Zur Arithmetik der Polynome.

Von

E. Kamke in Münster i. W

In dieser Arbeit[1]) gelten folgende Bezeichnungen: Für eine natürliche Zahl q und eine reelle Zahl α ist

$$e_q(\alpha) = e^{\frac{2\pi i \alpha}{q}}, \qquad e(\alpha) = e_1(\alpha);$$

$$(u) = P_k(u) = a_k u^k + a_{k-1} u^{k-1} + \ldots + a_0$$

ist ein Polynom des Grades $k \geqq 1$ mit ganzen Zahlen als Koeffizienten; $\mathfrak{a}$ ist ein Intervall und $|\mathfrak{a}|$ seine Länge; $q_{\mathfrak{a}}$ ist bei $|\mathfrak{a}| < q$ die Anzahl der mod q in $\mathfrak{a}$ hineinfallenden Polynomwerte $P(u)$, wenn u ein vollständiges Restsystem mod q durchläuft.

Die Arbeit beschäftigt sich in erster Linie mit der Frage: Was läßt sich über $q_{\mathfrak{a}}$ sagen?

Für die Behandlung derartiger Fragen hat man eine Handhabe in folgendem von Herrn Weyl[2]) bewiesenen „Prinzip“:

Gilt bei einer Menge reeller Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ für jede ganze Zahl $m \neq 0$ die Limesgleichung

$$\sum_{u=1}^{n} e(m\alpha_u) = o(n), \tag{1}$$

so sind die Zahlen α_u mod 1 *gleichmäßig dicht verteilt, d. h. die Anzahl der* mod 1 *in ein Intervall $\mathfrak{a}$ mit $|\mathfrak{a}| < 1$ hineinfallenden Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist asymptotisch gleich $|\mathfrak{a}| n$.*

Dieser Satz nebst dem von Herrn Weyl gegebenen Beweis läßt sich, was bisher nicht bemerkt zu sein scheint, so abändern, daß er auf die

---

[1]) Dieselbe bildet einen Abschnitt meiner Habilitationsschrift, die Ostern 1922 der Philos. Fakultät der Universität Münster i. W. vorgelegen hat.

[2]) *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins,* Math. Ann. 77 (1916), S. 313 bis 352; Satz 1.

vorliegende Frage anwendbar ist und unter gewissen Einschränkungen für $\mathfrak{a}$ nicht nur $q_{\mathfrak{a}} \sim |\mathfrak{a}|$, sondern auch eine Abschätzung des Fehlers $q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}|$ liefert, sofern eine der Summe (1) entsprechende Summe scharf genug abgeschätzt ist.

Diese abzuschätzende Summe lautet aber

$$S = S(q, P) = \sum_{u=0}^{q-1} e_q(P(u)), \tag{2}$$

und über sie ist durch die Herren Hardy und Littlewood[3]) bereits bekannt, daß bei $d = (q, a_k)$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $A = A(k, d, \varepsilon)$ vorhanden ist, daß

$$|S| < A q^{1-2^{1-k}+\varepsilon} \tag{3}$$

ist. Dieses Ergebnis wird im § 1 insofern verschärft, als dort gezeigt wird, daß d durch $(q, a_k, \ldots, a_1)$ ersetzt werden kann. Im § 2 wird die entsprechende Abschätzung für Polynome zweier Veränderlicher durchgeführt und im § 3 dann mit dem modifizierten Prinzip $q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}|$ abgeschätzt.

Mit $q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}|$ ist natürlich auch die Anzahl der *einer* Restklasse mod q angehörenden Polynomwerte $P(u)$ abgeschätzt. In § 4 wird die so erhaltene Abschätzung auf völlig elementarem Wege erheblich verschärft.

§ 5 zeigt die Bedeutung der modifizierten Abschätzung (3) für das Waringsche Problem.

§ 1.

Verschärfung einer Abschätzung.

In den §§ 1—3 sei für natürliche Zahlen $k \geqq 1$

$$L = L(k) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Satz 1. *Es sei S durch* (2) *erklärt, es bedeute $T(q)$ die Anzahl der Teiler von q, und es sei*[4])

$$\Delta = (q, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1).$$

Dann ist

$$|S| \begin{cases} \leqq k\, T(q)\, \Delta^L q^{1-L} & \text{für } \Delta \mid a_1, \\ = 0 & \text{für } \Delta \nmid a_1. \end{cases} \tag{4}$$

---

[3]) *Some problems of „Partitio Numerorum"*; I: *A new solution of Waring's Problem,* Nachr. v. d. K. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, Mathem.-physik. Klasse, 1920, S. 33—54, Lemma 1; zwar erscheint dort die Behauptung nicht in der obigen Formulierung, ist aber im Beweise enthalten. Vgl. hierzu auch Landau: *Zum Waringschen Problem,* Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 219—247, Hilfssatz 6, Vorbemerkung und Beweis.

[4]) Für $k = 1$ sei $\Delta = q$.

Anmerkung. Für
$$\delta = (q, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1)$$
folgt hieraus insbesondere

(5) $$|S| \leqq k\,T(q)\,\delta^{L(k)} q^{1-L(k)}.$$

Wegen $T(q) = O(q^{\varepsilon})$ ist hierin (3) enthalten, und es ergibt sich für alle Polynome $P(u)$ mit $(a_k, \ldots, a_1) = 1$ die Existenz einer solchen Zahl $B = B(k, \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, daß

(6) $$|S| < B q^{1-2^{1-k}+\varepsilon}$$

ist.

Beweis[5]). Für $k = 1$ ist offenbar
$$|S| = \left|\sum_{u=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i a_1 u}{q}}\right| = \begin{cases} q & \text{für } q \mid a_1, \\ 0 & \text{für } q \nmid a_1, \end{cases}$$
also die Behauptung richtig.

Um den zweiten Teil von (4) für beliebiges k zu beweisen, setzen wir
$$q = \Delta Q, \qquad u = Q\mu + \bar{\mu} \qquad \text{mit } 0 \leqq \bar{\mu} < Q.$$
Wegen $\Delta \mid a_k, \ldots, a_2$ ist dann
$$\begin{aligned} e_q(P(u)) &= e_{\Delta Q}\{a_k(Q\mu + \bar{\mu})^k + \ldots + a_1(Q\mu + \bar{\mu}) + a_0\} \\ &= e_{\Delta Q}\{P(\bar{\mu}) + a_1 Q \mu\} = e_{\Delta Q}(P(\bar{\mu}))\, e_{\Delta}(a_1 \mu), \end{aligned}$$
also
$$S = \sum_{\bar{\mu}=0}^{Q-1} e_{\Delta Q}(P(\bar{\mu})) \sum_{\mu=0}^{\Delta-1} e_{\Delta}(a_1 \mu) = 0,$$
da die innere Summe wegen $\Delta \nmid a_1$ nach dem für $k = 1$ Gezeigten den Wert 0 hat.

