manuscripta math. 64, 1 - 33 (1989)

manuscripta
mathematica

VARIETES SYMPLECTIQUES AFFINES

M. NGUIFFO BOYOM

Abstract. We will be concerned with two open questions in symplectic geometry. The first question is the existence problem for lagrangian foliations. The second question is to know whether an affine manifold can be embedded as leaf of a lagrangian foliation. We prove that every homogeneous symplectic manifold with "closed regular" action of a solvable Lie group has lagrangian foliations. Moreover such manifold (M,ω) has a "bilagrangian linear connection (M,∇) such that ω is parallel with respect to ∇. About the second question, we prove that every connected and simply connected Lie group with left invariant affine structure can be embedded as leaf of a left invariant lagrangian foliation in a symplectic Lie group (G,ω).

Introduction. Les feuilletages lagrangiens jouent un rôle important en mécanique hamiltonienne ([1],[5],[7],[11],[16],[25],[26]) et en la théorie de quantification géométrique de Kirilov-Kostant-Souriau ([8],[9],[13],[14],[23],...). Soit (M,ω) une surface symplectique compact ; on sait que la caractéristique d'Euler-Poincaré est l'unique obstruction à l'existence de feuilletage lagrangien dans M. Pour les variétés symplectiques de dimensions supérieures à 2 on n'a pas de résultats analogues.

Ce travail est consacré aux espaces homogènes des groupes de Lie résolubles. On trouvera dans [2] un exposé général sur ce sujet. On montre que toute variété symplectique (M,ω) qui est homogène sous l'action "fermée" et régulière ([4]) possède des feuilletages lagrangiens. On sait que les feuilles de tout feuilletage lagrangien sont des variétés affines [24]. On montre que sous les hypothèses de fermeture et de régularité ci-dessus M possède une connexion linéaire bilagrangienne sans torsion (M,∇) par rapport à laquelle la forme symplectique ω est parallèle (au sens de [6]) et qui induit dans les feuillés des bifeuilletages lagrangiens préservés des structures de variété localement plate (au sens de [11]). Si on abandonne les hypothèses de fermeture et de régularités ces résultats sont encore vrais génériquement ([22]). La recherche des "connexions linéaires bilagrangiennes" (au sens de HESS, [8],[9]) localement plates s'inscrit naturellement dans le programme de [17]. (Voir aussi [15],[16]). On montre que si la connexion bilagrangienne préserve des métriques pseudo-riemaniennes dans les feuilles d'un feuilletage lagrangien préservé alors elle est localement plate. En ce qui concerne le problème de plongement lagrangien des variétés affines, on montre que tout groupe de Lie affine connexe et simplement connexion possède un plongement comme feuille d'un feuilletage lagrangien invariant à gauche défini dans un groupe de Lie symplectique (G,ω). Le lecteur intéressé par la géométrie des feuilletage lagrangiens consultera [5],[8],[15],[16].

1. Préliminaires

1.1. Variétés homogènes symplectiques

Sauf mention expresse du contraire, les variétés considérées dans ce travail ainsi que les objets géométriques définis dans ces variétés sont différentiables de classe C^∞. Soit M une variété différentiable, l'algèbre des fonctions différentiables à valeurs réelles est notée $C^\infty(M,\mathbb{R})$; $\mathfrak{X}(M)$ est le $C^\infty(M,\mathbb{R})$-module des champs de vecteurs différentiables définis dans M. Soit $\Phi : G\times M \to M$ une loi d'opération différentiable du groupe de Lie G dans la variété M. Si g est un élément de G on notera $\Phi_g(x) = \Phi(g,x)$. On dit que Φ est une loi d'opération symplectique de G dans (M,ω) lorsque pour tout $g \in G$ Φ_g est un difféomorphisme symplectique de M ; si en outre $\Phi : G\times M \to M$ est transitif, on dit que G est un groupe <u>des symétries</u> de (M,ω). Pour plus de détail concernant la géométrie des actions symplectiques des groupes de Lie voir [1],[7].

Soit (M,ω) une variété symplectique ; soit G un groupe de Lie des symétries de (M,ω). Pour tout $x \in M$ on note G_x le sous-groupe stabilisateur de x. On identifiera M avec l'espace homogène G/G_x au moyen de l'application orbitale $g \to \Phi(g,x)$. On désigne par $\mathfrak{g}_x$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ associée au sous-groupe de Lie G_x et on note π l'application canonique $g \to \Phi_g(x)$ de G sur M. Soit $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$; c'est une 2-forme fermée invariante à gauche dans G ; elle est régulière au sens de

[4] ; cela veut dire que les feuilles du feuilletage de G déterminées par le système différentiel $\ker \tilde{\omega}$ sont fermées.

Dans la suite on fera souvent usage du résultat élémentaire suivant.

LEMME 1.1. *Soit* M *une variété différentiable connexe. Soit* G *un groupe de Lie connexe qui opère différentiablement et transitivement dans* M. *Si* G *est résoluble, alors il existe dans* G *un sous-groupe normal* $\hat{G}$ *qui satisfait les conditions suivantes* : (i) $\hat{G}$ *opère transitivement dans* M ; (ii) *il existe dans* $\hat{G}$ *un sous-groupe normal de codimension* 1 $\hat{G}_1$ *qui contient la composante neutre du sous-groupe stabilisateur* $\hat{G}_x$.

Preuve. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ; notons $\mathfrak{g}_x$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ associée à G_x , $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ le premier idéal dérivé de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}_x$ l'espace vectoriel des vecteurs tangents en x à la variété M. Dans le diagramme commutatif suivant les lignes et les colonnes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g}_x \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}_x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{g}_x/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & W_x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

L'espace vectoriel W_x est le quotient de $\mathfrak{m}_x$ par le sous-espace $\mathcal{D}\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$. On voit immédiatement que $\mathfrak{g}_x/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$ coïncide avec $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$ si et seulement si $\mathfrak{m}_x$ coïncide avec $\mathcal{D}\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$. Par conséquent :

(a) si $\mathfrak{g}_x/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$ est distinct de $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$ il existe un hyperplan $\bar{\mathfrak{g}}_1$ dans $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_x/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}_1$ l'idéal $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}_1)$; $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$ et on a l'inclusion $\mathfrak{g}_x \subset \mathfrak{g}_1$. Soit G_1 le sous-groupe de Lie connexe de G qui est associé à l'idéal $\mathfrak{g}_1$; G_1 est un sous-groupe de Lie normal qui contient la composante neutre de G_x ; le sous-groupe de Lie $\hat{G} = G$ vérifie donc les conditions (i) et (ii) du Lemme 1.1.

(b) Si $\mathfrak{g}_x/\mathfrak{g}_x \cap \mathcal{D}\mathfrak{g}$ coïncide avec $\mathfrak{g}/\mathcal{D}\mathfrak{g}$ la commutativité du diagramme (2) assure que le sous-groupe des commutateurs $\mathcal{D}G$ opère transitivement dans M. Puisque G est résoluble $\mathcal{D}G$ est un groupe de Lie nilpotent, par conséquent tout sous-groupe de Lie connexe de $\mathcal{D}G$ est sous-invariant. Il existe donc dans $\hat{G} = \mathcal{D}G$ un sous-groupe normal de codimension 1 qui contient les composantes connexes neutres des sous-groupes stabilisateurs $\hat{G}_x$; cela achève la preuve du lemme 1.1.

Soit $\phi : G \times M \to M$ une action transitive d'un groupe de Lie connexe résoluble ; en vertu du lemme 1.1 ci-dessus on peut trouver un sous-groupe de Lie $\hat{G} \subset G$ tel que l'action induite $\phi : \hat{G} \times M \to M$ soit encore transitive et vérifie en plus les conditions (i) et (ii) du Lemme 1.1. Cela nous autorise dans toute la suite à supposer que si $G \times M \to M$ est une action transitive et si G est résoluble, alors il existe un sous-groupe de

Lie $G_o \subset G$ avec $\dim G_o = \dim G-1$ et G_o contient les composantes connexes neutres des sous-groupes stabilisateurs Gx, $x \in M$.

