Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

E. Zermelo in Freiburg i. B.

Schachturniere werden neuerdings immer in der Weise ausgeführt, daß jeder Teilnehmer mit jedem anderen eine bestimmte Anzahl k von Partien (gewöhnlich zwei mit wechselndem Anzuge) zu spielen hat und dann die Reihenfolge der Sieger nach der Anzahl ihrer Gewinnpartien bestimmt wird, wobei eine unentschiedene („Remis“-) Partie jedem der beiden Partner immer als halbe Gewinnpartie angerechnet wird. Dieses Berechnungsverfahren, das alle gespielten Partien unabhängig von der Reihenfolge gleichmäßig berücksichtigt und dadurch dem Zufall möglichst wenig Einfluß gestattet, hat sich in der Praxis anscheinend auch durchaus bewährt, soweit eben nur die *Reihenfolge* in Betracht kommt, versagt aber völlig bei *abgebrochenen* Turnieren (in welchen die Anzahl der gespielten Partien nicht bei jedem Teilnehmer die gleiche ist) und liefert auch bei durchgeführten keine befriedigende *quantitative* Bestimmung der *relativen Spielstärken*, da es ganz augenscheinlich der Mittelmäßigkeit zu gute käme. So würde etwa bei $k = 1$ ein Meister gegen n Stümper doch nur n Partien gewinnen, diese alle zusammen aber $\frac{n(n-1)}{2}$, jeder von ihnen also durchschnittlich $\frac{n-1}{2}$, und der Quotient der berechneten Werte $n : \frac{n-1}{2} = \frac{2n}{n-1}$ würde sich mit wachsendem n der 2 nähern, der Sieger also nur etwa doppelt so hoch bewertet werden wie jeder andere. Zur Behebung dieses Übelstandes und zur quantitativen Verfeinerung des üblichen Verfahrens sind in der Schachliteratur verschiedene Vorschläge gemacht und diskutiert worden, u. a. von E. Landau[1]), die aber, so inter-

---

[1]) E. Landau, Über Preisverteilung bei Spielturnieren. Ztschr. f. Math. u. Phys. 63 (1914), S. 192.

essant sie auch in mathematischer Beziehung waren, gelegentlich zu paradoxen Ergebnissen führten und bisher keine befriedigende Lösung des Problems ergaben. Im folgenden soll nun ein neues Verfahren der Turnier-Berechnung entwickelt werden, das von den bisherigen Bedenken frei zu sein scheint und namentlich auch bei „abgebrochenen" und „kombinierten" Turnieren zu einem mathematisch bestimmten und allen vernünftigen Anforderungen entsprechenden Ergebnisse führt.

Unser Verfahren kommt darauf hinaus, daß die relativen Spielstärken als Wahrscheinlichkeiten aufgefaßt und so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des beobachteten Turnier-Ergebnisses eine möglichst große wird.

§ 1.

Ansatz und Reduktion des Problems.

Jedem der n an einem Turnier teilnehmenden Spieler A_r denken wir uns eine positive Zahl u_r als „Spielstärke" zugeordnet und nehmen an, daß diese Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sich wie ihre relativen Gewinnchancen verhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer bestimmten Partie A_r gegen A_s gewinnt, wird also gegeben durch den Bruch:

$$u_{rs} = \frac{u_r}{u_r + u_s}. \tag{1}$$

Ist dann k_{rs} die Anzahl der zwischen A_r und A_s gespielten Partien, von denen wir hier[2]) annehmen wollen, daß sie alle zur Entscheidung kommen, g_{rs} die dabei von A_r und $g_{sr} = k_{rs} - g_{rs}$ die von A_s gewonnenen, so wird, wenn wir die verschiedenen Partien als „unabhängige" Ereignisse betrachten, die kombinierte Wahrscheinlichkeit des auf A_r und A_s bezüglichen Teilergebnisses, daß nämlich A_r gerade g_{rs} und A_s entsprechend g_{sr} Partien gegen den andern gewinnt, bis auf einen von u_r, u_s unabhängigen Zahlenfaktor $\sigma_{rs} = \binom{k_{rs}}{g_{rs}}$, auf den mich Herr Prof. Ostrowski freundlichst aufmerksam machte,

$$w_{rs} = u_{rs}^{g_{rs}} u_{sr}^{g_{sr}} = \frac{u_r^{g_{rs}} u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}}, \tag{2}$$

---

[2]) Bei allen praktischen Anwendungen berücksichtigen wir die etwa vorkommenden unentschiedenen („Remis"-) Partien durch die Fiktion, daß doppelt so viel Partien gespielt seien, indem wir jedem Spieler jede tatsächlich gewonnene Partie als *doppelten* und jede unentschiedene als *einfachen* Gewinn anrechnen. Dies entspricht genau der im Eingang erwähnten herkömmlichen Zählung der Remis-Partien als halbe Gewinnpartien.

und somit die Wahrscheinlichkeit des durch die Matrix g_{rs} bestimmten Gesamtresultates das Produkt aller dieser Wahrscheinlichkeiten

$$w = \prod_{r,s}{}' w_{rs} = \frac{u_1^{g_1} u_2^{g_2} \ldots u_n^{g_n}}{\prod\limits_{r,s}{}' (u_r + u_s)^{k_{rs}}} = \Phi(u_1, \ldots, u_n), \tag{3}$$

wo

$$g_r = \sum_s^{s \neq r} g_{rs} \tag{4}$$

immer die Gesamtzahl der von A_r gewonnenen Partien bezeichnet und das Produkt $\prod'$ über alle Kombinationen r, s mit $r \neq s$ zu erstrecken ist.

Die (nicht negativen) Zahlen $u_1, \ldots, u_n$ sollen nun so bestimmt werden, daß $\Phi(u_1, \ldots, u_n)$ möglichst groß und damit das beobachtete, durch die Zahlen $g_1, \ldots, g_n$ bestimmte Turnier-Ergebnis möglichst wahrscheinlich wird[3]).

Da Φ in bezug auf die Variablen u_r homogen von der nullten Dimension ist, also nur von ihren Verhältnissen abhängt, so können wir o. B. d. A. annehmen, daß

$$\sum_{r=1}^{n} u_r \leqq 1 \tag{5a}$$

ist, während gleichzeitig für alle r

$$u_r \geqq 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{5b}$$

vorausgesetzt wird.

Der durch (5a) und (5b) bestimmte Bereich $\mathfrak{B}$ der u_r ist endlich und abgeschlossen; in ihm ist die durch (3) als Wahrscheinlichkeit definierte Funktion Φ überall $\leqq 1$, besitzt also eine endliche obere Grenze $\overline{w} \leqq 1$; dabei muß

$$\overline{w} \geqq \Phi(1, \ldots, 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^N > 0 \tag{6}$$

sein, wo

$$N = \sum_{r=1}^{n} g_r = \sum_{r,s}^{r \neq s} k_{rs} \tag{7}$$

die Anzahl aller überhaupt gespielten Partien ist. Nach Weierstraß gibt es in $\mathfrak{B}$ mindestens einen Punkt $\overline{\mathfrak{q}}$ mit den Koordinaten $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n$, in dessen Umgebung der Wert $\overline{w}$ von Φ approximiert wird.

Wir müssen jetzt die beiden Fälle unterscheiden, daß $\overline{\mathfrak{q}}$ im Innern oder auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ liegt.

---

3) Dieser Ansatz ist einem insbesondere in der Gastheorie häufig angewendeten Verfahren analog.

Fall 1. $\bar{\mathfrak{q}}$ liege im Innern von $\mathfrak{B}$, d. h.

$$\sum_{r=1}^{n} \bar{u}_r < 1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_r > 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist Φ *stetig* an der Stelle $\bar{\mathfrak{q}}$ und es wird

$$\Phi(\bar{\mathfrak{q}}) = \bar{w}$$

das *Maximum* von Φ in $\mathfrak{B}$. Da Φ dann in $\bar{\mathfrak{q}}$ zugleich auch nach allen Variablen differentiierbar und von Null verschieden ist, so müssen auch die partiellen logarithmischen Ableitungen sämtlich in $\bar{\mathfrak{q}}$ verschwinden, d. h.

$$\frac{g_r}{\bar{u}_r} - \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} = 0$$

oder

$$\sum_t{}' k_{rt} \frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} = g_r \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

wobei die Summe $\sum'$ über alle $t \neq r$ zu nehmen ist. Wir erhalten also ein System von n homogenen algebraischen Gleichungen zur Bestimmung von $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ oder vielmehr ihrer Verhältnisse $\bar{u}_r : \bar{u}_s$.

Durch Addition der n Gleichungen (8) erhält man wegen

$$\frac{\bar{u}_r}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} + \frac{\bar{u}_t}{\bar{u}_r + \bar{u}_t} = 1$$

die Identität (7) als Ausdruck der zwischen den Gleichungen des Systems bestehenden Abhängigkeit.

