Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen.

Von

Carl Ludwig Siegel in Frankfurt (Main).

Die klassische Theorie der binären quadratischen Formen $a x^2 + 2 b x y + c y^2$ mit ganzen Koeffizienten ist in dem Zeitraum der letzten hundert Jahre nach zwei Richtungen hin verallgemeinert worden: Verlangt man von der Verallgemeinerung als wesentliche Eigenschaft die Möglichkeit einer Komposition der Formen, so kommt man zu den algebraischen Zahlringen und darüber hinaus zu den nicht-kommutativen Zahlsystemen mit endlicher Basis; behält man dagegen nur den Grad bei, so wird man zu den quadratischen Formen $Q(x_1, \ldots, x_n)$ mit einer beliebigen Anzahl n von Variabeln und ganzen Koeffizienten geführt. Jeder dieser beiden wichtigen Verallgemeinerungen der binären quadratischen Formen entspricht auch eine Verallgemeinerung der von Dirichlet eingeführten Zetafunktion

$$\sum_{x,\,y}{}' (a x^2 + 2 b x y + c y^2)^{-s}:$$

Im ersten Falle hat man die Dedekindsche Zetafunktion und ihre Übertragung auf nicht-kommutative Bereiche; im zweiten Falle ist die Zetafunktion einer beliebigen quadratischen Form zu bilden.

Die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion ist bekanntlich von Hecke bewiesen worden, und K. Hey[1]) hat diesen Beweis auf nicht-kommutative Körper übertragen. Hierbei spielt die Komposition der zugehörigen Formen eine wesentliche Rolle. Andererseits hat schon früher Epstein in einer wichtigen Untersuchung die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung der Zetafunktion einer definiten quadratischen Form mit beliebig vielen Variabeln bewiesen. Dieser Beweis läßt sich aber nicht auf den indefiniten Fall übertragen.

Die analytische Theorie der quadratischen Formen liefert nun einen Zusammenhang zwischen Thetareihen und Eisensteinschen Reihen, und zwar auch für indefinite Formen. Ist insbesondere $Q(x_1, \ldots, x_n)$ reell in $-(y_1^2 + \cdots + y_p^2) + (y_{p+1}^2 + \cdots + y_n^2)$ mit geradem p transformierbar und die Determinante D von Q ungerade, so folgt aus jener Theorie im Falle $n > 4$ für die zugeordnete Thetafunktion, daß sie eine Modulform der Di-

[1]) K. Hey, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. Hamburg 1929, Dissertation.

mension $n/2$ und der Stufe $2D$ ist; und in üblicher Weise erhält man daraus für die zugehörige Zetafunktion die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung. Es erscheint aber methodisch unbefriedigend, für die Herleitung dieser Resultate die Darstellungstheorie der quadratischen Formen heranzuziehen, und man wird einen einfacheren Weg suchen.

Die Erkenntnis, daß überhaupt indefinite quadratische Formen zur Bildung von Modulformen benutzt werden können, verdankt man Hecke[2]), und zwar für den Fall einer indefiniten binären Form, in welchem die Transformationstheorie der zugeordneten Thetafunktionen aus der Funktionalgleichung der Zetafunktionen des reell-quadratischen Zahlkörpers folgt. Ferner hat neuerdings B. Schoeneberg[3]) den Fall behandelt, daß Q die Normenform eines indefiniten Quaternionenbereiches ist; dann gestattet nämlich Q eine Komposition, und es läßt sich zur Ableitung der Funktionalgleichung der Ansatz von Hecke und Hey benutzen. Dieser Weg ist im allgemeinen Fall nicht gangbar, da dann keine Komposition möglich ist. Man kommt aber auf andere Weise zum Ziel, wenn man gewisse Identitäten aus der Theorie der vielfachen Integrale und die Poissonsche Summenformel benutzt. Im folgenden wird dies durchgeführt unter der einschränkenden Annahme, daß Q reell in $-(y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2) + y_n^2$ transformierbar ist, dabei ist die Determinante von Q beliebig und $n > 2$.

Die genaue Definition der Zetafunktion von Q findet man in § 4, wo auch die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung in drei Sätzen formuliert werden. Es ist bemerkenswert, daß die Gestalt der Resultate wesentlich davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Eine eingehende Untersuchung erfordert dabei der Fall, daß Q eine ternäre Nullform ist; dann ist auch das Ergebnis von besonderer Art. Die Anwendung auf die Theorie der Modulfunktionen wird in § 10 gegeben. Dabei zeigen wieder die ternären Nullformen ein abweichendes Verhalten. Für die spezielle ternäre Form $x_1 x_2 - x_3^2$ gewinnt man eine Identität, die bereits Mordell[4]) mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen hat.

Über die weiterhin verwendeten Bezeichnungen sei noch bemerkt, daß deutsche Buchstaben Matrizen bedeuten, und zwar kleine deutsche Buchstaben stets Spalten. Es ist z. B. $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ die quadratische Form mit der symmetrischen Matrix $\mathfrak{S}$ und der Variablenspalte $\mathfrak{x}$, und speziell hat die Einheitsform $\mathfrak{x}'\mathfrak{x}$ die Matrix $\mathfrak{E}$. Ferner soll unter $\mathfrak{n}$ eine Nullspalte verstanden werden.

---

[2]) E. Hecke, Über einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen. Göttinger Nachrichten 1925.

[3]) B. Schoeneberg, Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen. Math. Annalen **113**, S. 380—391.

[4]) L. J. Mordell, On some series whose n^{th} term involves the number of classes of binary quadratics of determinant $-n$. Messenger of Math. **49**, S. 65—72.

§ 1.

Die Einheitengruppe.

Es sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine nicht-ausgeartete reelle quadratische Form von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und D der absolute Betrag ihrer Determinante. Setzt man $x_k : x_n = z_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ oder kurz $\mathfrak{x} = x_n \mathfrak{z}$, so ist der Ausdruck

$$D^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{z})^{-\frac{n}{2}} d z_1 \ldots d z_{n-1} \tag{1}$$

das zu dem absoluten Gebilde $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ gehörige nicht-euklidische Volumenelement des projektiven $\mathfrak{x}$-Raumes P.

Weiterhin seien die Elemente von $\mathfrak{S}$ rationale Zahlen. Eine ganzzahlige Matrix $\mathfrak{C}$ möge eine Einheit von $\mathfrak{S}$ heißen, wenn $\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ ist. Vermöge der Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ liefern die Einheiten eine Gruppe nicht-euklidischer Bewegungen der Punkte des Raumes P mit dem absoluten Gebilde $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$; dabei ist aber zu beachten, daß die beiden Einheiten $\mathfrak{C}$ und $-\mathfrak{C}$ jedesmal dieselbe Bewegung definieren. Die Bewegungsgruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ ist also die Faktorgruppe der vollen Einheitengruppe in bezug auf die von den beiden Elementen $\mathfrak{E}$ und $-\mathfrak{E}$ gebildete invariante Untergruppe.

Für indefinites $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ ist die Einheitengruppe von unendlicher Ordnung, wenn nicht der triviale Fall einer binären Form mit quadratischer Diskriminante vorliegt. Es sei insbesondere $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \cdots + y_n^2)$ transformierbar. Dann folgt aus der Reduktionstheorie der quadratischen Formen, daß die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ in dem Teile $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ von P diskontinuierlich ist und dort ein von endlich vielen Ebenen begrenztes Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ besitzt. Das unter Zugrundelegung des Volumenelements (1) berechnete nicht-euklidische Volumen $v(\mathfrak{S})$ von $F(\mathfrak{S})$ ist endlich, wenn der soeben erwähnte triviale Fall ausgeschlossen wird.

Deutet man die n Elemente von $\mathfrak{x}$ nicht als homogene Koordinaten eines Punktes im projektiven Raume P, sondern als rechtwinklige cartesische Koordinaten im euklidischen Raume R, so wird durch $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ eine affine Abbildung von R auf sich selbst definiert, welche den Kegel $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ festhält. Das Innere dieses Kegels, also das Gebiet $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$, besteht aus zwei spiegelbildlich zum Nullpunkt gelegenen Teilen. Einer von diesen beiden werde ausgewählt und mit K bezeichnet. Diejenigen Einheiten von $\mathfrak{S}$, welche sogar K festlassen, sollen eigentliche Einheiten heißen. Da bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to -\mathfrak{x}$ der Halbkegel K in sein Spiegelbild übergeht, so stimmt $\Gamma(\mathfrak{S})$ überein mit der Gruppe der eigentlichen Einheiten. Dem $(n-1)$-dimensionalen Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ im projektiven $\mathfrak{x}$-Raum entspricht im n-dimensionalen euklidischen $\mathfrak{x}$-Raum eine von endlich vielen Ebenen begrenzte Ecke E, deren Spitze im Nullpunkt liegt. Die Eckpunkte von $F(\mathfrak{S})$ ergeben die Kanten von E. Läßt man bei der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ die

Matrix $\mathfrak{C}$ sämtliche eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ durchlaufen, so erhält man durch die Bilder von E eine lückenlose und einfache Überdeckung des Kegelinneren $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$.

