Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus.

Herrn Oskar Perron zum 60. Geburtstag am 7. Mai 1940 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Für eine vergleichende Betrachtung darüber, wie die Forderungen des Intuitionismus in das Gefüge mathematischer Beweise eingreifen, ist der Fundamentalsatz der Algebra ein dankbarer Gegenstand. Zwischen Algebra und Analysis stehend hat er Anteil an beiden Gebieten und läßt sich auf verschiedene Art beweisen, je nachdem, von welcher Seite man an ihn herangeht. Wir wollen zuerst die wichtigsten Beweisgedanken überschauen[1]), dann sehen, wieweit sie den intuitionistischen Forderungen genügen oder sich ihnen anpassen lassen, und schließlich eine dabei sich zeigende Lücke ausfüllen, nämlich den Argand-Cauchy-Lipschitzschen Beweis intuitionistisch zurechtmachen. Angefügt wird ein gegenüber dem bisherigen einfacherer Beweis der — für den Intuitionisten nicht selbstverständlichen — Erweiterung des Satzes auf den Fall, daß der höchste Beiwert des gegebenen Polynoms nicht notwendig von Null verschieden vorausgesetzt wird.

§ 1.

Übersicht über die Beweise.

1. Allen Beweisen liegt letzten Endes, wenn auch manchmal an verborgener Stelle, der Gedanke zugrunde, den Betrag des Polynoms

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$$

durch geeignete Wahl des Arguments möglichst zu verkleinern. Dieser Gedanke ist das einzige, was von dem ersten Beweisversuch, dem von d'Alembert [1][2]), bestehen geblieben ist.

2. Die „algebraischen" Beweise benutzen aus der Analysis nur das Vorhandensein der Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl und den Satz, daß ein reelles Polynom ungraden Grades eine reelle Nullstelle hat. Die schon vor Gauß angestellten algebraischen Überlegungen gehen in zwei Richtungen:

[1]) Eine ähnliche Durchmusterung gab schon de Loor [24] [2]). Wir wollen weniger einzelne durchgeführte Beweise ins Auge fassen, sondern mehr von den immer wiederkehrenden Grundgedanken feststellen, welche Rolle sie in intuitionistischen Beweisen spielen können.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

2a. Euler [2], Foncenex [3] und Laplace [7] suchen einen quadratischen Faktor von $f(x)$ zu bestimmen, während

2b. Euler [2] und Lagrange [4, 5] ein Polynom graden Grades in zwei Faktoren gleichen Grades aufzuspalten suchen.

Alle diese Beweisversuche unterlagen dem Gaußschen Haupteinwand [6], daß sie die zu beweisende Existenz der Gleichungswurzeln voraussetzen. Die Art, wie Lagrange und Laplace ihre Ansätze durchführten, unterlagen nur diesem Einwand und waren daher, wie A. Kneser [16] bemerkte, in dem Augenblick zu gültigen Beweisen ergänzt, als die neuere Algebra mit Hilfe des allgemeinen Körperbegriffes diese Existenz — wo nicht im Körper der komplexen Zahlen, so doch jedenfalls in einem Erweiterungskörper — festgestellt hatte. Schon vorher hatte Gauß [10] den Ansatz 2a zum Beweis gemacht, indem er das echt algebraische Hilfsmittel der Unbestimmten heranzog und damit Überlegungen anstellte, die auch dem Existenzsatz der modernen Algebra zugrunde liegen.

3. Viele Beweisanordnungen zählen — offen oder in analytischer Verkleidung — die Umläufe, die der Punkt $f(z)$ um den Nullpunkt beschreibt, wenn der Punkt z eine geschlossene Kurve durchläuft. Hierher gehören der erste, dritte und vierte Beweis von Gauß [6, 11, 14] sowie der, den man in einer funktionentheoretischen Vorlesung zu geben pflegt.

4. Von der elementaren Analysis ist der gradeste Weg zum Fundamentalsatz der, den zuerst Argand [8, 9] beschritt. Argand vereinfacht die Anwendung des Grundgedankens 1. gegenüber d'Alembert, benutzt den allgemeinen analytischen Satz vom Vorhandensein der unteren Grenze bzw. des kleinsten Wertes einer Funktion und gewinnt so seinen ganz neuartigen Beweis. Cauchy [12] gab im wesentlichen denselben Beweis, aber in zugänglicherer Gestalt und dürfte damit zu dessen Verbreitung beigetragen haben. Auch bei ihm wird nicht näher begründet, daß $|f(x)|$ irgendwo einen kleinsten Wert annimmt; das wurde erst möglich, nachdem der Allgemeinbegriff der unteren Grenze eingeführt worden war. Dem Argandschen Beweis gliedern sich die mannigfachen Beweisanordnungen an, die die Berufung auf den kleinsten Wert von $|f(x)|$ vermeiden und durch Herstellung einer konvergenten Folge ersetzen. Die erste dieser Anordnungen, die von Lipschitz [15], wird im folgenden noch besprochen.

5. Ähnlich geradezu gehen die „Kontinuitätsbeweise" von Weierstraß [17, 18] und Koebe [19] auf ihr noch weiter gestecktes Ziel los: Sie suchen in dem Polynom

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$$

den Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ durch schrittweise kleine Änderungen schließlich solche Werte beizulegen, daß $\varphi(x)$ mit $f(x)$ übereinstimmt.

In eine der hiermit umrissenen Klassen getraue ich mir jeden der vorliegenden Beweise des Fundamentalsatzes — die französische Encyclopédie bringt etwa hundert Hinweise — einzuordnen.

§ 2.

Der Intuitionismus.

Ich will möglichst nicht nur für Kenner des Intuitionismus verständlich sein und erinnere daher vorab an das Folgende. Für den Intuitionisten ist eine reelle Zahl dann und nur dann gegeben, wenn man die Mittel hat, sie — bei genügender Geduld — in beliebig enge rationale Grenzen einzuschließen. Danach kann man von einer gegebenen reellen Zahl nicht ohne weiteres entscheiden, ob sie positiv, negativ oder Null ist, und man kann sogar leicht Zahlen angeben, bei denen diese Entscheidung nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse nicht möglich ist[3]). Ähnlich ist für den Intuitionisten eine Aussage „A oder B gilt" erst dann begründet, wenn man entscheiden kann, ob A oder B gilt (oder alle beide). Z. B. ist gewiß

$$(|\alpha| + \alpha)(|\alpha| - \alpha) = |\alpha|^2 - \alpha^2 = 0;$$

daß aber einer der Faktoren links verschwindet, kann erst behauptet werden, wenn über das Vorzeichen von α entschieden ist.