Da $k_{rt}\frac{u_r}{u_r + u_t}$ die „wahrscheinliche Anzahl" der von A_r gegen A_t gewonnenen Partien darstellt, so bedeutet das Gleichungssystem (8), daß bei der unserm Ansatze entsprechenden Bewertung der Spieler *die wahrscheinliche Anzahl der von einem Spieler gegen alle übrigen Spieler zu gewinnenden Partien gleich der Anzahl der von ihm wirklich gewonnenen ist.*

Fall 2. $\bar{\mathfrak{q}}$ liege auf dem *Rande* von $\mathfrak{B}$ derart, daß alle

$$\bar{u}_r > 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

aber

$$\sum_r \bar{u}_r = 1$$

ist. Da nun aber die Funktion Φ in $u_1, \ldots, u_n$ homogen von 0-ter Dimension ist

$$\Phi(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) = \Phi(u_1, \ldots, u_n), \tag{9}$$

so wird der Grenzwert $\bar{w}$ dann für $0 < \lambda < 1$ auch im *Innern* von $\mathfrak{B}$ approximiert und damit der Fall 2 auf den Fall 1 zurückgeführt.

Fall 3. Der Punkt $\bar{q}$ liege auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ derart, daß

$$(10) \qquad \Pi \bar{u}_r = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n = 0$$

wird, d. h. daß mindestens ein $\bar{u}_r = 0$ wird.

Ist z. B. $\bar{u}_1 = 0$, während alle übrigen $\bar{u}_r > 0$ sind, so ist der Nenner der Funktion Φ an der Stelle $\bar{q}$ von Null verschieden. Also muß auch $g_1 = 0$ sein, da nach (3) sonst Φ eine Potenz $u_1^{g_1}$ von u_1 als Faktor enthielte und daher w an der Stelle $\bar{q}$ anstatt des Wertes $\bar{w} > 0$ die Null approximieren würde. Ist umgekehrt $g_1 = 0$, so erscheint u_1 in (3) nur im Nenner, und zwar in allen Faktoren $u_1 + u_s$ als positiver Summand, der den Quotienten verkleinert, muß sich also bei der Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ seiner eigenen unteren Schranke 0 nähern, d. h. $\bar{u}_1 = 0$. Nach unserem Ansatz wird also ein einzelner Spieler mit der Spielstärke 0 bewertet dann und nur dann, wenn er als einziger im Turnier alle seine Partien verliert [4]).

Seien jetzt allgemein [5]) bei geeignet gewählter Reihenfolge

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \ldots = \bar{u}_p = 0; \qquad \bar{u}_{p+1}, \bar{u}_{p+2}, \ldots, \bar{u}_n > 0.$$

Dann folgt wie im Spezialfall, daß Φ in (3) keinen Faktor der Form $u_{rs} = \frac{u_r}{u_r + u_s}$ für $r \leqq p < s$ enthalten darf, weil sich sonst dieser und mit ihm Φ bei der Approximation an die Grenzstelle $\bar{q}$ der Null nähern müßte, was wegen (6) $\bar{w} > 0$ unmöglich ist. In diesem Falle müssen also alle $g_{rs} = 0$ sein für $r \leqq p < s$, d. h. wir haben eine *Einteilung aller Spieler in zwei Klassen derart, daß jeder Spieler A_r der ersten Klasse gegen keinen Spieler A_s der zweiten Klasse in dem Turnier eine Partie gewinnt* (sondern alle etwa gespielten Partien verliert).

Hat umgekehrt das Ergebnis des Turniers zu einer solchen Klassenbildung $\{A_r, A_s\}$ mit $g_{rs} = 0$ geführt, *so müssen bei der Approximation von $\bar{w}$ durch Φ alle u_r, die den Spielern A_r der Unterklasse zugeordnet sind und für wenigstens ein $s > p$ die Bedingung $k_{rs} > 0$ erfüllen* (d. h. sofern die A_r überhaupt gegen die A_s gespielt haben), *sich der Null nähern:* $\bar{u}_r = 0$.

Um dies zu beweisen, zerlegen wir die durch (3) definierte Funktion Φ in drei Faktoren

$$(11) \qquad \Phi(u) = \Phi_1(u_r)\, \Phi_2(u_s)\, \Phi_{1,2}(u_r, u_s),$$

[4]) Dieses Ergebnis ist nur scheinbar paradox, da kein Spieler bei noch so geringer Spielstärke schlechter abschneiden könnte. Vgl. E. Landau a. a. O. S. 201.

[5]) Der Fall, daß alle $\bar{u}_r = 0$ sind, können wir wegen der Homogenität (9) von Φ ausschließen.

wo

$$\Phi_1(u_r) = \prod_{1 \leqq r, r' \leqq p}^{r \neq r'} \frac{u_r^{g_{rr'}} u_{r'}^{g_{r'r}}}{(u_r + u_{r'})^{k_{rr'}}}, \qquad \Phi_2(u_s) = \prod_{p+1 \leqq s, s' \leqq n}^{s \neq s'} \frac{u_s^{g_{ss'}} u_{s'}^{g_{s's}}}{(u_s + u_{s'})^{k_{ss'}}},$$

$$\Phi_{1,2}(u_r, u_s) = \prod_{r=1}^{p} \prod_{s=p+1}^{n} \left(\frac{u_s}{u_r + u_s}\right)^{k_{rs}},$$

da nach der gemachten Annahme wegen $g_{rs} = 0$ Faktoren u_{rs} gar nicht auftreten.

Ersetzen wir jetzt alle u_r mit $r \leqq p$ durch λu_r, wo $0 < \lambda < 1$ ist, so bleiben wegen der Homogenität Φ_1 und Φ_2 ungeändert, während $\Phi_{1,2}$ übergeht in

$$\Phi_{1,2}^{(\lambda)} = \prod_{r=1}^{p} \prod_{s=p+1}^{n} \left(\frac{u_s}{\lambda u_r + u_s}\right)^{k_{rs}} = \Phi_{1,2}(\lambda u_r; u_s). \tag{12}$$

Angenommen, an einer Approximationsstelle $\bar{\mathfrak{q}}$ von $\bar{w}$ sei eine der Größen $\bar{u}_r > 0$ $(r \leqq p)$ mit $k_{rs} > 0$, dann wäre wegen $\lambda > 0$

$$\frac{\Phi_{1,2}^{(\lambda)}}{\Phi_{1,2}} \geqq \left(\frac{u_r + u_s}{\lambda u_r + u_s}\right)^{k_{rs}},$$

wo der Quotient rechts bei der Annäherung an $\bar{\mathfrak{q}}$ sich wegen $\bar{u}_r > 0$, $\lambda < 1$, und $k_{rs} > 0$ dem Werte:

$$\left(\frac{\bar{u}_r + \bar{u}_s}{\lambda \bar{u}_r + \bar{u}_s}\right)^{k_{rs}} > 1$$

nähert; es wäre also in $\bar{\mathfrak{q}}$

$$\Phi_{1,2}^{(\lambda)} > \Phi_{1,2},$$

und demnach

$$\lim \Phi(\lambda u_1, \ldots, \lambda u_p;\ u_{p+1}, \ldots, u_n) > \lim \Phi(u_1, \ldots, u_n) = \bar{w} \tag{13}$$

im Widerspruch mit der Definition von $\bar{w}$.

Es folgt also, daß für $r \leqq p$ alle $\bar{u}_r = 0$ sein müssen, für die mindestens ein $k_{rs} > 0$ ist.

Bei der Approximation von $\bar{\mathfrak{q}}$ durch $\mathfrak{q}$ strebt dann $\Phi_{1,2}$ gegen 1, da hier nur solche u_r mit $k_{rs} > 0$, für die $\bar{u}_r = 0$ wird, wirklich auftreten. Demnach wird $\bar{w}$ von Φ dann und nur dann approximiert, wenn $\Phi_1(u_r)$ und $\Phi_2(u_s)$ *unabhängig voneinander möglichst groß* werden.

Um also die verhältnismäßigen Spielstärken der Spieler einer Klasse untereinander zu ermitteln, genügt es, unseren Ansatz auf das Teilturnier anzuwenden, welches aus dem Gesamtturnier durch Beschränkung auf die Spieler dieser einen Klasse entsteht.

Damit wird unser Problem auf solche mit kleinerer Spielerzahl zurückgeführt, die wieder entsprechenden Reduktionen unterliegen, bis man schließlich zu „irreduziblen" Problemen gelangt, für die dann alle $\bar{u}_r > 0$ sind und daher die durch Gleichung (8) ausgedrückte Lösung des Falles 1 Gültigkeit hat.