1.2. <u>Suites des sous-groupes associées aux actions symplectiques</u>

Soit (M,ω) une variété symplectique connexe de dimension $2m$. Supposons que G soit un groupe de Lie connexe résoluble des symétries de (M,ω). Quitte à remplacer G par le sous-groupe des commutateurs $\mathcal{D}G$ on supposera que G contient un sous-groupe de Lie connexe G_1 qui vérifie les deux conditions suivantes : (i) $\dim G_1 = \dim G-1$ et (ii) G_1 contient la composante neutre de G_x. En fait si G ne vérifie pas les deux conditions (i) et (ii) le lemme 1.1 assure que le sous-groupe des commutateurs $\mathcal{D}G$ opère transitivement dans M ; puisque G est résoluble $\mathcal{D}G$ est un groupe de Lie nilpotent, par conséquent tout sous-groupe de $\mathcal{D}G$ est sous-invariant, $\mathcal{D}G$ vérifie donc les condition (i) et (ii). Si G_x n'est pas connexe, il existe un sous-groupe de Lie $\tilde{G}_1$ ayant pour composante neutre G_1 et tel que $G_x \subset G_1$. On supposera donc pour simplifier que $\Phi : G \times M \to M$ est à isotropie connexe, c'est-à-dire que G_x est un sous-groupe de Lie connexe de G. Soit π la projection canonique $g \to \phi_g(x)$. Fixons un sous-groupe normal $G_1 \subset G$ tel que $\dim G_1 = \dim G-1$ et $G_x \subset G_1$. La 2-forme $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ est de rang m ; soit $\tilde{\omega}_1$ la restriction à la sous-variété G_1 de $\tilde{\omega}$; $\tilde{\omega}_1$ est une 2-forme fermée invariante à gauche de rang $m-1$ (dans G_1). Soit $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de G_1 ; $\tilde{\omega}$ est un élément de la puissance extérieure 2ième de $\mathfrak{g}^*$. Soit $\mathfrak{h}_1$ le noyau de $\tilde{\omega}_1$; $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Lie de codimension $2(m-1)$ dans $\mathfrak{g}_1$. En vertu du lemme 1.1, quitte à remplacer $\mathfrak{g}_1$ par $\mathcal{D}\mathfrak{g}_1$. On peut supposer qu'il existe un idéal $\mathfrak{g}_2$ dans $\mathfrak{g}_1$ qui vérifie les codimensions $\dim \mathfrak{g}_2 = \dim \mathfrak{g}_1 - 1$ et $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_2$. Notons alors $\tilde{\omega}_2$ la restriction à $\mathfrak{g}_2$ de la 2-forme $\tilde{\omega}_1$; c'est encore une 2-forme fermée de rang $m-2$, c'est-à-dire que $\tilde{\omega}_2 \in \Lambda^2\mathfrak{g}_2^*$ et pour a, b et c dans $\mathfrak{g}_2$ on a

$$-\tilde{\omega}_2([a,b],c) + \omega([a,c],b) - \omega([b,c],a) = 0.$$

En itérant cette construction et en posant $\mathfrak{g}_o = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_o = \mathfrak{g}_x$ on obtient une suite de triplets $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h}_k, \tilde{\omega}_k)$, $0 \leq k \leq m-1$ qui satisfait les conditions suivantes :

(i) $\mathfrak{g}_{k+1}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_k$ et la restriction à $\mathfrak{g}_{k+1}$ de $\tilde{\omega}_k$ est $\tilde{\omega}_{k+1}$.

(ii) La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_k$ est le noyau de $\tilde{\omega}_k$ et rang $(\tilde{\omega}_k) = m-k$.

(iii) $\mathfrak{g}_{k+1} \cap \mathfrak{h}_k$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}_{k+1}$.

(iv) On a $\dim \mathfrak{g}_{k+1} = \dim \mathfrak{g}_k - 1$ sauf pour au plus une valeur de k.

Pour tout $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ soit G_k (resp. H_k) le sous-groupe de Lie connexe de $G_o = G$ associé à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ (resp. $\mathfrak{h}_k$). En vertu des propriétés (i) à (iv) ci-dessus on a les relation d'inclusions suivantes :

$$(3) \qquad F_{\phi,\omega}(G) = \begin{array}{ccccc} H_{m-1} & & \supset H_1 & \supset & H_o \\ \cap & & \cap & & \cap \\ G_{m-1} & \subset \ldots & \subset G_1 & \subset & G_2 \end{array}$$

La 2-forme $\tilde{\omega}$ induit dans le sous-groupe G_k une

2-forme fermée invariante à gauche qui n'est pas autre chose que $\tilde{\omega}_k$. Le sous-groupe de Lie H_k est la feuille passant par l'élément neutre du système différentiel engendré dans G_k par Ker $\tilde{\omega}_k$. Le sous-groupe de Lie H_o est fermé dans G_o et c'est le seul des sous-groupes figurant dans (3) pour lequel on est assuré de cette propriété ; de la même façon on ignore si $\tilde{\omega}_k$ est régulière dans G_k. On va poser la définition suivante :

DEFINITION 1.2.1. *Soit (M,ω) une variété symplectique connexe de dimension 2m. Soient G un groupe de Lie connexe résoluble et $\phi : G \times M \to M$ une action symplectique transitive de G dans (M,ω). On dira que Φ est régulière* (resp. *fermée*) *si on peut choisir la suite $F_{\phi,\omega}(G) = (G_k,H_k)_k$ de sorte que chaque sous-groupe H_k* (resp. G_k) *soit un sous-groupe topologique de G_k* (resp. de G).

Exemples. 1) Si G est un groupe de Lie connexe simplement connexe et résoluble, alors toute action symplectique transitive à isotropie connexe est *régulière* et *fermée*.

2) L'action d'un groupe de Lie résoluble connexe sur toute orbite coadjointe dont l'isotropie est connexe est régulière et fermée.

Soit (M, ω) une variété symplectique connexe de dimension 2m ; soit G un groupe de Lie connexe résoluble des symétries de (M,ω). On suppose que $\phi : G \times M \to M$ est régulière au sens de la définition 1.2.1. Soit x un point fixé dans M. On suppose que G_x est connexe et on note $H_o = G_x$. Puisque ϕ est régulière, on peut choisir la suite $F_{\phi,\omega}(G) = (G_k, H_k)$, $0 \leq k \leq m-1$, de telle sorte que chaque H_k soit un sous-groupe de Lie fermé de G_k. La 2-forme $\tilde{\omega}_k$ induit alors une 2-forme symplectique ω_k dans la sous-variété $M_k = G_k/H_k$ de la variété G/H_k. Il résulte de la construction de $F_{\phi,\omega}(G)$ que l'action ϕ_k de G_k dans (M_k, ω_k) est <u>régulière</u>. On peut en effet associer à ϕ_k la suite (G_ℓ, H_ℓ), $k \leq \ell \leq m-1$.

2. <u>Feuilletages lagrangiens et structures affines</u>

2.0. <u>Feuilletages lagrangiens</u>

Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2m$. On considère une sous-variété différentiable $F \subset M$ et on note $i : F \to M$ l'application inclusion.

<u>DEFINITION</u>. <u>La sous-variété</u> $F \subset M$ <u>est dite isotrope si</u> $i^*\omega = 0$; <u>une sous-variété lagrangienne de</u> (M,ω) <u>est une sous-variété isotrope de dimension maximale</u>.

On considère maintenant un feuilletage $\mathfrak{F}$ de la variété M. On dit que $\mathfrak{F}$ est un feuilletage isotrope de (M,ω) lorsque les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont des sous-variétés isotropes de (M,ω), ([15], [16]).

Si chaque feuille de $\mathfrak{F}$ est une sous-variété lagrangienne de (M,ω) alors $\mathfrak{F}$ est appelé feuilletage lagrangien ; les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont alors de sous-variétés de dimension $m = \frac{1}{2}\dim M$.

<u>Exemples</u>. 1) Si (M,ω) est une surface symplectique, alors tout feuilletage de dimension 1 est lagrangien.