Es bleibt noch der erste Teil von (4) für $k \geqq 2$ zu beweisen. Wir können annehmen, dieser Teil der Behauptung, und damit (5), sei schon für $k - 1$ bewiesen. Es ist
$$|S|^2 = \sum_{u\,h} e_q(P(u) - P(h)),$$
wo u, h je ein vollständiges Restsystem mod q durchlaufen. Wird $u = i + h$ gesetzt, so durchlaufen i, h gleichzeitig vollständige Restsysteme mit u, h. Daher ist

(7) $$|S|^2 \leqq \sum_{i=0}^{q-1} \Big|\sum_{h}\Big|,$$

[5]) Der Beweis ist eine Verallgemeinerung eines Beweises (verschieden von dem in Fußnote 3 erwähnten), den Herr Landau für den Fall, daß in der Abschätzung nur $d = (q, a_k)$ statt Δ in Betracht gezogen wird, am 7. 4. 1921 in einem Briefe an Herrn Hardy gegeben und mir freundlicherweise ebenfalls mitgeteilt hat.

wo

$$\sum_h = \sum_{h=0}^{q-1} e_q\left(\sum_{\varkappa=0}^{k-1} h^{\varkappa} \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{k} a_\lambda \binom{\lambda}{\varkappa} i^{\lambda-\varkappa}\right)$$

ist. Hier steht in der großen Klammer ein Polynom $(k-1)$-ten Grades von h. Nach der für $k-1$ als richtig angenommenen Abschätzung (5) ist daher

$$(8) \qquad \left|\sum_h\right| \leqq (k-1)\, T(q)\, \delta_i^{L(k-1)} q^{1-L(k-1)},$$

wo

$$\delta_i = \left(q,\, a_k\binom{k}{k-1} i,\, \sum_{\lambda=k-1}^{k} a_\lambda \binom{\lambda}{k-2} i^{\lambda-k+2},\, \sum_{\lambda=k-2}^{k} a_\lambda \binom{\lambda}{k-3} i^{\lambda-k+3},\, \ldots,\, \sum_{\lambda=2}^{k} a_\lambda \binom{\lambda}{1} i^{\lambda-1}\right)$$

ist.

Da

$$(xy, z, \ldots) \leqq (x, z, \ldots)(y, z, \ldots)$$

ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta_i &\leqq (q, k, \ldots)(q, a_k i, \ldots) \\ &\leqq k\left(q, a_k i, \sum_{\lambda=k-1}^{k}, \sum_{\lambda=k-2}^{k}, \ldots, \sum_{\lambda=2}^{k}\right).\end{aligned}$$

Da $a_k i$ als einzelnes Element in der Klammer vorkommt, kann in jeder der nach ihm folgenden Summen das letzte Glied fortgelassen werden, da es ein Vielfaches von $a_k i$ ist. Man hat also

$$\delta_i \leqq k\left(q, a_k i, a_{k-1}(k-1) i, \sum_{\lambda=k-2}^{k-1}, \sum_{\lambda=k-3}^{k-1}, \ldots, \sum_{\lambda=2}^{k-1}\right),$$

mithin, wie oben,

$$\delta_i \leqq k(k-1)\left(q, a_k i, a_{k-1} i, \sum_{\lambda=k-2}^{k-1}, \sum_{\lambda=k-3}^{k-1}, \ldots, \sum_{\lambda=2}^{k-1}\right).$$

Nun kann wieder das letzte Glied jeder Summe fortgelassen werden. Die Wiederholung des Verfahrens ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\delta_i &\leqq k!\,(q, a_k i, a_{k-1} i, \ldots, a_2 i) \\ &\leqq k!\,(q, a_k, \ldots, a_2)(q, i) \leqq k^{2^{k-2}} \Delta(q, i).\end{aligned}$$

Daher folgt aus (7) und (8)

$$|S|^2 \leqq k^2\, T(q)\, \Delta^{L(k-1)} q^{1-L(k-1)} \sum_{i=0}^{q-1} (q, i).$$

Hierbei ist

$$\sum_{i=0}^{q-1} (q, i) \leqq \sum_{t \mid q} t \sum_{\nu=1}^{q/t} 1 = q \sum_{t \mid q} 1 = q\, T(q).$$

Mithin ist wegen $L(k-1) = 2L(k)$

$$|S|^2 \leqq k^2\, T^2(q)\, \Delta^{2L(k)} q^{2-2L(k)},$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 2.

Ausdehnung der Abschätzung auf Polynome zweier Veränderlicher.

Ähnliche Abschätzungen wie in § 1 für Polynome einer Veränderlichen lassen sich auch für Polynome mehrerer Veränderlicher geben. Wir beschränken uns hier auf zwei Veränderliche und beweisen den

Satz 2. *Es sei*

$$P(u, v) = \sum_{0 \leqq \varkappa + \lambda \leqq k} a_{\varkappa \lambda} u^{\varkappa} v^{\lambda}$$

ein Polynom höchstens k-ten Grades; es sei

$$R = R(q, P) = \sum_{u=0}^{q-1} \sum_{v=0}^{q-1} e_q(P(u, v))$$

und

$$\Delta = (q, \ldots, \underset{(\varkappa+\lambda \geqq 2)}{a_{\varkappa\lambda}}, \ldots),$$

d. h. der größte gemeinsame Teiler von q und[4] *allen $a_{\varkappa\lambda}$ mit $\varkappa + \lambda \geqq 2$. Dann ist*

$$(9) \qquad |R| \begin{cases} \leqq (k!)^2 T(q) \Delta^L q^{2-L} & \textit{für } \Delta \mid (a_{10}, a_{01}), \\ = 0 & \textit{für } \Delta \nmid (a_{10}, a_{01}). \end{cases}$$

Anmerkung. Hieraus folgt insbesondere, wenn δ den größten gemeinsamen Teiler von q und allen $a_{\varkappa\lambda}$ mit $\varkappa + \lambda \geqq 1$ bezeichnet,

$$(10) \qquad |R| \leqq (k!)^2 T(q) \delta^{L(k)} q^{2-L(k)}.$$

Beweis. Für $k = 1$ ist (9) richtig, da dann

$$R = \sum_{u=0}^{q-1} \sum_{v=0}^{q-1} e_q(a_{10} u + a_{01} v + a_{00})$$

$$= e_q(a_{00}) \sum_{u=0}^{q-1} e_q(a_{10} u) \sum_{v=0}^{q-1} e_q(a_{01} v)$$

ist, hier offenbar nur dann *beide* Summen $\neq 0$ sind, wenn $\Delta = q \mid (a_{10}, a_{01})$ ist, und da in diesem Falle

$$|R| = q^2 = \Delta q.$$

Um den zweiten Teil von (9) für beliebiges k zu beweisen, setzen wir

$$q = \Delta Q, \qquad u = Q\mu + \bar{\mu}, \qquad v = Q\nu + \bar{\nu}.$$

Dann ist wegen $\Delta \mid a_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa + \lambda \geqq 2$

$$e_q(P(u, v)) = e_{\Delta Q}(P(\bar{\mu}, \bar{\nu})) e_\Delta(a_{10}\mu + a_{01}\nu),$$

also

$$|R| \leqq \sum_{\bar{\mu}=0}^{Q-1} \sum_{\bar{\nu}=0}^{Q-1} \left| \sum_{\mu=0}^{\Delta-1} \sum_{\nu=0}^{\Delta-1} e_\Delta(a_{10}\mu + a_{01}\nu) \right| = 0,$$

da die innere Doppelsumme wegen $\Delta \chi (a_{10}, a_{01})$ nach dem für $k = 1$ Gezeigten den Wert 0 hat.