Wir zeigen zunächst, daß die Zerlegung des „Gesamtturniers“ T in „irreduzible“ Teilturniere oder *„Primturniere“* $C_1, C_2, C_3, \ldots$ *eindeutig* ist. Die einem solchen „Primturnier“ angehörende Spielergruppe C ist nämlich charakterisiert durch die Eigenschaft, daß alle übrigen zu T gehörenden Spieler in zwei Gruppen P und Q zerfallen,

$$T = P + C + Q, \tag{14}$$

wobei *kein* Spieler von P gegen einen von C oder Q und *kein* Spieler von C gegen einen von Q eine Partie gewinnt, während *innerhalb* C *keine* Einteilung in zwei Klassen C', C'' von der angegebenen Beschaffenheit möglich ist. Ist nun

$$T = T' + T''$$

irgendeine Klasseneinteilung des Gesamtturniers, bei der kein Spieler von T' gegen einen von T'' gewinnt, so zerfallen dabei auch P und Q in je zwei Klassen

$$P = P' + P'', \qquad Q = Q' + Q'',$$

wo P' nnd Q' zu T', P'' und Q'' zu T'' gehören, während C *ganz* zu T' oder ganz zu T'' gehört, da sonst

$$C = C' + C''$$

zerlegbar wäre gegen die Annahme. Wird also bei fortgesetzter Zerlegung des Turniers immer derjenige Bestandteil weiter zerlegt, der mit C auch nur ein Element gemein hat, so muß der schließlich übrigbleibende unzerlegbare Rest C^* das ganze C enthalten, und ebenso umgekehrt C wieder C^*, d. h. $C = C^*$, und die Zerlegung (in Primturniere) ist somit *eindeutig*.

Ist C_1 irgendein von C verschiedenes Primturnier, so liegt es entweder *ganz* in P oder *ganz* in Q, da es sonst zerlegbar wäre, oder *beliebig* in einem von beiden, sofern nämlich C und C_1 gar nicht miteinander gespielt haben.

§ 2.

Die eindeutige Lösung des irreduziblen Problems.

Wir beschränken uns zunächst auf den „irreduziblen“ Fall, setzen also voraus, daß eine Einteilung aller Spieler in zwei Klassen *unmöglich* ist, bei der kein Spieler A_r der Unterklasse gegen einen A_s der Oberklasse auch nur eine Partie gewinnt, bei der also für jede solche Kombination r, s immer $g_{rs} = 0$ wäre. Dann kann, wie aus den Betrachtungen des § 1 hervorgeht, bei *keiner* Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ irgendeiner der Quotienten $\frac{u_r}{u_s}$ sich der Null nähern (wobei einige, aber nicht alle $\bar{u}_r = 0$ würden), sondern es kann nur einer der Fälle 1 und 2 vorliegen, wo $\bar{w}$ als das *wahre Maximum* der Funktion Φ für ein System *positiver* Werte $u_t = \bar{u}_t > 0$ tatsächlich angenommen wird. Für solche Werte u_t gelten also auch die Gleichungen (8), die wir jetzt in der Form schreiben:

$$\sum_t{}' k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} = g_r \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{8a}$$

und die *Existenz* einer *positiven* Lösung $u_r = \bar{u}_r > 0$ ist für den „irreduziblen" Fall damit bewiesen.

Um aber auch die *Eindeutigkeit* dieser Lösung zu zeigen, bedienen wir uns einer leicht herleitbaren Hilfsformel. Durch Summation der Gleichungen (8a) über $r = 1, 2, \ldots, p$, wo $1 \leqq p \leqq n$ ist, erhalten wir nämlich unter Berücksichtigung der Identität

$$k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} + k_{tr} \frac{u_t}{u_t + u_r} = k_{rt} = k_{tr}$$

die Formel

$$\sum_{r=1}^{p} \sum_{t=p+1}^{n} k_{rt} \frac{u_r}{u_r + u_t} = \sum_{r=1}^{p} g_r - \sum_{1 \leqq r, t \leqq p}{}' k_{rt} = G_p - K_p = \gamma_p \geqq 0, \tag{15}$$

in der die rechte Seite den Überschuß γ_p der von den Spielern $A_1, A_2, \ldots, A_p$ überhaupt erzielten Gewinne über die Anzahl K_p der zwischen ihnen gespielten Partien, also die Anzahl der von ihnen gegen die *übrigen* Spieler A_s gewonnenen Partien ausdrückt, die im „irreduziblen" Falle, wo eine Klasseneinteilung mit $g_{rs} = 0$ ausgeschlossen ist, immer *positiv* ausfällt.

Angenommen nun, es seien u_t und u'_t zwei *wesentlich verschiedene* positive Lösungen des homogenen Gleichungssystems (8a), d. h. solche, die sich nicht nur durch einen gemeinsamen Multiplikator ϱ unterscheiden, so können wir sie beide gleichzeitig auf die Summe 1 normiert denken

$$\sum_{t=1}^{n} u_t = \sum_{t=1}^{n} u'_t = 1 \tag{16}$$

und die Reihenfolge der u_t so wählen, daß die ersten p dieser Größen *kleiner*, alle übrigen aber größer oder gleich den entsprechenden Werten u'_t ausfallen, also

$$u_r < u'_r \quad \text{und} \quad u_s \geqq u'_s \quad \text{für} \quad 1 \leqq r \leqq p < s \leqq n \tag{17}$$

wird. Dann folgt für jede solche Kombination r, s

$$\frac{u_r}{u_s} < \frac{u'_r}{u'_s} \tag{17a}$$

sowie

(17b) $$\frac{u_r}{u_r+u_s} < \frac{u_r'}{u_r'+u_s'}$$

und daher auch

(18) $$\sum_{r=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{n} k_{rs}\frac{u_r}{u_r+u_s} < \sum_{r=1}^{p}\sum_{s=p+1}^{n} k_{rs}\frac{u_r'}{u_r'+u_s'}$$

im Widerspruch mit (15), sofern auch nur *eine* der Zahlen $k_{rs} > 0$ ist, d. h. sofern die Spieler A_r mit den andern A_s überhaupt gespielt haben, was wegen $k_{rs} \geqq g_{rs} > 0$ im irreduziblen Falle immer zutrifft.

Durch die Gleichungen (8a) sind also im betrachteten Falle die *Verhältnisse* der (positiven) Größen u_t *eindeutig* bestimmt und *jede* positive Lösung des Gleichungssystems muß als die *einzige* Lösung des *irreduziblen* Problems auch das Maximum $\overline{w}$ der durch (3) definierten Funktion $\Phi(u)$ liefern.

Mit Hilfe der Formel (15) läßt sich aber noch eine wichtige Eigenschaft unseres Lösungssystems herleiten. Wir betrachten wieder zwei verschiedene positive Lösungen u_t und u_t' der Gleichungen (8a), die wir uns gleichfalls gemäß (16) normiert denken, die aber zu zwei *verschiedenen* Verteilungen der Gewinnzahlen g_t und g_t', d. h. zu verschiedenen Turnier-Ergebnissen gehören mögen. Auch hier denken wir uns wieder die Reihenfolge so gewählt, daß für $r \leqq p < s$ die Beziehungen (17), (17a) und (17b) gelten[6]. Dann erhalten wir, da nach unserer Annahme immer $k_{rt} = k_{rt}'$ die Anzahl der gespielten Partien beidemal die gleiche sein soll, wieder die Ungleichheit (18) und somit auch wegen (15)

(19) $$G_p = g_1 + g_2 + \ldots + g_p < g_1' + g_2' + \ldots + g_p' = G_p'.$$

Es muß also bei jedem Übergang von einem Turnier-Ergebnis g_{rt} zum andern g_{rt}' die Gesamtsumme aller Gewinne für diejenige Spielergruppe A_r wachsen, deren normierte Spielstärken u_r zunehmen. Angenommen nun, bei einem solchen Übergange sei g_q die *einzige* zunehmende $g_q < g_q'$, während sonst immer $g_t \geqq g_t'$ sein soll. Dann muß g_q notwendig in der Teilsumme G_p vorkommen, d. h. $q \leqq p$ und $u_q < u_q'$ sein und *die relative (normierte) Spielstärke eines Spielers A_r wird dadurch notwendig vergrößert, daß er bei sonst ungeänderten Ergebnissen eine einzelne Partie gewinnt, anstatt sie zu verlieren*[7].

---

[6]) Den Fall, wo alle $u_t = u_t'$ sind, können wir ausschließen, weil wegen (8a) sonst auch alle $g_t = g_t'$ wären, gegen die Annahme.

[7]) Die Wichtigkeit dieser an eine brauchbare Bewertungsmethode zu stellenden Forderung betont E. Landau a. a. O. § 3, wo er auch zeigt, daß sie in den von ihm behandelten bisherigen Lösungsversuchen des Problems nicht durchweg erfüllt ist.

§ 3.

Die Lösung des allgemeinen Problems.

Nachdem für den „irreduziblen" Fall die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung erwiesen ist, handelt es sich nun um die Frage, was sich daraus für den allgemeinen Fall ergibt. In § 1 haben wir gesehen, wie das Gesamtturnier T *eindeutig* in irreduzible Teilturniere $C_1, C_2, \ldots$ zerlegt werden kann. Für die Spieler jedes solchen „Primturniers" C sind also nach § 2 die gesuchten „Spielstärken" als Verhältnisse positiver Zahlen bestimmt. Es seien C_1, C_2 zwei verschiedene irreduzible Teilturniere derart, daß kein Spieler von C_1 gegen einen von C_2 gewonnen, aber wenigstens einer A_r von C_1 mit einem A_s von C_2 gespielt (und also verloren) hat. Dann muß, wie wir § 1 gezeigt haben, die Spielstärke von A_r im Verhältnis zu der von A_s verschwinden, und das gleiche muß auch für *alle* Spieler von C_1 gegenüber *allen* von C_2 gelten, da die Quotienten der Spielstärken in jedem irreduziblen Teilturnier endlich und von 0 verschieden sind. Wir schreiben dann $C_1 < C_2$.

