zusammenfassung — Summary

**Die numerische Behandlung eines Schrankenverfahrens mit Anwendung auf axialsymmetrisches Stauchen.** Das Stauchen einfacher axialsymmetrischer Proben wird mit Hilfe des Verfahrens von der oberen Schranke untersucht. Die angegebene numerische Methode, ein iteratives Ritz-Verfahren für mehrparametrische Ansatzfunktionen, liefert bessere Schranken für die Stauchkraft als vergleichbare Verfahren in der Literatur. Zudem erhält man eine gute Approximation des momentanen Geschwindigkeitsfeldes und kann damit den Verlauf der Umformung schrittweise verfolgen. Das angegebene Verfahren läßt sich durch Wahl geeigneter Ansatzfunktionen sinnvoll auf andere Umformprozesse anwenden.

**Numerical Evaluation of an Upper Bound Theorem with Application to Axisymmetric Compression.** The compression of simple axisymmetric specimen is treated by means of the upper bound theorem. An iterative Ritz-method, proposed in this paper, yields better upper bound loads than comparable methods known in literature. Moreover, a good approximation of the instantaneous velocity field is derived. Using this field the non-stationary deformation is examined step by step. By choosing a proper system of functions for the velocity field the given method well applies to other forming processes.

### 1. Einleitung

Das Stauchen von kreiszylindrischen Proben zwischen parallelen Bahnen ist von vielen Autoren theoretisch und experimentell untersucht worden. Trotz der scheinbar einfachen Umformung sind keine hinreichend allgemeinen analytischen Lösungen des Problems bekannt. Näherungslösungen für die Stauchkraft und den Normaldruck geben im Rahmen der elementaren Theorie [1] u. a. SIEBEL und POMP [2], KÖRBER und EICHINGER [3], UNKSOW [4] sowie SCHROEDER und WEBSTER [5]. HILL [6] und BISHOP [7] finden Näherungslösungen auf Grund vereinfachter Spannungsannahmen. KUDO [8], KOBAYASHI und THOMSEN [9] und COLLINS [10] erhalten mittels der Schrankenverfahren eine Abschätzung für die Stauchkraft. Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung plastischer Formänderungen mit vereinfachter Anwendung auf das Kreiszylinderstauchen gibt HILL [11] an. NAGAMATSU [12] et al. greifen dessen Theorie auf, verbessern die Reibbedingungen und ermitteln insbesondere die Normal- und Schubspannungsverteilung an den Bahnen. In den zuvor genannten Arbeiten ist die Umform-

kinematik entweder fest vorgeschrieben oder sie wird nur für den Beginn der Umformung berechnet. STECK [13] gibt ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Statik und Kinematik instationärer Umformprozesse an, das auf der Fehlerminimierung globaler Ansatzfunktionen im Stoffgesetz beruht. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ermittlung der Umformkinematik und der Leistung mit Hilfe des Verfahrens der oberen Schranke [6]. Das Geschwindigkeitsfeld wird bei momentan festgehaltener Zylinderhöhe mittels eines iterativen Ritz-Verfahrens berechnet. Unter Verwendung dieses Feldes wird die Probenhöhe schrittweise verringert, der zugehörige Leistungsbedarf errechnet und der Konturverlauf bestimmt.

Für die im folgenden berechneten Beispiele wird das Modell des starrplastischen Körpers mit Verfestigung in Verbindung mit dem Misesschen Stoffgesetz (vgl. [1]) herangezogen. Es wird vorausgesetzt, daß der Werkstoff an den Werkzeugbahnen haftet und infinitesimal darunter flächenhaft mit maximaler Schubspannung abscherf (Modell der Haftreibung). Coulombsche Reibung kann näherungsweise erfaßt werden, indem ein gewisser Bruchteil der Fließspannung als Schubspannung an den Bahnen vorgegeben wird. Dieses Vorgehen ist auf Grund experimenteller Ergebnisse [12] zumindest in dem Bereich nicht zu flacher Proben zulässig.

## 2. Grundgleichungen

In Abb. 1 ist eine gestauchte Kreiszyylinderprobe zwischen ebenen parallelen Bahnen dargestellt. Die Bahnen bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\dot{h}$  gegeneinander. Zur Beschreibung der Geometrie und der Kinematik sind die Zylinderkoordinaten  $r, z$  (Abb. 1), der Winkel  $\psi$  und die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten<sup>1</sup>  $u, w$  eingeführt.