Unberührt vom Intuitionismus bleibt die Gültigkeit der für die „algebraischen" Beweise erforderlichen, in § 1, 2 angeführten Hilfssätze aus der Analysis[4]). Dagegen verfallen alle „algebraischen" Beweise mit Ausnahme des Ansatzes von Laplace dem Einwand, daß zu ihrer Durchführung die Entscheidung darüber nötig ist, ob die Diskriminante des gegebenen Polynoms verschwindet oder nicht[5]). Sie sind nämlich nur bei von Null verschiedener

[3]) Die bekannteste Art (ähnlich wie z. B. bei Brouwer [23]) ist die folgende: Sei $\gamma_n = (-\frac{1}{2})^n$ oder $\gamma_n = 0$ je nachdem, ob an der n-ten Stelle in der Dezimalbruchentwicklung von π eine bestimmte, bisher in ihr nicht beobachtete Zahlenfolge (etwa drei aufeinanderfolgende Dreien) auftritt oder nicht; dann ist $\alpha = \sum_1^\infty \gamma_n$ eine solche Zahl.

[4]) Wenn auch der Satz, daß eine stetige Funktion, die Werte beiderlei Vorzeichens annimmt, eine Nullstelle hat, dem Intuitionisten nicht gilt: Sei etwa $\varphi(x)$ durch $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(1) = |\alpha|$, $\varphi(2) = 1$ und dazwischen als lineare Funktion erklärt; dann ist $\frac{1}{2}$ bzw. $-\alpha/(1+\alpha)$ die einzige Nullstelle von $\varphi(x)$, wenn $\alpha < 0$ bzw. $\alpha > 0$ ist. Welche Zahl Nullstelle von $\varphi(x)$ ist, kann man erst sagen, wenn man über das Vorzeichen von α Bescheid weiß; vorher kann man also die Nullstelle nicht mit beliebiger Genauigkeit angeben.

[5]) Diese Schwierigkeit kann auch an anderer Stelle auftreten; bei v. Staudt [13] z. B. wird zwar die Diskriminante nicht benutzt, dafür aber gelegentlich der größte gemeinsame Teiler zweier Polynome gebildet; und das erfordert ebenfalls die Entscheidung darüber, ob eine Zahl gleich Null ist oder nicht.

Diskriminante durchführbar und verlangen daher, daß man vorweg entscheidet, ob die Diskriminante Null ist oder nicht, und im ersten Falle die Doppelfaktoren beseitigt. Noch schlimmer ist es mit den „algebraischen" Beweisen in moderner Fassung; denn für den Intuitionisten hat der Bereich der reellen Zahlen nicht einmal das Merkmal eines Körpers, daß jede Zahl gleich Null oder von Null verschieden ist. Diese Sachlage war für mich der Anlaß, den Laplaceschen Ansatz nicht in moderner, sondern in Gaußscher Weise durchzuführen[6]). Doch die Hoffnung, dadurch den intuitionistischen Einwänden zu entgehen, war vergebens: an einer anderen Stelle mußte aus dem Verschwinden eines Produktes auf das Verschwinden mindestens eines Faktors geschlossen werden.

De Loor [24] hat den Ausweg beschritten, den Fundamentalsatz zunächst nur für Polynome mit von Null verschiedener Diskriminante zu beweisen und dann durch einen Grenzübergang den allgemeinen Satz abzuleiten. So sind denn die „algebraischen" Beweise durch ein nochmaliges Eingreifen der Analysis intuitionistisch gerechtfertigt.

Mit Umlaufzählung hat Weyl [20] den ersten intuitionistischen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gegeben; dieser Beweis zeichnet sich durch sein einheitliches Gepräge aus. Der beinahe gleichzeitige Beweis von Brouwer und de Loor [21] benutzt auch die Umlaufzählung, tut aber die Hauptarbeit in der im folgenden Absatz zu schildernden Lipschitzschen Weise und gebraucht den im vorigen Absatz erwähnten Grenzübergang.

Der Argand-Cauchysche Beweis scheint den intuitionistischen Forderungen schärfstens zu widersprechen; benutzt er doch bei strenger Fassung den allgemeinen Begriff der unteren Grenze. Zwar bei den hier gegebenen Umständen läßt sich der kleinste Wert von $|f(x)|$ auch für den Intuitionisten herstellen, aber nicht die Stelle, an der er angenommen wird. Lipschitz [15] scheint das Verfahren auch unbehaglich gefunden zu haben; jedenfalls zog er es vor, eine konvergente Folge $x_\lambda \to x_\infty$ mit $f(x_\lambda) \to 0$ herzustellen, so daß $f(x_\infty) = 0$, also x_∞ die gesuchte Gleichungswurzel ist. Um dies aber bequem durchführen zu können, mußte er voraussetzen, daß keine Doppelwurzeln vorhanden sind, und verfällt damit demselben intuitionistischen Einwand wie die meisten „algebraischen" Beweise. In § 3 und 4 wollen wir sehen, daß man mit einigem Opfer an Bequemlichkeit um jene Voraussetzung herumkommt, daß sich dieser direkteste analytische Beweis auch in intuitionistischer Weise durchführen läßt.

---

[6]) Da öffentlich die Meinung hervorgetreten ist, das Ergebnis meiner Arbeit [25] sei der moderne Beweis von Dörge, benutze ich diese Gelegenheit, um darauf hinzuweisen, daß dies nicht der Fall ist, daß z. B. meine Durchführung des Laplaceschen Ansatzes unabhängig ist von den feineren arithmetischen Eigenschaften des vorgelegten Polynoms.

Beim Kontinuitätsbeweis spielt ebenfalls die Voraussetzung des Fehlens von Doppelwurzeln eine wichtige Rolle; wegen der größeren rechnerischen Verwicklung dürfte sie hier nur mit sehr großen Umständlichkeiten zu vermeiden sein.

§ 3.

Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Sei $n > 1$ und ein Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$$

gegeben. Wir wollen eine Folge komplexer Zahlen x_λ herstellen, bei der $|f(x_{\lambda+1})|$ gegenüber $|f(x_\lambda)|$ möglichst wirksam verkleinert ist. Zu dem Zweck setzen wir an

$$f(x_\lambda + y) = f(x_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\, y^\nu \tag{1}$$

und suchen y so zu wählen, daß eines der Glieder $b_k y^k$ die anderen stark überwiegt, daß es das Argument von $-f(x_\lambda)$ und einen passenden Betrag hat. Der Beweis von Lipschitz ist auf Grund seiner Voraussetzung nicht verschwindender Diskriminante so angelegt, daß allemal $|b_1|$ über einer festen positiven Schranke und $|f(x_\lambda)|, |b_2|, \ldots, |b_n|$ unter einer festen Schranke liegen. Damit gelingt es, y so zu wählen, daß $|f(x_\lambda + y)|$ nicht größer ist als ein fester echter Bruchteil von $|f(x_\lambda)|$, daß also die Folge $[f(x_\lambda)]$ mindestens wie eine geometrische Reihe gegen Null strebt. Bei dem Argand-Cauchyschen Beweis hat man außer $b_n = 1$ keine Kenntnis über die Werte b_ν und nimmt für k den kleinsten Wert, bei dem $b_k \neq 0$ ist. Dann muß man $|y|$ hinreichend klein machen, damit das Glied $b_k y^k$ die anderen überwiegt, und erhält eine Verkleinerung von $|f(x_\lambda + y)|$ gegenüber $|f(x_\lambda)|$, kann aber nicht sagen um wieviel. Ist z. B. $|b_1|$ nicht Null, aber äußerst klein, so muß $|y|$ sehr klein sein, damit das Glied $b_1 y$ die anderen überwiegt. Ist aber etwa $|b_2|$ nicht besonders klein und die folgenden Werte $|b_\nu|$ nicht allzu groß, so kann man günstigenfalls $|y|$ so groß wählen, daß das Glied $b_2 y^2$ das vorhergehende stark übertrifft, und gleichzeitig so klein, daß es die folgenden Glieder stark übertrifft. Bei geeignetem Argument von y wird dann eine stärkere Verkleinerung von $|f(x_\lambda + y)|$ erreicht werden können, als wenn $b_1 y$ die Hauptrolle spielt.

Untersucht man überhaupt genauer, für welche Beträge von y ein Glied der Summe in (1) die anderen in hinreichendem Maße überwiegen und welche Werte dann der Betrag dieses Gliedes annehmen kann, so ist ein für unseren Zweck geeignetes Ergebnis der folgende

Hilfssatz. *Zu jedem $n > 1$ gibt es eine positive Zahl $\omega > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nicht negative Zahlen, insbesondere*

$\beta_n = 1$, *und ist* $t > 0$, *so gibt es eine Nummer* k $(1 \leqq k \leqq n)$ *und eine positive Zahl* ξ *derart, daß*

$$t < \beta_k \xi^k < \omega t,$$

$$\beta_k \xi^k > (2n-2)\beta_\nu \xi^\nu \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \ \nu \neq k$$

gilt.

Da der Beweis etwas umständlich ist, bringe ich ihn für sich im § 4.

Auf Grund des Hilfssatzes können wir leicht eine konvergente Zahlenfolge $x_0, x_1, \ldots$ mit $f(x_\lambda) \to 0$ herstellen. Das Anfangsglied x_0 setzen wir beliebig an, etwa $x_0 = 0$. Ist dann x_λ schon festgesetzt, so gilt eine der beiden Ungleichungen

(A) $\quad |f(x_\lambda)| < 2^{-\lambda-1}$, $\qquad$ (B) $\quad |f(x_\lambda)| > 2^{-\lambda-2}$

oder beide[7]). Gelten beide, so entscheiden wir nach Willkür für einen der beiden Fälle. Gilt (A), so setzen wir $x_{\lambda+1} = x_\lambda$ und haben damit

$$|f(x_{\lambda+1})| < 2^{-\lambda-1}. \tag{2}$$

Gilt (B), so entwickeln wir nach (1) und wenden den Hilfssatz an mit $\beta_\nu = |b_\nu|$, $t = \omega^{-1}|f(x_\lambda)|$. Er gibt uns k und ξ mit

$$\omega^{-1}|f(x_\lambda)| < \beta_k \xi^k < |f(x_\lambda)|, \tag{3}$$

$$\beta_k \xi^k > (2n-2)\beta_\nu \xi^\nu \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \ \nu \neq k. \tag{4}$$

Jetzt stellen wir $f(x_\lambda)$ und b_k durch Betrag und Argument dar:

$$f(x_\lambda) = |f(x_\lambda)|\, e^{i\varphi}, \qquad b_k = \beta_k e^{i\psi}$$

— das ist auch für den Intuitionisten möglich, da in (B) und (3) positive untere Schranken für die Beträge vorliegen — und setzen

$$y = \xi e^{i(\varphi - \psi + \pi)/k}, \quad x_{\lambda+1} = x_\lambda + y.$$

Dann wird auf Grund von (3) und (4)

$$\begin{aligned} |f(x_{\lambda+1})| &= \Bigl|f(x_\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu y^\nu\Bigr| \\ &\leqq |f(x_\lambda) + b_k y^k| + \Bigl|\sum_{\nu \neq k} b_\nu y^\nu\Bigr| \\ &< \Bigl||f(x_\lambda)|\, e^{i\varphi} + \beta_k e^{i\psi} \cdot \xi^k e^{i(\varphi - \psi + \pi)}\Bigr| + \frac{n-1}{2n-2}\beta_k \xi^k \\ &= \Bigl||f(x_\lambda)| - \beta_k \xi^k\Bigr| + \tfrac{1}{2}\beta_k \xi^k \\ &= |f(x_\lambda)| - \tfrac{1}{2}\beta_k \xi^k, \end{aligned}$$

$$|f(x_{\lambda+1})| < |f(x_\lambda)|\Bigl(1 - \frac{1}{2\omega}\Bigr). \tag{5}$$

Jetzt folgt

$$|f(x_\lambda)| < \operatorname{Max}\,[1, |f(x_0)|]\Bigl(1 - \frac{1}{2\omega}\Bigr)^\lambda \tag{6}$$

---

[7]) Der Intuitionist kann eine Fallunterscheidung nach $u < v$ oder $u \geqq v$ nicht machen, wohl aber eine solche wie die hier benutzte. Näheres darüber in § 4.

für $\lambda > 0$. Im Falle (A) gilt ohne weiteres (6) mit $\lambda + 1$ statt λ, da

$$\omega > 1, \quad \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2\omega}$$

ist. Im Falle (B) aber folgt aus (6) nach (5) die entsprechende Ungleichung mit $\lambda + 1$ statt λ, und zwar auch wenn statt (6), wie es für $\lambda = 0$ der Fall sein kann, nur die entsprechende Gleichheit besteht. Damit ist (6), d. h.

$$\lim_{\lambda \to \infty} f(x_\lambda) = 0 \tag{7}$$

bewiesen.