Für definites $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ ist die Einheitengruppe stets von endlicher Ordnung $h(\mathfrak{S})$. Der elliptische Raum P zerfällt in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$ in $\frac{1}{2}h(\mathfrak{S})$ kongruente Exemplare eines Fundamentalpolyeders $F(\mathfrak{S})$. Bedeutet wieder $v(\mathfrak{S})$ das Volumen von $F(\mathfrak{S})$, so ist $\frac{1}{2}h(\mathfrak{S})\,v(\mathfrak{S})$ das Volumen des gesamten elliptischen Raumes, also die halbe Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel, und folglich

$$(2) \qquad \frac{2}{h(\mathfrak{S})} = \pi^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) v(\mathfrak{S}).$$

Im vorliegenden Falle eines definiten $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ soll jede Einheit von $\mathfrak{S}$ eigentlich genannt werden.

§ 2.

Elliptische und hyperbolische Punkte.

Fortan bedeutet $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ dauernd eine indefinite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten, welche reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \dots + y_n^2)$ transformierbar ist. Ferner sei $n \geqq 3$. Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \neq 0$, so heißt $\mathfrak{x}$ ein elliptischer oder ein hyperbolischer Punkt, je nachdem $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ oder $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 0$ ist.

Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ rational und $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}$. Die eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$, für welche also $\mathfrak{C}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ ist, bilden eine Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ aller eigentlichen Einheiten. Für rationales $r \neq 0$ ist offenbar $\Gamma(\mathfrak{S}, r\mathfrak{a}) = \Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Setzt man speziell $\mathfrak{a} = r\,\mathfrak{a}_0$, wobei die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ teilerfremd sind, so kann man sich also auf die Untersuchung von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}_0)$ beschränken. In diesem Paragraphen sei

$$\mathfrak{a}_0'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{a}_0 = t \neq 0,$$

also $\mathfrak{a}$ elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem t positiv oder negativ ist.

Ergänzt man die Spalte $\mathfrak{a}_0$ zu einer unimodularen Matrix

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{B})$$

und setzt

$$(3) \qquad \mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{B}'\mathfrak{S}\mathfrak{B} - t^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \mathfrak{H}, \qquad \begin{pmatrix} t & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \mathfrak{G},$$

so wird

$$(4) \qquad \mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{H} + t^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b}' \end{pmatrix} = \mathfrak{G}' \begin{pmatrix} t^{-1} & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \mathfrak{G}.$$

Ist nun $\mathfrak{C}$ ein Element der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, so folgt aus $\mathfrak{C}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ zunächst die Gleichung

$$(5) \qquad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{c}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}$$

mit ganzen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{W}$. Aus $\mathfrak{C}'\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}$ ergeben sich sodann nach (3) und (4) die Bedingungen

$$\mathfrak{W}'\mathfrak{H}\mathfrak{W} = \mathfrak{H}, \quad t\mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} \tag{6}$$

für $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{W}$. Auf Grund von (5) und (6) ist $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph zu der Gruppe derjenigen eigentlichen Einheiten $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{H}$, für welche

$$\mathfrak{W}'\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b} \pmod{t}$$

ist. Diese Gruppe ist offenbar von endlichem Index $j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der Gruppe aller Einheiten von $\mathfrak{H}$. Zufolge (4) ist die quadratische Form mit der Matrix $\mathfrak{H}$ entweder negativ-definit oder aber reell in $y_1^2 - (y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2)$ transformierbar, je nachdem $\mathfrak{a}$ elliptisch oder hyperbolisch ist. Nach § 1 existiert stets die Zahl $v(\mathfrak{H})$, außer wenn $n - 1 = 2$ und zugleich $-|\mathfrak{H}|$ eine Quadratzahl ist; dieser Ausnahmefall bedeutet nach (4), daß $n = 3$ und $-D\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ ein Quadrat ist.

Man definiere

$$m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\,v(\mathfrak{H}). \tag{7}$$

Für elliptisches $\mathfrak{a}$ gilt dann nach (2) die Gleichung

$$\frac{1}{m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})} = \frac{h(\mathfrak{H})}{j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})};$$

und hierin steht rechts die Ordnung von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, also die Anzahl der Einheiten von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$. Für hyperbolisches $\mathfrak{a}$ ist $\frac{1}{2}j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ der Index von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{H})$ und folglich

$$\tfrac{1}{2}j(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\,v(\mathfrak{H}) = v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$$

das nicht-euklidische Volumen eines Fundamentalbereiches $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ im $(n-2)$-dimensionalen projektiven Raum. Dann wird also

$$m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = \pi^{-\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}). \tag{8}$$

§ 3.

Parabolische Punkte.

Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{n}$, so heißt $\mathfrak{x}$ ein parabolischer Punkt. Die quadratische Form heißt eine Nullform, wenn es mindestens einen rationalen parabolischen Punkt gibt. Jede indefinite quadratische Form von mindestens fünf Variablen ist eine Nullform. Wie das Beispiel $7x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ zeigt, gibt es indefinite ternäre und quaternäre Formen, die keine Nullformen sind. Das zur Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ gehörige Fundamentalpolyeder $F(\mathfrak{S})$ hat dann und nur dann Ecken auf $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$, wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform ist, und zwar liegen alle solche Ecken in rationalen Punkten.

Für das rationale parabolische $\mathfrak{a}$ sei wieder $\mathfrak{a} = r\,\mathfrak{a}_0$, wobei die Elemente von $\mathfrak{a}_0$ teilerfremd sind. Man kann $\mathfrak{a}_0$ zu einer unimodularen Matrix $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_0\mathfrak{B})$ derart ergänzen, daß die Matrix $\mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_1$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & \mathfrak{n}' \\ p & q & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{b} & \mathfrak{H} \end{pmatrix} \tag{9}$$

mit positivem p bekommt; und zwar ist dann p eindeutig bestimmt als der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}_0$. Es sei nun $\mathfrak{C}$ eine Einheit von $\mathfrak{S}$ mit dem Fixpunkte $\mathfrak{a}$. Für die Matrix $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1$ erhält man wegen der Gleichungen

$$\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{C}_1'\mathfrak{S}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{S}_1$$

die Form

$$\mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c & \mathfrak{c}' \\ 0 & 1 & \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{q} & \mathfrak{W} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei c, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{W}$ den Bedingungen

$$\mathfrak{W}'\mathfrak{H}\mathfrak{W} = \mathfrak{H}, \quad p\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\,\mathfrak{b} - \mathfrak{W}'\mathfrak{H}\mathfrak{q}, \quad 2\,p\,c = -\,\mathfrak{q}'\,(\mathfrak{H}\mathfrak{q} + 2\mathfrak{b}) \tag{11}$$

genügen. Setzt man jetzt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}, \quad y_k : y_2 = z_k \ (k = 3, \ldots, n), \quad (z_3 \ldots z_n)' = \mathfrak{z},$$

so entspricht der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ nach (10) und (11) umkehrbar eindeutig die Abbildung $\mathfrak{z} \to \mathfrak{W}\mathfrak{z} + \mathfrak{q}$, und dabei ist $\mathfrak{W}$ eine Einheit von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{q}$ eine ganze Spalte mit den Eigenschaften

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{W}')\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{W}'\mathfrak{H}\mathfrak{q} \pmod{p}, \quad \mathfrak{q}'\,(\mathfrak{H}\mathfrak{q} + 2\,\mathfrak{b}) \equiv 0 \pmod{2\,p}. \tag{12}$$

Der Gruppe dieser Abbildungen des $\mathfrak{z}$-Raumes ist also $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ einstufig isomorph.

Man definiere nun $v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ als den mit dem Volumenelement

$$|-\mathfrak{H}|^{\frac{1}{2}}\, d z_3 \ldots d z_n$$

gemessenen euklidischen Inhalt des Fundamentalbereiches für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ im $\mathfrak{z}$-Raum. Es bedeute l eine natürliche Zahl, für welche $l\mathfrak{S}$ ganz ist. In der soeben betrachteten Gruppe von Abbildungen des $\mathfrak{z}$-Raumes bilden nach (12) die speziellen Translationen $\mathfrak{z} \to \mathfrak{z} + \mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \equiv \mathfrak{n} \pmod{2\,p l}$ eine Untergruppe, und zwar eine Untergruppe mit endlichem Index $k(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$, weil $\mathfrak{z}'\mathfrak{H}\mathfrak{z}$ zufolge (9) negativ-definit ist. Es ist $|-\mathfrak{H}| = D p^{-2}$ und folglich

$$v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) = D^{\frac{1}{2}}(2\,l)^{n-2}\,\frac{p^{n-3}}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})}. \tag{13}$$

Aus (4) und (9) ist ersichtlich, daß eine ternäre quadratische Form $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ dann und nur dann Nullform ist, wenn für ein geeignetes rationales $\mathfrak{a}$ die Zahl $-D\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ eine positive Quadratzahl ist. Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform, so existiert nach § 2 die in (7) erklärte Größe $m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ für alle elliptischen und hyperbolischen $\mathfrak{a}$; im Falle einer ternären Nullform sind dagegen diejenigen hyperbolischen $\mathfrak{a}$ auszuschließen, für welche $-D\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ ein Quadrat wird.

§ 4.

Die Zetafunktionen.

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{C}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{C}$ eine eigentliche Einheit von $\mathfrak{S}$, so heißen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ assoziiert in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S})$, oder kurz assoziiert. Ein Repräsentant aller mit $\mathfrak{x}$ Assoziierten werde durch $\{\mathfrak{x}\}$ bezeichnet.