Die infolge der Axialsymmetrie von Null verschiedenen Formänderungsgeschwindigkeiten (vgl. [1]) sind durch

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\psi = \frac{u}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (1)$$

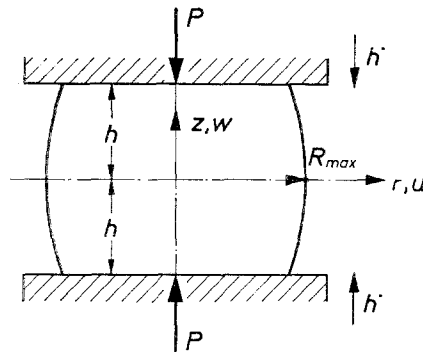


Abb. 1. Stauchen einer axial-symmetrischen Probe zwischen ebenen parallelen Bahnen

<sup>1</sup> Infolge Axialsymmetrie verschwindet die Umfangskomponente.

gegeben. Aus Symmetriegründen genügt es, den oberen rechten Quadranten der in Abb. 1 gezeigten Probe zu betrachten. Offensichtlich hat man die kinematischen Randbedingungen

$$w(r, z = 0) = 0, \quad u(r = 0, z) = 0, \quad w(r, z = h) = \dot{h} \quad (2)$$

und die Symmetriebedingungen

$$\left. \begin{aligned} u(r, z) &= -u(-r, z), & w(r, z) &= w(-r, z), \\ u(r, z) &= u(r, -z), & w(r, z) &= -w(r, -z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

zu erfüllen. Ferner darf man für große plastische Formänderungen die Erhaltung des Volumens mit der Bedingung

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

voraussetzen.

Die im folgenden benötigte innere Umformleistung je Volumenelement  $A_i$  ergibt sich mittels des Stoffgesetzes als Funktion der Vergleichsformänderungsgeschwindigkeit

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_{rz}^2)} \quad (5)$$

und der Fließspannung  $Y$  zu

$$A_i = \dot{\epsilon} Y. \quad (6)$$

Einen zusätzlichen Leistungsanteil  $A_F$  hat man beim Abscheren des Materials entlang vorhandener Unstetigkeitsflächen  $F$  des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v} = (u, w)$  zu berücksichtigen. Bezeichnet man mit  $\Delta v_t$  den zu  $F$  tangentialen Geschwindigkeitssprung, so hat man

$$A_F = \tau_{\max} |\Delta v_t|. \quad (7)$$

$\tau_{\max}$  stellt die Scherspannung bei reiner Schubverformung dar. Sie beträgt für das Misessche Fließkriterium

$$\tau_{\max} = \frac{Y}{\sqrt{3}}. \quad (8)$$

### 3. Verfahren der oberen Schranke

In der Plastomechanik hat sich das Verfahren der oberen Schranke (vgl. [16]) als geeignetes Werkzeug zur Abschätzung der zur Umformung erforderlichen Leistung und Kraft erwiesen. Bei Verfeinerung der in diesem Verfahren benötigten Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten darf man darüber hinaus vermuten, daß mit der Optimierung der Leistung auch die erzielten Geschwindigkeitsfelder gegen die wahre Lösung konvergieren, sofern sie überhaupt eindeutig ist (vgl. [16]). Mit diesen momentanen Geschwindigkeitsfeldern läßt sich dann der Ablauf der Verformung schrittweise verfolgen.

Ein im Sinne der Schrankenverfahren zulässiges Geschwindigkeitsfeld erfüllt die Bedingung der Inkompressibilität (4) (vgl. [10]). Erstrebt man zudem ein

gegen die wahre Lösung konvergierendes Geschwindigkeitsfeld, so sind auch die Geschwindigkeitsrand- und Symmetriebedingungen (2), (3) zu erfüllen. Mit einem durch globale Funktionen  $u^*$ ,  $w^*$ <sup>2</sup> gegebenen zulässigen Geschwindigkeitsfeld bildet man mit (6), (7) die innere oder Dissipationsleistung

$$L_i^* = \int_V \dot{\varepsilon}^* Y dV + \int_F \tau_{\max} |u^*| dF, \quad (9)$$

worin das erste Integral die Verformungsleistung darstellt. Das zweite Integral, im folgenden mit „Reibleistung“ bezeichnet, stellt die Dissipationsleistung einer an den Bahnen liegenden inneren Scherzone dar. In der entsprechenden Modellvorstellung haftet der Werkstoff an den Bahnen und schert infinitesimal darunter mit der maximalen Schubspannung  $\tau_{\max}$  in einer Fläche ab.