Nun schätzen wir noch die Größe $|x_{\lambda+1} - x_\lambda| = \xi$ ab. Im Falle (A) ist sie gleich Null. Im Falle (B) entnehmen wir, wenn $k = n$ ist,

$$\xi^n < |f(x_\lambda)|$$

aus (3); für $k \neq n$ nehmen wir (3) und (4) (mit $\nu = n$) zusammen:

$$(2n - 2)\,\xi^n < \beta_k\, \xi^k < |f(x_\lambda)|.$$

In jedem Falle ist also

$$|x_{\lambda+1} - x_\lambda| < \sqrt[n]{|f(x_\lambda)|} < \sqrt[n]{\operatorname{Max}\,[1, |f(x_0)|]} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\omega}\right)^{\frac{\lambda}{n}}$$

Daher strebt die Folge (x_λ) einem Grenzwert x_∞ zu, und wegen (7) und der Stetigkeit von $f(x)$ an dieser Stelle ist

$$f(x_\infty) = 0.$$

Damit ist der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

§ 4.

Beweis des Hilfssatzes.

Zur Aufstellung des Hilfssatzes kommt man folgendermaßen. Von den Gliedern $b_\nu y^\nu$ in (1) soll eines, etwa $b_k y^k$, die anderen hinreichend überwiegen, sein Betrag etwa mehr als doppelt so groß sein als die Summe der Beträge der übrigen. Schreiben wir β_ν für $|b_\nu|$ und ξ für $|y|$, so heißt das

$$\beta_k\, \xi^k > 2 \sum_{\nu \neq k} \beta_\nu\, \xi^\nu.$$

Diese Forderung vergröbern wir zu

$$\beta_k\, \xi^k > (2n - 2)\, \beta_\nu\, \xi^\nu \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n,\ \nu \neq k; \tag{8}$$

das ist die eine Behauptung des Hilfssatzes. Es fragt sich nun, welche Werte unter dieser Bedingung die Größe $\beta_k\, \xi^k$ haben kann. Um dieser Frage näher zu kommen, gehen wir zu Logarithmen über und schreiben

$$\gamma_\nu = \log \beta_\nu, \qquad \eta = \log \xi, \qquad \zeta = \log (2n - 2).$$

Daß auch $\beta_\nu = 0$ sein kann, soll uns nicht bekümmern und schadet übrigens den folgenden Betrachtungen nicht. Zeichnen wir in der X-Y-Ebene die

Punkte P_ν mit den Koordinaten ν, γ_ν (in den Figuren mit vollen Kreisen angegeben) und die Punkte Q_ν mit den Koordinaten $\nu, \gamma_\nu + \zeta$ (leere Kreise in den Figuren) ein, so besagt (8), daß die Punkte Q_ν mit $\nu \neq k$ unter der Geraden

$$\eta X + Y = \eta k + \gamma_k \tag{9}$$

liegen müssen. Diese geht durch P_k und hat die Steigung $-\eta$; für diese Steigung sind bei jedem k nur gewisse Werte, vielleicht gar keine zulässig. In Fig. 1 sind durch P_2 und P_3 keine Graden (9) zulässig; die zulässigen

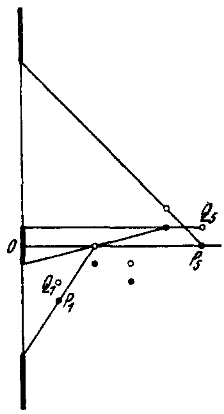

Fig. 1.

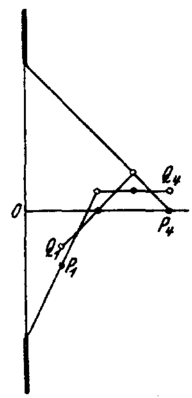

Fig. 2.

Graden durch P_4 liegen zwischen den beiden gezeichneten; die zulässigen Graden durch P_1 und P_5 verlaufen steiler als die eingezeichneten. Die Ordinate des Schnittpunktes einer Graden (9) mit der Y-Achse ist $\eta k + \gamma_k$, der Logarithmus der für uns wichtigen Größe $\beta_k\, \xi^k$. Unsere Frage heißt also: Welche Punkte der Y-Achse sind deren Schnittpunkte mit zulässigen Graden (9)? In den Figuren sind die von Schnittpunkten erfüllten Teile der Y-Achse stark ausgezogen. Eine leichte Überlegung führt zu der Einsicht, daß die nicht stark ausgezogenen Strecken keine größere Gesamtlänge haben können als in dem schlimmsten, mit $n = 4$ in Fig. 2 dargestellten Falle, daß für $1 < \nu < n$ immer P_ν auf der Graden $Q_{\nu-1} Q_{\nu+1}$ liegt. Diese Gesamtlänge ist aber durch n und ζ, d. h. durch n allein bestimmt, und so kommt man zum Wortlaut des Hilfssatzes.