2) Soit $M = T^*N$ où N est une variété de

dimension m. Soit ω_o la forme symplectique canonique de T^*N, alors les fibres de la fibration canonique $T^*N \to N$ sont lagrangienne. La section nulle de $T^*N \to N$ est une sous-variété lagrangienne qui en général n'est pas feuille d'un feuilletage lagrangien de (T^*N, ω_o) ([11], [23],...).

Le but du numéro 2.1 suivant est la démonstration de l'existence des feuilletages lagrangiens dans les variétés symplectiques homogènes sous l'action fermée et régulière (Définition 1.2.1) d'un groupe de Lie résoluble. On commence par rappeler le résultat suivant. Soit (M, ω) une variété symplectique. On désigne par D l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire de $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ dans $\mathfrak{X}(M)$ définie par la formule suivante

$$(4) \qquad L_X i_Y \omega = i_{D(X,Y)} \omega$$

où L_X et i_Y désignent la dérivée de Lie dans la direction X et le produit intérieur par Y respectivement.

<u>PROPOSITION</u> 2.2.1. ([10],[14],[24]). <u>Si</u> $\mathfrak{F}$ <u>est un feuilletage lagrangien de</u> (M, ω) <u>alors</u> D <u>induit une structure localement plate dans chaque feuille de</u> $\mathfrak{F}$.

<u>Preuve</u>. Soient X, Y et Z des éléments de $\mathfrak{X}(M)$ et f un élément de $C^\infty(M)$. On a

$\omega(D(fX,Y),Z) = f(X\omega(Y,Z) + \omega([X,Z],Y)) - (Zf)\omega(X,Y)$ et

$\omega(D(X,fY),Z) = f(\omega(D(X,Y),Z) + \omega([X,Z],Y)) + (Xf)\omega(Y,Z)$.

Supposons que X et Y soient tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$, on a alors $\omega(X,Y) = 0$; ce qui montre que pour tout Z qui est tangent en tout point aux feuilles de $\mathfrak{F}$

on a $\omega(D(X,Y),Z) = 0$. Le champ de vecteurs $D(X,Y)$ est donc partout tangent aux feuilles de $\mathfrak{F}$ dès que X et Y le sont ; on en déduit que si X et Y sont tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}_1$ alors quel que soit $Z \in \mathfrak{X}(M)$ on aura

$$\omega(D(fX,Y),Z) = \omega(fD(X,Y),Z) ,$$
$$\omega(D(X,fY),Z) = \omega(fD(X,Y) + (Xf)Y,Z)$$

quelle que soit la fonction différentiable f. Cela montre que l'application D induit une connexion linéaire ∇^F sur chaque feuille F de $\mathfrak{F}$. On notera ∇ cette famille de connexions linéaires. Calculons les tenseurs de courbure et de torsion de ∇. Soient X, Y et Z des champs de vecteurs partout tangents aux feuilles de $\mathfrak{F}$ et soit $T \in \mathfrak{X}(M)$; on a

$$\begin{aligned}\omega(D(X,D(Y,Z)),T) &= X\omega(D(Y,Z),T) + \omega(D(Y,Z),[X,T])\\ &= X(Y\omega(Z,T)) + X\omega([Y,Z],T)\\ &+ Y\omega([X,T],Z) - \omega([Y,[X,T]],Z) \quad .\end{aligned}$$

En antisymétrisant par rapport aux arguments X et Y les membres des égalités ci-dessus on obtient

$$D(X,D(Y,Z)) - D(Y,D(X,Z)) - D([X,Y],Z) = 0$$

ce qui prouve que la connexion linéaire induite par D dans chaque feuille de $\mathfrak{F}$ est sans courbure. Supposons maintenant que seuls X et Y soient partout tangents à $\mathfrak{F}$; pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$ on a

$$\omega(D(X,Y),Z) = X\omega(Y,Z) + \omega([X,Z],Y) = Y\omega(X,Z) + \omega(Y,Z),X)$$
$$+ \omega([X,Y],Z) = \omega(D(Y,X),Z) + \omega([X,Y],Z).$$

Cette dernière expression montre que la connexion linéaire induite par D sur chaque feuille de $\mathfrak{F}$ est sans torsion. Ceci achève la preuve de la proposition 2.2.1.

2.3. Parallèlisme dans une variété localement plate.

Soit (M,∇) une variété localement plate. Pour tout couple (s,r) de nombres entiers non négatifs on désigne par $T^{s,r}(M)$ l'espace vectoriel des tenseurs s fois contravariants et r fois covariants. Les éléments de $T^{s,r}(M)$ sont des sections du fibré vectoriel $T^s(T^*M) \otimes T^r(TM)$ où $T^s(T^*M)$ (resp. $T^r(TM)$) est la $s^{\text{ième}}$ puissance tensorielle du fibré cotangent T^*M (resp. $r^{\text{ième}}$ puissance tensorielle du fibré tangent TM). On identifiera $T^{s,r}(M)$ avec le fibré vectoriel des applications $C^\infty(M)$-linéaires de $T^s(TM)$ dans $T^r(TM)$. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$, pour tout $f \in C^\infty(M)$ on pose $\nabla_X f = Xf$. Soit α une 1-forme différentielle ; alors $\nabla_X\alpha$ est la 1-forme différentielle définie par $(\nabla_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$. On prolonge ∇_X en une dérivation de bidegré $(0,0)$ de $\bigoplus_{r,s} T^{s,r}(M)$; cette dérivation sera encore notée ∇_X. On regardera aussi ∇ comme une application $\mathbb{R}$-linéaire de $T^{s,r}(M)$ dans $T^{s+1,r}(M)$ qui associe à $\alpha \in T^{s,r}(M)$ l'élément $\nabla\alpha \in T^{s+1,r}(M)$ défini par

$$(\nabla\alpha)(X_0,\ldots,X_s) = (\nabla_{X_0}\alpha)(X_1,\ldots,X_s)$$

DEFINITION. Un tenseur $\alpha \in T^{s,r}(M)$ est dit parallèle relativement à une connexion linéaire (M,∇) lorsque $\nabla\alpha = 0$.

2.4. Connexion bilagrangienne associée à une paire de feuilletages lagrangiens transverses.

THEOREME 2.4.1. (*). Soient (M,ω) une variété symplectique et $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ une paire de feuilletages lagrangiens transverses. Alors il existe dans M une (et une seule) connexion linéaire sans torsion (*) (M,∇) qui prolonge les structures localement plates induites dans les feuilles des $\mathfrak{F}_i$ par l'application D (voir proposition 2.2.1) et qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) ω est parallèle relativement à ∇ (i.e. $\nabla\omega = 0$).

(b) ∇ préserve chacun des feuilletages $\mathfrak{F}_i$ (i.e. $\nabla\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_i$)

(c) Si ∇ préserve une pseudo-métrique dans l'un des feuilletages $\mathfrak{F}_i$, alors (M,∇) est une structure loca-localement plate (ω est alors affine).

(d) Soit $\varphi \in \mathrm{Diff}_\omega(M)$ avec $\varphi_*\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i$, $i = 1,2$, alors φ préserve la connexion ∇.

Démonstration. Considérons l'application $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ définie précédemment, i.e. $L_X i_Y \omega = i_{D(X,Y)}\omega$. On sait que D jouit de la propriété universelle d'induire une structure localement plates dans chaque feuille de tout feuilletage lagrangien. Notons ∇^i , $i = 1,2$, la connexion linéaire que D induit dans les feuilles de $\mathfrak{F}_i$. Soit $\mathfrak{D}_i$ le système différentiel qui définit $\mathfrak{F}_i$, $i = 1,2$. On a $TM = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$. Notons p_1

(*) L'auteur tient à remercier le referee pour lui avoir signalé une erreur contenue dans l'énoncé originel de ce théorème. On trouvera une autre construction de cette connexion dans [9], ce résultat a été porté à ma connaissance par le referee.

et p_2 les projecteurs $TM \to \mathcal{D}_1$ et $TM \to \mathcal{D}_2$ respectivement. Tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ se décompose $X = (X_1,X_2)$ avec $p_1(X) = X_1$ et $p_2(X) = X_2$. Soient $X = (X_1,X_2)$ et $Y = (Y_1,Y_2)$ des éléments de $\mathfrak{X}(M)$. On pose

$$(5) \qquad \nabla_X Y = (\nabla^1_{X_1} Y_1 + p_1[X_2,Y_1],\ \nabla^2_{X_2} Y_2 + p_2[X_1,Y_2]) \ .$$

On voit immédiatement que ∇ induit dans chaque feuille de $\mathcal{F}_i$ la connexion linéaire ∇^i, $i = 1,2$. D'autre part (5) montre que ∇ vérifie la propriété $\nabla\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}_i$, ce qui n'est pas autre chose que la propriété (b).