Es sei s eine komplexe Variable, deren reeller Teil $\sigma > \frac{n}{2}$ ist. Man definiere

$$\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\{\mathfrak{a}\} > 0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})(\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{-s} \tag{14}$$

und, wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist,

$$\zeta_0(\mathfrak{S}, s) = \sum_{\{\mathfrak{a}\} < 0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})(-\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{-s}. \tag{15}$$

Dabei soll in (14) die Spalte $\mathfrak{a}$ ein volles System nicht-assoziierter elliptischer Gitterpunkte des n-dimensionalen Raumes R durchlaufen, in (15) ein volles System von nicht-assoziierten hyperbolischen Gitterpunkten. Diese Summationsbedingungen werden durch die Zeichen $\{\mathfrak{a}\} > 0$ und $\{\mathfrak{a}\} < 0$ angedeutet. Der Koeffizient $m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ ist in (7) erklärt worden.

Aus der Reduktionstheorie der quadratischen Formen entnimmt man die absolute Konvergenz der beiden Reihen für $\sigma > \frac{n}{2}$, so daß also die beiden Zetafunktionen in dieser Halbebene regulär sind. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist vor allem der Beweis folgender drei Sätze:

Satz 1. *Es sei n ungerade und im Falle $n = 3$ außerdem $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine Nullform. Dann ist $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{n}{2}$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$, und die Funktion*

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2} - s\right). \tag{16}$$

Satz 2. *Es sei n gerade. Dann sind $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ beide in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{n}{2}$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$ und eventuell einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$. In letzterem Punkte liegt nur dann ein Pol, wenn $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine Nullform ist. Das Residuum von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ ist dort*

$$\varrho = \zeta(3-n) D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchläuft und $\zeta(3-n)$ den Wert der Riemannschen Zetafunktion im Punkte $3-n$ bedeutet; ferner hat $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ das Residuum $(-1)^{\frac{n}{2}-1}\varrho$. Setzt man

$$\frac{n}{2} - 2\left[\frac{n}{4}\right] = \varepsilon,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s+1-\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - \frac{n}{4}\right)\left(\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + \zeta_0(\mathfrak{S}, s)\right) = \varphi_1(\mathfrak{S}, s),$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1 - \frac{n}{4}\right)\left(\zeta_1(\mathfrak{S}, s) - \zeta_0(\mathfrak{S}, s)\right) = \varphi_0(\mathfrak{S}, s),$$

so gelten die Funktionalgleichungen

$$\varphi_1(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{n}{4}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2} - s\right), \tag{17}$$

$$\varphi_0(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n}{4}} D^{-\frac{1}{2}} \varphi_{1-\varepsilon}\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2} - s\right). \tag{18}$$

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ eine ternäre Nullform. Dann ist $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in der ganzen endlichen s-Ebene regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = \frac{3}{2}$ vom Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$ und einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ vom Residuum*

$$\varrho = \zeta(0) D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchläuft. Die Funktion

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = \varphi(\mathfrak{S}, s)$$

genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(\mathfrak{S}, s) = -D^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{3}{2} - s\right) + \frac{\pi^{-s}\Gamma(s)}{\cos \pi s} \zeta(2s-1) D^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) a^{2s-2}; \tag{19}$$

dabei bedeutet a den Quotienten aus dem größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$ und dem der Elemente von $\mathfrak{a}$.

Der in diesen Sätzen auftretende Fundamentalbereich $F(\mathfrak{S})$ und sein nicht-euklidisches Volumen $v(\mathfrak{S})$ sind in § 1 erklärt worden, die Volumina $v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$ in § 3.

Es ist zu beachten, daß in Satz 1 keine Aussage über $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ enthalten ist. Über den analytischen Charakter dieser Funktion für ungerades n liefert die im folgenden benutzte Methode keinen Aufschluß.

§ 5.

Berechnung einiger Integrale.

Das Gebiet $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ der elliptischen Punkte im Raume R besteht aus zwei getrennten Teilen, die durch die Abbildung $\mathfrak{x} \to -\mathfrak{x}$ ineinander übergehen. Wie in § 1 werde einer dieser beiden Halbkegel mit K bezeichnet. In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{y}$ ein Punkt von K und

$$(\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y})^{\frac{1}{2}} = y > 0.$$

Unter $d\mathfrak{x}$ soll das n-dimensionale Volumenelement $dx_1 \dots dx_n$ verstanden werden.

Hilfssatz 1. *Für* $R(\lambda) > -1$ *gilt*

$$(20)\qquad \int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{x} = 2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Beweis: Es gibt bei festem $\mathfrak{y}$ aus K eine reelle Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = z_1^2 - (z_2^2 + \dots + z_n^2)$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}(y\; 0 \dots 0)'$. Dabei ist $|\mathfrak{A}|^2 = D^{-1}$ und folglich

$$\int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{x} = D^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\substack{z_1^2 > z_2^2 + \dots + z_n^2\\ z_1 > 0}} (z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_n^2)^\lambda e^{-yz_1}\, d\mathfrak{z}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z_1^{2\lambda+n-1} e^{-yz_1}\, dz_1 \int\limits_{t_2^2+\dots+t_n^2<1}\!\!\cdots\!\int (1 - t_2^2 - \dots - t_n^2)^\lambda\, dt_2 \dots dt_n$$

$$= D^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+n)\, y^{-2\lambda-n} \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-v)^\lambda v^{\frac{n-3}{2}}\, dv$$

$$= D^{-\frac{1}{2}}\,\Gamma(2\lambda+n)\, y^{-2\lambda-n} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= 2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Hilfssatz 2. *Für $R(\lambda) > -1$ und beliebiges μ gilt*

$$\int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}} \left\{\frac{1}{4}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} - (\mu+1)\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\} d\mathfrak{x}$$

$$= (\lambda-\mu)\left(\lambda-\mu+\frac{n}{2}-1\right) 2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\cdot\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Beweis. In (20) ersetze man $\mathfrak{y}$ durch $t\mathfrak{y}$ mit $t > 0$, differentiiere nach t und setze dann $t = 1$. Dies ergibt

$$\int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}\, d\mathfrak{x}$$

$$= 2\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) 2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n}.$$

Verwendet man diese Formel und noch zweimal (20), so wird

$$\int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda e^{-\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}} \left\{\frac{1}{4}\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} - (\mu+1)\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\} d\mathfrak{x}$$

$$= \left\{(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) - 2(\mu+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\right\}$$

$$2^{2\lambda+n-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} y^{-2\lambda-n},$$

und hieraus folgt wegen

$$(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) - 2(\mu+1)\left(\lambda+\frac{n}{2}\right) + (\mu+1)\left(\mu+\frac{n}{2}\right)$$

$$= (\lambda-\mu)\left(\lambda-\mu+\frac{n}{2}-1\right)$$

die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es sei $R(\lambda) > -1$, $R(\mu) > n-1$ und t komplex, aber nicht reell und zugleich $\leqq 0$. Dann ist*

$$(21)\quad \int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda} d\mathfrak{x}$$

$$= D^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\,\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{2\,\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)}(t\,y)^{n-2\mu},$$

wo die Potenzen ihre Hauptwerte haben.

Beweis. Da beide Seiten von (21) als Funktionen von t analytisch sind in der längs der Halbgeraden $t \leqq 0$ aufgeschnittenen Ebene, so braucht die

Behauptung nur für positive t bewiesen zu werden. Da dann mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x}+t\mathfrak{y}$ in K liegt, so ergibt dreimalige Anwendung von Hilfssatz 1

$$\int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda}\, d\mathfrak{x}$$

$$= \frac{2^{1-2\mu-2\lambda}\,\pi^{1-\frac{n}{2}}\, D^{\frac12}}{\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} \int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \left\{\int_K (\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{z})^{\mu+\lambda-\frac{n}{2}} e^{-\mathfrak{z}'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+t\mathfrak{y})}\, d\mathfrak{z}\right\} d\mathfrak{x}$$

$$= 2^{n-2\mu}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)} \int_K (\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{z})^{\mu-n} e^{-t\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{y}}\, d\mathfrak{z}$$

$$= D^{-\frac12}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\,\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{2\,\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)}\,(t\,y)^{n-2\mu}.$$

Hilfssatz 4. *Für* $R(\lambda) > -1$, $R(\mu) > n-1$ *ist*

$$\int_{\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}>0} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})\}^{-\mu-\lambda}\, d\mathfrak{x}$$

$$= D^{-\frac12}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(\mu-n+1)\,\Gamma\left(\mu-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+\lambda)\,\Gamma\left(\mu+\lambda+1-\frac{n}{2}\right)}\cos\pi\left(\frac{n}{2}-\mu\right)(\mathfrak{y}'\mathfrak{S}\mathfrak{y})^{\frac{n}{2}-\mu}.$$

Beweis. Man benutze die Formel (21) mit $t=i$ und $t=-i$. Die Behauptung folgt durch Addition.

