manuscripta math. 20, 1 - 27 (1977)

ZUR KOHOMOLOGIETHEORIE RIGID ANALYTISCHER RÄUME

Siegfried Bosch

Let X be a rigid analytic space and assume that X admits a formal covering inducing on X the structure of a formal scheme. Then, dependent on such a formal structure one associates to X the "reduction" $\tilde{X}$ which is a scheme of locally finite type over the residue field corresponding to the ground field in question. In this paper the cohomology groups of X are compared with the cohomology groups of $\tilde{X}$ and a dimension formula is proved. As a consequence it is shown that X is affinoid if $\tilde{X}$ is affine and that an analytic map $\varphi : X \to Y$ which is compatible with the formal structures on X and Y is finite if and only if $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ is finite.

Seit Begründung der rigid-analytischen Geometrie durch TATE hat es sich als sehr nützlich erwiesen, affinoide Räume im Sinne formeller Schemata zu studieren, dieses Vorgehen wurde von RAYNAUD in [12] auch zur Behandlung globaler Räume vorgeschlagen. Nach [12] wird unter geeigneten Endlichkeitsvoraussetzungen jeder analytische Raum X^{an} induziert von einem formellen Schema über dem Bewertungsring des Grundkörpers, aber man kann im allgemeinen verschiedene formelle Schemata angeben, welche X^{an} induzieren. Aus diesem Grunde werden wir in dieser Arbeit durchweg analytische Räume mit einer fest vorgegebenen formellen Struktur, sogenannte formell-analytische Räume betrachten. Jedem solchen Raum X läßt sich in kanonischer Weise eine Reduktion $\tilde{X}$ zuordnen, es ist $\tilde{X}$ ein Schema von lokal endlichem Typ über dem Restklassenkörper des betrachteten Grundkörpers.

Nach einigen einführenden Bemerkungen zur Theorie formell-analytischer Räume im § 1 werden im § 2 die Kohomologiegruppen eines formell-analytischen Raumes X (welche übereinstimmen mit denjenigen des unterliegenden analytischen Raumes X^{an}) verglichen mit den Kohomologiegruppen der Reduktion $\widetilde{X}$. Dabei ergeben sich Dimensionsabschätzungen (Theorem 2.8), die im § 3 einige interessante Anwendungen gestatten. So läßt sich zeigen, daß ein formell-analytischer Raum X genau dann affinoid ist, wenn seine Reduktion $\widetilde{X}$ affin ist (Theorem 3.1). Weiter gewinnt man den folgenden Endlichkeitssatz: Eine formell-analytische Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist genau dann endlich, wenn die zugehörige Abbildung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ endlich ist. Dies ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Endlichkeitssatzes für affinoide Abbildungen.

Für einige Anwendungen der hier gewonnenen Resultate auf rigid-analytische Gruppen sei auf [5] verwiesen.

1. Formell-analytische Räume

Es sei k im folgenden stets ein nicht-archimedisch bewerteter Körper, die Bewertung von k sei vollständig und nicht-trivial. Wir werden über k analytische und insbesondere auch affinoide Räume betrachten, zur Definition vergleiche man etwa [8,10,13] oder auch [4]. Ist A eine k-affinoide Algebra und $X = \mathrm{Sp}\, A$ der zugehörige k-affinoide Raum, so hat man zu X das affine Modell $\widetilde{X} = \mathrm{Sp}\, \widetilde{A}$ über dem Restklassenkörper $\widetilde{k}$ von k, die Zuordnung $X \rightsquigarrow \widetilde{X}$ ist funktoriell.

Man nennt einen affinoiden Teilbereich $Y = \mathrm{Sp}\, B$ eines affinoiden Raumes $X = \mathrm{Sp}\, A$ einen <u>strikten Laurentbereich</u> von X, wenn es Funktionen $f_1, \ldots, f_r \in \mathring{A}$ gibt mit

$$Y = \{x \in X \mid |f_\rho(x)| \geq 1,\ \rho = 1, \ldots, r\}.$$

Es gilt dann

$$B = A < f_1^{-1}, \ldots, f_r^{-1} >,$$

und wir schreiben auch

$$Y = X(f_1^{-1}, \ldots, f_r^{-1}),$$

natürlich hat man

$$Y = X(f^{-1}) \quad \text{mit} \quad f := \prod_{\rho=1}^{r} f_\rho .$$

Wir betrachten nun die Projektion $\pi : X \to \tilde{X}$. Ein strikter Laurentbereich $X(f^{-1}) \subset X$ gibt stets Anlaß zu einem Zariski-offenen affinen Unterraum $\tilde{X}(\tilde{f}^{-1}) \subset \tilde{X}$, es gilt

$$\tilde{X}(\tilde{f}^{-1}) = \pi(X(f^{-1})), \quad X(f^{-1}) = \pi^{-1}(\tilde{X}(\tilde{f}^{-1})),$$

und man sieht sofort, daß π eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den strikten Laurentbereichen von X und den Zariski-offenen Unterräumen des Typs $\tilde{X}(\tilde{g}^{-1}) \subset \tilde{X}$ mit $\tilde{g} \in \tilde{A}$ induziert. Außerdem gilt:

<u>BEMERKUNG 1.1.</u> <u>Es sei</u> $Y = X(f^{-1})$ <u>ein strikter Laurentbereich eines affinoiden Raumes</u> X, $\varphi : Y \to X$ <u>bezeichne die kanonische Inklusion. Dann ist</u> $\tilde{Y}$ <u>vermöge der Abbildung</u> $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ <u>ein Zariski-offener Unterraum von</u> $\tilde{X}$, <u>und es gilt</u> $\tilde{\varphi}(\tilde{Y}) = \tilde{X}(\tilde{f}^{-1})$.

<u>Beweis.</u> [4], Lemma 3.2.

<u>SATZ 1.2.</u> <u>Es sei</u> X <u>ein affinoider Raum und</u> $Y \subset X$ <u>ein affinoider Teilbereich,</u> $\varphi : Y \to X$ <u>sei die kanonische Inklusion. Dann ist äquivalent:</u>

(i) Y <u>ist endliche Vereinigung von strikten Laurentbereichen von</u> X.

(ii) $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ <u>ist eine offene Immersion, d.h.</u> $\tilde{\varphi}$ <u>definiert</u> $\tilde{Y}$ <u>als Zariski-offenen Unterraum von</u> $\tilde{X}$.

<u>Beweis.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii). Diese Richtung ist klar nach Bemerkung 1.1 für den Fall, daß Y strikter Laurentbereich von X ist. Den Allgemeinfall führt man wiederum mit Bemerkung 1.1 sofort auf diesen Spezialfall zurück.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es sei $X = \operatorname{Sp} A$, $Y = \operatorname{Sp} B$. Weiter sei $y \in Y$, es bezeichne $\tilde{y}$ das Bild von y unter der Projektion $Y \to \tilde{Y}$. Dann gibt es ein $f \in \mathring{A}$ mit $\tilde{y} \in \tilde{X}(\tilde{f}^{-1}) \subset \tilde{Y}$, insbesondere gilt also $\tilde{Y}(\tilde{f}^{-1}) = \tilde{X}(\tilde{f}^{-1})$. Folglich ist die Inklusion $\sigma : Y(f^{-1}) \hookrightarrow X(f^{-1})$ z.B. nach [1], Satz 3.2, eine endliche Abbildung. Da σ außerdem eine offene Immersion ist, folgt mit [6], Remark 4.1, daß σ auch eine abgeschlossene Immersion ist. Dies bedeutet, wie man sich leicht überzeugt, daß

$Y(f^{-1})$ vermöge σ Zariski-offen und abgeschlossen in $X(f^{-1})$ liegt. Betrachten wir nun die Abbildung $\sigma^*: A\langle f^{-1}\rangle \to B\langle f^{-1}\rangle$, so gilt aufgrund der Bijektivität von $\tilde{\sigma}^*$

$$\ker \sigma^* \subset \operatorname{rad}\,(A\langle f^{-1}\rangle).$$

Somit folgt $\sigma(Y(f^{-1})) = X(f^{-1})$, d.h. σ ist ein Isomorphismus.

Mit dieser Betrachtung ergibt sich also, daß Y Vereinigung von strikten Laurentbereichen von X ist, und da Y quasi-kompakt ist, erhält man Y bereits als endliche Vereinigung von strikten Laurentbereichen von X, q.e.d.

Wir nennen einen affinoiden Teilbereich $Y \subset X$ einen *formellen Teilbereich*, wenn die kanonische Inklusion $\sigma : Y \hookrightarrow X$ die äquivalenten Bedingungen von Satz 1.2 erfüllt. Bezeichnet $\pi : X \to \tilde{X}$ die kanonische Projektion, so sieht man, daß ein affinoider Teilbereich $Y \subset X$ genau dann formeller Teilbereich von X ist, wenn Y Urbild eines Zariski-offenen Unterraumes von $\tilde{X}$ ist. Weiter zeigt man unschwer mit Satz 1.2

BEMERKUNG 1.3. (i) *Es seien $Y_1,\ldots,Y_n \subset X$ strikte Laurentbereiche (resp. formelle Teilbereiche). Dann ist auch*

$$Y := \bigcap_{i=1}^{n} Y_i$$

strikter Laurentbereich (resp. formeller Teilbereich) in X.

