Bemerkungen zu einem Satze von S. Bernstein aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

Von

Eberhard Hopf in Berlin-Dahlem.

Man verdankt Herrn Serge Bernstein den folgenden bemerkenswert allgemeinen

Satz[1]). *Es sei*

$$L(u) \equiv A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

eine für alle x, y elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung; A, B, C seien endliche Funktionen von x, y, und die Form $A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2$ sei stets etwa positiv definit. Dann ist jede in der ganzen x-y-Ebene beschränkte zweimal stetig differentiierbare Lösung $u(x, y)$ von $L(u) = 0$ eine Konstante.

Speziell für $L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ enthält dieser Satz das bekannte Theorem von Liouville. Man kann versuchen, den Bernsteinschen Satz nach verschiedenen Richtungen in plausibler Weise zu verallgemeinern. Doch zeige ich im folgenden durch Gegenbeispiele,

1. daß im Bernsteinschen Satze der Passus „beschränkte Lösung" nicht durch den Passus „überall positive Lösung" ersetzt werden darf, mit anderen Worten, daß die entsprechende Verallgemeinerung des Theorems von Harnack über in der ganzen Ebene positive harmonische Funktionen nicht richtig ist;

2. daß im Bernsteinschen Satze die Voraussetzung $L(u) = 0$ nicht durch die schwächere Voraussetzung $L(u) \geqq 0$ ersetzt werden kann[2]);

---

[1]) Vgl. S. Bernstein, Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 551—558.

[2]) Im Spezialfalle $L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist dies noch richtig. Man zeigt nämlich leicht, daß eine in der ganzen Ebene beschränkte subharmonische Funktion eine Konstante sein muß.

3. daß der Bernsteinsche Satz für mehr als zwei unabhängige Variable nicht mehr gilt[3]).

Zum Punkte 1. Wählen wir speziell in $L(u)$

$$A(x, y) = 1 + e^y, \quad B(x, y) = 1, \quad C(x, y) = e^{-y},$$

so ist $L(u) = 0$ elliptisch, da für $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ stets

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = \lambda^2 + \left(\lambda e^{\frac{y}{2}} + \mu e^{-\frac{y}{2}}\right)^2 > 0$$

ist.

$$u(x, y) = e^{x - e^y}$$

ist eine überall positive Lösung, da

$$L(u) = u\{A - 2Be^y + C(e^{2y} - e^y)\} = 0$$

ist.

Zum Punkte 2. Unter Beibehaltung der eben gewählten Bezeichnungen setzen wir

$$\bar{u}(x, y) = e^{-u(x, y)}.$$

Dann ist stets $0 < \bar{u} < 1$ und

$$L(\bar{u}) = \bar{u} \cdot \left\{A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} > 0,$$

da $\frac{\partial u}{\partial x} = u$ niemals Null ist.

Zum Punkte 3. Wir haben also

$$L(\bar{u}) = \bar{u} \cdot p(x, y), \qquad p(x, y) > 0.$$

Der Differentialausdruck in drei unabhängigen Variablen x, y, z

$$\Lambda(v) = A(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + p(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ist für alle Werte von x, y, z elliptisch, da für $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$ stets

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 + p\nu^2 > 0$$

ausfällt. Setzt man

$$v(x, y, z) = \bar{u}(x, y) \cdot \sin z,$$

so ist offenbar für alle x, y, z

$$\Lambda(v) = 0, \qquad |v| < 1.$$

---

[3]) Jedoch gilt bekanntlich der Satz von Liouville in beliebig viel Dimensionen.

(Eingegangen am 7. Juli 1928.)