Hilfssatz 5. *Für* $R(\lambda) > 0$, $R(\mu) > 0$, $R(\mu) > R(\nu) > -R(\lambda)$ *ist*

$$\int_0^\infty x^{2\lambda-1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+1-2iw)^{-\lambda-\mu-\nu}(x^2+w^2)^{\nu-\frac12}\,dw\right\}dx$$

$$= \frac{\pi^{\frac12}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)\,\Gamma(\lambda+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)}{2\,\Gamma(\lambda+\mu)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)\,\Gamma(\frac12-\nu)}.$$

Beweis: Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung kann man sich auf den Fall $R(\lambda+\mu+\nu) > 0$, $R(\nu) < \frac12$ beschränken. Dann ist

$$\Gamma(\lambda+\mu+\nu)\,\Gamma(\tfrac12-\nu)\int_0^\infty x^{2\lambda-1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+1-2iw)^{-\lambda-\mu-\nu}(x^2+w^2)^{\nu-\frac12}\,dw\right\}dx$$

$$= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2\lambda-1}\left\{\int_0^\infty z^{\lambda+\mu+\nu-1}e^{-z(x^2+1-2iw)}\,dz\int_0^\infty t^{-\nu-\frac12}e^{-t(x^2+w^2)}\,dt\right\}dx\,dw$$

$$= \tfrac12\pi^{\frac12}\,\Gamma(\lambda)\int_0^\infty\int_0^\infty z^{\lambda+\mu+\nu-1}\,t^{-\nu-1}(z+t)^{-\lambda}e^{-z-z^2t^{-1}}\,dz\,dt$$

$$= \tfrac12\pi^{\frac12}\,\Gamma(\lambda)\int_0^\infty t^{-\nu-1}(1+t)^{-\lambda}\left(\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-z(1+t^{-1})}\,dz\right)dt$$

$$= \tfrac12\pi^{\frac12}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)\int_0^\infty t^{\mu-\nu-1}(1+t)^{-\lambda-\mu}\,dt = \tfrac12\pi^{\frac12}\,\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\mu)\,\frac{\Gamma(\lambda+\nu)\,\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

§ 6.

Anwendung der Poissonschen Summenformel.

In diesem Paragraphen sollen Verallgemeinerungen der Hilfssätze 1 und 2 abgeleitet werden, bei denen Summen an die Stelle der Integrale treten. Es sei wieder $\mathfrak{y}$ ein Punkt von K.

Hilfssatz 6. *Für $R(\mu) > \frac{n}{2}$ ist*

$$(22)\quad \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} = 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}},$$

wo $\mathfrak{a}$ alle Gitterpunkte von K und $\mathfrak{b}$ alle Gitterpunkte des ganzen Raumes R durchlaufen.

Beweis. Für reelles $\mathfrak{z}$ ist nach Hilfssatz 1

$$(23)\quad \int_K (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\mu} e^{-\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\pi i \mathfrak{x}' \mathfrak{z}} d\mathfrak{x} = 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}} \cdot \{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{z})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{z})\}^{-\mu-\frac{n}{2}}.$$

Kann man noch beweisen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (22) absolut konvergiert, so folgt die Behauptung aus (23) durch Anwendung der Poissonschen Summenformel. Wie beim Beweise von Hilfssatz 1 sei $(\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y})^{\frac{1}{2}} = y > 0$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}(y\, 0 \ldots 0)'$ und $\mathfrak{A}' \mathfrak{S} \mathfrak{A}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1, -1, \ldots, -1$. Setzt man noch $2\pi \mathfrak{A}' \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = (c_1 \ldots c_n)'$, so wird

$$(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) = y^2 - c_1^2 + (c_2^2 + \ldots + c_n^2) + 2ic_1 y$$

und folglich der absolute Betrag

$$|(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})| \geqq y(y^2 + 2c_1^2 + \ldots + 2c_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach hat die Reihe auf der rechten Seite von (22) eine Majorante der Gestalt

$$\gamma \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} (1 + \mathfrak{b}'\mathfrak{b})^{-\frac{\mu_0}{2}-\frac{n}{4}},$$

wo $\mu_0 = R(\mu)$ gesetzt ist und γ nur von y abhängt. Die Majorante konvergiert nun für $\frac{\mu_0}{2} + \frac{n}{4} > \frac{n}{2}$, und dies ist gerade die Voraussetzung $R(\mu) > \frac{n}{2}$.

Durch eine feinere Abschätzung kann man übrigens feststellen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (22) sogar noch für $R(\mu) > \frac{n}{2} - 1$ absolut konvergiert, aber nicht mehr für $\mu = \frac{n}{2} - 1$. Die Untersuchung des Streifens bedingter Konvergenz scheint schwieriger zu sein. Für das Folgende genügt aber die Aussage von Hilfssatz 6.

Hilfssatz 7. *Für* $R(\mu) > \frac{n}{2}$ *ist*

$$(24)\quad \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{\frac{1}{4} \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1)\, \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right)\right\}$$

$$= -\, 2^{2\mu+n+1} \pi^{\frac{n}{2}+1} \Gamma(\mu+2)\, \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b} \left\{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1}.$$

Beweis. In (22) ersetze man $\mathfrak{y}$ durch $t\mathfrak{y}$ mit $t > 0$, differentiiere nach t und setze dann $t = 1$. Dies ergibt

$$\sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}\, e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} = 2\left(\mu + \frac{n}{2}\right) 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) \left\{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1}.$$

Verwendet man diese Formel und noch zweimal (22), so wird

$$\sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a})^{\mu} e^{-\mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y}} \left\{\frac{1}{4} \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - (\mu+1)\, \mathfrak{a}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right)\right\}$$

$$= 2^{2\mu+n-1} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\mu+2)\, \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \left\{\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) + (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\right\}$$

$$\cdot \left\{(\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\right\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1},$$

und dies liefert wegen

$$\mathfrak{y}' \mathfrak{S} \mathfrak{y} - 2\, \mathfrak{y}' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) + (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})' \mathfrak{S} (\mathfrak{y} + 2\pi i \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}) = (2\pi i)^2 \mathfrak{b}' \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{b}$$

die Behauptung.

§ 7.

Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung.

In diesem Paragraphen soll bewiesen werden, daß die Funktion

$$\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\, \zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$

und bei geradem n auch die Funktion

$$\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\, \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$$

in der ganzen endlichen s-Ebene regulär ist und daß ferner die in den Sätzen 1 und 2 ausgesprochenen Funktionalgleichungen bestehen.

Zunächst sei $R(s) = \sigma > \frac{n}{2}$, ferner sei μ eine der Bedingung $\mu > \frac{n}{2} + 1$ genügende Konstante und

$$\lambda = s + \mu - \frac{n}{2}.$$

Für die Funktion

$$(25)\quad \left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\, 2^{2\lambda + n - 1}\, \pi^{\frac{n}{2} - 1}\, \Gamma(\lambda + 1)\, \Gamma\left(\lambda + \frac{n}{2}\right) D^{-\frac{1}{2}}\, \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = f(s)$$

ergibt Hilfssatz 2 unter Benutzung der Definition (14) von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ die Darstellung

$$(26)\quad f(s) = 2 \sum_{\{\mathfrak{a}\} \text{ in } K} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{\mu} \int_K (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}\, e^{-\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}}$$
$$\cdot \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} - (\mu+1)\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right)\right\} d\mathfrak{x}.$$

Das in § 1 erklärte Gebiet E hat die Eigenschaft, daß seine Bilder bei den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ eine lückenlose und einfache Überdeckung des Gebietes $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ ergeben, wenn $\mathfrak{C}$ alle eigentlichen Einheiten von $\mathfrak{S}$ durchläuft. Andererseits läßt sich jeder mit $\mathfrak{a}$ assoziierte Punkt gleich oft in die Form $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{a}$ setzen, nämlich so oft, wie es Einheiten mit dem Fixpunkt $\mathfrak{a}$ gibt. Wie in § 2 gezeigt wurde, ist aber diese Anzahl genau $1 : m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})$. Daher geht (26) über in

$$(27)\quad f(s) = \int_E (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} - (\mu+1)\,|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|\right.$$
$$\left. + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right)\right\} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{\mu}\, e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x},$$

wo nunmehr $\mathfrak{a}$ alle Gitterpunkte von K durchläuft.

Man zerlege jetzt E in zwei Teile E_1 und E_2; auf E_1 sei $0 < \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 1$, auf E_2 sei $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \geqq 1$. Verwendet man Hilfssatz 7 für die $\mathfrak{x}$ aus E_1, so folgt aus (27) die Darstellung

$$(28)\quad f(s) = \int_{E_2} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} \left\{\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} - (\mu+1)\,|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|\right.$$
$$\left. + (\mu+1)\left(\mu + \frac{n}{2}\right)\right\} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{\mu}\, e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}\, d\mathfrak{x}$$
$$- 2^{2\mu + n + 1}\, \pi^{\frac{n}{2} + 1}\, \Gamma(\mu + 2)\, \Gamma\left(\mu + \frac{n}{2} + 1\right) D^{-\frac{1}{2}} \int_{E_1} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}$$
$$\cdot \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\, \{(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu - \frac{n}{2} - 1}\, d\mathfrak{x}.$$

Hieraus ergibt sich, wie nun gezeigt werden soll, daß $\left(s - \frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ eine ganze Funktion von s ist.