Die wahre äußere Leistung  $L_a$  ist durch

$$L_a = 2P |\dot{h}| \quad (10)$$

mit  $P$  als wahrer Stauchkraft gegeben. Setzt man nunmehr voraus, daß der ortsabhängige Verfestigungszustand des Werkstoffs bei der momentan festgehaltenen Zylinderhöhe bekannt ist, so gilt die Abschätzung (vgl. [6]):

$$L_i^* \geq L_a \quad (\text{obere Schranke}), \quad (11)$$

und mit (10) folgt daraus zugleich eine obere Schranke für die Stauchkraft  $P$

$$P \leq \frac{L_i^*}{2 |\dot{h}|} = P^*. \quad (12)$$

Zur Optimierung der Stauchkraft  $P^*$  wird ein modifiziertes Ritz-Verfahren angewandt. Man wählt für das Geschwindigkeitsfeld ein globales Funktionensystem

$$u^* = \sum_k \alpha_k \Phi_k, \quad w^* = \sum_k \alpha_k \Psi_k \quad (13)$$

mit zulässigen Funktionen  $\Phi_k$ ,  $\Psi_k$  und freien Parametern  $\alpha_k$ . Setzt man Gl. (13) in Gl. (9) ein, so erhält man das Leistungsintegral als Funktion der unbekannt Parameter  $\alpha_k$ . Die notwendige Bedingung für das gesuchte Minimum

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (14)$$

liefert dann ein nichtlineares Gleichungssystem für die Parameter  $\alpha_k$ , dessen Lösung im allgemeinen nur iterativ zu bestimmen ist.

#### 4. Numerisches Lösungsverfahren

Als rechentechnisch einfach zu handhabende Funktionensysteme sind Polynomansätze der Gestalt

$$\sum_{i,j} a_{ij} r^i z^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad \max(i+j) = n \quad (15)$$

<sup>2</sup> Die Kennzeichnung \* bezieht sich auf das geschätzte Feld.

bekannt. Ihre numerische Stabilität erweist sich bei nichtlinearen Problemen häufig als ungenügend, so daß im folgenden die normierten Tschebyscheff-Polynome  $T_i$  (vgl. [14]) in der Form

$$\sum_{i,j} a_{ij} T_i(r) T_j(z), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, \quad \max(i+j) = n \quad (16)$$

verwendet werden. Demzufolge führt man dimensionslose Koordinaten

$$\bar{r} = \frac{r}{R_{\max}}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (17)$$

mit  $R_{\max}$  als maximal auftretenden Konturradius  $r$  ein (s. Abb. 1), so daß der Wertebereich  $\bar{r}, \bar{z}$  mit

$$0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1 \quad (18)$$

für  $T$ -Polynome sinnvoll eingeschränkt ist.

Der folgende modifizierte  $T$ -Polynomansatz

$$u = u_0 \bar{r} \sum_{i,j} a_{ij} T_i(\bar{r}) T_j(\bar{z}), \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots) \quad (19a)$$

$$w = w_0 \bar{z} \left\{ 1 + (\bar{z} - 1) \sum_{k,l} b_{kl} T_k(\bar{r}) T_l(\bar{z}) \right\}, \quad (k, l = 1, 2; \dots) \quad (19b)$$

erfüllt offensichtlich die Randbedingungen (2). Integriert man Gl. (9) nur über den oberen rechten Quadranten der Abb. 1, so sind auch die Symmetriebedingungen (3) befriedigt.

Die Bedingung der Volumenkonstanz (4) ist für Polynomansätze höheren Grades nur mühsam ohne Rechnerunterstützung zu erfüllen. Deshalb werden die Ansatzpolynome für  $u, w$ <sup>3</sup> ausmultipliziert und nach Potenzkombinationen  $\bar{r}^i \bar{z}^j$  geordnet. Führt man den Funktionsvektor

$$\mathbf{f}^T = (1, \bar{r}, \bar{z}, \bar{r}^2, \bar{r} \bar{z}, \bar{z}^2, \dots) \quad (20)$$

und die Parametervektoren

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}^T &= (a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, \dots), \\ \mathbf{b}^T &= (b_{00}, b_{10}, b_{01}, b_{20}, b_{11}, b_{02}, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

sowie die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  ein, so erhält man Gl. (19) in Matrixschreibweise

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \\ w &= w_0 \mathbf{f}^T \mathbf{B} \mathbf{b}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Volumenkonstanz (4) ergibt nun

$$\frac{u_0}{R_{\max}} \left( \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \bar{r}} + \frac{\mathbf{f}^T}{\bar{r}} \right) \mathbf{A} \mathbf{a} + \frac{w_0}{h} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \bar{z}} \mathbf{B} \mathbf{b} = 0, \quad (23)$$

<sup>3</sup> \* im folgenden fortgelassen.

