HEINZ, E.
Math. Zeitschr. 74, 129—157 (1960)

Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement

Herrn ERICH KAMKE zum 70. Geburtstag am 18. August 1960 gewidmet

Von

ERHARD HEINZ[1])

Problemstellung

Ein bekanntes Resultat von H. WEYL und H. LEWY[2]) besagt, daß jede auf der Einheitskugel Σ vorgegebene analytische Metrik ds^2 positiver Gaußscher Krümmung durch eine reguläre Eifläche $\mathfrak{E}$ im dreidimensionalen Raume verwirklicht werden kann. (Genauer: Es gibt eine auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}$, die in den lokalen Koordinaten u, v von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und der Gleichung $(d\mathfrak{x})^2 = ds^2$ genügt.)

In neuerer Zeit ist es L. NIRENBERG [23] und A. W. POGORELOW [24] gelungen, dieses Theorem auf den Fall nichtanalytischer Metriken zu erweitern. Wir wollen die Hauptpunkte der Beweise hier kurz hervorheben. Als wesentliches Hilfsmittel dienen beiden Autoren gewisse nichttriviale Ungleichungen für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{E}$, oder, was damit äquivalent ist, Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$. Die erste Ungleichung, die bei NIRENBERG [23] verwendet wird, rührt von H. WEYL her[3]) und lautet

$$H^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\Sigma}\left(K - \frac{1}{4K}\Delta_2 K\right). \tag{1}$$

Dabei bedeutet K die Gaußsche Krümmung von $\mathfrak{E}$, und Δ_2 ist der dem Linienelement ds^2 zugeordnete Beltramische Differentialoperator zweiter Ordnung. Die entsprechende Ungleichung von POGORELOW [24] geht insofern über (1) hinaus, als sie sich auf berandete Flächen, nämlich konvexe Mützen $\mathfrak{E}$ mit ebenem Rand, bezieht. Sie lautet

$$|H| \leqq \frac{2\sqrt{\frac{M}{K_0}}\,(1+h)}{z\cos\varphi_0}\ ^{4}). \tag{2}$$

[1]) Diese Arbeit wurde teilweise von einem Kontrakt des Office of Naval Research in Stanford University unterstützt.

[2]) Vgl. WEYL [25], LEWY [21], ferner NIRENBERG [23] und POGORELOW [24]. Zusammenfassende Darstellungen bei EFIMOW [7] und BUSEMANN [2], vgl. auch die Note von A. WINTNER [26].

[3]) Vgl. WEYL [25], § 6, ferner NIRENBERG [23], § 10, CHERN [5] und A. WINTNER [27].

[4]) Vgl. POGORELOW [24], S. 74—79. Wegen einer Erweiterung dieser Ungleichung auf allgemeine Mützen siehe [13], Theorem 5.

Hierbei ist h die Höhe der Mütze, φ_0 der größte Winkel zwischen der Tangentialebene der Mütze und ihrer Basisebene, z der Abstand des Punktes von der Basisebene, K_0 das Minimum der Gaußschen Krümmung von $\mathfrak{C}$ und M eine Zahl, die vom Minimum der Diskriminante von ds^2 sowie der oberen Schranke der Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *vierten* Ordnung abhängt. Aus diesen Abschätzungen, sowie aus einem von L. NIRENBERG [22] herrührenden allgemeinen Theorem über nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, ergibt sich die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für den Fall, daß die Koeffizienten von ds^2 *viermal* stetig differenzierbar sind[5]).

Es erhebt sich nun die Frage, ob eine reguläre Einbettung von ds^2 im dreidimensionalen Raume auch im Falle einer *dreimal* stetig differenzierbaren Metrik ds^2 möglich ist. Dazu wäre es ausreichend, eine den Ungleichungen (1) oder (2) analoge Abschätzung für H zu gewinnen, wo auf der rechten Seite nur die Ableitungen der Koeffizienten von ds^2 bis zur *dritten* Ordnung auftreten. Dies soll in der vorliegenden Arbeit ausgeführt werden. Darüber hinaus werden wir die Voraussetzung, daß $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Fläche oder eine Mütze sein muß, fallen lassen und nur fordern, daß $\iint\limits_{\mathfrak{C}} |H|\, do < \infty$ ausfällt.