Das erste Integral auf der rechten Seite von (28) ist zunächst eine ganze Funktion von s. Um den analytischen Charakter des zweiten Integrals zu untersuchen, hat man die Reduktionstheorie der quadratischen Formen zu benutzen. Am einfachsten ist diese Untersuchung für den Fall, daß $F(\mathfrak{S})$ lauter elliptische Ecken hat oder, was dasselbe ist, daß $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine Nullform ist; allerdings kann dies nur für $n \leqq 4$ eintreten. In diesem Falle ist der Quotient $\mathfrak{x}'\mathfrak{x} : \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ auf $F(\mathfrak{S})$ beschränkt. Indem man wie beim Beweise von Hilfssatz 6 verfährt, erkennt man, daß dann die Reihe unter dem zweiten Integral in (28) gleichmäßig für alle $\mathfrak{x}$ aus E die Majorante

$$\gamma \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}'\mathfrak{b}\,\{\mathfrak{x}'\mathfrak{x}(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}+\mathfrak{b}'\mathfrak{b})\}^{-\frac{\mu}{2}-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}$$

besitzt, wo γ von $\mathfrak{x}$ unabhängig ist. Multipliziert man diese Majorante noch mit dem Faktor $(\mathfrak{x}'\mathfrak{x})^{\frac{\mu}{2}+\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}$, so erhält man wegen $\mu > \frac{n}{2}+1$ eine im Gebiet E_1 gleichmäßig konvergente Reihe. Folglich ist das zweite Integral in (28) eine in der Halbebene $\sigma > \frac{n}{4}+\frac{1-\mu}{2}$ reguläre Funktion von s. Diese Aussage gilt auch noch für den Fall, daß $F(\mathfrak{S})$ parabolische Ecken besitzt. Das ergibt sich durch eine Untersuchung des Verhaltens des Integranden in der Nähe der parabolischen Ecken; da diese Untersuchung keine prinzipielle Schwierigkeit bietet, so sei die etwas langwierige Rechnung hier übergangen.

Es ist also die Funktion $f(s)$ regulär für $\sigma > \frac{n}{4}+\frac{1-\mu}{2}$ und die Formel (28) für diese σ gültig. Da nun aber μ beliebig groß gewählt werden kann, so zeigt (25), daß $\left(s-\frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ tatsächlich ganz ist.

Nun sei entweder $n > 3$ oder $n = 3$ und zugleich $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine Nullform. Ferner sei weiterhin

$$\frac{n}{4}+\frac{1-\mu}{2} < \sigma < 0.$$

Verwendet man Hilfssatz 7 auch für die $\mathfrak{x}$ aus E_2, so geht (28) über in

$$(29)\quad f(s) = -\,2^{2\mu+n+1}\pi^{\frac{n}{2}+1}\,\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\!\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)D^{-\frac{1}{2}}$$
$$\int_E (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\,\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1}\,d\mathfrak{x}.$$

Wegen des Faktors $\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} = (\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ braucht man auf der rechten Seite nur über die ganzen $\mathfrak{b}$ zu summieren, für welche $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ elliptisch oder hyperbolisch ist, also $\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} > 0$ oder $\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} < 0$. Man erhält alle Assoziierten von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ genau einmal in der Form $\mathfrak{C}\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{C}$ ein volles System von Repräsentanten der Nebengruppen der Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ in der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S})$ durchläuft. Andererseits erfüllen die

Bilder von E bei den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ lückenlos und einfach einen Teil $E_{\mathfrak{b}}$ von $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$, der genau einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ bildet. Also ist

$$(30) \quad \int_E (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1} d\mathfrak{x}$$

$$= \sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\}} \mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} \int_{E_{\mathfrak{b}}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1} d\mathfrak{x},$$

wo $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ ein volles System nicht-assoziierter elliptischer und hyperbolischer Punkte mit ganzem $\mathfrak{b}$ durchläuft.

Für jede Einheit $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{C}'$ eine Einheit von $\mathfrak{S}^{-1}$ und $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{C}'\mathfrak{b}$. Die Elemente von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ sind also die Transponierten der Elemente von $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$. Für die elliptischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ kann man auf der rechten Seite von (30) den Integrationsbereich $E_{\mathfrak{b}}$ durch den vollen Bereich $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ ersetzen, wenn man noch als Faktor den reziproken Wert der Ordnung von $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ hinzufügt, der nach § 2 gleich $m(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ ist. Dann läßt sich aber Hilfssatz 4 anwenden, und man erkennt, daß die elliptischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ zur rechten Seite von (30) genau den Beitrag

$$(31) \quad -D^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)}$$
$$\cdot (2\pi)^{2s-n-2}\cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right)\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \frac{n}{2}-s\right)$$

ergeben.

Für hyperbolisches $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ sei $(-\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})^{\frac{1}{2}} = b > 0$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = y_1^2 - (y_2^2 + \dots + y_n^2)$, $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{A}(0\dots 0\,b)'$, also

$$(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$$
$$= y_1^2 - (y_2^2 + \dots + y_n^2) - 4\pi i\, b\, y_n + 4\pi^2 b^2.$$

Setzt man noch

$$z_1 = \{y_1^2 - (y_2^2 + \dots + y_n^2)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad z_k = y_k : y_1 \qquad (k = 2, \dots, n-1)$$

und beachtet, daß die Abbildung $x_1, \dots, x_n \to z_1, \dots, z_{n-1}, y_n$ zwei-eindeutig ist, so erhält man

$$\int_{E_{\mathfrak{b}}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1} d\mathfrak{x}$$

$$= 2D^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty z_1^{2\lambda+1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (z_1^2 + 4\pi^2 b^2 - 4\pi i\, b\, y_n)^{-\mu-\frac{n}{2}-1} (z_1^2 + y_n^2)^{\frac{n-3}{2}} dy_n \right\} dz_1$$
$$\cdot \int \dots \int_{F_{\mathfrak{b}}} \frac{dz_2 \dots dz_{n-1}}{(1 - z_2^2 - \dots - z_{n-1}^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

wobei $F_{\mathfrak{b}}$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ im $z_2 \ldots z_{n-1}$-Raume bedeutet. Zufolge Hilfssatz 5 und Formel (8) wird also

$$(32)\quad \mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b} \int\limits_{E_{\mathfrak{b}}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \{(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{n}{2}-1} d\mathfrak{x}$$

$$= -D^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{2s-n-2} \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{3-n}{2}\right)}$$

$$\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\, v(\mathfrak{S}^{-1},\mathfrak{b})\,(-\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})^{s-\frac{n}{2}} = -\sin\pi\frac{n-1}{2}\, D^{-\frac{1}{2}}\,\pi^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\Gamma(2-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma(\mu+2)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}+1\right)}(2\pi)^{2s-n-2} m(\mathfrak{S}^{-1},\mathfrak{b})(-\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})^{s-\frac{n}{2}}.$$

Aus (25), (29), (30), (31), (32) folgt jetzt

$$(33)\quad \zeta_1(\mathfrak{S}, s) = D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)$$

$$\cdot\left\{\cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right)\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right) + \sin\pi\frac{n-1}{2}\,\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Ist nun n ungerade, also

$$\sin\pi\frac{n-1}{2} = 0, \qquad \Gamma(1-s)\cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\pi}{\Gamma(s)},$$

so ergibt (33) die Funktionalgleichung (16). Wegen der oben bewiesenen Regularität von $\left(s-\frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ für alle endlichen s gilt das gleiche für die Funktion $s\left(s+1-\frac{n}{2}\right)\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)$. Die rechte Seite von (16) ist also regulär bei $s = 1$ und folglich hat $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ in Wahrheit gar keinen Pol bei $s = 1$. Die in Satz 1 enthaltenen Aussagen sind damit bewiesen, bis auf die Bestimmung des Residuums bei $s = \frac{n}{2}$.

Ist n gerade, also

$$\sin\pi\frac{n-1}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}, \qquad \cos\pi\left(s-\frac{n}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\pi s,$$

so geht (33) über in

$$\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n}{2}} D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)$$

$$\cdot\left\{\cos\pi s\,\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right) - \zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Hieraus folgt für $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ die Darstellung

$$\zeta_0(\mathfrak{S}, s) = (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\pi s\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$

$$+ D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\sin^2\pi s\,\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right),$$

und demnach ist auch $\left(s-\frac{n}{2}\right)(s-1)\,\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ eine ganze Funktion von s. Die beiden letzten Gleichungen ergeben

$$\zeta_1(\mathfrak{S},s)+\zeta_0(\mathfrak{S},s)=2D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\cos^2\frac{\pi}{2}\left(s+\frac{n}{2}\right)$$
$$\cdot\left\{\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\},$$

$$(34)\qquad \zeta_1(\mathfrak{S},s)-\zeta_0(\mathfrak{S},s)=-2D^{-\frac{1}{2}}\pi^{2s-\frac{n}{2}-1}\,\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)\sin^2\frac{\pi}{2}\left(s+\frac{n}{2}\right)$$
$$\cdot\left\{\zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)+(-1)^{\frac{n}{2}}\zeta_0\left(\mathfrak{S}^{-1},\frac{n}{2}-s\right)\right\}.$$

Hieraus folgen die Funktionalgleichungen (17) und (18) durch eine leichte Rechnung. Damit sind auch die Aussagen von Satz 2 bewiesen, bis auf die Residuenbestimmung bei $s=\frac{n}{2}$ und $s=1$.

§ 8.

Berechnung der Residuen.

Obwohl in der Definition von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ nur die elliptischen Punkte auftreten, so waren beim Beweis der Fortsetzbarkeit im vorigen Paragraphen durch die Benutzung von Hilfssatz 7 auch die hyperbolischen Punkte in den Formeln zum Vorschein gekommen. Dabei war aber der Ansatz so gewählt, daß die parabolischen Punkte wegen des Faktors $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{b}$ im allgemeinen Gliede der rechten Seite von (24) aus der Rechnung herausfielen, wodurch sich eine Vereinfachung ergab. Allerdings erhielt man auf diese Weise nicht die Werte der Residuen der Zetafunktion. Um diese zu finden, hat man gerade einen Ansatz durchzuführen, bei welchem die parabolischen Punkte nicht herausfallen. In diesem Paragraphen werde vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist.