Diese Betrachtung gibt den Leitfaden für einen intuitionistisch einwandfreien Beweis des Hilfssatzes. Bei ihm müssen wir die sonst übliche Entscheidung zwischen der Gültigkeit der Ungleichungen $a < b$ und $a \geqq b$ vermeiden. Statt dessen kann man aber sagen: ist $a < b$, so gilt für jede reelle Zahl x entweder $a < x$ oder $x < b$. Schließt man nämlich a, b und x ein in rational begrenzte Strecken, deren Länge kleiner ist als $\frac{1}{3}(b - a)$, und sind nicht beide Grenzzahlen der x enthaltenden Strecke größer als die

Grenzzahlen der a enthaltenden Strecke, so sind sie beide kleiner als die Grenzzahlen der b enthaltenden Strecke. Gelten beide Ungleichungen $a < x < b$ und hängt der weitere Verlauf des Beweises davon ab, welche von beiden gilt, so entscheiden wir uns willkürlich für eine von beiden. Für die Einordnung einer positiven Zahl x zwischen die Glieder einer geometrischen Reihe $\ldots, q^{-1}, 1, q, q^2, \ldots$ $(0 < q < 1)$ ergibt sich das Folgende. Bei jedem n gilt $q^{n+1} < x$ oder $x < q^n$; für hinreichend große n nur die erste, für hinreichend große negative n nur die zweite Ungleichung. Ist m der größte Wert von n, für den die zweite Ungleichung gilt, so haben wir

$$q^{m+2} < x < q^m.$$

Seien nun, wie der Hilfssatz voraussetzt, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nicht negative Zahlen und $\beta_n = 1$. Wir wählen ein q mit $0 < q < 1$. Ist $1 \leqq k < n$ und $\beta_k > 0$, so ordnen wir die größte der Zahlen

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} \qquad (k < \nu \leqq n)$$

— sie ist positiv wegen $\beta_n = 1$ — in die geometrische Reihe mit dem Quotienten q ein. Das gibt eine ganze Zahl c mit der Eigenschaft, daß

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} < q^\alpha \qquad (k < \nu \leqq n)$$

gilt für alle $\alpha \leqq c$, und

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{\nu-k}} > q^{c+2}$$

für mindestens eines dieser ν, etwa für $\nu = \nu'_k$. Nach leichter Umformung und mit der Bezeichnung $-m'_k$ statt c und $-m$ statt α heißt dies

(10) $$k < \nu'_k \leqq n,$$

(11) $$\beta_k q^{mk} > (2n-2)\beta_\nu q^{m\nu} \quad \text{für} \quad k < \nu \leqq n \quad \text{und} \quad m \geqq m'_k,$$

(12) $$\beta_k q^{(m'_k-2)k} < (2n-2)\beta_{\nu'_k} q^{(m'_k-2)\nu'_k}.$$

Ebenso vergleichen wir ein positives β_k mit β_ν für $\nu < k$: ist $1 < k \leqq n$ und $\beta_k > 0$, so suchen wir die größte der Zahlen

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1)$$

— wegen $\nu < k$ nehmen wir den entgegengesetzten Exponenten wie vorher — in die geometrische Reihe mit dem Quotienten q einzuordnen. Allerdings braucht diese Zahl nicht positiv zu sein; aber jedenfalls gilt

(13) $$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} < q^m \qquad (\nu = 1, \ldots, k-1)$$

für jedes hinreichend große negative m. Lassen wir nun m wachsend die Reihe der ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Stelle durchlaufen, so bleiben entweder die Ungleichungen (13) gültig — dies bezeichnen wir als „Fall P“ — oder es ergibt sich eine ganze Zahl $m''(k)$, bei der zuerst eine der Ungleichungen (13), etwa die mit $\nu = \nu''(k)$, durch die Ungleichung

$$\left[(2n-2)\frac{\beta_\nu}{\beta_k}\right]^{\frac{1}{k-\nu}} > q^{m+2}$$

ersetzt werden kann — dies nennen wir „Fall Q“. Es gelten also die Ungleichungen

$$(14) \qquad 1 \leqq \nu''(k) < k,$$

$$(15) \qquad \beta_k q^{mk} > (2n-2)\beta_\nu q^{m\nu} \quad \text{für} \quad m \leqq m''(k), \ \nu = 1, \ldots, k-1,$$

$$(16) \qquad \beta_k q^{[m''(k)+2]k} < (2n-2)\,\beta_{\nu''(k)}\, q^{[m''(k)+2]\nu''(k)}$$

im folgenden Sinne: im Fall P sind m'' und ν'' nicht erklärt und (15) gilt für so große Werte m, wie wir sie brauchen; im Falle Q gelten (14), (15) und (16) so, wie sie dastehen.

Man sieht, was bisher erreicht ist: wenn $\beta_k > 0$ und $m'(k) \leqq m''(k)$ ist, so besagen (11) und (15), daß q^m für $m' \leqq m \leqq m''$ ein zulässiger Wert für ξ ist, d. h. ein solcher, für den das Glied $b_k y^k$ aus (1) die übrigen stark genug überwiegt. Die Ungleichungen (10) und (12), (14) und (16) zeigen, daß m' und m'' nahezu die weitesten Schranken für m sind.

Nun heißt es noch eine Verbindung schaffen zwischen den zulässigen Werten $\beta_k \xi^k$, die bei verschiedenen Nummern k mit $m'(k) \leqq m''(k)$ auftreten können. Wir suchen eine absteigende Folge von Nummern $k_0, k_1, \ldots$, die dafür in Betracht kommen, daß bei ihnen $m'(k) \leqq m''(k)$ ist. Dazu muß β_k verhältnismäßig groß sein. Nun liefert (16) zu beliebigem k eine Nummer $\nu = \nu''(k)$, für die β_ν wenigstens nach unten beschränkt ist. Also setzen wir

$$k_0 = n$$

und, wenn k_λ erklärt ist und für diesen Wert der Fall Q eintritt

$$k_{\lambda+1} = \nu''(k_\lambda).$$

Um die folgenden Formeln von Anhängseln zu entlasten, schreiben wir

$$k_\lambda = g, \ \ k_{\lambda+1} = \nu''(g) = h, \ \ \nu'(h) = j.$$

Wegen (10) und (14) ist dann

$$h < g, \ \ h < j,$$

und wir unterscheiden die Fälle

U: $\qquad h < g < j,$

V: $\qquad h < g = j,$

W: $\qquad h < j < g.$

Im Falle U setzen wir $k = g$, $\nu = j$, $m = m'(g)$ in die Ungleichung (11) ein, $k = h$, $\nu = g$, $m = m'(h)$ in (11) und $k = h$, $\nu'(k) = j$ in (12). Das gibt

$$\beta_g q^{m'(g)(g-j)} > (2n-2)\beta_j,$$

$$\beta_h q^{m'(h)(h-g)} > (2n-2)\beta_g,$$

$$(2n-2)\beta_j q^{[m'(h)-2](j-h)} > \beta_h.$$

Multiplikation der rechten und linken Seiten dieser drei Ungleichungen ergibt

$$q^{[m'(h)-m'(g)](j-g)} > (2n-2)q^{2(j-h)},$$

(17) $$q^{m'(h)-m'(g)} > (2n-2)^{\frac{1}{j-g}} q^{2\frac{j-h}{j-g}} \geqq (2n-2)^{\frac{1}{n-1}} q^{2n-2}$$