Es bleibt noch der erste Teil von (9) für $k \geqq 2$ zu beweisen. Wir nehmen an, dieser Teil der Behauptung, und damit (10), sei bereits bis $k-1$ bewiesen. Es ist

$$|R|^2 = \sum_{u, v, h, l} e_q\Big(\sum_{0 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k} a_{\varkappa\lambda}(u^\varkappa v^\lambda - h^\varkappa l^\lambda)\Big),$$

wo u, v, h, l je ein vollständiges Restsystem mod q durchlaufen. Wird $u = i + h$, $v = j + l$ gesetzt, so durchlaufen zugleich mit jenen Zahlen auch i, j, h, l vollständige Restsysteme. Daher ist

$$|R|^2 \leqq \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} \Big| \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} e_q(\Sigma) \Big|, \tag{11}$$

wo

$$\Sigma = \sum_{0 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k} \Big\{ a_{\varkappa\lambda} \sum_{\varrho=0}^{\varkappa} \sum_{\sigma=0}^{\lambda} h^\varrho l^\sigma \binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma} - a_{\varkappa\lambda} h^\varkappa l^\lambda \Big\}$$
$$= \sum_{0 \leqq \varrho+\sigma \leqq k} h^\varrho l^\sigma \Big\{ \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho,\, \lambda \geqq \sigma \\ \varkappa+\lambda \leqq k}} a_{\varkappa\lambda} \binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma} - a_{\varrho\sigma} \Big\}$$

ist. Hier hebt sich in der Klammer das Glied mit $\varkappa = \varrho$, $\lambda = \sigma$ gegen $a_{\varrho\sigma}$ fort. Mithin kommen in der Klammer nur Glieder mit $\varkappa + \lambda \geqq \varrho + \sigma + 1$ vor, und daher wegen $\varkappa + \lambda \leqq k$ Glieder mit $\varrho + \sigma = k$ nicht vor. Es ist daher

$$\Sigma = \sum_{0 \leqq \varrho+\sigma \leqq k-1} h^\varrho l^\sigma \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho,\, \lambda \geqq \sigma \\ \varrho+\sigma+1 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k}} a_{\varkappa\lambda} \binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma}$$

ein Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades. Daher ist auf die innere Doppelsumme von (11) die Abschätzung (10) anwendbar, also wegen $L(k-1) = 2L(k)$

$$|R|^2 \leqq ((k-1)!)^2 T(q) q^{2-2L(k)} \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{i,j}^{2L(k)}, \tag{12}$$

wo

$$\delta_{ij} = \Big(q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho,\, \lambda \geqq \sigma \\ \varrho+\sigma+1 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k}} a_{\varkappa\lambda} \binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma}, \ldots\Big)$$

ist und in dieser Klammer alle für $1 \leqq \varrho + \sigma \leqq k-1$ sich ergebenden Summen aufzuführen sind. Die Summen sollen in der Klammer so geordnet werden, daß die Summen mit demselben Wert von $\varrho + \sigma$ zusammenstehen. Wir schreiben dann

$$\delta_{ij} = \Big(q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}, \ldots, \sum_{\substack{k-1 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}, \ldots, \sum_{\substack{k-2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k \\ (\varrho+\sigma=k-3)}}, \ldots, \sum_{\substack{2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k \\ (\varrho+\sigma=1)}}, \ldots\Big), \tag{13}$$

wo hinter jedem Summenzeichen

$$A_{\varkappa\lambda}(\varrho, \sigma) = a_{\varkappa\lambda}\binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma} \tag{14}$$

zu denken und in jeder Summe bei festem ϱ, σ nach wie vor nur über die Zahlen $\varkappa \geqq \varrho$, $\lambda \geqq \sigma$ mit der außerdem für $\varkappa + \lambda$ angegebenen Einschränkung zu summieren ist.

Um nun δ_{ij} abzuschätzen, zeigen wir zunächst, daß bei festem K $(3 \leqq K \leqq k)$ und festen ϱ, σ mit $1 \leqq \varrho + \sigma \leqq K - 2$

$$\begin{aligned}(K - \varrho - \sigma) \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho,\, \lambda \geqq \sigma \\ \varkappa+\lambda=K}} A_{\varkappa\lambda}(\varrho, \sigma) \\ = (\varrho + 1) i \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho+1,\, \lambda \geqq \sigma \\ \varkappa+\lambda=K}} A_{\varkappa\lambda}(\varrho + 1, \sigma) + (\sigma + 1) j \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho,\, \lambda \geqq \sigma+1 \\ \varkappa+\lambda=K}} A_{\varkappa\lambda}(\varrho, \sigma + 1)\end{aligned} \tag{15}$$

ist. In der Tat ist die rechte Seite hiervon wegen (14), wenn wir von der ersten Summe das Glied mit $\lambda = \sigma$, von der zweiten das Glied mit $\varkappa = \varrho$ besonders aufschreiben,

$$\begin{aligned}a_{K-\sigma,\sigma}\binom{K-\sigma}{\varrho}(K - \sigma - \varrho) i^{K-\varrho-\sigma} + \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho+1,\, \lambda \geqq \sigma+1 \\ \varkappa+\lambda=K}} a_{\varkappa\lambda}\binom{\varkappa}{\varrho}(\varkappa - \varrho)\binom{\lambda}{\sigma} i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma} \\ + \sum_{\substack{\varkappa \geqq \varrho+1,\, \lambda \geqq \sigma+1 \\ \varkappa+\lambda=K}} a_{\varkappa\lambda}\binom{\varkappa}{\varrho}\binom{\lambda}{\sigma}(\lambda - \sigma) i^{\varkappa-\varrho} j^{\lambda-\sigma} + a_{\varrho, K-\varrho}\binom{K-\varrho}{\sigma}(K - \varrho - \sigma) j^{K-\varrho-\sigma},\end{aligned}$$

und nach Vereinigung der beiden mittleren Summen steht bei Beachtung von $\varkappa + \lambda = K$ die linke Seite von (15) da.