Soit $f \in C^\infty(M)$, on voit immédiatement que ∇ satisfait les deux conditions suivantes :

$$\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_X Y \quad \text{et} \quad \nabla_X(fY) = f.\nabla_X Y + (Xf)Y \ ,$$

quels que soient X et Y dans $\mathfrak{X}(M)$; (5) définit bien une connexion linéaire dans la variété M.

(a) Calculons la dérivée covariante de ω. Etant donnés X, Y et Z dans $\mathfrak{X}(M)$ on a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X\omega(Y,Z) - \omega(\nabla_X Y,Z) - \omega(Y,\nabla_X Z)\\
&= (X_1+X_2)(\omega(Y_1,Z_2) + \omega(Y_2,Z_1))\\
&\quad - \omega(\nabla^1_{X_1} Y_1 + p_1[X_2,Y_1],Z_2) - \omega(\nabla^2_{X_2} Y_2 + p_2[X_1,Y_2],Z_1)\\
&\quad - \omega(Y_1,\nabla^2_{X_2} Z_2 + p_2[X_1,Z_2]) - \omega(Y_2,\nabla^1_{X_1} Z_1 + p_1[X_2,Z_1])
\end{aligned}$$

Compte tenu des expressions qui définissent ∇^1 et ∇^2 respectivement d'une part et d'autre part des égalités du type $\omega(Y_1,[X,Z]) = \omega(Y_1,p_2[X,Z])$ et $\omega(Y_2,[X,Z]) = \omega(Y_2,p_1[X,Z])$, on obtient l'identité

$\nabla_X \omega = 0$ quel que soit $X \in \mathfrak{X}(M)$; ce qui montre que ω est parallèle dans (M,∇).

(b) Il faut vérifier que ∇ est sans torsion. Puisque les connexions ∇^1 et ∇^2 sont localement plate, il résulte immédiatement de la formule (5) que l'on a

$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$.

(c) Pour calculer le tenseur de courbure de ∇, il suffit d'examiner les cas suivants.

<u>1er cas</u>. $\nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} Z_2 - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1} Z_2 = P_2\{[X_1, P_2[Y_1,Z_2]] - [Y_1, P_2[X_1,Z_2]]\}$; puisque $[X,Y] = P_1[X,Y] + P_2[X,Y]$ et puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont complètement intégrables, d'après le théorème de Frobénius on a

$$(\nabla_{X_1} \nabla_{Y_1} - \nabla_{Y_1} \nabla_{X_1}).Z_2 = P_2[[X_1,Y_1],Z_2] = \nabla_{[X_1,Y_1]} Z_2 \; .$$

En utilisant les mêmes arguments on a

$$\nabla_{X_2} \nabla_{Y_2} - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_2} = \nabla_{[X_2,Y_2]}$$

<u>2ème cas</u>. On a $\nabla_{[X_1,Y_2]} Z_2 = [[X_1,Y_2],Z_2] + \nabla_{Z_2} [X_1,Y_2]$
$= [X_1,[Y_2,Z_2]] - [Y_2,[X_1,Z_2]] + \nabla_{Z_2} [X_1,Y_2] = \nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} Z_2$
$- \nabla_{X_1} \nabla_{Z_2} Y_2 - \nabla_{[Y_2,Z_2]} X_1 - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1} Z_2 + \nabla_{Y_2} \nabla_{Z_2} X_1$
$+ \nabla_{[X_1 Z_2]} Y_2 + \nabla_{Z_2} \nabla_{X_1} Y_2 - \nabla_{Z_2} \nabla_{Y_2} X_1$.

Compte tenu du 1er cas on voit que le second membre de la dernière égalité se réduit à

$(\nabla_{X_1} \nabla_{Y_2} - \nabla_{Y_2} \nabla_{X_1}) Z_2 + (\nabla_{Z_2} \nabla_{X_1} + \nabla_{[X_1,Z_2]} - \nabla_{X_1} \nabla_{Z_2}) Y_2$;

ce qui donne finalement

$$(6) \qquad (\nabla_{[X_1,Y_2]} - \nabla_{X_1}\nabla_{Y_2} + \nabla_{Y_2}\nabla_{X_1})Z_2 = (\nabla_{[X_1,Z_2]} - \nabla_{X_1}\nabla_{Z_2} - \nabla_{Z_2}\nabla_{X_1})\,Y_2$$

Comme signalé par H. Hess [9] la seule obstruction à la platitude locale de (M,∇) est la composante mixte du tenseur de courbure ; (voir aussi [15]).

Le tenseur de courbure R de (M,∇) induit une application trilinéaire (sur l'anneau $C^{\infty}(M)$) de $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_2$ dans $\mathcal{D}_2$ (resp. de $\mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_1$) définie par

$$(X,Y,Z) \to R(X,Y)Z.$$

La formule (6) montre que pour (X,Y,Z) dans $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_2$ on a $R(X,Y).Z = R(X,Z)Y$. Il en résulte que si ∇ préserve une pseudo-métrique $\langle , \rangle$ dans les feuilles de $\mathcal{F}_2$ (par exemple) alors pour tout $x \in M$, $R_x(X,Y)$ est dans l'algèbre de Lie $o(\langle , \rangle_x)$ du groupe orthogonal $O(\langle , \rangle_x)$; par conséquent pour tout $X \in \mathcal{D}_1(x)$ (fixé), l'application $Y \in \mathcal{D}_2(x) \to R_x(X,Y)$ est dans le prolongement linéaire (à la Spencer) de $o(\langle , \rangle_x)$; puisqu'un tel prolongement est trivial, on a $R(X,Y) = 0$ pour tout $(X,Y) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$.

(d) Soit maintenant φ un élément de $\mathrm{Diff}_{\omega}(M)$ tel que $\varphi_* \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_i$, $i = 1,2$. On a donc pour tout $X = (X_1,X_2)$, $\varphi_* X = (\varphi_* X_1, \varphi_* X_2)$.

Soient $X = (X_1,X_2)$, $Y = (Y_1,Y_2)$ et $Z = (Z_1,Z_2)$ des éléments de $\mathfrak{X}(M)$. Puisque $\nabla\omega = 0$ on a

$$\omega_{\varphi(x)}(\nabla_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y_1, \varphi_* Z) = \omega_{\varphi(x)}(\nabla^1_{\varphi_* X_1} \varphi_* Y_1, \varphi_* Z)$$

$$= (\varphi_* X_1)\omega_{\varphi(x)}(\varphi_* Y_1, \varphi_* Z) - \omega_{\varphi(x)}([\varphi_* X_1, \varphi_* Z], \varphi_* Y_1)$$

$$= X_1\omega_x(Y_1,Z) - \omega_x([X_1,Z],Y_1) = \omega_x(\nabla^1_{X_1}Y_1,Z) \;;$$

On déduit de ce résultat que

$$\varphi_*^{-1}(\nabla_{\varphi_*X_i}\varphi_*Y_i) = \nabla_{X_i}Y_i \;, \quad i = 1,2 \;;$$

d'un autre côté on a

$$\omega_{\varphi(x)}(\nabla_{\varphi_*X_1}\varphi_*Y_2,\varphi_*Z) = \omega_{\varphi(x)}(P_2[\varphi_*X_1,\varphi_*Y_2],\varphi_*Z)$$
$$= \omega_{\varphi(x)}(\varphi_*P_2[X_1,Y_2],\varphi_*Z) = \omega_x(P_2[X_1,Y_2],Z) =$$
$$= \omega_x(\nabla_{X_1}Y_2,Z)$$

Le difféomorphisme φ est donc une transformation affine de (M,∇) ; cela achève la démonstration du théorème 2.4.1.