(das letzte wegen $1 \leqq j - g \leqq n - 1$). Im Falle V setzen wir $k = h$, $\nu'(k) = g$ in (12) ein und $k = g$, $\nu''(k) = h$ in (16):

$$(2n-2)\beta_g q^{[m'(h)-2](g-h)} > \beta_h,$$

$$(2n-2)\beta_h q^{[m''(g)+2](h-g)} > \beta_g.$$

Multiplikation ergibt

$$(2n-2)^2 q^{[m'(h)-m''(g)-4](g-h)} > 1,$$

(18) $$q^{m'(h)-m''(g)} > (2n-2)^{\frac{-2}{g-h}} q^4 \geqq (2n-2)^{-2} q^4.$$

Im Falle W schließlich setzen wir $k = g$, $\nu''(k) = h$ in (16) ein, $k = h$, $\nu'(k) = j$ in (12) und $k = g$, $\nu = j$, $m = m''(g)$ in (15):

$$(2n-2)\beta_h q^{[m''(g)+2](h-g)} > \beta_g,$$

$$(2n-2)\beta_j q^{[m'(h)-2](j-h)} > \beta_h,$$

$$\beta_g q^{m''(g)(g-j)} > (2n-2)\beta_j.$$

Multiplikation ergibt

$$(2n-2) q^{[m'(h)-m''(g)](j-h)-2(g-h+j-h)} > 1,$$

(19) $$q^{m'(h)-m''(g)} > (2n-2)^{\frac{-1}{j-h}} q^{2+2\frac{g-h}{j-h}} \geqq (2n-2)^{-1} q^{n+1}.$$

Die Schlußglieder von (17), (18) und (19) sind bei fest gewähltem q nur von n abhängige positive Zahlen, von denen übrigens zwei kleiner sind als Eins. Wir bezeichnen die kleinste unter ihnen mit $A(n)$ und fassen (17), (18) und (19) zusammen, indem wir von den beiden Ausdrücken, die in (17), (18) und (19) links stehen, den größeren beibehalten. So erhalten wir

$$\operatorname{Max}\left(q^{m'(h)-m'(g)}, q^{m'(h)-m''(g)}\right) = q^{m'(h)-\operatorname{Max}[m'(g),\, m''(g)]} > A(n)$$

oder, indem wir zu den früheren Bezeichnungen zurückkehren,

(20) $$q^{m'(k_\lambda+1)-\operatorname{Max}[m'(k_\lambda),\, m''(k_\lambda)]} > A(n)$$

und dabei ist

(21) $$0 < A(n) < 1.$$

Von den Nummern $k_0, k_1, \ldots$ sind nur die für uns wichtig, für die bei geeignetem m die Ungleichungen (8) mit $\xi = q^m$ gelten, d. h. im Hinblick auf (11) und (12), (15) und (16) im wesentlichen, daß $m'(k) \leqq m''(k)$ ist. Hinzu kommt noch $k_0 = n$ und ein etwaiger Wert k_λ, bei dem der Fall P eintritt. Von allen diesen Werten seien k_φ und k_ψ zwei benachbarte, also

$$m'(k_\varrho) > m''(k_\varrho) \quad \text{für} \quad \varphi < \varrho < \psi.$$

Es ist also

$$\text{(22)} \qquad \operatorname{Max}[m'(k_\varphi),\ m''(k_\varphi)] = m''(k_\varphi), \quad \text{wenn} \quad \varphi > 0;$$

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{Max}[m'(k_\varrho),\ m''(k_\varrho)] = m'(k_\varrho), \quad \text{für} \quad \varphi < \varrho < \psi.$$

Für $\varphi = 0$, $k_\varphi = k_0 = n$ ist $m'(k_\varphi)$ nicht erklärt; aber dann kann wegen $k_\varphi = g = n$ der Fall U, der einzige, in dem $m'(g)$ auftritt, nicht vorkommen — es ist ja $j \leqq n = g$ — und so ergibt sich hier statt (20) einfach

$$\text{(24)} \qquad q^{m'(k_1) - m''(k_0)} > A(n).$$

Setzen wir nun in (20) statt λ der Reihe nach $\varphi, \varphi + 1, \ldots, \psi - 1$, so ergeben sich mit Rücksicht auf (22) und (23) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} q^{m'(k_{\varphi+1}) - m''(k_\varphi)} &> A(n), \\ q^{m'(k_{\varphi+2}) - m'(k_{\varphi+1})} &> A(n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q^{m'(k_\psi) - m'(k_{\psi-1})} &> A(n) \end{aligned}$$

(ist $\varphi = 0$, so stimmt die erste mit (24) überein). Multiplikation ergibt

$$\text{(25)} \qquad q^{m'(k_\psi) - m''(k_\varphi)} > A(n)^{\psi - \varphi} \geqq A(n)^{n-1}.$$