Aus (13) folgt, wenn wir die Summen aufspalten und noch ganzzahlige Faktoren hinzufügen,

$$\begin{aligned}\delta_{ij} \leqq \Big(q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}, \ldots, 2! \sum_{\varkappa+\lambda=k} + 2! \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}, \ldots, 3! \sum_{\varkappa+\lambda=k} + 3! \sum_{\substack{k-2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-3)}}, \ldots \\ \ldots, (k-1)! \sum_{\varkappa+\lambda=k} + (k-1)! \sum_{\substack{2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-1 \\ (\varrho+\sigma=1)}}, \ldots\Big).\end{aligned} \tag{16}$$

Hierin können die ersten Bestandteile der aufgespaltenen Summen gestrichen werden. Denn (15) besagt, daß sich jede Summe $(k-1)! \sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=1)}}$ aus zwei Summen der Form $(k-2)! \sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=2)}}$ linear und ganzzahlig komponieren läßt; ebenso jede dieser Summen aus zwei Summen der Form $(k-3)! \sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=3)}}$; usw.; schließlich jede der Summen $2! \sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}$ aus zwei Summanden der Form $\sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}$; d. h. jede der genannten Summen läßt sich linear und ganzzahlig komponieren aus Summen der Form $\sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}$. Da die

Summen dieser letzten Art sämtlich als Elemente der Klammer in (16) vorkommen, können in der Klammer alle andern vorstehend genannten Summen gestrichen werden, so daß wir erhalten

$$\delta_{ij} \leqq (q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}, \ldots, 2! \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}, \ldots, 3! \sum_{\substack{k-2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-3)}}, \ldots, (k-1)! \sum_{\substack{2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-1 \\ (\varrho+\sigma=1)}}, \ldots),$$

also, wenn der höchste Faktor jeder Fakultät herausgezogen wird und die Summen wieder aufgespalten werden,

$$\delta_{ij} \leqq (k-1)!\,(q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}, \ldots, 2! \sum_{\varkappa+\lambda=k-1} + \underset{(\varrho+\sigma=k-3)}{2! \sum_{\varkappa+\lambda=k-2}}, \ldots$$
$$3! \sum_{\varkappa+\lambda=k-1} + \underset{(\varrho+\sigma=k-4)}{3! \sum_{k-3 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-2}}, \ldots, (k-2)! \sum_{\varkappa+\lambda=k-1} + \underset{(\varrho+\sigma=1)}{(k-2)! \sum_{2 \leqq \varkappa+\lambda \leqq k-2}}, \ldots).$$

Hierauf wird (15) mit $K = k-1$ angewendet. Dann ergibt sich nach dem oben stehenden Muster, daß sich der erste Bestandteil der aufgespaltenen Summen linear und ganzzahlig komponieren läßt aus den Summen der Form $\sum\limits_{\substack{\varkappa+\lambda=k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}$, also gestrichen werden kann. Wird wieder der höchste Faktor jeder Fakultät herausgezogen und das Verfahren in der geschilderten Weise fortgesetzt, so gelangt man schließlich zu

$$\delta_{ij} \leqq \prod_{n=2}^{k-1} n!\,(q, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k \\ (\varrho+\sigma=k-1)}}, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=k-1 \\ (\varrho+\sigma=k-2)}}, \ldots, \sum_{\substack{\varkappa+\lambda=2 \\ (\varrho+\sigma=1)}}, \ldots). \tag{17}$$

Hierin ist, da auch stets $\varkappa \geqq \varrho$, $\lambda \geqq \sigma$ ist, jede der vorkommenden Summen wegen (14) von der Gestalt

$$\sum_{\varkappa+\lambda=\varrho+\sigma+1} A_{\varkappa\lambda}(\varrho, \sigma) = A_{\varrho,\sigma+1}(\varrho, \sigma) + A_{\varrho+1,\sigma}(\varrho, \sigma)$$
$$= a_{\varrho,\sigma+1}(\sigma+1)j + a_{\varrho+1,\sigma}(\varrho+1)i.$$

Da in (17) alle Zahlenpaare ϱ, σ mit $1 \leqq \varrho+\sigma \leqq k-1$ vorkommen, ist mithin

$$\delta_{ij} \leqq (k!)^{2^{k-2}}(q, \ldots, a_{\varrho,\sigma+1}(\sigma+1)j + a_{\varrho+1,\sigma}(\varrho+1)i, \ldots),$$

wobei hierin alle Gliederkomplexe mit $1 \leqq \varrho+\sigma \leqq k-1$ aufzuführen sind.

Daher folgt nun aus (12)

$$|R|^2 \leqq (k!)^3\, T(q)\, \Delta^{2L(k)}\, q^{2-2L(k)} \sum_{i,j}, \tag{18}$$

wo

$$\sum_{i,j} = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} \left(\frac{q}{\Delta}, \ldots, (\sigma+1)\frac{a_{\varrho,\sigma+1}}{\Delta}\, j + (\varrho+1)\frac{a_{\varrho+1,\sigma}}{\Delta}\, i, \ldots\right)$$

ist. Hier ist

$$\sum_{i,j} \leqq \sum_{t \mid \frac{q}{\Delta}} t \cdot N, \tag{19}$$

wo N die Anzahl der i, j $(0 \leqq i, j < q)$ ist, für welche bei festem t die sämtlichen für $1 \leqq \varrho + \sigma \leqq k - 1$ aufgeschriebenen Kongruenzen

$$(20)\qquad (\sigma + 1)\frac{a_{\varrho, \sigma+1}}{\Delta} j + (\varrho + 1)\frac{a_{\varrho+1, \sigma}}{\Delta} i \equiv 0 \pmod t$$

erfüllt sind. Die Anzahl der $\operatorname{mod} t$ inkongruenten Lösungen i, j dieses Systems ist bekanntlich, wenn e_1, e_2 die Elementarteiler des Systems bedeuten,

$$(e_1, t)(e_2, t) \leqq (e_1, t)\, t,$$

also die Anzahl aller Lösungen i, j von (20)

$$(21)\qquad N \leqq \frac{q^2}{t^2}(e_1, t)\, t = \frac{q^2}{t}(e_1, t).$$

Der Elementarteiler e_1 ist der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten des Systems (20), also, da in ihm alle $a_{\varrho\sigma}$ mit $2 \leqq \varrho + \sigma \leqq k$ vorkommen, auf Grund der Definition von Δ

$$(e_1, t) = \left(t, \ldots, \sigma \frac{a_{\varrho\sigma}}{\Delta}, \ldots\right) \leqq k! \left(\frac{q}{\Delta}, \ldots, \frac{a_{\varrho\sigma}}{\Delta}, \ldots\right) = k!$$

Daher ist nach (19) und (21)

$$\sum_{i,j} \leqq \sum_{t \mid \frac{q}{\Delta}} t \frac{q^2}{t} k! \leqq k!\, q^2\, T(q),$$

also nach (18)

$$|R|^2 \leqq (k!)^4\, T^2(q)\, \Delta^{2L(k)}\, q^{4-2L(k)},$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 3.

Das Weylsche Prinzip und seine Anwendung.

Nach dem Beweisverfahren Herrn Weyls zu seinem Satz 1 läßt sich durch geeignete Abänderung folgender Satz gewinnen.