(ii) *Es seien $Y \subset X$ und $Z \subset Y$ strikte Laurentbereiche von X bzw. Y. Dann ist Z auch strikter Laurentbereich in X. Die entsprechende Aussage ist ebenfalls richtig für formelle Teilbereiche.*

Es folgt mit Bemerkung 1.3, daß die strikten Laurentbereiche eines affinoiden Raumes X eine Basis für eine Topologie auf X bilden. Diese Topologie nennen wir die *formelle Topologie* oder *f-Topologie* von X, sie ist gröber als die Grothendieck-Topologie auf X. Es ist klar, daß ein formeller Teilbereich $Y \subset X$ stets f-offen in X ist, und weiter folgt mit Bemerkung 1.3, daß die von X auf Y induzierte Topologie gerade die f-Topologie von Y ergibt. Da jede Zariski-offene Menge in $\tilde{X}$ quasi-kompakt ist, so ist auch jede f-offene Menge in X f-quasi-kompakt.

Es sei nun $\mathcal{O}_X^{an}$ die Garbe (bezüglich Grothendieck-Topologie!) der analytischen Funktionen auf einem affinoiden Raum $X = \mathrm{Sp}\,A$, die also jedem affinoiden Teilbereich $\mathrm{Sp}\,B \subset X$ die affinoide Algebra B zuordnet. Wir können $\mathcal{O}_X^{an}$ auf die f-offenen Mengen von X beschränken und erhalten somit eine Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X bezüglich der f-Topologie. Wir nennen den k-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ einen <u>formell-affinoiden Raum</u> und bezeichnen ihn auch mit $\mathrm{Spf}\,A$. Wie üblich werden globale Räume erklärt:

<u>DEFINITION 1.4. Ein formell-analytischer Raum ist ein k-geringter Raum</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ <u>(in kurzer Schreibweise auch mit</u> X <u>bezeichnet), derart daß jedes</u> $x \in X$ <u>eine offene Umgebung</u> $U \subset X$ <u>besitzt), so daß</u> $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ <u>formell-affinoid ist</u>.

Bei der Erklärung von Morphismen formell-analytischer Räume ist etwas Vorsicht geboten. Als <u>formell-affinoide</u> Abbildungen zwischen formell-affinoiden Räumen $\mathrm{Spf}\,A$ und $\mathrm{Spf}\,B$ wollen wir lediglich diejenigen Morphismen k-geringter Räume $\varphi : \mathrm{Spf}\,A \to \mathrm{Spf}\,B$ bezeichnen, die von einem Algebrahomomorphismus $\varphi^* : B \to A$ induziert werden. Eine <u>formell-analytische</u> Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen formell-analytischen Räumen X und Y sei dann ein Morphismus k-geringter Räume, derart daß für alle f-offenen formell-affinoiden Unterräume $X' \subset X$ und $Y' \subset Y$ mit $\varphi(X') \subset Y'$ der induzierte Morphismus $X' \to Y'$ jeweils formell-affinoid ist.

Es ist klar, daß die Kategorie der formell-affinoiden Räume mit den formell-analytischen Abbildungen als Morphismen in natürlicher Weise äquivalent ist zur Kategorie der affinoiden Räume. Diese Äquivalenz läßt sich wie folgt fortsetzen zu einem Funktor $\Phi : \text{f-An} \to \text{An}$ der Kategorie der formell-analytischen Räume in die Kategorie der analytischen Räume. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein formell-analytischer Raum. Dann trägt jeder f-offene formell-affinoide Unterraum $U \subset X$ als affinoider Raum eine wohldefinierte G-Topologie. Alle diese G-Topologien sind miteinander verträglich, denn wenn $U, U' \subset X$ f-offen und affinoid sind, so ist $U \cap U'$ als endliche Vereinigung von strikten Laurentbereichen von U bzw. U' stets ein G-offener Unterraum von U und U'. Wir nennen nun eine Teilmenge $X' \subset X$ G-offen, wenn $X' \cap U$ stets G-offen in U ist für alle f-offenen affinoiden Unterräume $U \subset X$ und weiter eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X' eine G-Überdeckung, wenn $\mathfrak{U}|_U$ stets eine G-Überdeckung von $X' \cap U$ ist, ebenfalls für alle f-offenen affinoiden Unterräume $U \subset X$. Auf diese Weise erhalten wir eine G-Topologie auf X, welche charakterisiert ist als feinste G-Topologie, so daß alle f-offenen affinoiden Unterräume $U \subset X$, versehen mit ihrer natürlichen G-Topologie, G-offene Unterräume von X sind. Es ist nun ohne weiteres mit Hilfe projektiver Limesbildungen möglich, die Garbe $\mathcal{O}_X$ zu einer Garbe $\mathcal{O}_X^{an}$ bezüglich der G-Topologie auf X fortzusetzen. Somit erhält man zu $X = (X, \mathcal{O}_X)$ einen analytischen Raum, den wir mit $X^{an} = (X, \mathcal{O}_X^{an})$ bzw. $\Phi(X)$ bezeichnen wollen, und es ist klar, daß jede formell-analytische Abbildung $\Psi : X \to Y$ auch eine analytische Abbildung $\Phi(\Psi) : X^{an} \to Y^{an}$ induziert, Φ ist ein Funktor.

Wir nennen $X^{an} = \Phi(X)$ den zu X gehörigen analytischen Raum und bezeichnen X auch als formell-analytische Struktur auf dem analytischen Raum X^{an}.

Man beachte, daß Φ keine Äquivalenz von Kategorien ist, denn man kann, abgesehen von trivialen Fällen, bereits affinoide Räume stets mit verschiedenen nicht-isomorphen formellen Strukturen versehen. Es ist leicht zu sehen, daß eine formelle Struktur auf einem analytischen Raum X^{an} gegeben wird durch eine formelle Überdeckung von X^{an}, d.h. eine G-offene affinoide Überdeckung $X^{an} = \bigcup_{i \in I} U_i$, derart daß $U_i \cap U_j$ stets endliche Vereinigung von strikten Laurentbereichen von U_i bzw. U_j ist. Wir betrachten einige Beispiele:

a) $\operatorname{Spf} T_n$ ist die kanonische formelle Struktur auf dem Einheitspolyzylinder $E^n = \operatorname{Sp} T_n$.

b) Sei $\alpha \in |k|$, $0 < \alpha < 1$. Die Überdeckung

$$E^1 = \{x \mid |x| \leq \alpha\} \cup \{x \mid |x| \geq \alpha\}$$

ist eine formelle Überdeckung von E^1 und definiert eine von der kanonischen verschiedene formelle Struktur auf E^1.

c) Eine formelle Struktur auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k)$ wird definiert durch die Überdeckung $\mathbb{P}^n = \bigcup_{\nu=0}^{n} X_\nu$

wobei

$$X_\nu = \{(x_o,\ldots,x_n) \in \mathbb{P}^n \,\big|\, |x_\nu| = 1,\ |x_i| \le 1 \text{ für } i = 0,\ldots,n\},$$

es gilt

$$X_\nu = \mathrm{Sp}\, k\left\langle \frac{\zeta_o}{\zeta_\nu},\ldots,\frac{\zeta_n}{\zeta_\nu}\right\rangle \cong E^n .$$

Ebenso wie für analytische Räume definiert man einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf einem formell-analytischen Raum X. Es gilt das Cartansche Heftungslemma, [11] Theorem 1.2, d.h. $\mathcal{F}$ ist genau dann kohärent, wenn $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spf}\,A}$ für jeden f-offenen affinoiden Unterraum $\mathrm{Spf}\,A \subset X$ assoziiert ist zu einem endlichen A-Modul. Im übrigen gibt jeder kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ Anlaß zu einem kohärenten $\mathcal{O}_X^{an}$-Modul $\mathcal{F}^{an}$ auf dem analytischen Raum $X^{an} = \Phi(X)$, und man verifiziert leicht, daß diese Beziehung umkehrbar eindeutig ist.

Ist $\mathcal{J}$ ein kohärentes $\mathcal{O}_X$-Ideal und $Y \subset X$ der Träger der Garbe $\mathcal{O}_X^{an}/\mathcal{J}^{an}$, so trägt Y in kanonischer Weise die Struktur eines formell-analytischen Raumes, wobei die Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y$ aus der Garbe $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ durch Einschränkung entsteht. Wir nennen $(Y,\mathcal{O}_Y)$ einen <u>abgeschlossenen</u> <u>Unterraum</u>[1] von X. Es ist klar, daß die abgeschlossenen Unterräume von X vermöge $Y \rightsquigarrow Y^{an}$ umkehrbar eindeutig den abgeschlossenen Unterräumen von X^{an} entsprechen. Ein formell-analytischer Raum X heiße <u>separiert</u>, falls die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$ ist. Da der Funktor Φ Produkte respektiert, so ist natürlich X genau dann separiert, wenn auch X^{an} separiert ist.