3. Connexions bilagrangiennes associées aux lois d'opération régulière des groupes résolubles.

3.1. Cas des lois régulières fermées

Soit (M,ω) une variété symplectique. Soit G un groupe de Lie connexe résoluble des symétries de (M,ω). On suppose que la loi $\phi : G \times M \to M$ est régulière fermée et à isotropies connexes. Soit x un point fixé dans M ; on pose $H_o = G_x$ et $G_o = G$.

THEOREME 3.1.1. *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2m$. Soit G un groupe de Lie connexe résoluble des symétries de (M,ω) dont l'action $\phi : G \times M \to M$ est régulière et fermée. Alors (M,ω) possède une paire $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ des feuilletages lagrangiens transverses.*

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur

$m = \frac{1}{2}$ dim M. Si m est égal à 1, le théorème 3.1.1. est une conséquence immédiate du lemme 1.1. Supposons que la conclusion du théorème 3.1.1. soit vraie pour les valeurs de m inférieures ou égales à m_o. Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2m_o+2$. Supposons que $\phi : G \times M \to M$ soit une action symplectique transitive régulière et fermée du groupe de Lie connexe résoluble G. On choisit la suite $F_{\phi,\omega}(G) = (G_k, H_k)_k$ telle que pour tout $k = 1,2,\ldots,m+1$, H_k et G_k soient des sous-groupes topologiques de G. Les espaces homogènes $M_k = G_k/H_k$ sont des espaces homogènes symplectiques. Soit u_{k+1} la sous-variété G_{k+1}/H_k de M_k ; on a

$$i_k^*\omega_k = p_k^*\,\omega_{k+1} \quad .$$

Puisque les lois d'actions induites $\phi_k : G_k \times M_k \to M_k$ sont régulières et fermées, le théorème 3.1.1. est vrai pour les variétés symplectiques (M_k,ω_k) $1 \leq k \leq m_o$. Soit Γ un sous-groupe de Lie connexe de dimension 1 dans G tel que G soit produit semi-direct de Γ par le sous-groupe normal fermé G_1. Notons ξ un champ de vecteur invariant à gauche dans G tel que $(\mathrm{expt}\ \xi)_{t\in\mathbb{R}} \subset \Gamma$. Soit ξ_o le champ fondamental dans M associé à ξ ; ξ_o est localement hamiltonien ; la 1-forme $\theta = i_{\xi_o}\omega$ est fermé. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} u_1 & \xrightarrow{i_1} & M \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \\ M_1 & & \end{array}$$

Les formes $\theta_1 = i_1^*\theta$ et $\tilde{\omega}_1 = p_1^*\omega_1 = i_1^*\omega$ sont fermées dans $u_1 = G_1/H_o$ et la forme $\tilde{\omega}_1^{m_o} \wedge \theta_1$ est une

forme volume dans u_1. En vertu de l'hypothèse de récurrence, la variété symplectique (M_1,ω_1) possède une paire de feuilletages lagrangiens $(\bar{\mathfrak{F}}_1,\bar{\mathfrak{F}}_2)$. Soit $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ le feuilletage de u_1 par les composantes connexes des pré-images par p_1 des feuilles de $\bar{\mathfrak{F}}_1 . \tilde{\mathfrak{F}}_1$ est un feuilletage de codimension m_o dans u_1 dont les feuilles sont isotropes relativement à $\tilde{\omega}_1$. En d'autres termes les images par i_1 des feuilles de $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ sont des sous-variétés lagrangiennes de (M,ω). Considérons maintenant le système différentiel défini dans u_1 par $\tilde{\mathfrak{D}} = \ker \theta_1$, ce système est complètement intégrable ; de plus les feuilles de $\tilde{\mathfrak{D}}$ sont des revêtements symplectiques de la variété symplectique (M_1,ω_1). Puisque l'application différentiable $dp_1 : Tu_1 \to TM_1$ est une submersion dont les fibres sont transverses à $\ker \theta_1$, on a un champ d'élément de contact $\tilde{\mathfrak{D}}_2$ qui satisfait les conditions suivantes :
(a) $\tilde{\mathfrak{D}}_2 \subset \tilde{\mathfrak{D}}$, (b) $p_{1*}(\tilde{\mathfrak{D}})$ est tangent à $\bar{\mathfrak{F}}_2$. Puisque $\tilde{\mathfrak{D}}$ est complètement intégrable, les conditions (a) et (b) entraînent que $\tilde{\mathfrak{D}}_2$ est complètement intégrable, cela résulte du théorème de Frobénius. On obtient de cette façon un feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ dans u_1 qui est transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ et dont les feuilles sont isotropes par rapport à $\tilde{\omega}_1$.

Pour terminer on considère le feuilletage de M par les hypersurfaces $u_\gamma = \gamma\, u_1$, puis on procède comme il suit.

(1) le feuilletage $\mathfrak{F}_1$ dans M est obtenu par le procédé simple de prolongement que voici. Autrement dit soit $y \in M$, il existe un unique couple $(\gamma,x) \in \Gamma \times u_1$ tel que $y = \gamma(x) = \phi(\gamma,x)$. La feuille de $\mathfrak{F}_1$ passant par $y \in N$

est la sous-variété lagrangienne $\gamma.(\widetilde{F}_1(x))$ où $\widetilde{F}_1(x)$ est la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ qui passe par $x \in u_1$.

(2) Construction de $\mathcal{F}_2$. Soit $y = \gamma(x)$ un point de M ; $x \in U_1$. Soit $\widetilde{F}_2(x)$ la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_2$ qui passe par x. On considère l'immersion injective ψ de $\Gamma \times \widetilde{F}_2(x)$ dans M définie par $\psi(\gamma',x') = \gamma'(x') = \phi(\gamma',x')$. L'image $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}_2(x))$ est une sous-variété connexe de M. L'espace tangent à $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}_2(x))$ au point $y = \gamma'(x')$ est $\gamma'_{*x'}\widetilde{\mathcal{D}}_2(x') \oplus \mathbb{R}\, \xi_o(y)$. Cela montre que $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}_2(x))$ est transverse au feuilletage $\mathcal{F}_1$. Puisque ω est invariant par Γ d'une part et puisque $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ est contenu dans le noyau de $\theta_1 = i_1^* i_{\xi_o} \omega$, la sous-variété $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}_2(x))$ est lagrangienne dans (M,ω) ; en effet puisque $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ est isotrope par rapport à $\widetilde{\omega}_1$ il suffit de voir que pour tout $Z_{\gamma'(x')} \in \gamma'_{*x'}\widetilde{\mathcal{D}}_2(x')$ on a

$$\omega_{\gamma'(x')}(\xi_o(\gamma'(x')),Z_{\gamma'(x)}) = \omega_{x'}(\xi_{ox'},(\gamma'_*)^{-1}Z_{\gamma'(x')})$$
$$\in \theta_1(x')(\widetilde{\mathcal{D}}_2(x')) = (0).$$

Si $\widetilde{F}'_2$ est une autre feuille de $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ on a $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}'_2) \cap \psi(\Gamma \cap \widetilde{F}_2) \neq \phi$ si et seulement si $\widetilde{F}_2 = \widetilde{F}'_2$. Les sous-variétés $\psi(\Gamma \times \widetilde{F}_2)$, $\widetilde{F}_2$ parcourant l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{D}}_2$, constituent un feuilletage lagrangien $\mathcal{F}_2$ de M ; ce feuilletage est partout transverse au feuilletage $\mathcal{F}_1$ précédent. Le théorème est démontré.

En conjugant les théorèmes 2.4.1 et 3.1.1 on a le théorème suivant.

<u>THEOREME</u> 3.1.2. <u>Soit</u> (M,ω) <u>une variété symplectique connexe qui possède un groupe de Lie connexe résoluble</u> G <u>des</u>

<u>symétries dont l'action est notée</u> $\phi : G \times M \to M$. <u>Si</u> ϕ <u>est régulière et fermée alors</u> M <u>possède une connexion bigagrangienne sans torsion</u> (M,∇) <u>telle que</u> $\nabla\omega = 0$.