Satz 3. *Es seien γ $(0 < \gamma < 1)$ sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen; es sei $\mathfrak{i}$ ein Intervall, dessen Länge $|\mathfrak{i}|$ der Ungleichung*

$$(22)\qquad n^{\gamma-1} \leqq |\mathfrak{i}| \leqq 1 - n^{\gamma-1}$$

genügt; es sei $J(n)$ die Anzahl der mod 1 *in $\mathfrak{i}$ liegenden Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dann ist für $p = (10n)^5$*

$$(23)\qquad \big|J(n) - n|\mathfrak{i}|\big| < 8 \sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{1}{\varkappa} \Big| \sum_{h=1}^{n} e(\varkappa \alpha_h) \Big| + 2n^{\gamma}.$$

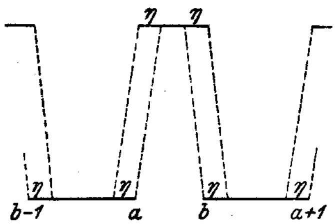
Beweis. Der Anfangspunkt des Intervalls $\mathfrak{i}$ sei a, der Endpunkt b. Es werde eine reelle Funktion $f(x)$ mit der Periode 1 definiert durch

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{für } a \leqq x \leqq b, \\ 0 & \text{für } b < x < a+1. \end{cases}$$

Es sei

$$\eta = \frac{1}{2} n^{\nu-1}. \tag{24}$$

Wegen (22) ist 2η sicher nicht größer als jede der in der graphischen Darstellung von $f(x)$ vorkommenden zusammenhängenden Strecken. Es werden nun die oberen bzw. unteren zusammenhängenden Strecken beiderseitig um η verkürzt und die benachbarten Endpunkte in jedem Fall geradlinig verbunden. Die so entstehenden Linienzüge mögen die Funktionen $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ definieren. Diese sind stetig, haben die Periode 1, und es ist



$$f_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x).$$

Da nun offenbar

$$J(n) - n|\mathfrak{i}| = \sum_{h=1}^{n} \left\{ f(\alpha_h) - \int_0^1 f(x)\,dx \right\}$$

ist, so folgt, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{J} = J(n) - n|\mathfrak{i}| \tag{25}$$

gesetzt wird,

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J} &\geqq \sum_{h=1}^{n} \left\{ f_1(\alpha_h) - \int_0^1 f_1(x)\,dx \right\} - n\eta, \\ \mathfrak{J} &\leqq \sum_{h=1}^{n} \left\{ f_2(\alpha_h) - \int_0^1 f_2(x)\,dx \right\} + n\eta. \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Es werden nun die Fourierentwicklungen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gebildet. Die Fourierkoeffizienten von $f_1(x)$ seien $a_\varkappa, b_\varkappa$. Dann ist für $\varkappa = 1, 2, \ldots$

$$\frac{1}{2} a_\varkappa = \int_0^1 f_1(x) \cos 2\pi\varkappa x\,dx = \int_a^{a+\eta} + \int_{a+\eta}^{b-\eta} + \int_{b-\eta}^{b}.$$

Dabei ist

$$\left| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \right| = \left| \int_{a+\eta}^{b-\eta} \cos 2\pi\varkappa x\,dx \right| \leqq \frac{1}{\pi\varkappa};$$

$$\int_a^{a+\eta} = \int_a^{a+\eta} \frac{x-a}{\eta} \cos 2\pi\varkappa x\,dx = \frac{1}{2\pi\varkappa} \sin 2\pi\varkappa(a+\eta) - \frac{1}{2\pi\varkappa\eta} \int_a^{a+\eta} \sin 2\pi\varkappa x\,dx,$$

also

$$\left|\int_a^{a+\eta}\right| \leqq \frac{1}{2\pi\varkappa} + \frac{\eta}{2\pi\varkappa\eta} = \frac{1}{\pi\varkappa}; \text{ und ebenso } \left|\int_{b+\eta}^{b}\right| \leqq \frac{1}{\pi\varkappa}.$$

Daher ist für $\varkappa = 1, 2, \ldots$

$$(27) \qquad |a_\varkappa| < \frac{2}{\varkappa}, \quad \text{und ebenso} \quad |b_\varkappa| < \frac{2}{\varkappa}.$$

Die gleichen Abschätzungen ergeben sich für die Fourierkoeffizienten von $f_2(x)$.

Werden die Teilsummen der Fourierentwickelung von $f_1(x)$ mit $s_\varkappa$ bezeichnet, so konvergiert, da $f_1(x)$ stetig ist, $\frac{1}{p+1}(s_1 + \ldots + s_{p+1})$ gleichmäßig für alle x gegen $f_1(x)$, und zwar ist [6] der

$$|\text{Fehler}| < \sigma \quad \text{für} \quad p+1 > \frac{3M}{\sigma \sin^2 \delta};$$

dabei bedeutet M das Maximum von $|f_1(x)|$, also hier $M = 1$; ferner ist δ eine solche Zahl, daß

$$|f_1(x-2v) + f_1(x+2v) - 2f_1(x)| < \sigma \quad \text{für} \quad 0 \leqq v \leqq \delta$$

ist. Da

$$\begin{aligned} &|f_1(x-2v) + f_1(x+2v) - 2f_1(x)| \\ &\leqq |f_1(x+2v) - f_1(x)| + |f_1(x) - f_1(x-2v)| \leqq \frac{2v}{\eta} + \frac{2v}{\eta} = \frac{4v}{\eta} \end{aligned}$$

ist, kann hier $\delta = \frac{1}{5}\eta\sigma$ gesetzt werden. Wir haben dann

$$|\text{Fehler}| < \sigma \quad \text{für} \quad p+1 > \frac{3}{\sigma \sin^2 \frac{1}{5}\eta\sigma}.$$

Wird nun $\sigma = n^{\gamma-1}$ gewählt, so folgt hieraus wegen (24)

$$(28) \qquad |\text{Fehler}| < n^{\gamma-1} \quad \text{für} \quad p = (10n)^5.$$

Eine gleiche Abschätzung gilt für die arithmetischen Mittel der Fourierentwicklung von $f_2(x)$.

Wird nun für das in (28) festgelegte p

$$(29) \qquad \frac{1}{p+1}(s_1 + \ldots + s_{p+1}) = \varphi_1(x)$$

gesetzt und das entsprechende arithmetische Mittel für $f_2(x)$ mit $\varphi_2(x)$ bezeichnet, so folgt aus (26) und (28)

$$\mathfrak{J} > \sum_{h=1}^{n}\left\{\varphi_1(\alpha_h) - \int_0^1 f_1(x)\,dx\right\} - 2n^\gamma,$$

$$\mathfrak{J} < \sum_{h=1}^{n}\left\{\varphi_2(\alpha_h) - \int_0^1 f_2(x)\,dx\right\} + 2n^\gamma.$$

[6] Z. B. vgl. G. Kowalewski, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, Leipzig u. Berlin 1909, S. 284–285.