Wie üblich definiert man für einen formell-analytischen Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ und einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die Kohomologiegruppen $H^q(X,\mathcal{F})$ mit Hilfe injektiver Auflösungen. Zur Berechnung dieser Kohomologiegruppen benötigt man die Čechschen Kohomologiegruppen $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$, wobei $\mathfrak{U}$ eine f-offene formell-affinoide Überdeckung von X sei. Nach TATE [13] verschwin-

[1]Man beachte, daß hier "abgeschlossen" nicht im Sinne der f-Topologie gemeint ist. Abgeschlossene Unterräume eines formell-analytischen Raumes X sind i.a. nicht f-abgeschlossen.

den für $q \geq 1$ die Kohomologiegruppen $H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ auf einem formell-affinoiden Raum $X = \operatorname{Spf} A$, wenn $\mathcal{F}$ kohärent ist (d.h. $\mathcal{F}$ assoziiert ist zu einem endlichen A-Modul M). Hieraus erhält man mit CARTAN $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$ für $q \geq 1$. Es sei nun $(X,\mathcal{O}_X)$ ein separierter formell-analytischer Raum, dann ist der Durchschnitt f-offener formell-affinoider Unterräume wieder formell-affinoid, und es folgt mit LERAY

$$H^q(X,\mathcal{F}) = H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad q \geq 0$$

für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und jede f-offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X. Betrachtet man auch den zu $(X,\mathcal{O}_X)$ gehörigen analytischen Raum $(X,\mathcal{O}_X^{an})$, so gibt $\mathcal{F}$ Anlaß zu einem kohärenten $\mathcal{O}_X^{an}$-Modul $\mathcal{F}^{an}$, und man hat

$$H^q(X,\mathcal{F}) = H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = H^q(\mathfrak{U},\mathcal{F}^{an}) = H^q(X,\mathcal{F}^{an}).$$

Insbesondere gilt also

$$H^q(X,\mathcal{O}_X) = H^q(X,\mathcal{O}_X^{an}), \quad q \geq 0,$$

d.h. die Kohomologie von X und X^{an} ist dieselbe.

Wir wollen nun zu formell-analytischen Räumen algebraische Modelle über dem Restklassenkörper $\tilde{k}$ konstruieren. Zu jedem formell-affinoiden Raum $X = \operatorname{Spf} A$ hat man als algebraisches Modell das affine $\tilde{k}$-Schema $\tilde{X} := \operatorname{Sp}\tilde{A}$, welches reduziert und von endlichem Typ über $\tilde{k}$ ist. Ist nun $(X,\mathcal{O}_X)$ ein formell-analytischer Raum und $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine f-offene und formell-affinoide Überdeckung, so lassen sich die affinen $\tilde{k}$-Schemata $\tilde{U}_i$ vermöge der "Durchschnitte" $\widetilde{U_i \cap U_j}$ zu einem globalen Raum $(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ zusammenkleben, hierbei bezeichne $\widetilde{U_i \cap U_j}$ das Bild von $U_i \cap U_j$ unter der Projektion $\pi_i : U_i \to \tilde{U}_i$ bzw. $\pi_j : U_j \to \tilde{U}_j$. Mit anderen Worten: Wir nennen zwei Punkte $x,y \in X$ äquivalent, in Zeichen $x \sim y$, wenn für jede f-offene Teilmenge $U \subset X$ mit $x \in U$ auch $y \in U$ gilt. Es ist dann $\tilde{X}$ als topologischer Raum homöomorph zu $X/\sim$, versehen mit der Identifizierungstopologie vermöge der Projektion $\pi : X \to X/\sim$. Weiter bezeichne $\mathring{\mathcal{O}}_X$ bzw. $\check{\mathcal{O}}_X$ jeweils die Untergarbe von $\mathcal{O}_X$, welche definiert wird durch die Funktionen aus $\mathcal{O}_X$ mit Supremumnorm ≤ 1 bzw. < 1; es sei $\tilde{\mathcal{O}}_X := \mathring{\mathcal{O}}_X/\check{\mathcal{O}}_X$. Dann ist $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ gerade das direkte Bild $\pi_*(\tilde{\mathcal{O}}_X)$, man hat also als Definition

$$(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = (X/\sim,\pi_*(\widetilde{\mathcal{O}}_X)),$$

und man sieht sofort, daß die Zuordnung

$$(X,\mathcal{O}_X) \rightsquigarrow (\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

funktoriell ist, also einen Funktor von f-An in die Kategorie der reduzierten $\tilde{k}$-Schemata von lokal endlichem Typ über $\tilde{k}$ definiert.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß man f-An als volle Unterkategorie der Kategorie der formellen Schemata über $\mathring{k}$ (zur Definition vgl. [9], ch. I.10) auffassen kann vermöge der Zuordnung

$$(X,\mathcal{O}_X) \rightsquigarrow (\tilde{X},\pi_*(\mathring{\mathcal{O}}_X)) .$$

Man beachte jedoch, daß direkte Produkte in beiden Kategorien verschieden sein können, z.B. wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Im übrigen gilt

$$(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \left[(\tilde{X},\pi_*(\mathring{\mathcal{O}}_X)) \otimes_{\mathring{k}} \tilde{k}\right]_{red}.$$

2. Kohomologietheorie

Wir beginnen mit einem Lemma, welches es im folgenden ermöglichen wird, die Kohomologiegruppen formell-analytischer Räume mit denen ihrer algebraischen Modelle zu vergleichen.

LEMMA 2.1. Es seien V_1, V_2, V_3 vollständig normierte k-Vektorräume, V_1 bzw. V_2 mögen k-Orthonormalbasen $\{x_i\}_{i\in I}$ bzw. $\{y_j\}_{j\in J}$ besitzen. Weiter seien

$$V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\Psi} V_3$$

k-lineare Abbildungen mit $||\varphi|| \leq 1$, $||\Psi|| \leq 1$ und $\operatorname{im}\varphi \subset \ker\Psi$. Für die induzierten $\tilde{k}$-linearen Abbildungen

$$\tilde{V}_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \tilde{V}_2 \xrightarrow{\tilde{\Psi}} \tilde{V}_3$$

gelte $\operatorname{im}\tilde{\varphi} \subset \ker\tilde{\Psi}$ und außerdem $\dim_{\tilde{k}} \ker\tilde{\Psi}/\operatorname{im}\tilde{\varphi} < \infty$. Gibt es dann einen vollständigen kahl bewerteten B-Ring $R \subset \mathring{k}$ mit

$$\varphi(x_i) \in \widehat{\bigoplus_{j\in J}} R\, y_j \quad \textit{für alle } i \in I\,,$$

so sind die folgenden Aussagen richtig:

(i) $\operatorname{im}\tilde{\varphi} \subset \widetilde{\operatorname{im}\varphi} \subset \widetilde{\ker\psi} \subset \ker\tilde{\psi}$

(ii) $\dim_k \ker\psi/\operatorname{im}\varphi = \dim_{\tilde{k}} \widetilde{\ker\psi}/\widetilde{\operatorname{im}\varphi} \leq \dim_{\tilde{k}} \ker\tilde{\psi}/\operatorname{im}\tilde{\varphi}$

(iii) *Falls* $\ker\tilde{\psi} = \operatorname{im}\tilde{\varphi}$, *so gilt auch* $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$ *und außerdem*

$$\widetilde{\ker\varphi} = \ker\tilde{\varphi}\,, \quad \widetilde{\operatorname{im}\psi} = \operatorname{im}\tilde{\psi}\,.$$

Beweis. Zur Theorie der k-Orthonormalbasen vergleiche man [1], zur Theorie der B-Ringe [7,8].

Es ist (i) trivial. Zum Beweis von (ii) wähle man eine Teilmenge $I' \subset I$, so daß $\left\{\tilde{\varphi}(\tilde{x}_i)\right\}_{i\in I'}$ eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\operatorname{im}\tilde{\varphi}$ ergibt. Dann ist $\left\{\varphi(x_i)\right\}_{i\in I'}$ eine k-Orthonormalbasis eines vollständigen k-Vektorraumes $W \subset \operatorname{im}\varphi$, und es gilt $\tilde{W} = \operatorname{im}\tilde{\varphi}$. Da

$$\dim_{\tilde{k}} \ker\tilde{\psi}/\operatorname{im}\tilde{\varphi} < \infty\,,$$

so läßt sich die $\tilde{k}$-Basis $\left\{\tilde{\varphi}(\tilde{x}_i)\right\}_{i\in I'}$ durch endlich viele Vektoren $\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_s \in \widetilde{\operatorname{im}\varphi}$ und weiter durch endlich viele Vektoren $\tilde{z}_{s+1},\dots,\tilde{z}_n \in \widetilde{\ker\psi}$ zu einer $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\widetilde{\operatorname{im}\varphi}$ bzw. $\widetilde{\ker\psi}$ ergänzen. Es seien $z_1,\dots,z_s \in \operatorname{im}\varphi$ und $z_{s+1},\dots,z_n \in \ker\psi$ Repräsentanten von $\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_n$. Die so erhaltene $\tilde{k}$-Basis von $\widetilde{\ker\psi}$ läßt sich nun noch durch Elemente $\tilde{y}_j$ zu einer $\tilde{k}$-Basis von $\tilde{V}_2$ ergänzen. Sei also $J' \subset J$ eine Teilmenge, so daß