worin man den zunächst beliebigen Faktor  $u_0$  zweckmäßig zu

$$u_0 = \frac{R_{\max}}{h} w_0 \quad (24)$$

annimmt. Faßt man in den abgeleiteten Funktionsvektoren  $\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \bar{r}} + \frac{\mathbf{f}^T}{\bar{r}}$  und  $\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \bar{z}}$  Glieder mit gleichen Potenzkombinationen  $\bar{r}^i \bar{z}^j$  zu einem neuen Vektor  $\mathbf{g}$  zusammen<sup>4</sup>, so folgt aus (23) mit geeignet umgeformten Matrizen  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{g}^T (\mathbf{A}' \mathbf{a} + \mathbf{B}' \mathbf{b}) = 0. \quad (23a)$$

Da der Funktionsvektor  $\mathbf{g}^T$  beliebige Werte annimmt, ist diese Gleichung nur dann erfüllt, wenn der Klammerausdruck verschwindet. Man löst ihn nach dem Vektor höchster Dimension auf; im vorliegenden Fall nach  $\mathbf{a}$ , wenn

$$\max (i + j) = \max (k + l) + 1$$

gewählt wird. Dann ist  $\mathbf{A}$  quadratisch<sup>4</sup> und man hat

$$\mathbf{a} = -\mathbf{A}'^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{b}. \quad (25)$$

Mit

$$\bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{A} \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{B}' \quad (26)$$

folgen aus Gl. (22) die zulässigen Ansatzfunktionen

$$u = u_0 \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{b}, \quad w = w_0 \mathbf{f}^T \mathbf{B} \mathbf{b} \quad (27)$$

mit nur einer Parameterschar  $\mathbf{b}$ . Setzt man  $u$ ,  $w$  (27) und die daraus abgeleiteten Formänderungsgeschwindigkeiten (1) in das Leistungsintegral (9) ein, und beachtet

$$|u| = +\sqrt{u^2}, \quad (28)$$

so erhält man in Matrixschreibweise den übersichtlichen Ausdruck

$$L_i^* = \int^V \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{M}_v \mathbf{b}} Y dV + \int^F \tau_{\max} \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{M}_F \mathbf{b}} dF = \text{Extr.} \quad (29)$$

Darin ergibt sich die Funktionsmatrix  $\mathbf{M}_F$  mit (27), (28) zu

$$\mathbf{M}_F = u_0^2 \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{f} \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{A}}, \quad (30)$$

und  $\mathbf{M}_v$  erhält man durch geeignete Summierung ähnlicher Funktionsmatrizen, deren Koeffizientenmatrizen durch die abgeleiteten Ansatzfunktionen bestimmt sind.

Die für das gesuchte Leistungsminimum notwendige Bedingung (14) geht mit (29) über in

$$\frac{\partial L_i^*}{\partial \mathbf{b}'} = \int^V \frac{\mathbf{M}_v \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{M}_v \mathbf{b}}} Y dV + \int^F \tau_{\max} \frac{\mathbf{M}_F \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{M}_F \mathbf{b}}} dF = \mathbf{0}. \quad (31)$$

<sup>4</sup> Treten ungleiche Potenzkombinationen oder in Gl. (23a) nichtquadratische Matrizen auf, so sind zusätzliche Eliminationen erforderlich.

Hierin ist zu beachten, daß der Parametervektor  $\mathbf{b}$  mindestens eine konstante Komponente enthält, die Ableitung also nach dem um ein Element reduzierten Vektor  $\mathbf{b}'$  erfolgt. Setzt man nunmehr sinnvoll gewählte Schätzwerte  $\mathbf{b}$  in die Wurzelargumente ein, so liefert (31) nach numerischer Integration ein lineares Gleichungssystem für den ersten iterierten Parametervektor  $\mathbf{b}^1$ . Diesen setzt man wiederum als Näherungswert in die Wurzelargumente ein, iteriert ein weiteres Mal und so fort, bis die Differenzen der Komponenten des iterierten und des vorhergehenden Vektors einen vorgegebenen Fehler unterschreiten.

Der aufwendigste Teil des angegebenen Verfahrens liegt in der Integration des Gleichungssystems (31). Hier kann man die Rechenzeit entscheidend verringern, wenn man die Matrizen  $\mathbf{M}_F$ ,  $\mathbf{M}_v$  nicht durch Multiplikation der überwiegend mit Nullen besetzten Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  usw. mit den Funktionsvektoren  $\mathbf{f}$  erzeugt, sondern die von Null verschiedenen Elemente direkt, d. h. ohne Matrizenoperation mit den Funktionswerten, multipliziert. Eine entsprechende Rechenprozedur wird mittels alphanumerischer Datenverarbeitung hergestellt. Damit hat man die Möglichkeit, ohne großen Aufwand verschiedene Ansatzfunktionen bei geringem Fehlerrisiko zu erproben.