Ist nun

$$T = P + C_1 + Q \tag{20}$$

die für das Primturnier C_1 charakteristische Zerlegung des Gesamtturniers von der Form (14), und ist $C_1 < C_2$, wobei Spieler von C_1 mit solchen von C_2 wirklich gespielt (und verloren) haben, so muß C_2 in Q enthalten sein, da keiner von P gegen einen von C_1 gewonnen hat. Ist $C_2 < C_3$ im Sinne unserer Definition, so kann C_3 nicht in P enthalten sein, weil *kein* Spieler von P gegen einen von $Q = C_2 + Q'$ gewonnen hat und doch C_3 gegen C_2 gewonnen haben soll. Vielmehr liegt C_3 ganz in Q', also in Q, und kein Spieler von C_1 kann gegen einen von C_3 gewonnen haben. Bildet man weiter von C_1 ausgehend eine Kette von Primturnieren $C_1, C_2, \ldots, C_t$, für die sukzessive

$$C_1 < C_2, \; C_2 < C_3, \; \ldots, \; C_{t-1} < C_t$$

sein möge, derart, daß jedes gegen das nachfolgende gespielt und verloren hat, so ergibt sich durch vollständige Induktion, daß *alle* auf C_1 folgenden in Q enthalten sind, also kein Spieler von C_1 gegen einen von C_t gewonnen haben und mithin sicher *nicht* $C_t < C_1$ sein kann. Da also zyklische Ketten dieser Art ausgeschlossen sind, so kann man festsetzen, daß jedesmal, wo $C_i < C_k$ und $C_k < C_l$ ist, auch $C_i < C_l$ sein soll, ohne daß bei dieser erweiterten Definition jemals *gleichzeitig* $C_i < C_k$ und $C_k < C_i$ werden könnte. Durch diese Festsetzung wird also die Menge der „primitiven Teilturniere" oder „Primturniere" C_i im Sinne von

Hausdorff[8]) „teilweise geordnet", und jedesmal, wo $C_i < C_k$ ist, muß bei der Approximation der oberen Grenze $\bar{w}$ jeder Quotient u_r/u_s, wo der Spieler A_r zu C_i und A_s zu C_k gehört, nach Null konvergieren, d. h. alle Spieler von C_i sind unendlich gering zu bewerten gegen alle von C_k. „Vergleichbar" in dem Sinne, daß entweder $C_i < C_k$ oder $C_k < C_i$ ausfällt, sind also zwei primitive Teilturniere C_i und C_k einmal dann, wenn zwischen ihnen überhaupt Spiele stattgefunden haben, weiter aber auch in dem Falle, wo zwischen ihnen eine lückenlose Kette von primitiven Teilturnieren $C_1, C_2, \ldots$ eingeschaltet werden kann, in welcher je zwei aufeinanderfolgende miteinander gespielt und jedes gegen das vorangehende gewonnen haben:

$$C_1 < C_2 < C_3 < \ldots < C_t.$$

Als *„unvergleichbar"* gelten dagegen nur solche Paare von primitiven Teilturnieren, für die eine solche Kette nicht existiert. So wären z. B. im Falle dreier Primturniere C_1, C_2, C_3 die beiden ersten miteinander unvergleichbar, wenn sie beide gegen C_3 gespielt und gewonnen oder *beide* gegen C_3 verloren, aber unter sich gar nicht gespielt haben sollten. Von dem so charakterisierten Falle der „Unvergleichbarkeit" abgesehen, der durch die Natur der Sache gegeben ist, liefert uns aber unser Wahrscheinlichkeitsansatz stets eine eindeutig bestimmte Lösung.

Wir beweisen nämlich folgenden

Satz. *Im allgemeinsten Falle eines in die irreduziblen Teilturniere $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ zerfallenden Turnieres T wird die obere Grenze $\bar{w}$ der Turnier-Wahrscheinlichkeit $\Phi(u)$ approximiert, indem man* 1. *die verhältnismäßigen Spielstärken $u_r : u_t$ der zu jedem Primturnier C_i gehörenden Spieler so wählt, daß die auf C_i bezogene Teilfunktion $\Phi_i(u)$, also die Wahrscheinlichkeit des auf C_i beschränkten Teilergebnisses, ihren Maximalwert $\bar{w}_i$ annimmt, und* 2. *für je zwei Primturniere C_i und C_j, welche der Bedingung $C_i < C_j$ genügen, alle Quotienten u_r/u_s der Spielstärken eines Spielers A_r aus C_i und eines Spielers A_s aus C_j nach Null abnehmen läßt.*

Zum Beweise benutzen wir die Tatsache, daß jeder Faktor des Produktes $\Phi(u)$ von der Form ist:

$$w_{rs} = \frac{u_r^{g_{rs}} u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}}, \tag{2}$$

wobei die entsprechenden Spieler A_r und A_s höchstens *zwei* verschiedenen Primturnieren C_i und C_j angehören können. Faßt man nun alle diejenigen Faktoren w_{rs} zu einem Teilprodukte $\Phi_i(u)$ zusammen, für welche beide

[8]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. VI, § 1.

Spieler *demselben* Primturniere C_i angehören, so erhält man genau die Wahrscheinlichkeit w_i für das auf C_i bezogene Teilergebnis, und diese besitzt dann, weil C_i irreduzibel ist, bei geeigneter Wahl der in Φ_i vorkommenden relativen Spielstärken $u_r : u_s$ ein wahres Maximum $\Phi_i(\bar{u}) = \bar{w}_i$.

Außerdem enthält aber $\Phi(u)$ noch solche Faktoren w_{rs}, für welche die Spieler A_r und A_s zwei *verschiedenen* Primturnieren C_i und C_j angehören. Faßt man also für jede Kombination i, j die entsprechenden Faktoren w_{rs} wieder zu einem Teilprodukte $\Phi_{ij}(u)$ zusammen, so ergibt sich für die Gesamtfunktion folgende Zerlegung:

$$\Phi(u) = \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u) \cdot \prod_{i,j}^{i \neq j} \Phi_{ij}(u). \tag{21}$$

Ist nun $u_t = \bar{u}_t$ irgendeine, etwa die auf die Summe $\Sigma_t \bar{u}_t = 1$ der vorkommenden Variablen normierte Lösung des auf das i-te Primturnier C_i reduzierten Maximumsproblems

$$\Phi_i(\bar{u}) = \bar{w}_i \geqq \Phi_i(u),$$

so entsteht die allgemeinste Lösung desselben Teilproblems durch Hinzufügung eines beliebigen positiven Faktors ϱ_i, da auch $\Phi_i(u)$ in bezug auf die vorkommenden u_t wieder homogen von 0-ter Dimension ist:

$$\Phi_i(\varrho_i \bar{u}) = \Phi_i(\bar{u}) = \bar{w}_i.$$

Für ein beliebiges System der ϱ_i wird also das über $i = 1, 2, \ldots, m$ gewonnene einfache Produkt in (21) durch den Ansatz $u_t = \varrho_i \bar{u}_t$ seinen Maximalwert $\bar{w}_1 \bar{w}_2 \ldots \bar{w}_n$ erreichen:

$$\prod_{i=1}^{m} \Phi_i(\varrho_i \bar{u}) = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \ldots \bar{w}_m = w^* \geqq \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u), \tag{22}$$

während das über i, j genommene Doppelprodukt in (21) durch Wahl der Multiplikatoren ϱ_i, wie wir zeigen wollen, seiner oberen Grenze 1 beliebig genähert werden kann. Ist nämlich $\Phi_{ij}(u)$ ein Faktor dieses Produktes, so sind nur folgende drei Fälle möglich:

1. Zwischen C_i und C_j ist überhaupt nicht gespielt worden, alle $k_{rs} = 0$, wenn A_r und A_s zu C_i bzw. C_j gehören, dann sind auch die entsprechenden g_{rs} und g_{sr} sämtlich $= 0$ und die Funktion $\Phi_{ij}(u)$ reduziert sich auf den konstanten Wert 1. Solche Faktoren Φ_{ij} können also ganz außer Betracht bleiben.