$$\left\{\tilde{\varphi}(\tilde{x}_i)\right\}_{i\in I'} \cup \left\{\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_n\right\} \cup \left\{\tilde{y}_j\right\}_{j\in J'}$$

eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\tilde{V}_2$ ergibt. Dann folgt mit [1], Satz 1.1, daß

$$(*) \qquad \left\{\varphi(x_i)\right\}_{i\in I'} \cup \left\{z_1,\dots,z_n\right\} \cup \left\{y_j\right\}_{j\in J'}$$

eine k-Orthonormalbasis von V_2 ist, allerdings bleibt dazu noch die Existenz eines vollständigen kahl bewerteten B-Ringes $R' \subset \mathring{k}$ nachzuweisen, derart daß alle Elemente aus (*) bereits in $\widehat{\bigoplus_{j\in J}} R' y_j$ enthalten sind. Die Elemente $z_1,\dots,z_n$

lassen sich mit Hilfe der k-Orthonormalbasis $\{y_j\}_{j\in J}$ wie folgt darstellen

$$z_\nu = \sum_{j\in J} d_{\nu j}\, y_j\,, \quad d_{\nu j} \in \overset{\circ}{k}\,, \quad \nu = 1,\dots,n\,.$$

Da die Koeffizienten $d_{\nu j}$ eine Nullfolge in $\overset{\circ}{k}$ bilden, so ist nach [7,8] der kleinste vollständige B-Ring $R' \subset \overset{\circ}{k}$, welcher R und die Elemente $d_{\nu j}$ enthält, ebenfalls wieder kahl bewertet, und es ist klar, daß alle Elemente aus (*) zu $\hat{\bigoplus}_{j\in J} R' y_j$ gehören. Somit ist also (*) tatsächlich eine k-Orthonormalbasis von V_2.

Es ist $\ker\Psi$ abgeschlossen in V_2, und man sieht sofort, daß

$$\{\varphi(x_i)\}_{i\in I'} \cup \{z_1,\dots,z_n\}$$

eine k-Orthonormalbasis von $\ker\Psi$ ist. Weiter ist auch $\operatorname{im}\varphi$ abgeschlossen, denn $W \subset \operatorname{im}\varphi$ ist abgeschlossen in V_2, und es gilt

$$\dim_k \operatorname{im}\varphi/W \leq \dim_k \ker\Psi/W = n < \infty\,.$$

Da nun

$$\{\varphi(x_i)\}_{i\in I'} \cup \{z_1,\dots,z_s\}$$

eine k-Orthonormalbasis von $\operatorname{im}\varphi$ ist, so erhält man

$$\dim_k \ker\Psi/\operatorname{im}\varphi = n - s = \dim_{\tilde{k}} \widetilde{\ker\Psi}/\widetilde{\operatorname{im}\varphi}$$

und

$$n - s \leq n = \dim_{\tilde{k}} \widetilde{\ker\Psi}/\operatorname{im}\tilde{\varphi} \leq \dim_{\tilde{k}} \ker\tilde{\Psi}/\operatorname{im}\tilde{\varphi}\,,$$

d.h. (ii) ist bewiesen.

Es gelte nun $\ker\tilde{\Psi} = \operatorname{im}\tilde{\varphi}$. Dann folgt mit (ii) sofort $\ker\Psi = \operatorname{im}\varphi$. Außerdem gilt $\operatorname{im}\tilde{\varphi} = \widetilde{\operatorname{im}\varphi} = \widetilde{\ker\Psi} = \ker\tilde{\Psi}$, d.h. wir haben $n = 0$, und es ist $\{\varphi(x_i)\}_{i\in I'}$ eine k-Orthonormalbasis von $\ker\Psi = \operatorname{im}\varphi$, die sich durch $\{y_j\}_{j\in J'}$ zu einer k-Orthonormalbasis von V_2 ergänzt. Wir wollen zunächst überlegen, daß $\ker\tilde{\varphi} \subset \widetilde{\ker\varphi}$ gilt, die umgekehrte Inklusion ist trivial.

Es sei $\tilde{x} \in \ker\tilde{\varphi}$ und $x \in \mathring{V}_1$ ein Repräsentant zu $\tilde{x}$, es gelte etwa

$$\varphi(x) = \sum_{i\in I'} c_i\, \varphi(x_i)\,, \qquad c_i \in k\,.$$

Wegen $\tilde{x} \in \ker\tilde{\varphi}$ folgt $|\varphi(x)| < 1$, und da $\{\varphi(x_i)\}_{i\in I'}$ eine k-Orthonormalbasis von $\operatorname{im}\varphi$ ist, bedeutet dies

$$\max_{i\in I'} |c_i| = |\varphi(x)| < 1\,.$$

Es gilt nun

$$x - \sum_{i\in I'} c_i\, x_i \in \ker\varphi$$

und folglich

$$\tilde{x} = \widetilde{x - \sum_{i\in I'} c_i\, x_i} \in \widetilde{\ker\varphi}\,,$$

d.h. es gilt $\ker\tilde{\varphi} \subset \widetilde{\ker\varphi}$.

Es bleibt nun noch $\widetilde{\operatorname{im}\Psi} \subset \operatorname{im}\tilde{\Psi}$ zu zeigen, die umgekehrte Inklusion ist wieder trivial. Sei $\tilde{z} \in \widetilde{\operatorname{im}\Psi}$ und $z \in \operatorname{im}\Psi \subset V_3$ ein Repräsentant zu $\tilde{z}$, es gelte etwa $z = \Psi(y)$ mit

$$y = \sum_{i\in I'} c_i\, \varphi(x_i) + \sum_{j\in J'} d_j\, y_j\,, \quad c_i, d_j \in k\,.$$

Da $\varphi(x_i) \in \ker\Psi$, so dürfen wir $c_i = 0$ annehmen für alle $i \in I'$.

Falls dann $|y| > 1$ gilt, so wähle man $c \in k$ mit $|c| = |y|$. Es folgt

$$|\Psi(c^{-1}y)| = |c^{-1}|\,|\Psi(y)| < 1$$

und somit

$$\widetilde{c^{-1}y} \in \ker\tilde{\Psi} = \widetilde{\ker\Psi}.$$

Also existiert ein

$$y' = \sum_{i\in I'} c'_i\, \varphi(x_i) + \sum_{j\in J'} d'_j\, y_j \in V_2$$

mit

$$|y'| < |y| \text{ und}$$

$$y - y' = -\sum_{i\in I'} c'_i\, \varphi(x_i) + \sum_{j\in J'} (d_j - d'_j)\, y_j \in \ker\Psi\,.$$

Dann muß aber $d_j - d'_j = 0$ gelten für alle $j \in J'$, und dies ist mit der Abschätzung $|y'| < |y|$ unvereinbar. Also gilt $|y| \le 1$ und weiter $\tilde{z} = \tilde{\Psi}(\tilde{y}) \in \operatorname{im}\tilde{\Psi}$, q.e.d.

Wir benötigen nun noch einige Hilfssätze über ausgezeichnete affinoide Algebren im Sinne von [1], p. 53. Eine affinoide Algebra A heißt ausgezeichnet, wenn es einen Epimorphismus $\tau : T_n \to A$ gibt, derart daß die mittels τ auf A induzierte Quotientennorm von T_n mit der Supremumnorm auf A übereinstimmt; τ ist dann ein ausgezeichneter Epimorphismus. Ausgezeichnete affinoide Algebren sind stets reduziert, und umgekehrt ist auch jede reduzierte affinoide Algebra A ausgezeichnet, wenn der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist, oder allgemeiner, wenn k stabil ist und $|A| = |k|$ gilt.

HILFSSATZ 2.2. Es sei A eine ausgezeichnete affinoide Algebra und $a = (a_1,\dots,a_n)$ ein System von Elementen aus $\mathring{A}$, so daß $\tilde{a}$ ein $\tilde{k}$-Algebraerzeugendensystem von $\tilde{A}$ bildet. Weiter sei $\{\tilde{a}^\nu\}_{\nu\in I}$ für eine geeignete Indexmenge $I \subset \mathbb{N}_0^n$ eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\tilde{A}$.[2] Dann ist $\{a^\nu\}_{\nu\in I}$ eine k-Orthonormalbasis von A (bezüglich Supremumnorn), und es gibt einen vollständigen B-Ring $R \subset \mathring{k}$ vom Typ $\mathbb{N}$, so daß $\bigoplus_{\nu\in I} Ra^\nu$ ein Unterring von $\mathring{A}$ ist, der $a_1,\dots,a_n$ enthält.[3]

Beweis. Man wähle einen ausgezeichneten Epimorphismus $\tau : T_m = k\langle\zeta\rangle \to A$. Dann gibt es gemäß [1], Korollar 2.5, eine k-Orthonormalbasis $\{y_j\}_{j\in J}$ von T_m sowie eine Indexmenge $J' \subset J$, so daß $\{y_j\}_{j\in J'}$ eine k-Orthonormalbasis von $\ker\tau$ bildet und außerdem der zu $\{y_j\}_{j\in J}$ und $\{\zeta^\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}_0^m}$ gehörige B-Ring $R \subset \mathring{k}$ vom Typ $\mathbb{N}$ ist. Es folgt dann, daß

---

[2] Es sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Eine solche Indexmenge I existiert natürlich immer.