Das konstante Glied in der trigonometrischen Summe $\varphi_1(x)$ stimmt mit dem konstanten Glied der Fourierentwicklung von $f_1(x)$ überein und ist daher gerade $\int_0^1 f_1(x)\,dx$; entsprechendes gilt für $\varphi_2(x)$. Mithin ist, wenn mit $\psi_1(x)$ bzw. $\psi_2(x)$ die durch Fortlassung des konstanten Gliedes aus $\varphi_1(x)$ bzw. $\varphi_2(x)$ entstehende Funktion bezeichnet wird,

$$|\mathfrak{S}| < \Big|\sum_{h=1}^{n} \psi_1(\alpha_h)\Big| + \Big|\sum_{h=1}^{n} \psi_2(\alpha_h)\Big| + 2n^{\gamma}. \tag{30}$$

Dabei ist wegen (29) und (27)

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{h=1}^{n}\psi_1(\alpha_h)\Big| &= \Big|\sum_{h=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{p-\varkappa+1}{p+1}\,(a_\varkappa \cos 2\pi\varkappa\alpha_h + b_\varkappa \sin 2\pi\varkappa\alpha_h)\Big| \\ &\leqq \sum_{\varkappa=1}^{p}|a_\varkappa|\Big|\sum_{h=1}^{n}\cos 2\pi\varkappa\alpha_h\Big| + \sum_{\varkappa=1}^{p}|b_\varkappa|\Big|\sum_{h=1}^{n}\sin 2\pi\varkappa\alpha_h\Big| \\ &\leqq 4\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{1}{\varkappa}\Big|\sum_{h=1}^{n} e(\varkappa\alpha_h)\Big|.\end{aligned}$$

Da sich eine gleiche Abschätzung für $\sum \psi_2(\alpha_h)$ ergibt, ist mit (30) wegen (25) die Behauptung bewiesen.

Aus dem eben bewiesenen Satz lassen sich unter Benutzung der Abschätzungen der §§ 1 und 2 die beiden folgenden Sätze ableiten.

Satz 4. *Es sei $k \geqq 2$ und bei gegebenem q, $P_k(u)$*

$$\delta = (q, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1),$$

und es sei $\mathfrak{a}$ ein Intervall mit

$$q^{1-L(k)} \leqq |\mathfrak{a}| \leqq q - q^{1-L(k)}. \tag{31}$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_1 = C_1(\varepsilon)$, so daß

$$q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}|\,| < C_1 k\, \delta^{L(k)} q^{1-L(k)+\varepsilon} \tag{32}$$

ist.

Anmerkungen. 1. Die Abschätzung der Herren Hardy und Littlewood für S (vgl. Einleitung) würde auf Grund des Satzes 3 ein ähnliches Resultat ergeben; jedoch würde an Stelle von $C_1\, k\, \delta^{L(k)}$ eine Konstante stehen, die außer von k noch von (q, a_k) abhinge, während hier z. B. für alle Polynome $P_k(u)$ mit $(a_k, \ldots, a_1) = 1$ sich *dieselbe* Abschätzung

$$\big|q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}|\big| < C_1 k\, q^{1-L(k)+\varepsilon}$$

ergibt.

2. Aus dem Satz folgt insbesondere, daß bei gegebenem c die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$P(u) \equiv c \pmod{q}$$

bei passend gewähltem $D = D(k, \varepsilon)$ höchstens

$$D\,\delta^{L(k)} q^{1-L(k)+\varepsilon}$$

ist; denn man wähle für $\mathfrak{a}$ ein Intervall der Länge $q^{1-L(k)}$, das c im Innern enthält.

3. Wenn (31) nicht erfüllt ist, ist die Behauptung, wie leicht einzusehen, zwar auch richtig, wird aber dadurch beeinträchtigt, daß das Fehlerglied das Hauptglied überwiegt.

Beweis. Wir wenden Satz 3 an auf $n = q$, $\gamma = 1 - L(k)$, $\alpha_\tau = \frac{1}{q} P(\tau - 1)$ und verstehen unter $\mathfrak{i}$ das Intervall, das durch Verkleinerung der Zahlengeraden im Maßstabe $1 : q$ aus $\mathfrak{a}$ entsteht. Dann ist wegen (31) die Bedingung (22) erfüllt, $J(n) = q_{\mathfrak{a}}$, $n|\mathfrak{i}| = |\mathfrak{a}|$, und (23) lautet

$$\left| q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}| \right| < 8 \sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{1}{\varkappa} \left| \sum_{u=0}^{q-1} e_q(\varkappa P(u)) \right| + 2 q^{1-L(k)}.$$

Nach (5) folgt hieraus

$$\left| q_{\mathfrak{a}} - |\mathfrak{a}| \right| < 10\, k\, \delta^{L(k)} q^{1-L(k)}\, T(q) \sum_{\varkappa}, \tag{33}$$

wo

$$\sum_{\varkappa} = \sum_{\varkappa=1}^{p} \frac{(q, \varkappa)}{\varkappa} \leqq \sum_{d|q} \sum_{\lambda=1}^{p} \frac{d}{\lambda d} \leqq \sum_{d|q} (1 + \log p) = T(q)(1 + \log p)$$

ist. Da $p = (10q)^5$ ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_1 = C_1(\varepsilon)$, so daß

$$10\, T^2(q)(1 + \log p) < C_1 q^{\varepsilon}$$

ist. Dann ist aber mit (33) die Behauptung (32) bewiesen.

Satz 5. *Es mögen $P(u, v)$ und δ die in Satz 2 und Anmerkung angegebene Bedeutung haben, und es sei $\mathfrak{a}$ ein Intervall, das (31) erfüllt; ferner sei $Q_{\mathfrak{a}}$ die Anzahl der* $\bmod q$ *für* $u = 0, 1, \ldots, q-1$ *und* $v = 0, 1, \ldots, q-1$ *in $\mathfrak{a}$ hineinfallenden Polynomwerte $P(u, v)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_2 = C_2(\varepsilon)$, so daß*

$$\left| Q_{\mathfrak{a}} - q|\mathfrak{a}| \right| < C_2 (k!)^2 \delta^{L(k)} q^{2-L(k)+\varepsilon}$$

Beweis. Wir wenden Satz 3 an auf $n = q^2$, $\gamma = 1 - \frac{1}{2} L(k)$, $q\alpha_1 = P(0,0), \ldots, q\alpha_q = P(q-1, 0)$; $q\alpha_{q+1} = P(0,1), \ldots, q\alpha_{2q} = P(q-1, 1)$; $q\alpha_{2q+1} = P(0, 2), \ldots, q\alpha_{q^2} = P(q-1, q-1)$. Wir verstehen weiter unter $\mathfrak{i}$

wieder das Intervall, das aus $\mathfrak{a}$ durch Verkürzung auf $1:q$ hervorgeht. Dann ist wieder (22) erfüllt, und (23) lautet wegen (10)

$$\left|Q_{\mathfrak{a}} - q\,|\,\mathfrak{a}\,|\right| < 8\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{1}{\varkappa}\left|\sum_{u=0}^{q-1}\sum_{v=1}^{q-1} e_q(\varkappa P(u, v))\right| + 2q^{2-L(k)}$$
$$< 10\,(k!)^2\,\delta^{L(k)}\,q^{2-L(k)}\,T(q)\sum_{\varkappa=1}^{p}\frac{(q,\varkappa)}{\varkappa},$$

woraus, wie vorhin, die Behauptung folgt.