2. Mindestens ein Spieler A_r von C_i hat gegen einen A_s von C_j gespielt und *verloren*. Dann muß in der durch C_i gemäß (14) bestimmten Zerlegung

$$S = P_i + C_i + Q_i$$

C_j notwendig in Q_i enthalten sein, d. h. alle $g_{rs} = 0$, sofern A_r zu C_i und A_s zu C_j gehört, und $C_i < C_j$ in der im Anfang des § eingeführten Schreibweise. Dann erscheinen aber alle Variablen u_r, die zu C_i gehören, ausschließlich im *Nenner* von $\Phi_{ij}(u)$, und der Ausdruck

$$\Phi_{ij}(u) = \prod_{r,s} \frac{u_s^{g_{sr}}}{(u_r + u_s)^{k_{rs}}} = \prod_{r,s} \left(\frac{u_s}{u_r + u_s}\right)^{k_{rs}} \tag{23}$$

wird nach der Substitution $u_r = \varrho_i \bar{u}_r$, $u_s = \varrho_j \bar{u}_s$, wo r alle auf C_i und s alle auf C_j bezüglichen Indizes durchläuft,

$$\Phi_{ij}(u) = \prod_{r,s} \left(\frac{\lambda_j \bar{u}_s}{\lambda_i \bar{u}_r + \lambda_j \bar{u}_s}\right)^{k_{rs}} = \prod_{r,s} \left(\frac{\bar{u}_s}{\bar{u}_s + \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \bar{u}_r}\right)^{k_{rs}}, \tag{24}$$

sich seiner oberen Grenze 1 nähern, wenn der Quotient $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ der Grenze 0 zustrebt.

3. Mindestens ein Spieler A_r von C_i hat gegen einen A_s von C_j *gewonnen*, $g_{rs} > 0$. Dann gehört C_j notwendig zu P_i und alle $g_{sr} = 0$, sowie $C_j < C_i$. Hier gilt wieder das gleiche für C_j und C_i wie im Fall 2 für C_i und C_j, und die Funktion $\Phi_{ij}(u) = \Phi_{ij}(\lambda_i \bar{u}, \lambda_j \bar{u})$ nähert sich der Eins, wenn der Quotient $\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ der Null zustrebt.

Sind nun $\Phi_{ij}(u)$ und $\Phi_{jl}(u)$ zwei (nicht konstante) Faktoren von $\Phi(u)$, für welche gleichzeitig $C_i < C_j$ und $C_j < C_l$ ausfällt, so daß Spieler von C_i gegen solche von C_j, sowie Spieler von C_j gegen solche von C_l gespielt und verloren haben, so werden *beide* Funktionen Φ_{ij} und Φ_{jl} sich der Grenze 1 nähern, wenn gleichzeitig die beiden Quotienten

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_j},\ \frac{\varrho_j}{\varrho_l} \text{ und damit auch ihr Produkt } \frac{\varrho_i}{\varrho_l}$$

der Null zustrebt, und das Analoge gilt für jede Kette von Primturnieren, für welche der Reihe nach

$$C_i < C_j < C_l < \ldots < C_z$$

ist und von denen je zwei aufeinanderfolgende gegeneinander gespielt haben. Daraus ergibt sich aber, daß auch nach unserer allgemeinen Festsetzung *jedesmal*, wo $C_i < C_j$ ist, auch der Quotient $\frac{\varrho_i}{\varrho_j}$ bei der betrachteten Approximation sich der Null nähert. Da nun diese „teilweise Ordnung" der Primturniere, wie wir S. 445—446 gesehen haben, widerspruchsfrei möglich ist, so können wir durch Befolgung dieser Regel

$$\lim \frac{\varrho_i}{\varrho_j} = 0 \quad \text{für} \quad C_i < C_j$$

gleichzeitig *alle* in (21) vorkommenden Faktoren $\Phi_{ij}(u)$ und damit auch ihr Produkt sich der Eins nähern lassen und erhalten demgemäß

$$(25) \qquad \lim \Phi(\varrho_i \bar{u}_t) \begin{array}{l} = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \ldots \bar{w}_m \lim \prod_{i,j} \Phi_{ij}(\varrho_i \bar{u}_r, \varrho_j \bar{u}_s), \\ = \bar{w}_1 \bar{w}_2 \ldots \bar{w}_m \geqq \prod_i \Phi_i(u) \geqq \Phi(u), \end{array}$$

d. h. es ist $w^* = \bar{w}$ in der Tat die obere Grenze von $\Phi(u)$, die wir auf diese Weise approximieren.

§ 4.

Diskussion der Lösung für reguläre Turniere.

In dem praktisch wichtigen Fall, den wir als den „regulären" bezeichnen wollen, wo alle

$$k_{rs} = k$$

einander gleich sind, wo also jeder Spieler mit jedem die gleiche Anzahl Partien gespielt hat, geht (8a) über in

$$(8\,\mathrm{b}) \qquad g_r^* = \frac{g_r}{k} = u_r \sum_{t=1}^{n}{}' \frac{1}{u_r + u_t} \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, n \geqq 2.$$

Sind in der Reihe $u_1, \ldots, u_n$ zwei Größen einander gleich: $u_r = u_s$, so muß auch

$$g_r = g_s$$

sein; ist aber

$$(26) \qquad u_r < u_s,$$

so ist auch

$$(27) \qquad \frac{1}{u_r + u_t} > \frac{1}{u_s + u_t}$$

für alle $r \neq t \neq s$ und

$$(28) \qquad \frac{u_r}{u_r + u_t} < \frac{u_s}{u_s + u_t},$$

also

$$g_r < g_s,$$

aber, sofern $n > 2$ ist,

$$\frac{g_r}{u_r} > \frac{g_s}{u_s}$$

oder

$$(29) \qquad \frac{u_r}{u_s} < \frac{g_r}{g_s} < 1.$$

Umgekehrt folgt aus $g_r \leqq g_s$ wieder $u_r \leqq u_s$.

Wir haben also den

Satz. *Bei einem Turnier, in welchem jeder Spieler mit jedem die gleiche Anzahl Partien spielt, haben — im irreduziblen Falle — die be-*

zeichneten Spielstärken u_t *dieselbe Reihenfolge wie die Gewinnzahlen* g_t, *aber für* $n > 2$ *in quantitativ größeren Abstandsverhältnissen.*

In unserem Falle $k_{rs} = k$ wird, wenn man die g_r (und damit zugleich die u_r) nach ansteigender Größe ordnet,

$$1 \leqq g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots \leqq g_n,$$

jede p-te Teilsumme

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

wegen (15) größer ausfallen als die entsprechende Teilsumme K_p

$$(30) \qquad G_p = g_1 + g_2 + \cdots + g_p > K_p = \sum_{1 \leqq r, t \leqq p}' k_{rt} = k\frac{p(p-1)}{2},$$

und nur für $p = n$ ergibt sich

$$(7\text{a}) \qquad g_1 + g_2 + \cdots + g_n = k\frac{n(n-1)}{2} = N.$$

Durch Zerlegung der ganzen Zahl N in n Summanden erhält man also alle im betrachteten Falle möglichen durch die Gewinnzahlen g_t ausdrückbaren Turnier-Ergebnisse.

So haben wir z. B. im Falle $k = 1, n = 2, N = 1 = 0 + 1$ nur eine einzige mögliche Verteilung

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 1,$$

die dem „reduziblen" Falle angehört und der Bewertung $\frac{u_1}{u_2} = 0$ entspricht.

Für $k = 2, n = 2, N = 2 = 0 + 2 = 1 + 1$ noch die irreduzible Verteilung $g_1 = g_2 = 1$, $u_1 = u_2$.

Für $k = 3, n = 2, N = 3 = 1 + 2$ ergibt sich die irreduzible Verteilung $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ mit den zugehörigen Bestimmungsgleichungen (8)

$$\frac{3u_1}{u_1 + u_2} = 1, \quad \frac{3u_2}{u_1 + u_2} = 2$$

und dem Ergebnis $u_1 : u_2 = 1 : 2$.

Allgemein ist für $n = 2$, $N = k = g_1 + g_2$

$$g_1 = k\frac{u_1}{u_1 + u_2}, \quad g_2 = k\frac{u_2}{u_1 + u_2},$$

also $u_1 : u_2 = g_1 : g_2$, d. h. die berechneten Spielstärken verhalten sich wie die Gewinnzahlen, während für $n > 2$ nach (29) für $r < s$ immer

$$\frac{u_r}{u_s} < \frac{g_r}{g_s} < 1$$

ausfällt.