[3] Ein vollständiger B-Ring $R \subset \mathring{k}$ heißt vom Typ $\mathbb{N}$, wenn es eine Nullfolge in $\mathring{k}$ gibt, so daß R der kleinste B-Ring in $\mathring{k}$ ist, der diese Nullfolge enthält. B-Ringe vom Typ $\mathbb{N}$ sind immer diskret und insbesondere kahl bewertet. Außerdem ist der kleinste B-Ring $R \subset \mathring{k}$, welcher endlich viele gegebene B-Ringe $R_1,\dots,R_s \subset \mathring{k}$ vom Typ $\mathbb{N}$ enthält, wieder vom Typ $\mathbb{N}$.

$\{\tau(y_j)\}_{j\in J\setminus J'}$ eine k-Orthonormalbasis von A ist und weiter daß

$$\hat{\bigoplus_{j\in J\setminus J'}} R\tau(y_j) = \hat{\sum_{\mu\in\mathbb{N}_o^m}} R\tau(\zeta^\mu)$$

ein Unterring von $\mathring{k}$ ist. Wir dürfen nun ohne Einschränkung

$$a_1,\ldots,a_n \in \hat{\bigoplus_{j\in J\setminus J'}} R\tau(y_j)$$

annehmen, denn der kleinste vollständige B-Ring, der R und eine gegebene Nullfolge aus $\mathring{k}$ enthält, ist wieder vom Typ $\mathbb{N}$. Es folgt dann mit [1], Satz 1.1, daß $\{a^\nu\}_{\nu\in I}$ eine k-Orthonormalbasis von A ist und weiter, daß

$$\hat{\bigoplus_{\nu\in I}} Ra^\nu = \hat{\bigoplus_{j\in J\setminus J'}} R\tau(y_j)$$

gilt, also ist $\hat{\bigoplus_{\nu\in I}} Ra^\nu$ insbesondere Unterring von $\mathring{A}$.

FOLGERUNG 2.3. *Es sei $\tau : A \to B$ ein Homomorphismus ausgezeichneter affinoider Algebren. Dann gibt es Systeme $a = (a_1,\ldots,a_n)$ bzw. $b = (b_1,\ldots,b_m)$ in $\mathring{A}$ bzw. $\mathring{B}$ sowie Indexmengen $I \subset \mathbb{N}_o^n$, $J \subset \mathbb{N}_o^m$, so daß $\{a^\nu\}_{\nu\in I}$ bzw. $\{b^\mu\}_{\mu\in J}$ k-Orthonormalbasen von A bzw. B sind. Weiter existiert zu je zwei solchen Basen stets ein B-Ring $R \subset \mathring{k}$ vom Typ $\mathbb{N}$ mit*

$$\tau(a^\nu) \in \hat{\bigoplus_{\mu\in J}} Rb^\mu \quad \text{für alle} \quad \nu \in I.$$

Beweis. Man konstruiere mit Hilfssatz 2.2 k-Orthonormalbasen der Form $\{a^\nu\}_{\nu\in I}$, $\{b^\mu\}_{\mu\in J}$ von A bzw. B und wende dann Hilfssatz 2.2 nochmals an auf das System

$$(\tau(a_1),\ldots,\tau(a_n),b_1,\ldots,b_m)$$

in $\mathring{B}$.

HILFSSATZ 2.4. *Es sei A eine ausgezeichnete affinoide Algebra und $B \subset A$ eine abgeschlossene Unteralgebra, $\sigma : \mathring{A} \to \tilde{A}$ bezeichne die kanonische Projektion. Ist dann $\tilde{B} := \sigma(B \cap \mathring{A})$ eine endlich erzeugte $\tilde{k}$-Algebra, so ist B eine ausgezeichnete k-affinoide Algebra, und die Supremumnorm auf A induziert die Supremumnorm auf B.*

Beweis. Es seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$ bzw. $b = (b_1, \ldots, b_m)$ Systeme von Elementen aus $\mathring{A}$ bzw. $B \cap \mathring{A}$, so daß $\tilde{a}$ bzw. $\tilde{b}$ $\tilde{k}$-Algebraerzeugendensysteme von $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{B}$ seien. Weiter wähle man Indexmengen $I \subset \mathbb{N}_o^n$, $J \subset \mathbb{N}_o^m$, so daß $\{\tilde{b}^\mu\}_{\mu \in J}$ eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\tilde{B}$ und

$$\{\tilde{a}^\nu\}_{\nu \in I} \cup \{\tilde{b}^\mu\}_{\mu \in J}$$

eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\tilde{A}$ ergibt. Nach Hilfssatz 2.2 ist dann

$$\{a^\nu\}_{\nu \in I} \cup \{b^\mu\}_{\mu \in J}$$

eine k-Orthonormalbasis von A, und man sieht sofort, daß auch

$$\{b^\mu\}_{\mu \in J}$$

eine k-Orthonormalbasis von B ergibt. Da nun B abgeschlossen in A liegt, so läßt sich ein Epimorphismus

$$\begin{aligned} \tau : k\langle\zeta_1, \ldots, \zeta_m\rangle &\to B \\ \zeta_i &\mapsto b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

definieren, und es ist B eine affinoide Algebra. Die von der Supremumnorm von A auf B induzierte Norm ist potenzmultiplikativ und muß aus diesem Grunde mit der Supremumnorm von B übereinstimmen. Weiter ist B ausgezeichnet, denn die Abbildung $\mathring{\tau}$ ist nach Konstruktion surjektiv, d.h. τ ist ein ausgezeichneter Epimorphismus, q.e.d.

FOLGERUNG 2.5. Es sei Sp A ein affinoider Raum und $\mathrm{Sp}\,A = \bigcup_{\rho=1}^{r} \mathrm{Sp}\,B_\rho$ eine Überdeckung mit formellen Teilbereichen. Dann ist A eine ausgezeichnete affinoide Algebra genau dann, wenn alle B_ρ ausgezeichnet sind.

Beweis. Wenn $\mathrm{Sp}\,B \subset \mathrm{Sp}\,A$ ein strikter Laurentbereich ist, so folgt unmittelbar aus [4], Hilfssatz 3.1, daß mit A auch B ausgezeichnet ist. Da ein formeller Teilbereich in Sp A stets endliche Vereinigung von strikten Laurentbereichen ist, bleibt lediglich noch zu zeigen, daß A ausgezeichnet ist, sofern alle B_ρ ausgezeichnet sind. Man betrachte die normerhaltende Inklusion

$$A \hookrightarrow A' := \prod_{\rho=1}^{r} B_\rho ,$$

wobei man A' in kanonischer Weise als affinoide Algebra auffasse. Sind nun alle B_ρ ausgezeichnet, so ist A' ausgezeichnet, also ist nach Hilfssatz 2.4 auch A ausgezeichnet, q.e.d.

FOLGERUNG 2.6. *Es sei $\tau : A \to B$ ein Homomorphismus ausgezeichneter Algebren. Ist dann $\tilde{\tau} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ surjektiv bzw. bijektiv, so besitzt auch τ die entsprechende Eigenschaft.*

Beweis. Sei $\tilde{\tau}$ surjektiv. Man wähle ein System $a = (a_1,\ldots,a_n)$ in $\mathring{A}$, so daß $\tilde{a}$ ein $\tilde{k}$-Algebraerzeugendensystem von $\tilde{A}$ bildet. Weiter sei $I \subset \mathbb{N}_0^n$ eine Indexmenge, derart daß $\left\{\tilde{\tau}(\tilde{a})^\nu\right\}_{\nu\in I}$ eine $\tilde{k}$-Vektorraumbasis von $\tilde{B}$ bildet. Es folgt dann mit Hilfssatz 2.2, daß $\left\{\tau(a)^\nu\right\}_{\nu\in I}$ eine k-Orthonormalbasis von B bildet, und man sieht sofort, daß τ surjektiv ist. Wenn $\tilde{\tau}$ bijektiv ist, so ist τ natürlich injektiv und aufgrund des soeben Bewiesenen auch surjektiv, also bijektiv, q.e.d.

Wir beweisen nun noch eine Variante zu Satz 1.2.

SATZ 2.7. *Es sei $\varphi : Y = \mathrm{Sp}\,B \to X = \mathrm{Sp}\,A$ eine affinoide Abbildung, die Algebren A und B seien ausgezeichnet. Ist dann $\tilde{Y}$ vermöge $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ ein Zariski-offener Unterraum von $\tilde{X}$, so ist Y vermöge φ ein formeller Teilbereich von X.*

Beweis. Man schließt ähnlich wie in 1.2, es ist nur zu zeigen, daß Y vermöge φ affinoider Teilbereich von X ist. Zu $y \in Y$ gibt es ein $f \in \mathring{A}$ mit $y \in Y(f^{-1})$, so daß die von $\sigma : Y(f^{-1}) \to X(f^{-1})$ induzierte Abbildung $\tilde{\sigma} : \tilde{Y}(\tilde{f}^{-1}) \to \tilde{X}(\tilde{f}^{-1})$ bijektiv ist. Die Algebren $A\langle f^{-1}\rangle$ und $B\langle f^{-1}\rangle$ sind nach Folgerung 2.5 ausgezeichnet, also ist mit $\tilde{\sigma}$ nach Folgerung 2.6 auch σ bijektiv. Somit ist $\varphi : Y \to X$ eine offene Immersion, und φ definiert Y als affinoiden Teilbereich von X.