Wir bauen jetzt eine Zahlenfolge auf, die uns endlich zum Beweis des Hilfssatzes führt. Sie beginnt, von links unbegrenzt, als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^n:

$$\text{(26)} \qquad \ldots,\ \beta_n q^{n(m-1)},\ \beta_n q^{nm},\ \ldots$$

Wir setzen sie fort, soweit wir wollen oder es nötig haben, außer, wenn Fall Q eintritt. Dann ist $m''(n)$ erklärt, und wir brechen die Folge (26) vorläufig mit dem Gliede $\beta_n q^{n m''(n)}$ ab. Nun sei α das erste auf $k_0 = n$ folgende Glied der Folge $k_0, k_1, \ldots$, bei dem Fall P vorliegt oder, sofern bei ihm Fall Q eintritt, $m'(\alpha) \leqq m''(\alpha)$ ist. Dann setzen wir die Folge (26) folgendermaßen als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^α fort:

$$\ldots,\ \beta_n q^{n m''(n)};\ \beta_\alpha q^{\alpha m'(\alpha)},\ \beta_\alpha q^{\alpha[m'(\alpha)+1]},\ \ldots$$

und zwar soweit wir wollen oder es nötig haben, außer wenn Fall Q eintritt. Dann ist $m''(\alpha)$ erklärt, und wir brechen die Folge wieder vorläufig mit dem Gliede $\beta_\alpha q^{\alpha m''(\alpha)}$ ab. Ganz wie vorher sei jetzt γ das erste auf α folgende Glied der Folge $k_0, k_1, \ldots$, bei dem Fall P vorliegt oder, wenn Fall Q eintritt, $m'(\gamma) \leqq m''(\gamma)$ ist. Dann setzen wir unsere Folge folgendermaßen als geometrische Reihe mit dem Quotienten q^γ fort:

$$\ldots,\ \beta_\alpha q^{\alpha m''(\alpha)};\ \beta_\gamma q^{\gamma m'(\gamma)},\ \beta_\gamma q^{\gamma[m'(\gamma)+1]},\ \ldots$$

So können wir die Folge unbeschränkt fortsetzen. Vorläufig abbrechen müssen wir sie nur, wenn bei einem ihrer Abschnitte, der aus Gliedern $\beta_\varepsilon q^{\varepsilon m}$ besteht, für $k = \varepsilon$ der Fall Q eintritt. Dann ist $\varepsilon > 1$ und in der Folge $k_0, k_1, \ldots$ gibt es noch hinter ε weitere Glieder. Unter diesen suchen wir, so wie es eben zweimal geschildert wurde, das erste, bei dem Fall P eintritt oder andernfalls $m' \leqq m''$ ist. Solange nämlich bei einem Gliede k_λ der Fall Q mit $m'(k_\lambda) > m''(k_\lambda)$ vorliegt, gibt es noch ein folgendes Glied $k_{\lambda+1}$. Gelangen wir aber in der — absteigenden — Folge $k_0, k_1, \ldots$ zum Gliede $k_\varrho = 1$, so behandeln wir es sinngemäß nach Fall P d. h. wir beschließen die Folge (26) mit der nach rechts unbegrenzten geometrischen Reihe

$$\ldots;\ \beta_1 q^{m'(1)},\ \beta_1 q^{m'(1)+1},\ \ldots$$

Die so aufgestellte Zahlenfolge bezeichnen wir für den Augenblick mit

$$\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$$

Zwei Nachbarglieder a_ν und $a_{\nu+1}$ gehören entweder einem der Abschnitte an; dann ist

$$a_{\nu+1} = a_\nu q^\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq n). \tag{27}$$

Oder wir befinden uns gerade an einer der Abbruchstellen; dann tritt die Überlegung ein, die zu (25) führte, es ist mit der dortigen Bezeichnung

$$a_\nu = \beta_{k_\varphi} q^{k_\varphi m''(k_\varphi)},\quad a_{\nu+1} = \beta_{k_\psi} q^{k_\psi m'(k_\psi)}.$$

Wegen $\varphi < \psi$, $k_\varphi > k_\psi$ ist jetzt (11) mit $k = k_\psi$, $\nu = k_\varphi$, $m = m'(k_\psi)$ anwendbar und liefert

$$\begin{aligned} a_{\nu+1} &> (2n-2)\,\beta_{k_\varphi} q^{k_\varphi m'(k_\psi)}, \\ &= (2n-2)\,a_\nu\, q^{k_\varphi[m'(k_\psi) - m''(k_\varphi)]}. \end{aligned}$$

und hieraus folgt nach (25) die Beziehung

$$a_{\nu+1} > a_\nu (2n-2)\, A(n)^{(n-1)^2}. \tag{28}$$

Nun bedenken wir noch, daß jede Abbruchstelle einem Vorrücken in der Folge $k_0, k_1, \ldots$, d. h. einem Rückschritt in der Reihe $1, 2, \ldots, n$ entspricht. Also können höchstens $n - 1$ Abbrüche vorkommen. An diesen Stellen gilt (28), sonst (27). Daher gilt

$$\begin{aligned} &a_\nu \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty \\ &a_\nu \to +\infty \quad \text{für} \quad \nu \to -\infty. \end{aligned} \tag{29}$$

Wir wählen jetzt ω und ω_1 gemäß

$$\omega > \omega_1 > \operatorname{Max}\,[q^{-n},\ (2n-2)^{-1} A(n)^{-(n-1)^2}]. \tag{30}$$

Ist dann t irgendeine positive Zahl, so gilt bei jedem ν eine der Ungleichungen

$$a_\nu < t\omega, \quad a_\nu > t\omega_1,$$

und zwar wegen (29) bei hinreichend großem ν die erste, bei hinreichend großem negativem ν die zweite. Sei $\nu = \varkappa - 1$ die letzte Nummer, bei der die zweite Ungleichung gilt; dann ist

$$a_{\varkappa - 1} > t\omega_1, \quad a_\varkappa < t\omega$$

und wegen (27) oder (28) und (30) schließlich

$$a_\varkappa \geqq a_{\varkappa-1} \operatorname{Min}\left[q^n, (2n-2) A(n)^{(n-1)^2}\right] > \frac{a_{\varkappa-1}}{\omega_1} > t,$$
$$t < a_\varkappa < t\omega.$$

Die Zahlen $a_\varkappa$ sind aber von der Gestalt $\beta_k\, \xi^k$ mit $\xi = q^m$, $m'(k) \leqq m \leqq m''(k)$, so daß (11) und (15) gelten. Damit sind die Behauptungen des Hilfssatzes bewiesen.

§ 5.

Intuitionistische Erweiterung des Fundamentalsatzes der Algebra.