### 5. Instationäre Umformung und Verfestigung

Ist der Parametervektor  $\mathbf{b}$  für die momentan festgehaltene Höhe der Probe ermittelt, so sind auch die Geschwindigkeiten und die Formänderungsgeschwindigkeiten über (27) bzw. (1) in allen Punkten des Körpers bekannt.

Gibt man sich ein geeignetes Zeitinkrement  $\Delta t$  oder eine entsprechende Höhenabnahme  $\Delta h$  vor, so erfahren die Punkte des Körpers näherungsweise die Verschiebung

$$\Delta r = u \Delta t = u \frac{\Delta h}{\dot{h}}, \quad \Delta z = w \Delta t = w \frac{\Delta h}{\dot{h}}. \quad (32)$$

Insbesondere erhält man die Veränderung der Randkontur. Bei u. U. zulässigen größeren Höhenabnahmen  $\Delta h$  wendet man zur besseren Erfüllung der Volumenkonstanz einen Mittelwert  $\bar{u}$

$$\bar{u} = u \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{\Delta h}{h} \right) \quad (33)$$

anstelle von  $u$  an. Den Korrekturfaktor in der Klammer erhält man durch näherungsweise Mittelwertbildung der Geschwindigkeiten bei rein zylindrischer Umformung und vorgegebener Höhenabnahme  $\Delta h$ .

Zusammen mit der schrittweisen Höhenabnahme um  $\Delta h$  wird die Vergleichsformänderung (vgl. [1])

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varepsilon} \frac{\Delta h}{h} \quad (34)$$

und die Formänderungsarbeit

$$\Phi = \Phi_0 + \bar{\varepsilon} Y \frac{\Delta h}{h} \quad (35)$$

aufsummiert.

Zieht man experimentell ermittelte Fließkurven

$$Y = Y(\bar{\varphi}) \quad \text{oder} \quad Y = Y(\Phi)$$

heran, so kann man nach jedem Iterationsschritt mit den neu ermittelten Werten  $\bar{\varphi}$  bzw.  $\Phi$  die Verfestigung des Körpers berechnen. Damit wird die Fließspannung im Körper eine Funktion der Koordinaten und der Vorgeschichte

$$Y = Y(r, z, \Phi).$$

Der Einfluß der Formänderungsgeschwindigkeit auf die Fließspannung kann auf diese Weise nicht berücksichtigt werden.

## 6. Ergebnisse

### 6.1 Stauchen eines Vollkreiszyinders

Im folgenden ist das Berechnungsverfahren von Kap. 4 auf das Stauchen von Vollkreiszyindern ohne Verfestigung angewandt worden. Der in Gl. (16) bzw. (19) beschriebene Ansatz mit Polynomen maximal sechsten Grades führt nach Erfüllung der Bedingungen (2), (3), (4) auf ein Funktionssystem mit  $m = 8$  freien Parametern. Die Integration der Gln. (31) erfolgt in einem Dreiecksgrundraster mit beliebig wählbarer Unterteilung. Ein Raster mit  $11 \times 11$  Punkten erwies sich im allgemeinen als ausreichend. Verfeinerte Raster ergaben abweichende numerische Ergebnisse für die Leistung allenfalls in der vierten oder fünften Dezimalstelle.

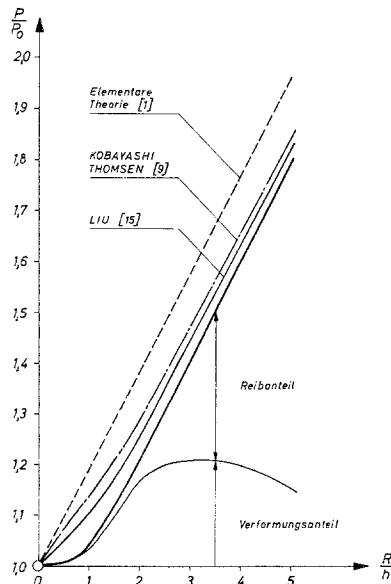


Abb. 2. Bezogene Stauchkraft  $P/P_0$  beim Kreiszyylinderstauchen in Abhängigkeit vom Verhältnis Durchmesser/Höhe ( $= R/h$ ). Haftreibung an den Bahnen ( $P_0$ : Stauchkraft bei reibungsfreiem Gleiten)