Folgerung 2.5 bietet die Möglichkeit, den Begriff "ausgezeichnet" auch für formell-analytische Räume zu erklären. Wir nennen einen formell-analytischen Raum X *ausgezeichnet*, wenn für jeden f-offenen formell-affinoiden Unterraum $\mathrm{Spf}\,A \subset X$ die affinoide Algebra A ausgezeichnet ist. X ist also genau dann ausgezeichnet, wenn es eine f-offene formell-affinoide Überdeckung $X = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Spf}\, A_i$ gibt, so daß alle Algebren A_i ausgezeichnet sind. Insbesondere ist ein formell-affinoider Raum Spf A ausgezeichnet genau dann, wenn A ausgezeichnet ist. Ein ausgezeichneter formell-analytischer Raum ist stets reduziert, und umgekehrt ist auch jeder reduzierte formell-analytische Raum ausgezeichnet, falls der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen ist.

THEOREM 2.8. _Es sei X ein separierter formell-analytischer Raum, X sei außerdem ausgezeichnet und quasi-kompakt. Dann gilt_

a) $\dim_k H^q(X,\mathcal{O}_X) \le \dim_{\tilde{k}} H^q(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ _für alle_ $q \ge 0$

b) X _ist formell-affinoid, falls_ $\tilde{X}$ _affin ist._

Ist außerdem X rein-1-dimensional, $\tilde{X}$ _projektiv algebraisch mit_ $H^0(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \tilde{k}$, _so gilt_

c) $H^0(X,\mathcal{O}_X) = k$

$$\dim_k H^1(X,\mathcal{O}_X) = \dim_{\tilde{k}} H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) < \infty$$

$$H^q(X,\mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für} \quad q > 1.$$

Beweis. Man wähle eine f-offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_1,\dots,U_n)$ von X, dann ist $\tilde{\mathfrak{U}} = (\tilde{U}_1,\dots,\tilde{U}_n)$ eine offene affine Überdeckung von $\tilde{X}$. Wir betrachten die Čech-Komplexe

$$(*) \quad 0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d^1} C^2(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

$$(**) \quad 0 \xrightarrow{\tilde{d}^{-1}} C^0(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^0} C^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^1} C^2(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow \dots$$

Die Algebren $A_{i_0\dots i_q} := \mathcal{O}_X(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_q})$ sind alle ausgezeichnet, und es gilt

$$C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) = \prod_{i_0\dots i_q} A_{i_0\dots i_q}$$

$$C^q(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \prod_{i_0\dots i_q} \tilde{A}_{i_0\dots i_q}\,.$$

Versehen wir also die Algebren $A_{i_0 \ldots i_q}$ mit der Supremumnorm und weiter den k-Vektorraum $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ mit der Maximumnorm, genommen über die einzelnen Komponenten, so haben wir

$$\widetilde{C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)} = C^q(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

In jeder Komponente $A_{i_0 \ldots i_q}$ von $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ wähle man eine k-Orthonormalbasis gemäß Hilfssatz 2.2 bzw. Folgerung 2.3, insgesamt erhält man so eine k-Orthonormalbasis von $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$. Der Korandoperator

$$d^{q-1} : C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \to C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$$

setzt sich zusammen aus endlich vielen Restriktionen der Art $A_{i_0 \ldots i_{q-1}} \to A_{i_0 \ldots i_q}$ und Addition bzw. Subtraktion solcher Abbildungen. Man wende nun auf alle diese Restriktionen Folgerung 2.3 an, wobei man annehmen darf, daß der jeweilige B-Ring $R \subset \overset{\circ}{k}$, den man mit 2.3 erhält, für alle Restriktionen derselbe ist; denn der kleinste vollständige B-Ring $R \subset \overset{\circ}{k}$, welcher endlich viele gegebene B-Ringe vom Typ $\mathbb{N}$ enthält, ist ebenfalls vom Typ $\mathbb{N}$. Man sieht dann sofort, daß für die Abbildungen

$$C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d^{q-1}} C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d^q} C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$$

alle Voraussetzungen zu Lemma 2.1 erfüllt sind, falls

$$\dim_{\tilde{k}} H^q(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \dim_{\tilde{k}} H^q(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) < \infty$$

gilt. Es ist klar, daß wir zum Beweis von a) und c) diese Abschätzung für $q \geq 0$ und im Falle b) für $q \geq 1$ annehmen dürfen. Wir erhalten dann mit Aussage (ii) von Lemma 2.1

$$\dim_k H^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \leq \dim_{\tilde{k}} H^q(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}), \quad q \geq 0,$$

womit a) unter Benutzung von LERAY folgt.

Ist nun $\tilde{X}$ affin, so ist

$$C^0(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^0} C^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^1} C^2(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

exakt, es folgt also mit Aussage (iii) von Lemma 2.1 unter anderem

$$\widetilde{\ker d^{o}} = \ker \tilde{d}^{o}.$$

Wir können $C^{o}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) = \prod_{i=1}^{n} A_i$ als ausgezeichnete affinoide Algebra auffassen. Dann ist

$$A := \ker d^{o} = \mathcal{O}_X(X)$$

eine abgeschlossene Unteralgebra von $C^{o}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ derart daß

$$\tilde{A} = \ker \tilde{d}^{o} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{X})$$

eine endlich erzeugte $\tilde{k}$-Algebra ist. Somit folgt mit Hilfssatz 2.4, daß A selbst eine ausgezeichnete affinoide Algebra ist, wobei die von $C^{o}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ auf A induzierte Norm die Supremumnorm ist. Betrachten wir nun die Restriktionen

$$\sigma_i : A \to A_i \qquad \tilde{\sigma}_i : \tilde{A} \to \tilde{A}_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

so induzieren die Abbildungen $\tilde{\sigma}_i$ jeweils die Inklusionen

$${}^{a}\tilde{\sigma}_i : \tilde{X}_i = \operatorname{Sp}\tilde{A}_i \hookrightarrow \tilde{X} = \operatorname{Sp}\tilde{A}.$$

Folglich definieren die Abbildungen

$${}^{a}\sigma_i : X_i = \operatorname{Spf} A_i \to \operatorname{Spf} A$$

gemäß Satz 2.7 jeweils X_i als f-offenen Unterraum von Spf A, und es ist klar, daß die natürliche Abbildung

$$X \to \operatorname{Spf} A$$

ein Isomorphismus ist, d.h. X ist formell-affinoid.

Nun zum Beweis von c). Es gilt also

$$H^{o}(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \tilde{k},$$

$$\dim_{\tilde{k}} H^{1}(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) < \infty,$$

$$H^{q}(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0 \quad \text{für} \quad q > 1.$$

Somit folgt nach a) insbesondere

$$H^{o}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) = k, \quad H^{q}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für} \quad q > 1,$$

denn wir haben wegen $k \subset \mathcal{O}_X(X)$ natürlich $\dim_k H^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \geq 1$. Mit Aussage (iii) von Lemma 2.1 ergibt sich $\widetilde{\operatorname{im} d^0} = \operatorname{im} \tilde{d}^0$, denn

$$\tilde{k} \hookrightarrow C^0(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^0} C^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

ist exakt, und weiter $\widetilde{\ker d^1} = \ker \tilde{d}^1$, denn

$$C^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^1} C^2(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\tilde{d}^2} C^3(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

ist exakt, d.h. es folgt mit Aussage (ii) von Lemma 2.1

$$\begin{aligned}\dim_k H^1(X,\mathcal{O}_X) = \dim_k H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) &= \dim_k \ker d^1/\operatorname{im} d^0 \\ &= \dim_{\tilde{k}} \widetilde{\ker d^1}/\widetilde{\operatorname{im} d^0} = \dim_{\tilde{k}} \ker \tilde{d}^1/\operatorname{im} \tilde{d}^0 \\ &= \dim_{\tilde{k}} H^1(\tilde{\mathfrak{U}},\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \dim_k H^1(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}).\end{aligned}$$

Theorem 2.8 ist bewiesen.