Unter dieser Überschrift hat Brouwer [22] bewiesen, daß sich jedes Polynom, bei dem, wenn nicht der höchste, so doch irgendein Beiwert von Null verschieden ist, sich in Faktoren der Gestalt $a + bx$ zerlegen läßt, wobei von den Beiwerten a und b jeweils mindestens einer von Null verschieden ist. („Von Null verschieden" bedeutet hier immer das, was in der intuitionistischen Kunstsprache „positiv von Null verschieden" genannt wird: eine Zahl a ist positiv von Null verschieden, wenn man eine positive rationale Zahl r angeben kann, derart, daß $|a| > r$ ist.) Brouwer benutzt dabei wieder die Annäherung des gegebenen Polynoms durch eines mit rationalen Beiwerten. Ich bemerke hier, daß die Erweiterung des Fundamentalsatzes sich ganz leicht aus dem Fundamentalsatz selbst ableiten läßt. Sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

das gegebene Polynom und etwa $a_k \neq 0$. Wir suchen zunächst einen Wert c mit $f(c) \neq 0$. Fassen wir die Gleichungen

$$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_n \lambda^n \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$$

als lineare Gleichungen für $a_0, \ldots, a_n$ auf, so ist ihre Determinante als Vandermandesche Determinante von Null verschieden, und die Gleichungen ergeben eine Darstellung

$$a_k = C_0 f(0) + \ldots + C_n f(n) \tag{31}$$

in der $C_0, \ldots, C_n$ bestimmte rationale Zahlen sind und nicht alle verschwinden, wie das Beispiel $f(x) = x^k$ zeigt. Nun gilt für $f(0), \ldots, f(n)$ jeweils eine der Ungleichungen

$$|f(\lambda)| < \frac{|a_k|}{\Sigma |C_\nu|}, \quad |f(\lambda)| > \frac{|a_k|}{2\,\Sigma |C_\nu|},$$

und zwar nicht immer die erste, weil sonst (31) nicht bestehen könnte. Ein Wert von λ, bei dem die zweite Ungleichung gilt, ist der gesuchte Wert c. Nun setzen wir

$$g(y) = y^n f\left(c + \frac{1}{y}\right);$$

dann ist $g(y)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Beiwert $f(c) \neq 0$. Nach der üblichen Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es eine Zerlegung

$$g(y) = f(c) \prod_{\nu=1}^{n} (y - \alpha_\nu).$$

Setzt man hierin $y = \frac{1}{x - c}$ ein, so folgt

$$f(x) = f(c) \prod_{\nu=1}^{n} (1 + \alpha_\nu c - \alpha_\nu x),$$

und dies ist die behauptete Zerlegung, wenn man noch den Faktor $f(c)$ zu einem der folgenden dazuschlägt.

Schriftenverzeichnis.

1. J. le Rond d'Alembert: Recherches sur le calcul intégral par Mr. d'Alembert. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Année MDCCXLVI (Berlin 1748), S. 182—224.

2. L. Euler: Recherches sur les racines imaginaires des équations. Par M. Euler, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres. Année MDCCXLIX (Berlin 1751), S. 222—288.

3. F. Daviet de Foncenex: Réflexions sur les quantités imaginaires. Par M. le Chev. Daviet de Foncenex. Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis. Augustae Taurinorum MDCCLIX, S. 113—146.

4. J.-L. Lagrange: Sur la forme des racines imaginaires des équations. Par M. de la Grange, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles lettres. Année MDCCLXXVII (Berlin 1774), S. 222—258.

5. J.-L. Lagrange: De la résolution des équations de tous les degrés. Paris, An VI (= 1797/8). Hierin: Note IX, S. 181—201.

6. C. F. Gauß: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii MDCCLXXXXIX (= Werke, Bd. 3, S. 1—30).

7. P. S. Laplace: Leçons de Mathématiques données à l'Ecole Normale, en 1795, par M. Laplace. Journal de l'Ecole Polytechnique, (Septième et huitième cahier) Tome II (Paris 1812), S. 1—278, besonders S. 56—58 (= Oeuvres complètes, Bd. 14, S. 10—111; besonders S. 63—65).

8. R. Argand: Essai sur une manière de répresenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Paris 1806).

9. R. Argand: Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse. Annales de Mathématiques, 5, (181). S. 197—209.

10. C. F. Gauß: Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores (classis mathematicae). Vol. III (1816), S. 107—134 (= Werke, Bd. 3, S. 31—56).

11. C. F. Gauß: Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum in factores reales demonstratio tertia, supplementum commentationis praecedentis. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores (classis mathematicae). Vol. III (1816), S. 135—142 (= Werke, Bd. 3, S. 57—64).

12. A. L. Cauchy: Sur les racines imaginaires des équations. Journal de l'Ecole Polytechnique, (XVIIIe Cahier) Tome XI (1820), S. 411—416 (= Oeuvres complètes, IIe Série, Tome 1, S. 258—263).

13. G. K. Chr. v. Staudt: Beweis des Satzes, daß jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **29** (1845), S. 97—102.

14. C. F. Gauß: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Abhandl. d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Abhandl. d. math. Klasse d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Bd. IV (1850), S. 3—34 (= Werke, Bd. 3, S. 71—102).

15. R. Lipschitz: Lehrbuch der Analysis. Erster Band: Grundlagen der Analysis (1877), S. 248—282.

16. A. Kneser: Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **102** (1887), S. 20—55.

17. K. Weierstraß: Neuer Beweis des Satzes, daß jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen. Sitzungsber. d. Königl.-Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1891, S. 1085—1101 (= Mathematische Werke, Bd. 3, S. 251—269).

18. K. Weierstraß: Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Mathematische Werke **1** (1894), S. 247—256. („Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 12. December 1859.")

19. P. Koebe: Kontinuitätsbeweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Nachrichten von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1918, S. 45—53.

20. H. Weyl: Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik. Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 131—150, besonders S. 142—146.

21. L. E. J. Brouwer und B. de Loor: Intuitionistisch bewijs van de hoofdstelling der algebra. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam: Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling, Deel XXXIII (1924), S, 82—84.

22. L. E. J. Brouwer: Intuitionistische aanvulling van de hoofdstelling der algebra. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige Afdeeling, Deel XXXIII (1924), S. 459—462.

23. L. E. J. Brouwer: Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten. Journ. f. d. reine u. angew. Math. **154** (1925), S. 1—7, besonders S. 3.

24. B. de Loor: Die hoofstelling van die algebra van intuisionistiese standpunt. (Academisch proefschrift, Amsterdam 1925.)

25. H. Kneser: Laplace, Gauß und der Fundamentalsatz der Algebra. Deutsche Mathematik, Jahrg. 4 (1939), S. 318—322.

(Eingegangen am 19. Februar 1940.)