In Abb. 2 ist die obere Schranke für die Stauchkraft  $P$  bei Haftreibung bezogen auf die Stauchkraft  $P_0$  bei reibungsfreiem Gleiten für unterschiedliche Zylinderabmessungen  $R/h$  dargestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven angegeben, die auf Grund der elementaren Theorie (vgl. [1]) und mit Hilfe eines eingliedrigen Ritzansatzes von KOBAYASHI und THOMSEN [9] bzw. LIU [15] ermittelt wurden. Gegenüber dem eingliedrigen Ansatz [15] bringt der mehrgliedrige Ansatz bei flachen Zylindern ( $R/h > 2$ ) eine nahezu konstante Verbesserung um  $P/P_0 \approx 0,04$ . Bei hohen Zylindern erreicht man für  $R/h < 0,5$  annähernd den konstanten und theoretisch nicht zu unterschreitenden Wert  $P/P_0 = 1,00$ , d. h. der Reibeinfluß verschwindet vollständig. Dieses Ergebnis wird im wesentlichen durch Messungen von NAGAMATSU [12] bestätigt, wenn gleich der konstante Wert dort  $P/P_0 \approx 1,05$  beträgt.

Auf Grund des Berechnungsverfahrens erhält man die Gesamtstauchkraft aus einem Verformungs- und einem Reibanteil. Diese Aufteilung ist in Abb. 2 eingetragen. Mit wachsendem  $R/h$  steigt zunächst der Verformungsanteil. Dieses Verhalten wird qualitativ von NAGAMATSU [12] bestätigt. Für  $R/h = 2$  errechnet er bei Haftreibung eine sehr geringe Vergrößerung der Reibfläche an der Bahn. Demzufolge wird auch die Reibleistung und der Reibanteil der Stauchkraft gering sein. Ab  $R/h = 2$  bleibt der Verformungsanteil nahezu konstant, während der Reibanteil annähernd linear mit  $R$  zunimmt. Diese Aufteilung wie auch das erzielte Geschwindigkeitsfeld sind numerisch nicht sehr stabil. Änderungen der Gesamtstauchkraft in der vierten Dezimalstelle resultieren unter ungünstigen Verhältnissen aus Änderungen der dritten Dezimalstelle in den Geschwindigkeiten. Nun liegt dieses instabile Verhalten vermutlich in der Umformung selbst begründet, denn experimentelle Untersuchungen [12] zeigen, daß die Kontur beim Stauchen hoher Zylinder zwischen einfachem und doppeltem Ausbauchen wechseln kann.

Abb. 3 zeigt den Verlauf der Stauchkraft  $P/P_0$ <sup>5</sup> beim Stauchen eines einzelnen

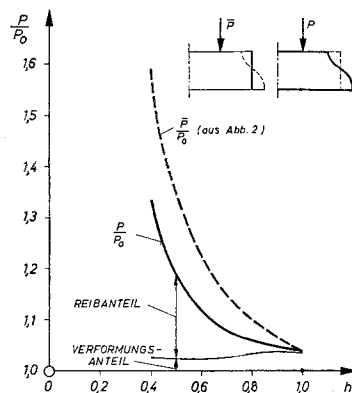


Abb. 3. Bezogene Stauchkraft  $P/P_0$  beim Stauchen eines einzelnen Kreiszyinders mit Haftreibung in Abhängigkeit von der Probenhöhe  $h$ .  $\bar{P}/P_0$  Vergleichswerte aus Abb. 2. Ausgangsabmessungen  $R = 1,0$ ,  $h = 1,0$

<sup>5</sup>  $P_0$  ist die „reibungsfreie“ Stauchkraft eines Vergleichszyinders gleichen Volumens und gleicher Höhe.

Vollkreiszyllinders ( $R/h = 1,0$ ) in Abhängigkeit von der momentanen Probenhöhe  $h$ . Vergleichsweise sind die Werte  $P/P_0$  aus Abb. 2 für einen Kreiszyllinder gleichen Volumens eingezeichnet. Man erkennt, daß die Stauchkraft  $P$  mit abnehmender Probenhöhe niedriger liegt als die des Kreiszyllinders vom gleichen Volumen. Dieses Ergebnis ist als folge der Minimaleigenschaften der aufeinanderfolgenden Geschwindigkeitsfelder plausibel. Es fällt auf, daß der Verformungsanteil der Kraft im Gegensatz zu Abb. 2 nahezu konstant bleibt.