Der Ansatz selbst ist noch näherliegender wie der von § 7: man benutzt direkt die Hilfssätze 1 und 6 statt der Hilfssätze 2 und 7. An Stelle von (28) erhält man dann die Darstellung

$$(35)\qquad \zeta_1(\mathfrak{S},s)=\frac{D^{\frac{1}{2}}\pi^{1-\frac{n}{2}}\,2^{1-n-2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{E_2}(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x})^{\lambda}\sum_{\mathfrak{a}\text{ in }K}(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{a})^{\mu}\,e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|}\,d\mathfrak{x}$$
$$+\,2^{n-2s}\,\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{E_1}(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x})^{\lambda}$$
$$\cdot\sum_{\mathfrak{b}\text{ in }R}\left\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\right\}^{-\mu-\frac{n}{2}}d\mathfrak{x},$$

und zwar zunächst für $\sigma > \frac{n}{2}$, mit $\mu > \frac{n}{2}$ und $\lambda = s + \mu - \frac{n}{2}$. Der wesentliche Unterschied gegenüber (28) besteht jetzt darin, daß in (35) auch die Gitterpunkte $\mathfrak{b}$ auftreten, für welche $\mathfrak{b}'\,\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{b} = 0$ ist. Läßt man alle diese $\mathfrak{b}$ fort, so erhält man statt der rechten Seite von (35) eine Funktion von s, von welcher man nach dem Vorbilde von § 7 beweisen kann, daß sie in der Halbebene $\sigma > \frac{n}{4} - \frac{\mu}{2}$ regulär ist. Die Residuen von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ und $s = 1$ stimmen daher überein mit denen der Funktion

$$(36)\quad g(s) = 2^{n-2s}\,\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{E_1}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}\sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}=0}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}+4\pi i\,\mathfrak{b}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{n}{2}}\,d\mathfrak{x}.$$

In der Summe auf der rechten Seite von (36) greife man zuerst das Glied $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ heraus. Bei den übrigen Gliedern vereinige man wie in § 7 alle assoziierten $\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{b}$ und außerdem alle $\mathfrak{b}$, die auseinander durch Multiplikation mit einer rationalen Zahl hervorgehen. Man lasse nun $\mathfrak{p}$ die verschiedenen parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S}^{-1})$ durchlaufen, wobei die Elemente von $\mathfrak{p}$ teilerfremd seien. Bedeutet dann $E_{1\mathfrak{p}}$ einen Fundamentalbereich für die Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{p})$ auf dem Gebiete $0 < \mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x} < 1$, so wird

$$(37)\qquad 2^{2s-n}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{n}{2}\right)}\,g(s)$$

$$= \int\limits_{E_1}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{s-n}\,d\mathfrak{x} + 2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{p}}\int\limits_{E_{1\mathfrak{p}}}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}+4\pi i\,l\,\mathfrak{p}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{n}{2}}\,d\mathfrak{x}.$$

Im ersten Integral führe man durch die Substitution

$$t = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}},\qquad x_k : x_n = z_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

neue Integrationsvariable $t, z_1, \ldots, z_{n-1}$ ein. Nach (1) wird dann

$$(38)\quad \int\limits_{E_1}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{s-n}\,d\mathfrak{x} = 2\int\limits_0^1 t^{2s-n-1}\,dt\int\limits_{F(\mathfrak{S})}\!\!\ldots\!\int(\mathfrak{z}'\mathfrak{S}\mathfrak{z})^{-\frac{n}{2}}\,dz_1\ldots dz_{n-1} = \frac{D^{-\frac{1}{2}}\,v(\mathfrak{S})}{s-\frac{n}{2}}.$$

Im zweiten Integral auf der rechten Seite von (37) führe man durch die Substitutionen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y},\qquad t = (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}},\qquad y_k : y_2 = z_k \qquad (k = 3, \ldots, n)$$

die Variablen $t, y_2, z_3, \ldots, z_n$ ein; dabei soll $\mathfrak{A}$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 3. Dann ist also $\mathfrak{A}$ unimodular, $\mathfrak{p}'\mathfrak{x} = y_2$ und

$$t^2 = \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{y}'\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{y} = 2\,p\,y_1 y_2 + \ldots.$$

Es wird

$$\int_{E_{1\mathfrak{p}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i l \mathfrak{p}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}$$

$$= \int_0^1 t^{2\lambda+1} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 4\pi i l y_2)^{-\mu - \frac{n}{2}} |y_2|^{n-3} d y_2 \right\} p^{-1} \int_{F(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})} \cdots \int d z_3 \ldots d z_n ;$$

wo $F(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ den Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ im $z_3 \ldots z_n$-Raum bedeutet. Folglich gilt für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (37) die Gleichung

$$(39)\quad 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} \int_{E_{1\mathfrak{p}}} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x} + 4\pi i l \mathfrak{p}' \mathfrak{x})^{-\mu - \frac{n}{2}} d\mathfrak{x}$$

$$= 2 D^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} (4\pi l)^{2-n} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}) \int_0^1 t^{2s-3} dt \int_{-\infty}^{\infty} (1 + iy)^{-\mu - \frac{n}{2}} |y|^{n-3} dy$$

$$= 2 D^{-\frac{1}{2}} (4\pi)^{2-n} \cos \pi \left(\frac{n}{2} - 1\right) \zeta(n-2) \frac{\Gamma(n-2)\, \Gamma\left(\mu - \frac{n}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{2}\right)} \frac{1}{s-1} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}).$$

Nach (37) und (38) hat die Funktion $g(s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$. Nach (37) und (39) ist $g(s)$ für ungerades n bei $s = 1$ regulär; für gerades n ist dagegen der Punkt $s = 1$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho = 2 D^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{2-n} \cos \pi \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma(n-2)\, \zeta(n-2) \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} \zeta(3-n) \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

Hierdurch sind die Residuen von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ ermittelt. Aus (34) folgt jetzt, daß für gerades n die Differenz $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) - \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = \frac{n}{2}$ regulär ist; also haben $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ dort das gleiche Residuum. Ferner folgt aus (34), daß die Funktion $\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + (-1)^{\frac{n}{2}} \zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ bei $s = 1$ regulär ist; also hat $\zeta_0(\mathfrak{S}, s)$ dort das Residuum $(-1)^{\frac{n}{2}-1} \varrho$.

Damit sind sämtliche in den Sätzen 1 und 2 aufgestellten Behauptungen bewiesen.

§ 9.

Ternäre Nullformen.

Ist $n = 3$ und $\mathfrak{x}' \mathfrak{S} \mathfrak{x}$ eine Nullform, so versagt die Methode von § 7 zur Herleitung der Funktionalgleichung, da die Fundamentalbereiche für die Gruppen $\Gamma(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ keinen endlichen Inhalt haben, wenn $n = 3$ und

$-D\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ eine positive Quadratzahl ist. In diesem Fall führt der folgende modifizierte Ansatz zum Ziel.

Wie im vorigen Paragraphen lasse man $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ die verschiedenen parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchlaufen, wobei die Elemente von $\mathfrak{p}$ teilerfremd seien. Es sei $\gamma > 0$. Entfernt man aus den früher erklärten Gebieten E, E_1, E_2 die sämtlichen Punkte $\mathfrak{x}$, für welche mit irgend einem jener $\mathfrak{p}$ die Ungleichung

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > \gamma(\mathfrak{p}'\mathfrak{x})^2 \tag{40}$$

erfüllt ist, so mögen die Gebiete E_γ, $E_{1\gamma}$, $E_{2\gamma}$ entstehen. Diese sind dann Fundamentalbereiche für $\Gamma(\mathfrak{S})$ auf den drei Gebieten, die aus $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$, $0 < \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 1$, $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} \geqq 1$ entstehen, wenn man sämtliche Punkte $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > \gamma(\mathfrak{t}'\mathfrak{x})^2 \tag{41}$$

mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzen $\mathfrak{t}$ erfüllt ist.

Sind $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2$ zwei verschiedene parabolische Ecken von $F(\mathfrak{S})$, so ist

$$2\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2\cdot\mathfrak{p}_1'\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{p}_2'\mathfrak{x} - (\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2)^2\cdot\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = D^{-1}|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{S}\mathfrak{x}|^2, \tag{42}$$

wobei das Symbol $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{S}\mathfrak{x}|$ die Determinante bedeutet. Hätten nun die durch (40) für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$ erklärten Gebiete einen Punkt $\mathfrak{x}$ gemeinsam, so wäre für diesen

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^2 > \gamma^2(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{x})^2(\mathfrak{p}_2'\mathfrak{x})^2,$$

und (42) lieferte die Ungleichung

$$\gamma^2(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}_2)^2 < 4. \tag{43}$$

Es sei nun h der Hauptnenner der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}$ und weiterhin $\gamma \geqq 2h$. Dann kann (43) nicht erfüllt sein, und die durch (40) für verschiedene $\mathfrak{p}$ definierten Gebiete haben also keinen Punkt gemeinsam.