Comme autre corollaire du théorème 3.1.2 on a le résultat suivant.

<u>THEOREME</u> 3.1.3. <u>Soit</u> (M,ω) <u>une variété symplectique</u>. <u>Supposons que</u> G <u>soit un groupe de Lie connexe nilpotent des symétries de</u> (M,ω). <u>Si</u> $\phi : G \times M$ <u>est une action hamiltonienne à isotropie connexe avec moment</u>, <u>alors</u> M <u>possède une connexion bilagrangienne sans torsion</u> (M,∇) <u>telle que</u> $\nabla\omega = 0$.

<u>Preuve</u>. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Il suffit de voir que si $\phi : G \times M \to M$ est hamiltonienne avec moment $J : M \to \mathfrak{g}^*$ alors ϕ est régulière et fermée. En effet soit x_o un point fixé dans M et soit $\theta_o = J(x_o) \in \mathfrak{g}^*$. Notons π_1 et π_2 les projections canoniques $g \to \phi(g,x_o)$ et $g \to Ad(g)^*\theta_o$ respectivement. On a $J \circ \pi_1 = \pi_2$.

Soit Ω_j l'image de J dans $\mathfrak{g}^*$, notons ω_o la 2-forme symplectique de Ω_j définies par la 2-forme invariante à gauche $\delta J(x_o)$. Alors (M,ω) est un revêtement de (Ω_j,ω_o) ; on a en outre

$$\pi_1^*\omega = \pi_2^*\omega_o = \delta J(x_o) \ .$$

Il suffit maintenant de voir que l'on peut associer à cette situation une suite (G_k,H_k) telle que H_k et G_k soient des groupes de Lie fermés de G, $k = 1,\ldots$

En effet soit H_o le sous-groupe stabilisateur de $x_o \cap M$. Puisque G est nilpotent, il existe un sous-groupe de Lie normal fermé et connexe $G_1 \subset G$ qui vérifie les conditions $\dim G_1 = \dim G-1$ et $H_o \subset G_1$. Notons i_1 l'homomorphisme inclusion de G_1 dans G et $\tilde{\theta}_1$ la 1-forme invariante à gauche $i_1^*J(x_o)$. On a $i^*(\delta J(x_o)) = \delta\theta_1$, soit $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre de Lie de G_1, le noyau de $\delta\theta_1$ est la sous-algèbre $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ formé des éléments $\xi \in g_1$ tels que $L_\xi\theta_1 = \delta\theta_1(\xi) + i_{\xi_1}\delta\theta_1 = 0$. De sorte que le sous-groupe de Lie connexe $H_1 \subset G_1$ qui correspond à $\mathfrak{h}_1$ est la composante neutre du stabilisateur de θ_1 par l'action coadjointe de G_1 dans $\mathfrak{g}_1^*$. Il existe un sous-groupe de Lie connexe normal $G_2 \subset G_1$ qui vérifie $\dim G_2 = \dim G_1-1$ et $H_1 \subset G_2$. Si i_2 est l'homophisme inclusion $G_2 \to G_1$ on pose $\theta_2 = i_2^*\theta_1$; par les mêmes arguments employés ci-dessus, on déduit que le sous-groupe connexe de G_2 tangent en l'élément neutre à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_2 = \ker \delta\theta_2$ est fermé. En itérant la construction on obtient une suite (G_k, H_k) telle que G_k et H_k sont fermés dans G et $H_k \subset H_{k+1}$. En vertu du théorème 3.1.1. M possède une connexion bilagrangienne sans torsion (M,∇) telle que $\nabla\omega = 0$.

3.2. Cas général de lois d'opération transitive à isotropies connexes

Soit G un groupe de Lie connexe résoluble. On considère une variété symplectique (M,ω) dans laquelle G opère symplectiquement et transitivement et on suppose que les sous-groupes stabilisateurs sont connexes ; on fixe un point x_o dans M et on note π la projection canonique $g \to \phi_g(x_o)$ de G sur M. La 2-forme fermée $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ est invariante à gauche dans G. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}_\omega$ l'algèbre de Lie qui est obtenue par l'extension de $\mathfrak{g}$ par $\mathbb{R}$ associée au cocycle scalaire $\tilde{\omega}$. Le crochet de $\mathfrak{g}_\omega$ est défini dans $\mathbb{R} \times \mathfrak{g}$ par $[(x,X),(y,Y)] = (\tilde{\omega}(X,Y),[X,Y])$.

Soit G_ω un groupe de Lie connexe tel que l'homomorphisme d'algèbre de Lie qui applique l'élément (x,X) de $\mathfrak{g}_\omega$ sur $X \in \mathfrak{g}$ soit la différentielle en l'élément neutre d'un homomorphisme continu Θ de G_ω sur G. On a donc une loi d'opération de G_ω dans M telle que $\pi o \theta = \pi'$.

La 1-forme invariante à gauche dans G_ω définie par $(x,X) \xrightarrow{\lambda} x$ est une primitive de la 2-forme $\pi'^*\omega = \Theta^* \tilde{\omega}$. La variété M est donc un <u>revêtement symplectique</u> d'une orbite de la représentation coadjointe de G_ω dans $\mathfrak{g}_\omega^*$. Cette propriété entraîne que l'action de G_ω dans M est régulière. En effet, si $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{h}_k)_k$ est une suite qui vérifie les propriétés (i) à (iv) du §1, la sous-algèbre $\mathfrak{h}_k$ est interprétée comme l'isotropie infinitésimale en l'élément $\lambda|_{\mathfrak{g}_k}$ de la représentation coadjointe de G_k dans $\mathfrak{g}_k^*$. Le sous-groupe H_k est donc fermé dans G_k.

Si G est nilpotent, alors G_ω est aussi nilpotent. La suite des sous-groupes de Lie connexes $(G_\omega)_k$ peut être choisi de sorte que $(G_{\omega_k}, H_{\omega_k})_k$ soit une suite de sous-groupes de Lie fermés dans G_ω. Si les sous-groupes d'isotropies de G_ω sont connexes, le théorème 3.13 s'applique.

4. Cas des groupes de Lie symplectiques

On entend par groupe de Lie symplectique un couple (G,ω) formé d'un groupe de Lie G et d'une forme symplectique ω qui est invariante à gauche.

4.1. Structure de KOSZUL-VINBERG dans un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

DEFINITION. Une structure de KOSZUL-VINBERG dans le groupe de Lie G consiste en la donnée d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ notée multiplicativement $(X,Y) \to X.Y$ et qui satisfait les deux conditions suivantes : (a) $[X,Y] = X.Y - Y.X$, (b). $(X.Y).Z - X(Y.Z) = $ $= (Y.X).Z - Y(X.Z)$ quels que soient X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$.

Dans la suite on dira KV-structure à la place de structure de KOSZUL-VINBERG. Il y a correspondance bijective entre les KV-structures dans G et l'ensemble des structures localement plates invariantes par les translations à gauche [4], [20].

Supposons que G possède une structure symplectique (G,ω) invariante à gauche. Si X, Y et Z sont des champs de vecteurs invariants à gauche D étant défini par la formule (4) on a

$$(L_X i_Y \omega)(2) = \omega(D(X,Y),Z) = \omega([X,Z],Y).$$

Cela montre que l'application $D : \Upsilon(G)\times\Upsilon(G) \to \Upsilon(G)$ envoie tout couple de champs de vecteurs invariant à gauche dans la sous-algèbre de Lie de champs invariants à gauche. Puisque ω est fermée on vérifie immédiatement que D

induit une KV-structure dans $\mathfrak{g}$. Notons ∇ (∇^{ω} s'il y a risque de confusion) la connexion linéaire localement plate associée à D ; on a $\nabla\omega = 0$ si et seulement si G est commutatif.

Soit $\mathfrak{F}$ un feuilletage lagrangien invariant à gauche dans G. Soit $F(e)$ la feuille de $\mathfrak{F}$ qui passe par l'élément neutre. $F(e)$ est un sous-groupe de Lie de G. On sait que ∇ induit dans $F(e)$ une connexion linéaire localement plate et invariante à gauche. Les translations à gauche dans G sont non seulement des symplectomorphismes de (G,ω) mais aussi des transformations affines de (G,∇).