Für $n = 3$, $k = 1$, $N = 3 = g_1 + g_2 + g_3 = 1 + 1 + 1$ haben wir nur einen einzigen irreduziblen Typus

$$g_1 = g_2 = g_3 = 1, \quad u_1 = u_2 = u_3,$$

während dem Falle $n=3$, $k=2$, $N=6$ die drei Zerlegungen

$$6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$$

und damit drei verschiedene Verteilungen und Bewertungen entsprechen. Von diesen ist aber die erste *reduzibel* wegen $g_1+g_2=2=2\frac{2(2-1)}{2}$ entsprechend der Matrix $g_{12}=g_{21}=1$, $g_{13}=g_{23}=0$, $g_{31}=g_{32}=2$, und würde sich auch ergeben, wenn jeder mit jedem nur *eine* Partie gespielt und dabei die beiden ersten miteinander Remis gemacht und gegen den dritten verloren hätten. Es bleibt also außer dem trivialen Typus $g_1=g_2=g_3$, $u_1=u_2=u_3$ nur noch *ein* irreduzibler übrig $g_1=1$, $g_2=2$, $g_3=3$. Hier ergeben sich, wenn man

$$\frac{u_1}{u_3}=x, \qquad \frac{u_2}{u_3}=y$$

setzt, für x und y die Gleichungen

$$\frac{x}{x+y}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{y}{x+y}+\frac{y}{y+1}=1,$$

und hieraus weiter

$$x=y^2, \qquad 1=y+y^2+3y^3.$$

Die kubische Gleichung hat als einzige positive Lösung

$$y=0{,}46940, \qquad x=y^2=0{,}22034,$$

woraus sich, auf die Summe 1 normiert, als Spielstärken ergeben

$$\begin{aligned} u_1&=0{,}1304, & g_1&=1=1+0=0+1,\\ u_2&=0{,}2778, & g_2&=2=1+1=2+0,\\ u_3&=0{,}5918, & g_3&=3=2+1=1+2. \end{aligned}$$

Diese Verteilung ergibt sich insbesondere, wenn jeder der 3 Spieler mit jedem anderen je *eine* Partie gespielt hat und dabei

1. A_1 gegen A_2 Remis gemacht und gegen A_3 verloren, A_2 gegen A_3 Remis gemacht,

oder

2. A_1 gegen A_2 verloren und gegen A_3 Remis gemacht, A_2 gegen A_3 verloren hat.

Für $n=4$, $k=1$ haben wir wieder nur eine einzige „irreduzible" Verteilung entsprechend der Zerlegung

$$N=6=1+1+2+2$$

mit dem Ergebnis

$$u_1:u_2:u_3:u_4=1:1:3:3.$$

Für $n = 4$, $k = 2$ dagegen ergeben sich bereits 7 irreduzible Verteilungen:

$$\begin{aligned} N = 12 &= 1 + 2 + 4 + 5 \\ &= 1 + 3 + 3 + 5 \\ &= 1 + 3 + 4 + 4 \\ &= 2 + 2 + 3 + 5 \\ &= 2 + 2 + 4 + 4 \\ &= 2 + 3 + 3 + 4 \\ &= 3 + 3 + 3 + 3, \end{aligned}$$

welche mit Ausnahme der letzten (mit der trivialen Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$) auf Gleichungen dritten und höheren Grades führen. Die zweite z. B. liefert:

$$\frac{u_1}{u_4} = x = y^2, \qquad \frac{u_2}{u_4} = \frac{u_3}{u_4} = y, \qquad 5y^3 + y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Für $n = 5$, $k = 1$ erhalten wir 3 irreduzible Zerlegungen

$$\begin{aligned} N = 10 &= 1 + 1 + 2 + 3 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2, \end{aligned}$$

von denen die beiden ersten wieder auf kubische Gleichungen führen.

Die Tatsache, daß für $k_{rs} = k$ die Spielstärken u_t gleichgeordnet sind den entsprechenden Gewinnzahlen g_t, gilt aber auch im *reduziblen* Falle. Haben wir nämlich eine Klasseneinteilung aller Spieler in solche A_r und A_s, daß für $1 \leqq r \leqq p < s \leqq r$ immer $g_{rs} = 0$ wird, so gilt für jedes g_r und jedes g_s

$$(31) \qquad g_r \leqq k(p-1) < kp \leqq g_s,$$

da ein Spieler A_r der ersten Klasse höchstens gegen $p - 1$ Spieler derselben Klasse je k Partien und andererseits jeder Spieler A_s der zweiten Klasse mindestens kp Partien gegen alle der ersten Klasse gewinnt. Jede Gewinnzahl der unteren Klasse ist also kleiner als jede der oberen, während gleichzeitig jede zur unteren Klasse gehörende Spielstärke u_r gegen jede zur oberen gehörende u_s verschwindet. In dem hier betrachteten Falle erfolgt also, wenn man die g_r nach aufsteigender Größe ordnet, jede Klassentrennung immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden g_p, g_{p+1} und zwar immer an der Stelle, wo

$$(32) \qquad G_p = g_1 + g_2 + \dots + g_p = k\frac{p(p-1)}{2} = k + 2k + \dots + (p-1)k$$

ausfällt, während wegen (30) sonst immer

$$G_p = g_1 + g_2 + \dots + g_p > k\frac{p(p-1)}{2}$$

sein muß. Es genügt also, die sukzessiven Teilsummen der nach der Größe geordneten Gewinnzahlen $g_1 \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \cdots \leqq g_n$ mit den entsprechenden Teilsummen der Reihe $0, k, 2k, \ldots, (n-1)k$ zu vergleichen, um sofort die vollständige Zerlegung in „Primturniere“ zu erhalten.

§ 5.

Die numerische Auflösung der Gleichungen durch sukzessive Approximation.

Für größere Werte von n, wo die Berechnung durch algebraische Elimination nicht mehr angängig ist, empfiehlt sich ein Approximationsverfahren, das, wie wir zeigen wollen, im irreduziblen Falle stets zum Ziele führt.

Da wir die Gleichungen (8) des Problems zur Berechnung der jetzt einfach mit u_r bezeichneten relativen Spielstärken $\bar{u}_r$ in der Form schreiben können

$$(8)' \qquad \frac{g_r}{u_r} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{u_r + u_t} \qquad \begin{pmatrix} r, t = 1, 2, \ldots, n \\ t \neq r \end{pmatrix},$$

so liegt es nahe, gegebene (positive) Annäherungswerte x_r der u_r sukzessive zu verbessern, indem wir setzen

$$(33) \qquad \frac{g_r}{x_r'} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{x_r + x_t} = \frac{g_r}{f_r(x)}, \quad \text{also} \quad x_r' = f_r(x)$$

und so von einem System (x_r) der Reihe nach übergehen zu weiteren Systemen $(x_r'), (x_r''), \ldots, (x_r^{(i)})$, die im Falle der Konvergenz die gesuchte Lösung liefern werden. Denn ist etwa

$$\bar{x}_r = \lim_{i \to \infty} x_r^{(i)} \qquad (r = 1, \ldots, n),$$

so ergibt sich aus (33) analog

$$(33)_i \qquad \frac{g_r}{x_r^{(i+1)}} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{x_r^{(i)} + x_t^{(i)}}$$

und durch Grenzübergang

$$(34) \qquad \frac{g_r}{\bar{x}_r} = \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{\bar{x}_r + \bar{x}_t},$$

d. h. die Grenzwerte $\bar{x}_r$ bilden ein Lösungssystem von (8).

Um die tatsächliche Konvergenz im irreduziblen Falle unseres Problems zu beweisen, behandeln wir ein allgemeineres Iterationsproblem, dessen Voraussetzungen, wie leicht zu zeigen, in unserem Falle zutreffen.

Theorem. *Es sei gegeben eine Substitution von n Variablen x_r in der Form*

$$x'_r = f_r(x) \equiv f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{35}$$

wo die (reellen) Funktionen f_r folgende Eigenschaften besitzen:

1. *Die Funktionen f_r sind homogen von der Dimension 1, d. h. es ist für jedes (positive) λ stets*

$$f_r(\lambda x) = \lambda f_r(x). \tag{36}$$

2. *Die Funktionen sind „positiv beschränkt", d. h. ihre Funktionswerte liegen zwischen positiven (von 0 verschiedenen) endlichen Schranken in jedem Variabilitätsbereiche, in welchem die sämtlichen Variablen x_r selbst zwischen positiven endlichen Schranken gelegen sind.*

3. *Die Funktionen f_r sind stetig differentiierbar und auch ihre sämtlichen partiellen Ableitungen $f_{rs}(x) = \frac{\partial}{\partial x_s} f_r(x)$ sind „positiv beschränkte" Funktionen, soweit die Variablen x_s „wirklich vorkommen", d. h. die Ableitungen f_{rs} nicht identisch verschwinden. Die Funktionen f_r sind also in den wirklich vorkommenden Variablen x_s auch monoton.*

4. *Jede der Funktionen f_r enthält „eigentlich" die ihr entsprechende Variable x_r, so daß $f_{rr} \neq 0$ ist in jedem positiven Bereiche der Veränderlichen; und bei jeder Einteilung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in zwei Klassen (r, s) gibt es immer mindestens ein Zahlenpaar r, s, wo r der einen und s der anderen angehört, für welches $f_{rs} \neq 0$ ist.*

5. *Die Gleichungen*

$$u_r = f_r(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

besitzen mindestens eine positive Lösung $u_r > 0$.

Dann konvergieren für jedes positive System von Werten $x_r > 0$ die sukzessive gebildeten Werte

$$x'_r = f_r(x), \;\; x''_r = f_r(x'), \;\; \ldots, \;\; x_r^{(i+1)} = f_r(x^{(i)}), \ldots \tag{35$_i$}$$

mit wachsendem i nach positiven Grenzwerten

$$\bar{x}_r = \lim_{i \to \infty} x_r^{(i)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

welche dem Gleichungssystem (37) genügen und sich von den vorausgesetzten Lösungen u_r höchstens durch einen gemeinsamen positiven Faktor unterscheiden

$$\bar{x}_r = \lambda^* u_r, \tag{39}$$

wodurch zugleich die Eindeutigkeit der positiven Lösung gesichert ist.