§ 4.

Über die Lösungszahl von Kongruenzen k-ten Grades.

Satz 6. *Es sei für das Polynom* $P_k(u)$

$$\delta = (q, a_k, \ldots, a_1).$$

Dann gilt für die Anzahl L_k *der inkongruenten Lösungen der Kongruenz*

$$P_k(u) \equiv 0 \pmod q \tag{34}$$

die Abschätzung

$$L_k \leqq \delta^{1/k}\,T^{k-1}(q)\,q^{1-1/k}. \tag{35}$$

Anmerkungen. 1. Wegen $T(q) = O(q^{\varepsilon})$ ist dieses bezüglich der Größenordnung von q eine erhebliche Verschärfung des in Anm. 2 zu Satz 4 gewonnenen Ergebnisses.

2. Die Kongruenz

$$x^k \equiv 0 \pmod{2^{k\alpha}},$$

die offenbar für jede natürliche Zahl α genau $2^{k\alpha-\alpha} = q^{1-1/k}$ Lösungen hat, zeigt, daß bei jedem k in unendlich vielen Fällen $L_k \geqq q^{1-1/k}$, also bei der für L_k angegebenen Abschätzung der Exponent von q für *beliebige* q keiner beträchtlichen Verkleinerung fähig ist.

3. Die Abschätzung (35) läßt sich weder aus einem kürzlich von Herrn Nagel[7]) angegebenen Ergebnis, noch dieses aus obiger Abschätzung (35) folgern.

Beweis. Für $k = 1$ hat die Kongruenz

$$a_1 u + a_0 \equiv 0 \pmod q$$

höchstens $(a_1, q) = \delta$ Lösungen; d. h. die Behauptung ist richtig.

Die Behauptung sei nunmehr richtig für $k-1$; wir zeigen dann ihre Gültigkeit für k. Wir können annehmen, daß (34) mindestens eine Lösung hat. Dann ist für jede Lösung u ($\equiv$ oder $\not\equiv v$) von (34)

$$a_k u^k + \ldots + a_1 u \equiv a_k v^k + \ldots + a_1 v \pmod q,$$

[7]) *Généralisation d'un théorème de Tchebycheff*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (8) 4 (1921), S. 343–356, vgl. S. 345 ff.

also

$$(36)\quad (u-v)\{a_k \sum_{\lambda=0}^{k-1} u^\lambda v^{k-\lambda-1} + a_{k-1}\sum_{\lambda=0}^{k-2} u^\lambda v^{k-\lambda-2} + \ldots + a_1\} \equiv 0 \pmod q.$$

Es werde

$$(u-v, q) = r, \qquad q/r = s$$

gesetzt, so daß $u = v + wr$ ist. Dann folgt aus (36) wegen $(w, s) = 1$

$$(37)\quad \begin{aligned} &a_k \sum_{\lambda=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} w^\mu r^\mu \binom{\lambda}{\mu} v^{k-\mu-1} \\ &+ a_{k-1} \sum_{\lambda=0}^{k-2} \sum_{\mu=0}^{\lambda} w^\mu r^\mu \binom{\lambda}{\mu} v^{k-\mu-2} + \ldots + a_1 \equiv 0 \pmod s. \end{aligned}$$

Bezeichnet $L_{k-1}(s)$ die Anzahl der mod s inkongruenten Lösungen w dieser Kongruenz, so ist offenbar

$$(38)\quad L_k \leqq \sum_{s|q} L_{k-1}(s).$$

Um nun die Lösungszahl von (37) abzuschätzen, bemerken wir, daß (37) nur dann Lösungen haben kann, wenn

$$(39)\quad (s, a_k, \ldots, a_2) \mid a_1$$

ist, daß wir also dem s in (38) diese weitere Einschränkung auferlegen können. (37) läßt sich in der Form schreiben

$$\begin{aligned} &w^{k-1} r^{k-1} a_k + w^{k-2} r^{k-2} \sum_{\nu=0}^{1} a_{k-\nu} v^{1-\nu} \sum_{\lambda=k-2}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{k-2} \\ &+ w^{k-3} r^{k-3} \sum_{\nu=0}^{2} a_{k-\nu} v^{2-\nu} \sum_{\lambda=k-3}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{k-3} + \ldots + \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{k-\nu} v^{k-1-\nu} \sum_{\lambda=0}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{0} \equiv 0 \pmod s. \end{aligned}$$

Nach der für $k-1$ als richtig angenommenen Abschätzung (35) ist daher

$$(40)\quad L_{k-1}(s) \leqq T^{k-2}(q)\, s^{1-1/(k-1)}\, \delta_s^{1/(k-1)},$$

wobei

$$\begin{aligned} \delta_s = \Bigl(s,\ r^{k-1} a_k,\ r^{k-2} \sum_{\nu=0}^{1} a_{k-\nu} v^{1-\nu} \sum_{\lambda=k-2}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{k-2},\ r^{k-3} \sum_{\nu=0}^{2} a_{k-\nu} v^{2-\nu} \sum_{\lambda=k-3}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{k-3}, \\ \ldots,\ r \sum_{\nu=0}^{k-2} a_{k-\nu} v^{k-2-\nu} \sum_{\lambda=1}^{k-1-\nu} \binom{\lambda}{1}\Bigr) \end{aligned}$$

ist. Hierin vergrößern wir höchstens den Wert der Klammer, indem wir alle Potenzen von r durch r^{k-1} ersetzen. Dann kann aber in jeder $\sum\limits_{\nu}$

das Glied mit $\nu = 0$ fortgelassen werden, da es ein Vielfaches von $r^{k-1} a_k$ ist, und wir haben

$$\delta_s \leqq \left(s,\ r^{k-1} a_k,\ r^{k-1} a_{k-1},\ r^{k-1} \sum_{\nu=1}^{2},\ r^{k-1} \sum_{\nu=1}^{3},\ \ldots,\ r^{k-1} \sum_{\nu=1}^{k-2}\right)$$

Hier kann in jeder $\sum_{\nu}$ das Glied mit $\nu = 1$ fortgelassen werden, da es ein Vielfaches von $r^{k-1} a_{k-1}$ ist. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt schließlich zu

$$\delta_s \leqq (s,\ r^{k-1} a_k,\ r^{k-1} a_{k-1},\ \ldots,\ r^{k-1} a_2).$$

Wegen (39) ist dieses

$$\delta_s \leqq (s,\ \delta r^{k-1}) \leqq \operatorname{Min}\{s;\ \delta r^{k-1}\}.$$

Daher ist nach (38) und (40)

$$\begin{aligned} L_k &\leqq T^{k-2}(q) \sum_{s \mid q} \operatorname{Min}\{s;\ \delta^{1/(k-1)}\, r\, s^{(k-2)/(k-1)}\} \\ &= T^{k-2}(q) \sum_{s \mid q} \operatorname{Min}\{s;\ u\}, \end{aligned}$$

wobei wegen $q = rs$ stets u durch $u s^{1/(k-1)} = q \delta^{1/(k-1)}$ bestimmt ist. Da unter dieser Bedingung $\operatorname{Min}\{s; u\}$ am größten für $u = s$ wird, also stets $\leqq \delta^{1/k} q^{1-1/k}$ ist, ergibt sich

$$L_k \leqq T^{k-2}(q) \sum_{s \mid q} \delta^{1/k} q^{1-1/k} = T^{k-1}(q)\, \delta^{1/k} q^{1-1/k};$$

w. z. b. w.