Zunächst sei $\sigma > \frac{3}{2}$. Mit $\mu > \frac{3}{2}$ setze man $\lambda = s + \mu - \frac{3}{2}$ und

$$f_\gamma(s) = \int\limits_{E_\gamma} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^\mu e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|} d\mathfrak{x}.$$

Offenbar ist dann

$$\lim_{\gamma\to\infty} f_\gamma(s) = 2\pi D^{-\frac{1}{2}}\Gamma(2\lambda+2)\zeta_1(\mathfrak{S}, s),$$

und andererseits erhält man für $f_\gamma(s)$ die Darstellung

$$f_\gamma(s) = \int\limits_{E_{2\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^\mu e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|} d\mathfrak{x}$$

$$+ 2\pi D^{-\frac{1}{2}}\Gamma(2\mu+2)\int\limits_{E_{1\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda \sum_{\mathfrak{b} \text{ in } R} \{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x}.$$

Analog wie in § 8 wird nun

$$\int\limits_{E_{1\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}=0} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} + 4\pi i\,\mathfrak{b}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x}$$

$$= \int\limits_{E_{1\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{s-3} d\mathfrak{x} + 2\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p}} \int\limits_{E_{1\mathfrak{p}\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} + 4\pi i l\,\mathfrak{p}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x};$$

dabei bedeutet $E_{1\mathfrak{p}\gamma}$ einen Fundamentalbereich für die Einheitenuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ auf dem Gebiete, das aus $0 < \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} < 1$ entsteht, wenn man alle $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung (41) mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzen $\mathfrak{t}$ erfüllt ist. Durch dieselbe Umformung wie in § 8 erhält man weiter

$$\lim_{\gamma\to\infty} \int\limits_{E_{1\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}=0} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} + 4\pi i\,\mathfrak{b}'\mathfrak{x})^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x} = \frac{D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}}$$

$$+ 2D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}) \lim_{\gamma\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^1 t^{2\lambda+1} \Big\{ \int\limits_{y_2^2 > t^2\gamma^{-1}} (t^2 + 4\pi i l y_2)^{-\mu-\frac{3}{2}} dy_2 \Big\} dt$$

$$= \frac{D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}} + \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{s-1} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}) \int_0^{\infty} \frac{(1+ix)^{-\mu-\frac{1}{2}} - (1-ix)^{-\mu-\frac{1}{2}}}{2\pi i(2\mu+1)x} dx$$

$$= \frac{D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}} - \frac{1}{s-1} \frac{\frac{1}{2} D^{-\frac{1}{2}}}{2\mu+1} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}),$$

und folglich

$$\lim_{\gamma\to\infty} f_{\gamma}(s) = \int\limits_{E_2} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{a} \text{ in } K} (\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a})^{\mu} e^{-|\mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}|} d\mathfrak{x}$$

$$+ 2\pi D^{-\frac{1}{2}} \Gamma(2\mu+2) \Big(\frac{D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})}{s-\frac{3}{2}} - \frac{1}{s-1} \frac{\frac{1}{2} D^{-\frac{1}{2}}}{2\mu+1} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$$

$$+ \int\limits_{E_1} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda} \sum_{\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\neq 0} \{(\mathfrak{x} + 2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x} + 2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}} d\mathfrak{x} \Big).$$

Von den beiden Integralen auf der rechten Seite dieser Formel zeigt man ähnlich wie früher, daß sie in der Halbebene $\sigma > \frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}$ reguläre Funktionen von s sind. Folglich ist $s = \frac{3}{2}$ ein Pol erster Ordnung von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ mit dem Residuum $D^{-\frac{1}{2}} v(\mathfrak{S})$ und $s = 1$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\varrho = -\tfrac{1}{2} D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}) = D^{-\frac{1}{2}} \zeta(0) \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}).$$

Von den in Satz 3 ausgesprochenen Behauptungen bleibt noch die Funktionalgleichung (19) zu beweisen. Es sei jetzt $\frac{3}{4} - \frac{\mu}{2} < \sigma < 0$. Nach dem Vorbild von § 7 erhält man die Darstellung

$$\frac{\Gamma(2\lambda+2)}{\Gamma(2\mu+2)}\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$$
$$= \sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}\}} \lim_{\gamma\to\infty} \int_{E_{\mathfrak{b}\gamma}} (\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}\{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x};$$

dabei wird summiert über ein volles System nicht-äquivalenter elliptischer und hyperbolischer $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ mit ganzem $\mathfrak{b}$, ferner bedeutet $E_{\mathfrak{b}\gamma}$ einen Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ auf dem Gebiete G_γ, das aus $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ entsteht, wenn man alle $\mathfrak{x}$ entfernt, für welche die Ungleichung (41) mit irgend einem parabolischen $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ und ganzem $\mathfrak{t}$ erfüllt ist. Bei denjenigen $\mathfrak{b}$, für welche der Fundamentalbereich für $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b})$ auf $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} > 0$ im $(n-2)$-dimensionalen projektiven Raum ein endliches nicht-euklidisches Volumen $v(\mathfrak{S}^{-1}, \mathfrak{b})$ hat, kann man die Rechnung in derselben Weise weiterführen wie in § 7. Besonders zu beachten sind jetzt aber die $\mathfrak{b}$, bei denen die Zahl $-D\mathfrak{b}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{b}$ ein positives Quadrat wird. Durchläuft $\mathfrak{q}$ alle diese $\mathfrak{b}$, so ergibt sich an Stelle der Funktionalgleichung (16) die Formel

$$(44)\quad \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_1(\mathfrak{S}, s) = -D^{-\frac{1}{2}}\pi^{-(\frac{3}{2}-s)}\Gamma(\tfrac{3}{2}-s)\zeta_1(\mathfrak{S}^{-1}, \tfrac{3}{2}-s)$$
$$+\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{\Gamma(2\mu+2)}{\Gamma(2\lambda+2)}\sum_{\{\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\}}\lim_{\gamma\to\infty}\int_{E_{\mathfrak{q}\gamma}}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\lambda}$$
$$\cdot\{(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}.$$

Man hat noch den Grenzwert auf der rechten Seite von (44) zu bestimmen.

Die beiden Tangenten von dem Punkt $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ der projektiven $\mathfrak{x}$-Ebene an den Kegelschnitt $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ berühren ihn in zwei rationalen Punkten $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$. Dies folgt aus der Formel (4) von § 2, wenn dort $\mathfrak{a} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ gewählt und beachtet wird, daß im vorliegenden Falle die binäre quadratische Form mit der Matrix $\mathfrak{H}$ in das Produkt von zwei linearen Formen mit rationalen Koeffizienten zerfällt. Aus (42) folgt umgekehrt, daß die Tangenten in zwei parabolischen rationalen Punkten $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ sich in einem rationalen Punkte $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ treffen, für welchen die Zahl $-D\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ ein Quadrat ist. Ist $\mathfrak{C}$ eine Einheit der Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$, so gehen bei der Abbildung $\mathfrak{x}\to\mathfrak{C}\mathfrak{x}$ die beiden Tangenten von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ an den Kegelschnitt entweder in sich über oder sie vertauschen sich. Im ersten Falle ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$. Im zweiten Falle ist $|\mathfrak{C}| = -1$, und die Gruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$ besteht aus den beiden Elementen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$; dieser Fall kann nur eintreten, wenn es überhaupt eigentliche Einheiten mit negativer Determinante gibt.

Es mögen zunächst alle Einheiten von $\Gamma(\mathfrak{S})$ positive Determinante haben. Dann besteht $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})$ nur aus der Identität, und $E_{\mathfrak{q}\gamma}$ fällt mit dem oben definierten Gebiete G_γ zusammen. Offenbar erhält man alle in (44) auftretenden $\mathfrak{q}$ genau zweimal, indem man $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ die parabolischen Ecken von $F(\mathfrak{S})$ durchlaufen läßt und jedesmal alle $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$ bestimmt, die in bezug auf die Untergruppe $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind. Entsprechend wie in § 3 sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ mit unimodularem $\mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{A}(d\,0\,0)', \qquad \mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = -hy_3^2 + (2ay_1 + by_2 + 2cy_3)\,y_2,$$

wo d den größten gemeinsamen Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ bedeutet und $ad = 1$ der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist also $D = a^2 h$. Man erhält alle Elemente $\mathfrak{C}$ von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ in der Form

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}^{-1}, \qquad \mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix},$$

indem man für u, v, w alle den beiden Bedingungen

$$av = hw, \qquad 2au = hw^2 - 2cw$$

genügenden ganzen Zahlen setzt. Sämtliche $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit ganzem $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$, die in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind, erhält man aus $\mathfrak{A}'\mathfrak{q} = (0\alpha\beta)'$, indem man für α, β alle Paare ganzer Zahlen mit $\beta \neq 0$ setzt, die in bezug auf die Gruppe $\alpha \to \alpha + w\beta$, $\beta \to \beta$ nicht-assoziiert sind. Wie in § 3 bedeute l eine natürliche Zahl, für welche $l\mathfrak{S}$ ganz ist. Man betrachte die durch die weitere Bedingung $w \equiv 0 \pmod{2al}$ definierte Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$, deren Index wieder mit $k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ bezeichnet werde. Bei festem β gibt es genau $2al\,|\beta|$ Paare α, β, die in bezug auf diese Untergruppe nicht-assoziiert sind. Zu festen $\mathfrak{p}$ und β gibt es also $\dfrac{2al|\beta|}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})}$ Systeme $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ mit ganzem $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = 0$, die in bezug auf $\Gamma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})$ nicht-assoziiert sind. Es gilt dabei die Gleichung

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q} = -h^{-1}\beta^2.$$

Es sei nun $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r}$ der Berührungspunkt der anderen von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ an $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x} = 0$ gezogenen Tangente. Man setze

$$\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}) = \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{B}\mathfrak{z},$$

$$(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^{\frac{1}{2}} = \xi > 0, \qquad z_1 : z_3 = \eta, \qquad \xi : z_3 = \zeta,$$

$$(-\mathfrak{q}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}} = h^{-\frac{1}{2}}|\beta| = \varrho > 0, \qquad \mathfrak{p}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{r} = \tau > 0.$$