Bevor wir dieses allgemeine Theorem beweisen, überzeugen wir uns zunächst, daß die über die Funktionen f_r gemachten Voraussetzungen für den von uns behandelten speziellen Fall auch erfüllt sind.

1. Die Homogeneität erhellt unmittelbar aus der Form der Gleichungen (8).

2. Im „irreduziblen“ Falle sind nach § 1 alle $g_r > 0$ und für jedes r mindestens ein $k_{rt} > 0$, und die Funktionen f_r sind also nicht verschwindende rationale Funktionen mit lauter *positiven* Koeffizienten. Solche Funktionen sind aber immer „positiv beschränkt“, weil, wie leicht ersichtlich, die Summe, das Produkt und der Quotient „positiv beschränkter“ stets wieder die gleiche Eigenschaft besitzen. Allgemein sind weiter alle positiv beschränkten Funktionen von positiv beschränkten Funktionen wieder positiv beschränkt.

3. Durch partielle Differentiation ergibt sich aus (33)

$$(40)\qquad g_r \frac{\partial f_r(x)}{\partial x_r} = f_r(x)^2 \sum_t{}' \frac{k_{rt}}{(x_r + x_t)^2}$$

und

$$(41)\qquad g_r \frac{\partial f_r(x)}{\partial x_s} = f_r(x)^2 \frac{k_{rs}}{(x_r + x_s)^2} \quad \text{für} \quad s \neq r;$$

also sind auch hier alle $f_{rs}(x)$, soweit sie nicht identisch verschwinden, stetige und „positiv beschränkte“ Funktionen.

4. Aus den letzten Formeln ergibt sich unmittelbar, daß stets $f_{rr}(x) > 0$ und $f_{rs}(x) = 0$ nur im Falle $k_{rs} = 0$, wo der r-te Spieler mit dem s-ten überhaupt nicht gespielt hat. Gäbe es nun eine Klasseneinteilung in Spieler A_r und A_s, bei welcher alle $k_{rs} = 0$ wären, so wären auch alle $g_{rs} = 0$, was im „irreduziblen“ Falle ausgeschlossen ist.

5. Die *Existenz* einer positiven Lösung des Gleichungssystems ist für den irreduziblen Fall durch unsere Betrachtungen im § 1 mit der Existenz des Maximums von Φ nach dem Weierstraßschen Satze gesichert. Dagegen braucht die *Eindeutigkeit* der Lösung hier *nicht* vorausgesetzt zu werden, sie wird vielmehr — unabhängig von unserem in § 2 gegebenen Beweise — als spezielle Folgerung des allgemeinen Satzes gleichzeitig *mitbewiesen*.

Beweis des Konvergenztheorems. Für $t = 1, 2, \ldots, n$ sei $x_t > 0$ ein beliebiges positives Wertsystem und $u_t > 0$ eine positive Lösung der Gleichungen (37). Bezeichnen wir hier mit λ den kleinsten und mit μ den größten Quotienten aus der Reihe $\frac{x_t}{u_t}$,

$$(42)\qquad \lambda u_t \leqq x_t \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n),$$

so folgt aus 3., da die Funktionen f_r monoton sind,

$$(43)\qquad \lambda f_r(u) \leqq f_r(x) \leqq \mu f_r(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

und wegen (37) auch

$$\lambda u_r \leqq x_r' \leqq \mu u_t,$$

sowie für alle folgenden Approximationen $x_t^{(i)}$

$$\lambda u_t \leqq x_t^{(i)} \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n). \tag{42$_i$}$$

Ebenso ist aber auch für jedes i, wenn wieder $\lambda^{(i)}$ den kleinsten und $\mu^{(i)}$ den größten Quotienten $\frac{x_t^{(i)}}{u_t}$ bezeichnet,

$$\lambda^{(i)} u_t \leqq x_t^{(i)} \leqq \mu^{(i)} u_t$$

und

$$\lambda^{(i)} u_t \leqq x_t^{(i+1)} \leqq \mu^{(i)} u_t,$$

also

$$\lambda^{(i)} \leqq \lambda^{(i+1)} \leqq \mu^{(i+1)} \leqq \mu^{(i)},$$

d. h. die Werte $\lambda^{(i)}$ bilden eine niemals fallende, die $\mu^{(i)}$ eine niemals steigende Reihe, wobei die Intervalle $(\lambda^{(i)}, \mu^{(i)})$ sukzessive ineinander liegen und alle im Gesamtintervall (λ, μ) enthalten sind. Die $\lambda^{(i)}$ besitzen also eine *obere* Grenze $\bar{\lambda}$, die $\mu^{(i)}$ eine *untere* Grenze $\bar{\mu}$, und es ist

$$\lambda \leqq \lambda^{(i)} \leqq \bar{\lambda} \leqq \bar{\mu} \leqq \mu^{(i)} \leqq \mu \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{43}$$

sowie

$$\bar{\lambda} = \lim_{i \to \infty} \lambda^{(i)}, \qquad \bar{\mu} = \lim_{i \to \infty} \mu^{(i)}. \tag{44}$$

Läßt sich nun zeigen, daß beide Grenzwerte übereinstimmen,

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \varrho, \tag{45}$$

so wird auch

$$\lim_{i \to \infty} x_t^{(i)} = \varrho u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{46}$$

wie zu beweisen.

Um aber diesen Nachweis zu führen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall I. Alle $f_{rs} > 0$, d. h. beim Turnierproblem $k_{rs} > 0$ für alle $r \neq s$: jeder Spieler hat mit jedem andern gespielt. Dann sind nach 3. auch sämtliche Ableitungen f_{rs} „positiv beschränkt", und für alle den Bedingungen

$$\lambda u_t \leqq x_t \leqq \mu u_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

genügenden Wertsysteme x_t, zu denen nach $(42)_i$ auch alle $x_t^{(i)}$ gehören, besitzen sie positive untere Schranken:

$$f_{rs}(x) \geqq \gamma_{rs} > 0. \tag{47}$$

Nach dem Mittelwertsatze ist aber wegen (37)

$$x_r^{(i+1)} - \lambda^{(i)} u_r = f_r(x^{(i)}) - f_r(\lambda^{(i)} u) = \sum_{t=1}^{n} f_{rt}(\tilde{x})(x_t^{(i)} - \lambda^{(i)} u_t), \tag{48}$$

wo
$$\tilde{x}_t = (1 - \vartheta_r)\lambda^{(i)} u_t + \vartheta_r x_t^{(i)} \qquad (0 \leqq \vartheta_r \leqq 1;\ t = 1, 2, \ldots, n)$$
einen Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(x_t^{(i)})$ und $(\lambda^{(i)} u_t)$ kennzeichnet, der gleichfalls den Beziehungen (42) genügt. Daher ist nach (47) für jedes $s \leqq n$

$$x_r^{(i+1)} - \lambda^{(i)} u_r \geqq \gamma_{rs}(x_s^{(i)} - \lambda^{(i)} u_s). \tag{49}$$

Insbesondere gilt dies auch für die Maximal- bzw. Minimalwerte der Quotienten, wo

$$x_r^{(i+1)} = \lambda^{(i+1)} u_r, \qquad x_s^{(i)} = \mu^{(i)} u_s,$$

so daß wir erhalten

$$\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} \geqq \gamma_{rs} \frac{u_s}{u_r} (\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) \geqq \varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}), \tag{50}$$

wenn $\varkappa$ den kleinsten der positiven Werte $\varkappa_{rs} = \gamma_{rs} \frac{u_s}{u_r}$ bedeutet, woraus folgt:

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} \leqq \frac{1}{\varkappa}(\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}) \quad \text{und}$$

$$\bar{\mu} - \lambda = \lim_{i \to \infty} (\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) = 0, \tag{51}$$

w. z. b. w.

Um nun auch den Grad der Konvergenz abzuschätzen, bedienen wir uns noch einer zweiten, ganz analog wie (50) aus (47) abgeleiteten Formel: Es ist

$$\mu^{(i)} u_r - x_r^{(i+1)} = f_r(\mu^{(i)} u) - f_r(x^{(i)}) = \sum_{t=1}^{n} f_{rt}(\tilde{x})(\mu^{(i)} u_t - x_t^{(i)})$$
$$\geqq \gamma_{rs}(\mu^{(i)} u_s - x_s^{(i)}) \quad \text{für beliebige } r, s,$$

also für $x_r^{(i+1)} = \mu^{(i+1)} u_r$, $x_s^{(i)} = \lambda^{(i)} u_s$ weiter

$$\mu^{(i)} - \mu^{(i+1)} \geqq \varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}). \tag{52}$$

Durch Addition von (50) und (52) erhält man dann

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} - (\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)}) \geqq 2\varkappa(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}).$$

Also

$$\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)} \leqq (1 - 2\varkappa)(\mu^{(i)} - \lambda^{(i)}) \tag{53}$$

und somit

$$\mu^{(i)} - \lambda^{(i)} \leqq (\mu - \lambda)(1 - 2\varkappa)^i. \tag{54}$$

Die Approximationen konvergieren also mindestens wie eine geometrische Reihe.