§ 5.

Bedeutung der Abschätzung (6) für das Waringsche Problem.

Es sei t der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $P(u) - a_0$ für $u = 1, 2, \ldots$. Herr Landau [8]) hat kürzlich mit der Hardy-Littlewoodschen Methode folgenden Satz bewiesen, der die früher von mir [9]) nach der Hilbertschen Methode gegebene Lösung des allgemeinen Waringschen Problems enthält:

Es gibt ein $s = s(k, a_k)$, so daß für jede durch t teilbare natürliche Zahl $n \geqq n_1(P)$ die diophantische Gleichung

$$n = \sum_{\nu=1}^{s} P(u_\nu), \qquad P(u_\nu) > 0$$

lösbar ist.

---

[8]) *Zum Waringschen Problem,* Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 219—247; Satz V.

[9]) *Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes,* Math. Ann. **83** (1921) S. 85—112; Göttinger Inaug.-Diss.

Auf Herrn Landaus Mitteilung hiervon konnte ich mit der Hilbertschen Methode zeigen[10], daß in vorstehendem Satz bei[11] $a_0 = 0$ *sogar s unabhängig von a_k* gewählt werden kann. Dieses Ergebnis läßt sich auf Grund des § 1 nunmehr auch nach der Hardy-Littlewoodschen Methode gewinnen. Offenbar kann dabei unbeschadet der Allgemeinheit $(a_k, \ldots, a_1) = 1$ angenommen werden. Ferner kann angenommen werden, daß alle Koeffizienten von $P(u)$ positiv sind[12], so daß die bei Herrn Landau vorkommende Voraussetzung, daß $P(u)$ für $u \geqq 0$ beständig wächst und $\geqq 0$ ist, erfüllt ist. Eine Durchsicht des Beweises von Herrn Landau zeigt, daß es nur darauf ankommt, anstatt des dortigen Hilfssatzes 7 den folgenden, nur wenig abweichenden zu beweisen:

Es seien $a_k, \ldots, a_1$ sämtlich > 0, $a_0 = 0$, $(a_k, \ldots, a_1) = 1$, $K = 2^{k-1}$ und für jede primitive q-te Einheitswurzel ϱ

$$S_\varrho = \sum_{u=1}^{q} \varrho^{P(u)}.$$

1. *Dann ist die Reihe*[13]

$$\mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\varrho} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n},$$

wo die innere Summe bei jedem q über alle primitiven q-ten Einheitswurzeln zu erstrecken ist, für $s > 2K$ und jede natürliche Zahl n absolut konvergent.

2. *Ferner gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $s^* = s^*(k, \delta) > 2K$, so daß für $s \geqq s^*$, für alle durch t teilbaren natürlichen Zahlen n und für*

$$M = \sum_{q \mid t} \varphi(q)$$

die Ungleichung besteht:

$$M - \delta < \mathfrak{S} < M + \delta.$$

Beweis. 1. Nach (6) ist, da $\varrho = e_q(p)$ mit $(p, q) = 1$ ist,

$$(41) \qquad \sum_{\varrho} \left| \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| = \sum_{\substack{0 \leqq p < q \\ (p,q)=1}} \left| \frac{1}{q} \sum_{u=1}^{q} e_q(pP(u)) \right|^s < q B^s q^{-s/K + s\varepsilon},$$

wo $B = B(k, \varepsilon)$ nicht von P abhängt. Hieraus folgt aber für jedes $s > 2K$ bei passend gewähltem ε die Behauptung 1.

---

[10]) *Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem*, Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 188–194.

[11]) Diese Bedingung ist *notwendig*; vgl. die in Fußnote [10]) zitierte Arbeit, Anm. 3.

[12]) Vgl. die in Fußnote [10]) zitierte Arbeit; Beweis des Satzes, Vorbemerkung c.

[13]) Die bei Herrn Landau stehende $\sum\limits_{\varrho}$ hat die gleiche Bedeutung wie hier $\sum\limits_{q}\sum\limits_{\varrho}$. Es handelt sich also auch hier um absolute Konvergenz in gleichem Sinne wie dort.

2. Es werde $\varepsilon = \frac{1}{4K}$ gewählt. Dann hängt B höchstens von k ab. Es werde

(42) $$\nu = \nu(k) = [B^{4K}] + 1$$

gesetzt. Dann ist für $s > 4K$

(43) $$\mathfrak{S} = \sum_{q=\nu+1}^{\infty} + \sum_{\substack{1 \leqq q \leqq \nu \\ q \mid t}} + \sum_{\substack{1 \leqq q \leqq \nu \\ q \nmid t}} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 .$$

In Σ_1 ist wegen (42)

(44) $$B < \nu^{1/4K} < q^{\frac{1}{4K}},$$

also wegen (41)

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqq \sum_{q=\nu+1}^{\infty} \sum_{\varrho} \left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^s < \sum_{q=\nu+1}^{\infty} q^{1-s/2K},$$

also für $s = \sigma_1(k, \delta) > 2K$

(45) $$\left|\sum\nolimits_1\right| < \frac{\delta}{2} .$$

Σ_2 enthält, da wegen (41) und (44) für $q > \nu$

$$\left|\frac{S_\varrho}{q}\right| < q^{-\frac{1}{2K}} < 1$$

ist, also in Σ_1 kein $q \mid t$ enthalten ist, *alle* $q \mid t$, und es ist offenbar für $t \mid n$

(46) $$\Sigma_2 = \sum_{q \mid t} \varphi(q) = M .$$

In Σ_3 ist jedes S_ϱ eine Summe von nicht sämtlich gleichen Einheitswurzeln, da diese sonst sämtlich gleich $\varrho^{P(q)} = 1$ wären, also $q \mid t$ wäre. Daher, und weil $q \leqq \nu(k)$ in Σ_2 ist, gibt es ein $D(k) < 1$, so daß

$$\left|\frac{S_\varrho}{q}\right| < D < 1$$

ist. Mithin ist für $s \geqq \sigma_2(k, \delta)$

(47) $$\left|\sum\nolimits_3\right| \leqq \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{\varrho} D^s < \frac{\delta}{2} .$$

Da $\mathfrak{S}$ reell ist, ist aber mit (43), (45), (46) und (47) die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 27. September 1922).