3. Anwendungen

Es läßt sich die Aussage b) von Theorem 2.8 verallgemeinern zu

THEOREM 3.1. *Ein formell-analytischer Raum X ist genau dann affinoid, wenn seine Reduktion $\tilde{X}$ affin ist.*

Bevor wir den Beweis geben, seien einige Folgerungen zu diesem Theorem angeführt. Wir nennen eine formell-analytische Abbildung $\varphi : X \to Y$ *endlich*, wenn für jeden f-offenen affinoiden Unterraum $\operatorname{Spf} B \subset Y$ stets $\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B)$ ein formell-affinoider Unterraum $\operatorname{Spf} A \subset X$ ist, so daß die Abbildung $\varphi^*_{\operatorname{Spf} B} : B \to A$ endlich ist. Man überlegt sich leicht mit Hilfe des Cartanschen Heftungslemmas, [11] Theorem 1.2, daß $\varphi : X \to Y$ bereits dann endlich ist, wenn es eine f-offene affinoide Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spf} B_i$ gibt, so daß die induzierten Abbildungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B_i) \to \operatorname{Spf} B_i$ endliche Abbildungen formell-affinoider Räume sind. Ist z.B. X abgeschlossener formell-analytischer Unterraum von Y, so ist die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ insbesondere endlich. Im übrigen ist eine endliche Abbildung $\varphi : X \to Y$ stets abgeschlossen in dem Sinne, daß sie abgeschlossene formell-analytische Unterräume von X in abgeschlossene formell-analytische Unterräume von Y überführt. Wir erhalten als Folgerung zu Theorem 3.1

KOROLLAR 3.2. *Es sei $\varphi : X \to Y$ eine formell-analytische Abbildung zwischen formell-analytischen Räumen X und Y. Dann ist äquivalent:*

(i) $\varphi : X \to Y$ *ist endlich.*

(ii) $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ *ist endlich.*

Beweis. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spf} B_i$ eine f-offene affinoide Überdeckung. Dann ist (i) äquivalent zu folgender Bedingung

(i') Es ist $\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B_i)$ formell-affinoid, etwa $\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B_i) = \operatorname{Spf} A_i$ und $\varphi^*_{\operatorname{Spf} B_i} : B_i \to A_i$ ist endlich für alle $i \in I$.

Entsprechend ist (ii) äquivalent zu

(ii') Es ist $\tilde{\varphi}^{-1}(\operatorname{Sp} \tilde{B}_i)$ affin, etwa $\tilde{\varphi}^{-1}(\operatorname{Sp} \tilde{B}_i) = \operatorname{Sp} \tilde{A}_i$ und $\tilde{\varphi}^*_{\operatorname{Sp} \tilde{B}_i} : \tilde{B}_i \to \tilde{A}_i$ ist endlich für alle $i \in I$.

Nun gilt

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\operatorname{Sp} \tilde{B}_i) = \widetilde{\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B_i)}.$$

Nach Theorem 3.1 ist $\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B_i)$ affinoid genau dann, wenn $\tilde{\varphi}^{-1}(\operatorname{Sp} \tilde{B}_i)$ affin ist. Weiter ist z.B. gemäß [1], Satz 3.2 ein Homomorphismus $B \to A$ zwischen affinoiden Algebren endlich, genau dann wenn die Restklassenabbildung $\tilde{B} \to \tilde{A}$ endlich ist. Damit ist die Äquivalenz von (i') und (ii') unmittelbar klar.

KOROLLAR 3.3. *Ein formell-analytischer Raum X ist genau dann separiert, wenn auch $\tilde{X}$ separiert ist.*

Beweis. Sind $p_1, p_2 : X \times X \to X$ die beiden Projektionen auf die einzelnen Faktoren von $X \times X$, so induzieren p_1 und p_2 eine endliche Abbildung $\tilde{\sigma} : \widetilde{X \times X} \to \tilde{X} \times \tilde{X}$, denn für affinoide Algebren A und B ist die entsprechende Abbildung

$$\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{B} \to \widetilde{A \hat{\otimes}_k B}$$

stets endlich. Wir betrachten nun die Diagonalabbildungen

$$X \xrightarrow{\delta} X \times X$$

$$\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\delta}} \widetilde{X \times X} \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \tilde{X} \times \tilde{X} .$$

Es sei X vermöge δ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times X$, dann liegt $\tilde{\delta}(\tilde{X})$ nach Korollar 3.2 abgeschlossen in $\widetilde{X \times X}$, und da $\tilde{\sigma}$ endlich ist, liegt auch $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\delta}(\tilde{X})$ abgeschlossen in $\tilde{X} \times \tilde{X}$. Ist umgekehrt $\tilde{X}$ vermöge $\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\delta}$ abgeschlossener Unterraum von $\tilde{X} \times \tilde{X}$, so liegt $\tilde{X}$ vermöge $\tilde{\delta}$ auch abgeschlossen in $\widetilde{X \times X}$. Wiederum mit Korollar 3.2 folgt, daß $\delta(X)$ abgeschlossener Unterraum von $X \times X$ ist, q.e.d.

Zum Beweis von Theorem 3.1 benötigen wir einige Vorbereitungen. Es bezeichne im folgenden $\bar{k}$ stets den komplettierten algebraischen Abschluß von k. Der Körper $\bar{k}$ ist wiederum algebraisch abgeschlossen, und der algebraisch-separable Abschluß von k liegt dicht in $\bar{k}$.

<u>LEMMA 3.4</u>. <u>Es sei</u> X <u>ein formell-analytischer Raum und</u> k' <u>ein vollständiger Unterkörper von</u> $\bar{k}$, <u>der</u> k <u>enthält</u>. <u>Ist dann</u> $X' := X \hat{\otimes}_k k'$ <u>formell-affinoid, so auch</u> X.

<u>Beweis</u>. Zunächst sei bemerkt, daß X quasi-kompakt ist, denn X' ist als formell-affinoider Raum quasi-kompakt. Wir wählen eine f-offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_1,\ldots,U_n)$ von X und betrachten den zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Čech-Komplex

$$0 \longrightarrow C^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \longrightarrow \ldots$$

Da für jede f-offene Menge $U \subset X$ die k-Algebra $\mathcal{O}_X(U)$ kanonisch die Topologie einer k-Banachalgebra trägt, derart daß alle Restriktionen stetig sind, so trägt folglich jedes $C^q(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ die Topologie eines k-Banachvektorraumes, derart daß der Korandoperator d stetig ist. Man beachte jedoch, daß wir jetzt auch den nicht-reduzierten Fall einschließen, d.h. wir müssen statt der Supremumnorm auf einer affinoiden Algebra A stets die Quotientennorm bezüglich eines definierenden Epimorphismus $T_m \to A$ zugrundelegen.

Bezeichnet $\mathfrak{U}' = (U_1 \hat{\otimes}_k k',\ldots,U_n \hat{\otimes}_k k')$ die von $\mathfrak{U}$ induzierte f-offene affinoide Überdeckung von X', so erhält man den Čech-Komplex $C^\bullet(\mathfrak{U}', \mathcal{O}_{X'})$ aus dem Čech-Komplex $C^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X)$ vermöge Tensorierung mit k':

$$C^\bullet(\mathfrak{U}',\mathcal{O}_{X'}) = C^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{O}_X) \hat{\otimes}_k k' .$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\ker d^0$ folgt dann

$$\mathcal{O}_X(X) \hat{\otimes}_k k' = (\ker d^0) \hat{\otimes}_k k' = \ker (d^0 \hat{\otimes}_k k') = \mathcal{O}_{X'}(X') ,$$

dies sieht man etwa mit [2], Lemma 3.2 und unter Ausnutzung der Exaktheit von $\hat{\otimes}_k$.

Wir führen jetzt den Beweis von 3.4 für den Spezialfall einer endlichen Galoiserweiterung k' über k. Dann operiert die zugehörige Galoisgruppe Γ auf der k'-affinoiden Algebra

$$A' := \mathcal{O}_{X'}(X') = \mathcal{O}_X(X) \hat{\otimes}_k k',$$

und es ist $A := \mathcal{O}_X(X)$ die Fixalgebra. Nach [3], Lemma 3.1 ist A eine k-affinoide Algebra, man hat daher eine formell-analytische Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \operatorname{Spf} A$, welche nach Tensorieren mit k' den kanonischen Isomorphismus $\varphi' : X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spf} A'$ ergibt. Es sei vermerkt, daß

$$\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A}$$

gilt, denn wenn $\operatorname{Spf} B \subset \operatorname{Spf} A$ ein f-offener affinoider Unterraum ist, so können wir die obige Betrachtung für den formell-analytischen Raum $\varphi^{-1}(\operatorname{Spf} B)$ anstelle von X durchführen. Wir wollen nun noch einen Hilfssatz beweisen, der zeigt, daß φ ein Homöomorphismus f-topologischer Räume ist; denn dann ist klar, daß φ einen formell-analytischen Isomorphismus zwischen X und $\operatorname{Spf} A$ erklärt.

<u>HILFSSATZ 3.5.</u> <u>Es sei k' eine endliche quasi-galoissche Körpererweiterung von k und Y ein formell-analytischer Raum über k. Dann gilt für die kanonische Projektion</u> $p : Y' = Y \hat{\otimes}_k k' \to Y$

(i) p <u>ist surjektiv und f-offen.</u>

(ii) <u>Die Operation von $\Gamma := \operatorname{Gal}(k'/k)$ auf Y' induziert eine transitive Operation auf den Punkten der Fasern von</u> p.