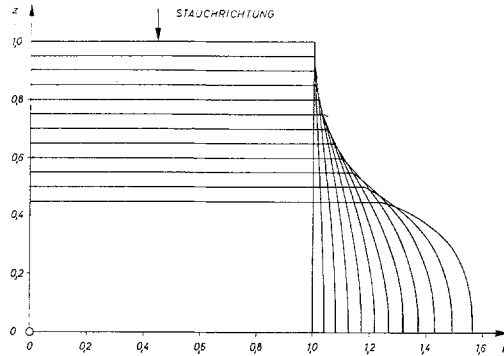


Abb. 4. Konturverlauf beim Stauchen eines Kreiszyllinders zwischen parallelen ebenen Bahnen mit Haftreibung (zu Abb. 3)

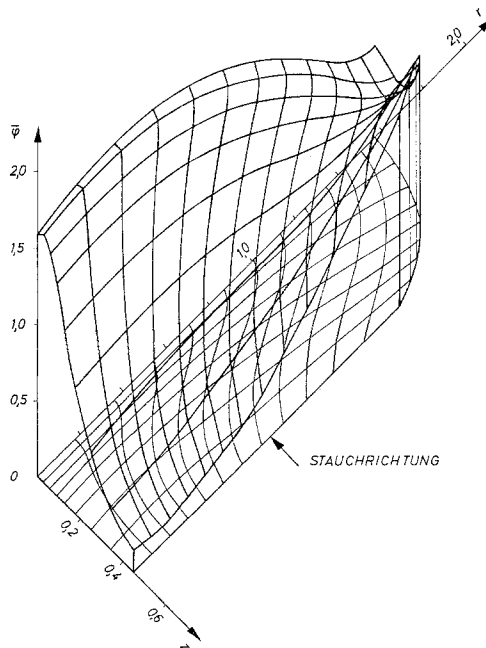


Abb. 5. Formänderung  $\bar{\varphi}$  beim Stauchen eines Kreiszyllinders zwischen ebenen parallelen Bahnen mit Haftreibung. Axialschnitt mit Verzerrung des anfänglich gleichförmigen Rasters. Höhenreduktion 55% (zu Abb. 3)

In Abb. 4 ist der Verlauf der Außenkontur eines gestauchten Zylinders mit abnehmender Probenhöhe aufgetragen. Infolge der Haftreibung ist der Konturradius an den Bahnen erheblich geringer als der maximale Radius in der Probenmitte. Abb. 5 zeigt die zugehörige Vergleichsformänderung  $\bar{\varphi}$ , die je Volumenelement längs des Verformungsweges aufsummiert worden ist. In der Probenmitte an den Bahnen beträgt  $\bar{\varphi}$  nur etwa 10% von dem Wert im Mittelpunkt der Probe ( $r = 0, z = 0$ ). Entsprechend ausgeprägt ist auch die Verzerrung des ursprünglich gleichförmigen Rasters im Axialschnitt. Im ersten Fall ist das Rechteck nahezu erhalten geblieben und weist auf einen annähernd starren Teil der Probe hin, wie er theoretisch von ebenen Formänderungsproblemen (vgl. [16]) bekannt ist. Im Probenmittelpunkt ist das Ausgangsrechteck in gleichförmiger Verformung in ein sehr gestrecktes Rechteck übergegangen.

## 6.2 Stauchen eines Hohlkreiszyinders

Das in Beispiel 6.1 angegebene Geschwindigkeitsfeld kann auch auf das Stauchen von Hohlkreiszyindern (Innenradius  $R_i$ , Außenradius  $R_a$ ) angewandt werden. Man braucht nur die Grenzen des Integrationsgebietes zu verändern.

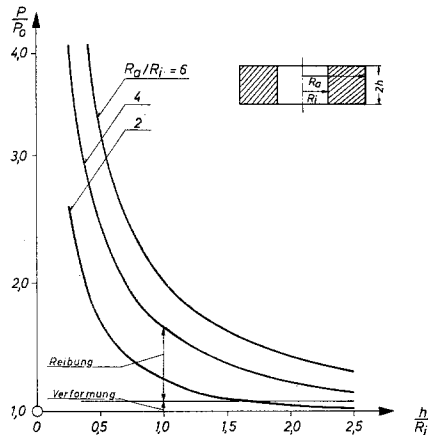


Abb. 6. Bezogene Stauchkraft  $P/P_0$  für Hohlkreiszyinder in Abhängigkeit von der auf den Innenradius  $R_i$  bezogenen Höhe  $h$  und dem Verhältnis Außen-/Innenradius ( $= R_a/R_i$ )

In Abb. 6 ist die Stauchkraft  $P$  für verschiedene Radienverhältnisse  $R_a/R_i$  wiederum auf reibungsfreie Umformkraft  $P_0$  bezogen über  $h/R_i$  aufgetragen. Für  $R_a/R_i = 4$  erfolgt die Aufteilung der Kraft  $P$  in einen Reibungs- und einen Verformungsanteil. Im Gegensatz zu Abb. 2 ist der Verformungsanteil nahezu konstant  $P/P_0 \approx 1,08$ . Offenbar ist hier die Verformung mit größerer Aufweitung der Außenkontur, d. h. größerer Reibleistung, energetisch günstiger als beim Vollkreiszyinderstauchen.