Fall II. Nicht alle f_{rs} sind $\neq 0$, nicht alle f_r enthalten „eigentlich" sämtliche Variablen, dagegen gilt die Eigenschaft 4. Dieser Fall läßt sich nun, wie wir zeigen wollen, auf den Fall I zurückführen, indem man die Substitutionen (35) iteriert und setzt:

$$
(55) \qquad \begin{aligned}
f_r^{(1)}(x) &\equiv f_r(f) \equiv f_r(f_1(x),\ f_2(x)\ \dots\ f_n(x))\\
f_r^{(2)}(x) &\equiv f_r(f^{(1)}) \equiv f_r(f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x)\ \dots\ f_n^{(1)}(x))\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_r^{(i+1)}(x) &\equiv f_r(f^{(i)}) \equiv f_r(f_1^{(i)}(x)\ \dots\ f_n^{(i)}(x))\\
&(r = 1, 2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots).
\end{aligned}
$$

Diese durch Iteration entstehenden Funktionen $f_r^{(i)}(x)$ besitzen nämlich, wie leicht ersichtlich, die gleichen Eigenschaften 1—3 wie die ursprünglichen $f_r(x)$, da sich diese Eigenschaften stets auf die zusammengesetzten Funktionen übertragen. Insbesondere ist auch für jede solche Funktion F in jedem positiv beschränkten Bereiche

$$
(56) \qquad \frac{\partial}{\partial x_r} F(f_1, f_2, \dots) = \sum_t \frac{\partial F}{\partial f_t}\frac{\partial f_t}{\partial x_r} \geqq \frac{\partial F}{\partial f_s}\frac{\partial f_s}{\partial x_r} > 0,
$$

wenn auch nur für *ein* s die nach f_s genommene Ableitung von F sowie die nach x_r genommene von f_s nicht verschwindet. Hieraus folgt zunächst, daß mit $f_{rr} \neq 0$ (vermöge 4) auch

$$
f_{rr}^{(1)}(x) > 0,\quad f_{rr}^{(2)}(x) > 0,\quad \dots,\quad f_{rr}^{(i)}(x) > 0,
$$

daß also sämtliche $f_r^{(i)}$ *monotone* Funktionen von x_r sind.

Angenommen nun, die der Reihe der Funktionen f_t entnommene Funktion $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ enthalte „eigentlich" die mit x_r bezeichneten Variablen aus der Reihe $x_1 \dots x_n$, so daß alle $\frac{\partial F}{\partial x_r} > 0$ sind, während für alle übrigen (hier mit x_s bezeichneten) immer $\frac{\partial F}{\partial x_s} = 0$ sei, so gibt es nach 4. ein Wertepaar r, s, für welches $f_{rs} \neq 0$ ist, und wir haben wegen (56) einmal

$$
(57) \qquad \frac{\partial}{\partial x_r} F(f) > 0 \quad \text{für alle } r, \text{ für die } \frac{\partial F(x)}{\partial x_r} > 0 \text{ ist,}
$$

sowie

$$
(58) \qquad \frac{\partial}{\partial x_s} F(f) \geqq \frac{\partial F}{\partial f_r}\frac{\partial f_r}{\partial x_s} > 0,
$$

d. h. die Funktion $F(f) = F^{(1)}(x)$ enthält eigentlich *alle* x_r, welche $F(x)$ eigentlich enthält, und *außerdem* noch mindestens eine weitere Variable x_s. Somit enthält in der Reihe

$$
F(x),\quad F^{(1)}(x) = F(f),\quad F^{(2)}(x) = F^{(1)}(f),\quad \dots,\quad F^{(i+1)}(x) = F^{(i)}(f)
$$

bereits $F^{(n-1)}(x)$ sämtliche n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, und insbesondere gibt es auch eine Zahl $h \leqq n-1$ von der Beschaffenheit, daß die n Funktionen

$$f_1^{(h)}(x), \; f_2^{(h)}(x), \; \ldots, \; f_n^{(h)}(x),$$

welche durch h-fache Iteration der Substitution (35) entstehen, die sämtlichen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ eigentlich enthalten. Diese Funktionen $f_r^{(h)}$ genügen den sämtlichen Bedingungen 1 bis 5, da ersichtlich auch für jedes positive Lösungssystem (u) von (37)

$$(37)_h \qquad u_r = f_r^{(h)}(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, und damit sind alle Voraussetzungen der Konvergenz im Falle I gegeben. Es werden also für ein beliebiges positives System (x) von Anfangswerten die Iterationswerte[9])

$$x_r^{(h)} = f_r^{(h)}(x), \quad x_r^{(2h)} = f_r^{(2h)}(x), \quad \ldots, \quad x_r^{(ih)} = f_r^{(ih)}(x)$$

mit wachsendem i einer Lösung von (37) zustreben, indem die entsprechenden Differenzen $\mu^{(ih)} - \lambda^{(ih)}$ sich der 0 nähern, und somit gilt auch allgemein

$$\mu - \lambda = \lim_{j=\infty} (\mu^{(j)} - \lambda^{(j)}) = 0,$$

d. h. auch in dem durch die Bedingungen 1 bis 5 gegebenen *allgemeinen* Falle führt unser Verfahren der sukzessiven Approximation zur numerischen Lösung des irreduziblen Problems. Der Unterschied der beiden Fälle I und II macht sich nur insofern geltend, daß im Falle II in der Folge der Approximationen $x^{(i)}$ gelegentlich auch

$$\mu^{(i+1)} - \lambda^{(i+1)} = \mu^{(i)} - \lambda^{(i)}$$

ausfallen kann, während doch immer, wie aus unserer Reduktion vermöge $f_r^{(h)}$ hervorgeht,

$$\mu^{(i+h)} - \lambda^{(i+h)} < \mu^{(i)} - \lambda^{(i)}$$

sein muß.

Unsere Auflösungsmethode ist also, weit entfernt, nur auf „reguläre“ Turniere (wo $k_{rt} = k$ konstant ist) beschränkt zu sein, wie meines Wissens alle bisherigen Methoden der Turnierberechnung, im „irreduziblen“ Falle auch ohne weiteres auf „abgebrochene“ und auf „kombinierte“ Turniere (die aus verschiedenen Einzelturnieren mit teilweise identischen Spielern zusammengesetzt sind) anwendbar und liefert auch in „reduziblen“ Fällen stets eine das vorliegende Beobachtungsmaterial gleichmäßig berücksichtigende und allen vernünftigen Forderungen genügende vollständige oder teilweise Bestimmung der relativen Spielstärken.

---

9) Es wird hier von der Gültigkeit des Assoziationsgesetzes für die Zusammensetzung von Substitutionen Gebrauch gemacht.

Bei der praktischen Ausführung der Rechnung wird man in der Regel mit dem Ansatz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ beginnen und hieraus mit Hilfe von Reziprokentafeln gemäß (33) die sukzessiven Annäherungen $x_r', x_r'', \ldots$ bestimmen und so lange damit fortfahren, bis je zwei aufeinanderfolgende sich nicht mehr merklich unterscheiden, das Gleichungssystem (8) also erfüllt ist. Vorher muß man sich aber erst von der „Irreduzibilität" des Turniers überzeugt bzw. die erforderliche Zerlegung in „Primturniere" vorgenommen haben, was im „regulären" Falle ($k_{rt} = k$) am bequemsten geschieht nach dem am Schluß von § 4 angegebenen Verfahren, d. h. durch Anordnung der g_r nach aufsteigender Größe und Vergleichung ihrer Teilsummen G_r mit den entsprechenden Zahlen $\frac{1}{2} k r (r-1)$ gemäß (32).

Als Beispiel für die Auswertung eines größeren (regulären) Turniers gebe ich zum Schluß eine kurze Tabelle, die nach dem New-Yorker Meisterturnier von 1924 für $n = 11$ Teilnehmer (darunter E. Lasker als erster Preisträger) nach dem angegebenen Verfahren berechnet wurde, wobei die berechneten „Spielstärken" u_r auf die Summe 100 normiert sind und γ_r wegen $k = 2$ die Differenz $G_r - r(r-1)$ bedeutet.

r	u_r	g_r	G_r	$r(r-1)$	γ_r
1	2,43	5	5	0	5
2	3,44	6,5	11,5	2	9,5
3	3,84	7	18,5	6	12,5
4	4,72	8	26,5	12	14,5
5	6,40	9,5	36	20	16
6	7,12	10	46	30	16
7	7,84	10,5	56,5	42	14,5
8	8,71	11	67,5	56	11,5
9	10,7	12	79,5	72	7,5
10	18,4	14,5	94	90	4
11	26,4	16	110	110	0

(Eingegangen am 28. Mai 1928.)