<u>Beweis.</u> Es seien Y und Y' ohne Einschränkung affinoid, etwa $Y = \operatorname{Spf} B$, $Y' = \operatorname{Spf} B'$. Falls k' rein inseparabel über

k ist, so sieht man leicht, daß $p : Y' \to Y$ in diesem Falle einen Homöomorphismus f-topologischer Räume liefert. Wir dürfen daher ohne Einschränkung k' als Galoiserweiterung von k annehmen. Es ist p surjektiv, denn p ist endlich. Weiter folgt (ii) mit [3], Korollar 3.3. Um zu sehen, daß φ f-offen ist, wählen wir $U \subset \operatorname{Spf} B'$ f-offen, ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß U invariant unter Γ ist. Zu $x \in U$ gibt es dann ein $g \in B'$, $|g|_{\sup} = 1$ mit $|g(\gamma(x))| = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und mit

$$\operatorname{Spf} B' \langle g^{-1} \rangle \subset U .$$

Sei nun $h := \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(g)$, dann gilt $h \in B$ und außerdem

$$p(x) \in p(\operatorname{Spf} B' \langle h^{-1} \rangle) = \operatorname{Spf} B \langle h^{-1} \rangle \subset p(U) ,$$

d.h. p ist offen, q.e.d.

Um nun zu sehen, daß φ ein Homöomorphismus f-topologischer Räume ist, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi'} & \operatorname{Spf} A' \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & \operatorname{Spf} A \end{array} ,$$

p_1 und p_2 seien die kanonischen Projektionen. Die Surjektivität von φ folgt aus der Surjektivität von p_2, weiter ist φ auch injektiv, denn die Fasern von p_1 und p_2 stimmen nach Hilfssatz 3.5 überein. Schließlich ist φ f-offen, denn die Projektion p_2 ist nach Hilfssatz 3.5 f-offen. Damit ist der Beweis von Lemma 3.4 vollendet für den Spezialfall einer endlichen Galoiserweiterung k' über k.

Zum Beweis des Allgemeinfalles nehmen wir $k' = \bar{k}$ an, es sei wieder $A = \mathcal{O}_X(X)$, $A' = A \hat{\otimes}_k \bar{k} = \mathcal{O}_{X'}(X')$. A' ist eine $\bar{k}$-affinoide Algebra. Wir betrachten die Bedingungen

(i) Es existiert ein topologisches Erzeugendensystem $a = (a_1, \ldots, a_m)$ von A', welches bereits in A enthalten ist.

(ii) Es ist $U_i' = U_i \hat{\otimes}_k \bar{k}$ ein strikter Laurentbereich von $X' = \operatorname{Spf} A'$, etwa $U_i' = X'(g_i^{-1})$, und es gilt bereits $g_i \in A$ für $i = 1,\ldots,n$.

Bezeichnet $k_s \subset \bar{k}$ den algebraisch-separablen Abschluß von k, so liegt $A \otimes_k k_s$ dicht in $A' = A \hat{\otimes}_k \bar{k}$, d.h. es läßt sich jedes Element aus A' beliebig gut durch Elemente aus $A \otimes_k k_s$ approximieren. Damit sieht man leicht, daß sich die Bedingungen (i) und (ii) realisieren lassen, wenn man k durch eine endliche Galoiserweiterung ersetzt. Da dies aufgrund des soeben bewiesenen Spezialfalls ohne Einschränkung möglich ist, dürfen wir also die Bedingungen (i) und (ii) als gegeben annehmen. Der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma : T_m(k) = k\langle\zeta\rangle &\to A \\ \zeta &\mapsto a \end{aligned}$$

geht nach Tensorierung mit $\bar{k}$ über in einen Epimorphismus

$$\sigma' : T_m(\bar{k}) = \bar{k}\langle\zeta\rangle \to A' .$$

Nach [2], Lemma 3.2 gilt $\ker \sigma' = (\ker \sigma) \hat{\otimes}_k \bar{k}$, d.h. die Injektion $k\langle\zeta\rangle/\ker\sigma \hookrightarrow A$ geht nach Tensorieren mit $\bar{k}$ über in die Bijektion $\bar{k}\langle\zeta\rangle/\ker\sigma' \xrightarrow{\sim} A'$. Es liegt also $k\langle\zeta\rangle/\ker\sigma$ insbesondere abgeschlossen in A, und es gilt deshalb

$$k\langle\zeta\rangle/\ker\sigma = A ,$$

d.h. A ist k-affinoide Algebra. Man hat somit wiederum eine formell-analytische Abbildung

$$\varphi : X \to \operatorname{Spf} A ,$$

welche nach Tensorieren mit $\bar{k}$ den Isomorphismus

$$\varphi' : X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spf} A'$$

ergibt. Da $\varphi(U_i) \subset \operatorname{Spf} A\langle g_i^{-1}\rangle$ gilt für $i = 1,\ldots,n$, so induziert φ Abbildungen

$$\varphi_i : U_i \to \operatorname{Spf} A\langle g_i^{-1}\rangle ,$$

welche nach Tensorieren mit $\bar{k}$ in die Isomorphismen

$$\varphi_i' : U_i' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spf} A'\langle g_i^{-1}\rangle$$

übergehen. Dann sind auch die Abbildungen φ_i Isomorphismen, d.h. φ ist ein Isomorphismus, und Lemma 3.4 ist bewiesen.

LEMMA 3.6. *Es sei X ein formell-analytischer Raum. Ist dann X_{red} formell-affinoid, so auch X.*

Beweis. [9], chap I, Proposition 2.3.5 und Corollaire 4.5.9, die dortigen Beweise übertragen sich sinngemäß.

Nun kommen wir zum *Beweis* von Theorem 3.1. Es sei also X formell-analytisch und $\tilde{X}$ affin, dann ist mit $\tilde{X}$ auch X quasi-kompakt. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen und X reduziert ist, denn aufgrund von Lemma 3.4 und Lemma 3.6 ist lediglich zu zeigen, daß $(X \hat{\otimes}_k \bar{k})_{red}$ formell-affinoid ist. Das algebraische Modell dieses Raumes ist ebenfalls wieder affin, da die kanonische Abbildung

$$\widetilde{X \hat{\otimes}_k \bar{k}} \to \tilde{X} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{\bar{k}}$$

endlich ist. Unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen ist X ausgezeichnet, und es folgt Theorem 3.1 mit Aussage b) von Theorem 2.8, sofern X separiert ist. Nun wird aber die Separiertheit von X in Theorem 2.8 lediglich benötigt, um zu garantieren, daß für die f-offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ von X alle Durchschnitte

$$U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_q}$$

stets wieder formell-affinoid in X sind. Eine Überdeckung mit diesen Eigenschaften läßt sich in unserem Falle leicht konstruieren, auch wenn die Separiertheit von X nicht bekannt ist, denn $\tilde{X}$ ist affin. Man wähle die f-offene affinoide Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_1, \ldots, U_n)$ von X so, daß $\tilde{U}_i$ jeweils ein offener Unterraum des Typs $\tilde{X}(\tilde{g}^{-1})$ in $\tilde{X}$ ist. Dann ist

$$\tilde{U}_{i_o} \cap \ldots \cap \tilde{U}_{i_q}$$

jeweils offener Unterraum des Typs $\tilde{U}_{i_o}(\tilde{h}^{-1})$ in $\tilde{U}_{i_o}$ mit einem $\tilde{h} \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{U}_{i_o})$, und es gilt für einen Repräsentanten $h \in \mathcal{O}_X(U_{i_o})$ von $\tilde{h}$

$$U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_q} = U_{i_o}(h^{-1}),$$

d.h. $U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_q}$ ist formell-affinoid. Somit ist Theorem 2.8 in jedem Falle anwendbar, und es folgt Theorem 3.1.

Literatur

1. BOSCH, S.: Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Manuscripta math. 1, 35-57 (1969).

2. BOSCH, S.: k-affinoide Gruppen. Inventiones math. 10, 128-176 (1970).

3. BOSCH, S.: k-affinoide Tori. Math. Ann. 192, 1-16 (1971).

4. BOSCH, S.: Homogene Räume k-affinoider Gruppen. Inventiones math. 19, 165-218 (1973).

5. BOSCH, S.: Rigid analytische Gruppen mit guter Reduktion. Erscheint in Math. Ann.

6. GERRITZEN, L.: On one-dimensional affinoid domains and open immersions. Inventiones math. 5, 106-119 (1968).

7. GÜNTZER, U., REMMERT, R.: Kahl bewertete Ringe in der nicht-archimedischen Analysis. Manuscripta math. 8, 33-38 (1973).

8. GRAUERT, H., REMMERT, R.: Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. 2, 87-133 (1966).

9. GROTHENDIECK, A., DIEUDONNE, J.: Eléments de géométrie algébrique. Pub. math. IHES 4, 11.

10. KIEHL, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. 2, 191-214 (1967).

11. KIEHL, R.: Theorem A und B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. 2, 256-273 (1967).

12. RAYNAUD, M.: Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 319-327 (1974).

13. TATE, J.: Rigid analytic spaces. Inventiones math. 12, 257-289 (1971).

Siegfried Bosch
Mathematisches Institut
der Universität Münster
Roxeler Straße 64
D - 4400 Münster

(Eingegangen am 29. Januar 1976)