In Abb. 7 ist der Konturverlauf beim Stauchen eines Hohlkreiszyinders mit den Ausgangsabmessungen  $R_a/R_i = 2,5$ ,  $h/R_a = 1,0$  dargestellt. Innen- und Außenkontur bewegen sich zu größeren Radien hin. Ein Fließen des Materials

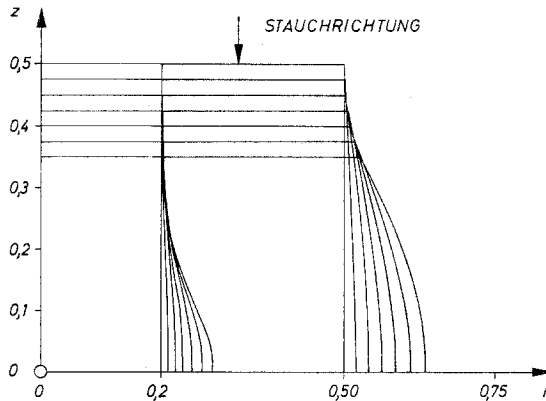


Abb. 7. Verlauf der Kontur beim Stauchen eines Hohlkreiszyinders mit Haftreibung.  
Ausgangsabmessungen:  $R_i = 0,2$ ,  $R_a = 0,5$ ,  $h = 0,5$

nach innen und außen mit einer Fließscheide an den Bahnen wie bei ebener Umformung tritt vermutlich erst bei großem Innenradius  $R_i$  und kleiner Ringbreite auf. Für das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld ist der vorliegende Ansatz (19) jedoch nicht gut geeignet.

### Literatur

- [1] LIPPMANN, H., und O. MAHRENHOLTZ: Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1966.
- [2] STEBEL, E., und A. POMP: Zur Weiterentwicklung des Druckversuches. Mitt. K.Wilh.Inst. Eisenforsch. **10**, 55—62 (1928).
- [3] KÖRBER, F., und A. EICHLINGER: Die Grundlagen der bildsamen Formgebung. Mitt. K.Wilh.Inst. Eisenforsch. **22**, 57—80 (1940).
- [4] UNKSOW, E. P.: Ingenieurmethoden zur Berechnung der Kräfte bei der Metallbearbeitung unter Druck (russisch). Moskau: Masgiz. 1955.
- [5] SCHROEDER, W., und D. A. WEBSTER: Press Forging Thin Sections: Effect of Friction, Area, and Thickness on Pressures Required. J. Appl. Mech. **16**, 289—294 (1949).
- [6] HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press. 1950.
- [7] BISHOP, J. W. F.: On the Effect of Friction on Compression and Indentation between Flat Dies. J. Mech. Phys. Solids **6**, 132—144 (1958).
- [8] KUDO, H.: Analytical and Experimental Studies of Axi-symmetric cold Forging and Extrusion. Int. J. Mech. Sci. **2**, 102—127 (1960/61).
- [9] KOBAYASHI, S., und E. G. THOMSEN: Upper and Lower Bound Solutions to Axisymmetric Compression and Extrusion Problems. Int. J. Mech. Sci. **7**, 127—143 (1965).
- [10] COLLINS, I. F.: The Upper Bound Theorem for Rigid/Plastic Solids Generalized to Include Coulomb Friction. J. Mech. Phys. Solids **17**, 323—338 (1969).
- [11] HILL, R.: A general Method of Analysis for Metal-working Processes. J. Mech. Phys. Solids **11**, 305—326 (1963).
- [12] NAGAMATSU, A., T. MUROTA und T. JIMMA: On the Non-Uniform Deformation of Material in Axially Symmetric Compression Caused by Friction. Bull. ISME **14**, 331—347 (1970).

- [13] STECK, E.: Numerische Behandlung von Verfahren der Umformtechnik. Berichte a. d. Institut für Umformtechnik, Universität Stuttgart. Heft 22 (1971).
- [14] SAUER, R., und I. SZABÓ: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil III. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1968.
- [15] LIU, J. Y.: Upper-Bound Solutions of Some Axisymmetric Cold Forging Problems. J. Eng. Ind. **93**, 1134—1144 (1971).
- [16] KACHANOV, L. M.: Foundations of the Theory of Plasticity. Amsterdam: North Holland. 1971.

*Dr.-Ing. Klaus Andresen  
Mechanikzentrum  
Technische Universität Braunschweig  
D-3300 Braunschweig  
Bundesrepublik Deutschland*