Si G est résoluble, le théorème 3.1.3 est applicable ; autrement dit il existe une connexion bilagrangienne sans torsion ∇' qui vérifie $\nabla'\omega = 0$; ∇' n'est pas en général invariante à gauche. On sait que toute variété localement plate (N,∇^N) possède un plongement $N \xrightarrow{i} (M,\omega)$ tel que $i(N)$ soit une sous-variété lagrangienne de la variété symplectique (M,ω) [24]. Soit (N,∇^N) une KV-structure ; on va montrer que si N est soit résoluble, soit simplement connexe, on peut prendre pour (M,ω) un groupe de Lie muni d'une structure symplectique invariante à gauche et tel que i devient un homomorphisme de groupes de Lie, plus précisément on va démontrer le théorème suivant

<u>THEOREME</u> 4.1.1. <u>Soit</u> G <u>un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie</u> $\mathfrak{g}$. <u>Supposons que</u> G <u>soit simplement connexe</u>. <u>Pour que</u> G <u>possède une</u> KV-<u>structure il faut et il suffit qu'il existe un monomorphisme lagrangien de</u> G <u>dans un groupe de</u>

Lie $\mathcal{G}$ muni d'une structure symplectique inviante à gauche $(\mathcal{G},\omega)$.

Démonstration. La condition est suffisant. En effet soit $(\mathcal{G},\omega)$ une structure symplectique invariante à gauche dans le groupe de Lie $\mathcal{G}$. $((\mathcal{G},\omega)$ est un groupe de Lie symplectique). Soit $G \xrightarrow{i} \mathcal{G}$ un monomorphisme lagrangien de G dans $\mathcal{G}$, i.e. $i^*\omega = 0$. Puisque ω est invariante à gauche, le feuilletage de $\mathcal{G}$ par les classes à droite γG, $\gamma \in \mathcal{G}$, est un feuilletage lagrangien. Soit ∇ la connexion localement plate dans $\mathcal{G}$ définie par

$$\omega(\nabla_X Y,Z) = \omega([X,Z],Y)$$

quels que soient les champs de vecteurs invariants à gauche X, Y et Z ; si X, Y et Z sont tangents à $i(G)$ en tout point de $i(G)$ alors $\nabla_X Y$ est tangent à $i(G)$ en tout point de $i(G)$. Puisque ∇ est invariant à gauche, la connexion linéaire induite dans $i(G)$ par ∇ est invariante à gauche, elle détermine donc une KV-structure dans G.

Inversement supposons que G possède une KV-structure. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, soient X et Y les éléments de $\mathfrak{g}$, la KV-structure détermine une application bilinéaire $(X,Y) \to \nabla_X Y$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$. L'application $X \to \nabla_X$ est une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$ dans lui-même. Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$; notera $X \to \nabla^*_X$ la représentation linéaire duale de ∇ ; ∇^*_X est définie en posant pour $(\theta,Y) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$

$$(\nabla^*_X\theta)(Y) = -\theta(\nabla_X^Y)$$

On munit $\mathfrak{g}^*$ de la structure d'algèbre de Lie commutative. L'espace vectoriel $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ est muni de la structure d'algèbre de Lie définie par

$$[(\theta,X),(\theta',X')] = (\nabla_X^{*\theta'} - \nabla_{X'}^* \theta, [X,Y]).$$

On a donc la suite exacte d'homomorphismees d'algèbres de Lie

$$0 \to \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to 0 .$$

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$. Si G est simplement connexe alors $\mathcal{G}$ est produit semi-direct de G par le groupe de Lie commutatif $\mathfrak{g}^*$; on a donc la suite exacte des groupes de Lie

$$0 \to \mathfrak{g}^* \to \mathcal{G} \xrightarrow{\pi} G \to 1 \quad .$$

Puisque G est supposé simplement connexe, il existe une scission $G \xrightarrow{\sigma} \mathcal{G}$ de la suite ci-dessus, c'est-à-dire que σ est un homomorphisme de G dans $\mathcal{G}$ tel que $\pi \circ \sigma = id_G$. On considère maintenant la 2-forme différentielle invariante à gauche dans $\mathcal{G}$ qui est définie par

$$\omega((\theta,X),(\theta',X')) = \theta(X') - \theta'(X) ,$$

quels que soient (θ,X) et (θ',X') dans $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$; la forme ω est non dégénérée. Soit $\delta\omega$ la différentielle de ω ; c'est la 3-forme qui est définie par

$$\begin{aligned}
\delta\omega((\theta,X),(\theta',X'),(\theta'',X'')) &= -\omega([(\theta,X),(\theta',X')],(\theta'',X'')) \\
&+\omega([(\theta,X),(\theta'',X'')],(\theta',X'))-\omega([(\theta',X'),(\theta'',X'')],(\theta,X)). \\
&= \theta''([X,X'])-\theta(\nabla_{X'}X'')+\theta'(\nabla_X X'')-\theta'([X,X''])+\theta(\nabla_{X''}X') \\
&- \theta''(\nabla_X X')+\theta([X',X''])-\theta'(\nabla_{X''}X)+\theta''(\nabla_X X)
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que ∇ est sans torsion on a $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, pour tout X et Y dans $\mathfrak{g}$.

Cela montre que $\delta\omega = 0$. La 2-forme ω définit donc une structure symplectique invariante à gauche dans le groupe de Lie $\mathcal{G}$. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \simeq (0) \times \mathfrak{g}$ étant visiblement un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$, le plongement de G dans $\mathcal{G}$ qui est tangent à l'homomorphisme $X \xrightarrow{\sigma_0} (0,X)$, $X \in \mathfrak{g}$, est lagrangien. On peut donc identifier G avec la feuille (passant par l'élément neutre) d'un feuilletage lagrangien invariant à gauche dans $(\mathcal{G},\omega)$. Le théorème 4.1.1 est démontré.

PROPOSITION 4.1.2. Soit (G,ω) une structure symplectique invariante à gauche dans le groupe de Lie connexe G. Si $\mathfrak{F}$ est un feuilletage lagrangien bi-invariant, alors la feuille de $\mathfrak{F}$ qui passe par l'élément neutre est un sous-groupe normal commutatif plat.

Preuve. Soit $F(e)$ la feuille de $\mathfrak{F}$ qui passe par l'élément neutre. Puisque $\mathfrak{F}$ est bi-invariant, la relation d'appartenance à une feuille est compatible à droite et à gauche avec la structure du groupe. $F(e)$ est donc un sous-groupe normal de G. Soit ∇^{ω} la connexion linéaire invariante à gauche dans G qui fait correspondre aux champs de vecteurs invariants à gauche X et Y le champs de vecteurs $\nabla^{\omega}_X Y$ défini par

$$\omega(\nabla^{\omega}_X Y, Z) = \omega([X,Z],Y)$$

quel que soit le champ de vecteurs invariant à gauche Z. Supposons que X et Y soient tangents à $F(e)$, alors quel que soit le champ de vecteurs invariant à gauche Z on aura

$$\omega(\nabla^{\omega}_X Y,Z) = \omega([X,Z],Y) = 0$$

Cela montre que $\nabla^{\omega}_X Y = 0$; $F(e)$ est donc commutatif plat (i.e. la dérivée covariante de tout champ des vecteurs invariants à gauche est nulle).

Remarque. Soient (G,ω) et $\mathfrak{F}$ comme dans la proposition 4.1.2. L'unique obstruction à l'existence d'un feuilletage lagrangien transverse à $\mathfrak{F}$ et invariant à gauche est la classe d'extension $[\alpha] \in H^2(\mathfrak{g}/T_eF(e),T_eF(e))$ où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, identifiée à T_eG .