Dann wird

$$\frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(\xi, \eta, \zeta)} = D^{-\frac{1}{2}}\varrho\,\xi^2\zeta^{-2}, \tag{45}$$

$$(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x} + 2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}) = \xi^2 + 4\pi^2\varrho^2 - 4\pi i\varrho^2\,\xi\eta\,\zeta^{-1}. \tag{46}$$

Dem Gebiet G_γ des $\mathfrak{x}$-Raumes entspricht im $\xi\eta\zeta$-Raume das Bild B_γ, das durch die unendlich vielen Ungleichungen

$$\gamma^{-\frac{1}{2}}|\zeta| \leqq \left|\left(\eta, \frac{\zeta^2+\varrho^2\eta^2}{2\tau}, 1\right)\mathfrak{B}'\mathfrak{t}\right|, \qquad \xi > 0 \tag{47}$$

definiert wird, wobei $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{t}$ alle parabolischen Punkte mit teilerfremden Elementen von $\mathfrak{t}$ durchläuft. Dabei kann man noch voraussetzen, daß $\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p} \geqq 0$ ist. Für $\mathfrak{t} = \mathfrak{p}$ liefert (47) die Ungleichung

$$|\zeta| \leqq \tau\gamma^{\frac{1}{2}},$$

und für $\mathfrak{t} \neq \pm\mathfrak{p}$ erhält man

$$\left(\varrho\eta + \frac{\tau\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}}{\varrho\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}}\right)^2 \geqq \frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}}|\zeta| - \zeta^2. \tag{48}$$

Nach (45) und (46) ergibt sich

$$\begin{aligned}(49)\quad &\int\limits_{G_\gamma}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\,\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}\\ &= D^{-\frac{1}{2}}\varrho\iiint\limits_{B_\gamma}\xi^{2\lambda+2}\zeta^{-2}(\xi^2+4\pi^2\varrho^2-4\pi i\varrho^2\xi\eta\zeta^{-1})^{-\mu-\frac{3}{2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned}$$

Genügt nun ζ für alle $\mathfrak{t} \neq \pm\mathfrak{p}$ der Bedingung

$$|\zeta| \geqq \frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}},$$

so ist (48) für beliebiges reelles η erfüllt, und die η-Integration auf der rechten Seite von (49) liefert dann den Wert 0. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{2\tau\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}} = \zeta_{\mathfrak{t}}, \qquad -\frac{\tau\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}}{\varrho^2\,\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}} = \eta_{\mathfrak{t}}, \qquad \varrho^{-1}(\zeta_{\mathfrak{t}}|\zeta|-\zeta^2)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_{\mathfrak{t}}(\zeta) \geqq 0,$$

so wird

$$\begin{aligned}(50)\quad &\int\limits_{G_\gamma}(\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x})^\lambda\,\{(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})'\mathfrak{S}(\mathfrak{x}+2\pi i\,\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q})\}^{-\mu-\frac{3}{2}}d\mathfrak{x}\\ &= -\frac{D^{-\frac{1}{2}}}{2\pi i\varrho(2\mu+1)}\sum_{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}>0}\int\limits_0^\infty\xi^{2\lambda+1}\\ &\quad\cdot\left\{\int\limits_{-\zeta_{\mathfrak{t}}}^{\zeta_{\mathfrak{t}}}\left[(\xi^2+4\pi^2\varrho^2-4\pi i\varrho^2\xi\eta\zeta^{-1})^{-\mu-\frac{1}{2}}\right]_{\eta=\eta_{\mathfrak{t}}-\varepsilon_{\mathfrak{t}}(\zeta)}^{\eta=\eta_{\mathfrak{t}}+\varepsilon_{\mathfrak{t}}(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}d\xi\\ &= \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{\pi i\varrho(2\mu+1)}\sum_{\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}>0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi|^{2\lambda}\xi\\ &\quad\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\xi^2+4\pi^2\varrho^2+4\pi i\xi\left(\varrho t-\mathfrak{t}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}\,\gamma^{\frac{1}{2}}\frac{1+t^2}{2}\right)\right\}^{-\mu-\frac{1}{2}}\frac{t\,dt}{1+t^2}\right)d\xi.\end{aligned}$$

In der letzten Summe hat nun das Glied mit $\mathfrak{t} = \mathfrak{r}$ den von γ freien Wert

$$(51)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{2\lambda} \xi \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + 4\pi^2\varrho^2 + 4\pi i \xi \varrho t)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{t\,dt}{1+t^2} \right\} d\xi$$

$$= -2\pi i \int_0^{\infty} \xi^{2\lambda+1} (\xi + 2\pi\varrho)^{-2\mu-1}\, d\xi = -2\pi i (2\pi\varrho)^{2s-2} \frac{\Gamma(2\lambda+2)\,\Gamma(2-2s)}{\Gamma(2\mu+1)};$$

während die Summe aller übrigen Glieder für $\gamma \to \infty$ den Grenzwert 0 besitzt. Aus (44), (50) und (51) erhält man unter Benutzung der früher gefundenen Anzahl der $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{q}$ bei festen $\mathfrak{p}, \beta$ die Formel

$$(52)\qquad \pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s) + D^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\left(\frac{3}{2}-s\right)}\, \Gamma\left(\tfrac{3}{2}-s\right) \zeta_1\left(\mathfrak{S}^{-1}, \tfrac{3}{2}-s\right)$$

$$= -2^{2s-2}\pi^{s-1}\,\Gamma(s)\,\Gamma(2-2s)\, D^{1-s} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{2\,l\,a^{2s-2}}{k(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})} \sum_{\beta=1}^{\infty} \beta^{2s-2}$$

$$= \frac{\pi^{-s}\,\Gamma(s)}{\cos \pi s}\, \zeta(2s-1)\, D^{\frac{1}{2}-s} \sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\, a^{2s-2},$$

wobei a^{-1} der größte gemeinsame Teiler der Elemente von $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p}$ ist. Dies ist aber gerade die Funktionalgleichung (19).

Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß es in $\Gamma(\mathfrak{S})$ auch Einheiten mit der Determinante -1 gibt. In diesem Fall lege man den Überlegungen dieses Paragraphen an Stelle von $\Gamma(\mathfrak{S})$ die Untergruppe der eigentlichen Einheiten mit der Determinante $+1$ zugrunde. An die Stelle von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $\sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\; a^{2s-2}$ treten dann die Ausdrücke $2\,\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ und $2\sum_{\mathfrak{p}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{p})\; a^{2s-2}$, und die obige Rechnung führt genau zu der mit 2 multiplizierten Formel (52).

§ 10.

Zusammenhang mit der Theorie der Modulfunktionen.

Es sei x eine komplexe Variable mit positivem Imaginärteil. Die Funktionalgleichung von $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ läßt sich in üblicher Weise vermöge der Mellinschen Transformation in eine Eigenschaft der Funktion

$$(53)\qquad f(\mathfrak{S}, x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, \pi^{-\frac{n}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) v(\mathfrak{S}) + \sum_{\{\mathfrak{a}\}>0} m(\mathfrak{S}, \mathfrak{a})\, e^{\pi i x \mathfrak{a}'\mathfrak{S}\mathfrak{a}}$$

übersetzen, wenn n ungerade ist. Ist $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform, so liefert Satz 1 die Formel

$$f(\mathfrak{S}, x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, D^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{x}\right)^{\frac{n}{2}} f\left(\mathfrak{S}^{-1}, -\frac{1}{x}\right),$$

und hierdurch wird das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der Modulsubstitution $x \to -\frac{1}{x}$ zum Ausdruck gebracht.

Will man die Transformationstheorie von $f(\mathfrak{S}, x)$ für beliebige Modulsubstitutionen entwickeln, so hat man außer $\zeta_1(\mathfrak{S}, s)$ auch analog gebildete Zetafunktionen mit Restklassen-Charakteren zu untersuchen. Die zum Beweise der Sätze 1, 2, 3 führenden Überlegungen lassen sich ohne wesentliche Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen. Vermöge der Mellinschen Transformation erhält man dann das wichtige Resultat, daß die durch (53) definierte Funktion $f(\mathfrak{S}, x)$ eine Modulform der Dimension $\frac{n}{2}$ und der Stufe $2D$ ist; dabei wird vorausgesetzt, daß n ungerade und $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ keine ternäre Nullform ist.

Für ternäre Nullformen $\mathfrak{x}'\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ ist dagegen $f(\mathfrak{S}, x)$ keine Modulform. Das Verhalten von $f(\mathfrak{S}, x)$ bei der speziellen Modulsubstitution $x \to -\frac{1}{x}$ läßt sich dann mit Hilfe von Satz 3 untersuchen. Man erhält die Formel

$$f(\mathfrak{S}, x) = -D^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{x}\right)^{\frac{3}{2}} f\left(\mathfrak{S}^{-1}, -\frac{1}{x}\right) - D^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{a}} v(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, e^{\pi i x y^2}}{e^{2\pi D^{-\frac{1}{2}} a y} - 1}\, dy,$$

wobei $\mathfrak{a}$ und a wie in Satz 3 zu erklären sind. Für den Fall der ternären Nullform $x_1 x_2 - x_3^2$ findet sich dieses Resultat in etwas anderer Gestalt bereits in der oben zitierten Abhandlung von Mordell.

(Eingegangen am 9. September 1937.)