On a vu que tout groupe de Lie connexe qui possède une structure symplectique invariante à gauche possède également une structure localement plate invariante à gauche. La réciproque est fausse. En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe de Lie réductif $GL(\mathbb{R}^{2n})$ possède une structure localement plate bi-invariante déterminée par la structure d'algèbre associative de $End(\mathbb{R}^{2n})$; d'autre part, dans tout groupe de Lie réductif G toute 2-forme fermée invariante à gauche est dégénérée. En effet si ω est une 2-forme symplectique invariante à gauche dans le groupe réductif G, soit ∇^{ω} la structure localement plate invariante à gauche qui est associée à ω. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et soit X_o un élément du centre de $\mathfrak{g}$; alors $\omega(\nabla_{X_o} Y,Z) = \omega([X_o,Z],Y) = 0$ quels que soient X et Y dans $\mathfrak{g}$. On a donc $\nabla_{X_o} Y = \nabla_Y X_o = 0$ quel que soit $Y \in \mathfrak{g}$. ∇ induit en particulier une KV-structure dans le centre $Z(G)$ de G. Considérons le feuilletage $\mathfrak{F}$ de G par les composantes connexes des classes $g.Z(G)$, $g \in G$.

$\mathfrak{F}$ est un feuilletage affine simple de la variété affine (G,∇^{ω}). L'espace des feuilles s'identifie au groupe de Lie semi-simple $\mathfrak{D}G$. La structure localement plate (G,∇^{ω}) passe donc au quotient et détermine une KV-structure dans $\mathfrak{D}G$. On sait qu'un groupe de Lie semi-simple ne possède pas de structure localement plate invariante à gauche [4],[19]. La 2-forme ω est donc dégénéré. L'existence d'une structure symplectique invariante à gauche est donc une condition plus restrictive que celle d'une KV-structure.

Si (G,∇) possède un couple $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ des feuilletages lagrangiens invariant à gauche, alors en vertu de la propriété (c) du théorème 2.4.1, la connexion linéaire associée à $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ par la formule (5) déterminera une KV-structure dans G. A titre d'exemple, soit G un groupe de Lie simplement connexe muni d'une KV-structure (G,∇), soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie de G ; la structure symplectique ω_o de $\mathfrak{g}^* \times G$ mise en évidence dans la démonstration du théorème 4.1.1 possède une paire $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ de feuilletages lagrangiens invariants à gauche. On peut donc lui associer une KV-structure $(\mathfrak{g}^*\times G\ ;\ \nabla)$ telle que $\nabla^o\omega_o = 0$.

En effet si on note R_X l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par $R_Y(X) = \nabla_X Y$, on définit ∇^o en posant pour tout (θ,X) et tout (θ',X') dans $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}$

$$\nabla^o_{\theta,X}(\theta',X') = (\nabla^*_X\theta',\nabla_X X') .$$

Cette connexion est différente de ∇^{ω_o} qui est définie en posant

$$\nabla^{\omega_o}_{(\theta,X)}(\theta',X') = (ad^*_X\theta' - R^*_{X'}\theta,\nabla_X X')$$

On sait que $\nabla^{\omega_o}\omega_o = 0$ si et seulement si $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}$ est commutatif.

Les connexions ∇^{o} et $\overset{\omega}{\nabla}{}^{o}$ induisent les mêmes structures affines dans les feuilles de $\mathfrak{F}_1$ et de $\mathfrak{F}_2$ respectivement ; c'es-à-dire

$$\nabla^{o}_{(0,X)}(0,X') = \overset{\omega}{\nabla}{}^{o}_{(\theta,X)}(0,X') = (0,\nabla_X X')$$

et

$$\nabla^{o}_{(\theta,0)}(\theta',0) = \overset{\omega}{\nabla}{}^{o}_{(\theta,0)}(\theta',0) = (0,0).$$

On observera que le théorème de plongement lagrangien des groupes de Lie affine (Théorème 4.1.1) vaut pour les groupes de Lie affines connexes résolubles. En conjuguant ce résultat et ceux de H. HESS, [8],[9], on a le corollaire suivant :

<u>THEOREME</u> 4.1.2. <u>Tout groupe de Lie affine</u> (G,∇), <u>connexe et simplement connexe</u> (<u>resp. et résoluble</u>) <u>possède un plongement comme feuille d'un feuilletage d'une paire de Heisenberg</u> $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$.

<u>Démonstration</u>. La connexion linéaire $(\mathfrak{G},\nabla^{\omega})$ construite ci-dessus (voir preuve du Théorème 4.1.1) étant localement plate, la conclusion résulte du théorème de HESS ([9], Théorème 2).

<u>Remarque</u>. Les connexions localement $(\mathfrak{G},\nabla^{\omega})$ et $(\mathfrak{G},\nabla^{o})$ mises en évidence ci-dessus sont des exemples de connexions (presque) bilagrangiennes distinctes qui introduisent les mêmes structures localement plates dans les feuilles de la paire $(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$; parmi ces connexions il ne peut y avoir plus d'une qui soit symplectique.

Bibliographie

[1] R. ABRAHAM and J.E. MARSDEN. Foundation of Mechanics. The Benjamin Cummings Publishing Company-London

[2] L. AUSLANDER. The structure of solvmanifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973) 227-285

[3] L. AUSLANDER and B. KOSTANT. Polarisation and unitary representation of solvable Lie groups Inv. Math. 14 (1977)

[4] BON YAO CHU. Homogeneous symplectic manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974)

[5] P. DAZORD. Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens. Ann. Scient. ENS 14 (1981) 465-480

[6] D. FRIED W.M. GOLDMAN and M. HIRSCH. Affine manifolds with nilpotent holonomy Comm. Math. Helv. 56 (1981) 487-527

[7] V.W. GUILLEMIN and S. STERNBERG. Geometric Asymptotics Amer. Math. Soc. Survey 17 (1977). Providence RI

[8] H. HESS. On a geometric quantization scheme generalizing those of KOSTANT and SOURIAU and CZYZ (Thèse Berlin 1980)

[9] H. HESS. Connection on symplectic manifolds and geometric quantization. Lecture Notes in Mathematics n° 836, 153-166

[10] G. HOCHSCHILD. The structure of Lie groups. Holden Day S.F. CALIFORNIA

[11] A.A. KIRILOV. Représentation des groupes et Mécanique Ed. Univ. de Moscou (1971)

[12] J.L. KOSZUL. Déformation des variétés localement plates. Ann. Inst. Fourier (1965)

[13] B. KOSTANT. Orbits, symplectis structures and representation theory. Proc. US-JAPAN Seminar of Differential Geometry KYOTO (1965)

[14] B. KOSTANT. Quantization and unitary representation. Prequantization Part I. Springer Lecture Notes 170 (1970) 87-208

[15] P. LIBERMANN. Problème d'équivalence et géométrie symplectique. Astérisque 107-108 (1983), 43-68

[16] A. LICHNEROWICZ. Variété de Poisson et feuilletages (Ann. Fac. Sciences Toulouse vol. IV (1982)

[17] J. MILNOR. Fundamental groups of complete affinely flat manifolds Advances in Math. 25 (1977) 178-187

[18] J.M. MORVAN. Quelques invariants topologiques en géométrie symplectique. Ann. Inst. Poincaré vol. 38/4 (1983)

[19] J.M. MORVAN et L. NIGLIO. Classes caractéristiques de couples de sous-fibrés lagrangiens. (preprint)

[20] NGUIFFO BOYOM. Algèbre à associateur symétrique et algèbres de Lie réductives. (Thèse 3ème cycle. Grenoble (1968))

[21] NGUIFFO BOYOM. Affine embeddings of real Lie groups Proc. of London Math. Soc. LNS 26 (1977) 21-39

[22] NGUIFFO BOYOM (en préparation)

[23] D. SIMS and N. WOODHOUSE. Geometric quantization. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag 53 (1976)

[24] J.M. SOURIAU. Structure des systèmes dynamiques Dunod Université. Paris (1970)

[25] A. WEINSTEIN. Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds. Advances in Math. 6 (1971) 329-346

[26] A. WEINSTEIN. Lecture on symplectic manifolds. Conferences board of Mathematical Science AMS n° 29 (1977)

NGUIFFO B. BOYOM
Université Montpellier II
Place E. Bataillon
34060 Montpellier Cedex France

(Reçu le 24 avril 1986;
la version revisée le 30 janvier 1989)