Unser Hauptresultat (Satz 3) läßt sich folgendermaßen aussprechen:

VORAUSSETZUNGEN.

(I) *$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ ist eine in einem Gebiet Ω der uv-Ebene erklärte, reelle, zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion mit*

$$(d\mathfrak{x})^2 = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{3}$$

Dabei sind die Koeffizienten $E(u, v)$, $F(u, v)$ und $G(u, v)$ in Ω viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq a, \tag{4}$$

$$|E_u|,\ \ldots,\ |G_v| \leqq a, \tag{5}$$

$$|E_{uu}|,\ \ldots,\ |G_{vv}| \leqq a, \tag{6}$$

$$|E_{uuu}|,\ldots,|G_{vvv}| \leqq a \tag{7}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{8}$$

mit einer festen positiven Zahl a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung $K(u, v)$ von ds^2 gilt die Ungleichung*

$$K(u, v) \geqq b > 0. \tag{9}$$

(III) *Es ist*

$$\iint\limits_{\Omega} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{10}$$

---

[5]) Darüber hinaus beweist POGORELOW Differenzierbarkeitssätze für konvexe Flächenstücke (vgl. [24], S. 86). Wegen einer Neudarstellung der Pogorelowschen Beweise, die in ihrer ursprünglichen Form fünfmal stetige Differenzierbarkeit der Metrik ds^2 voraussetzen, sei auf BUSEMANN [2] verwiesen.

wobei H die mittlere Krümmung und $do = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ *das Oberflächenelement der Fläche* $\mathfrak{F}: \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ *bedeuten.*

BEHAUPTUNG. *Es sei* Ω_ϱ ($\varrho > 0$) *die Teilmenge aller Punkte von* Ω, *deren Abstand vom Rande von* Ω *größer als* ϱ *ist, und* ν *eine reelle Zahl mit* $0 < \nu < 1$. *Dann gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|, \ldots, |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a, b, c, \varrho) < \infty \qquad ((u, v) \in \Omega_\varrho) \tag{11}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1, v_1)| \\ \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2, v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1, v_1)| \end{array}\right\} \leqq \tau_1 \cdot \left(\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}\right)^\nu \\ \qquad\qquad ((u_1, v_1) \in \Omega_\varrho, \quad (u_2, v_2) \in \Omega_\varrho) \end{array}\right. \tag{12}$$

mit

$$\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich dann in § 4 dieser Arbeit die Lösung des Weylschen Einbettungsproblems für eine dreimal stetig differenzierbare Metrik ds^2 (Satz 4)[5a].

Die Methoden, mit denen wir Satz 3 beweisen werden, sind mit denjenigen verwandt, die H. LEWY in seinen Untersuchungen über Monge-Ampèresche Differentialgleichungen und das Weylsche Problem benutzt hat ([*18*], [*19*], [*20*] und [*21*]). Sie eröffnen auch den Zugang zu weiteren Problemen in der Differentialgeometrie im Großen.

Zunächst betrachten wir in § 1 und § 2 eineindeutige Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die nichtlinearen Systemen elliptischer Differentialgleichungen der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta x = h_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + h_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{array}\right. \tag{13}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta y = \tilde{h}_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{array}\right. \tag{14}$$

genügen. Solche Systeme spielen auch in den Arbeiten von H. LEWY eine fundamentale Rolle[6]). Es wird uns gelingen, unter sehr schwachen Regularitätsvoraussetzungen hinsichtlich der Koeffizienten $h_1(x, y), \ldots, \tilde{h}_4(x, y)$ sowohl die ersten Ableitungen von x und y nach *oben* als auch die Funktionaldeterminante $|x_u y_v - x_v y_u|$ *durch eine positive Zahl nach unten* abzuschätzen und so unsere früheren Resultate[7]) zu verallgemeinern (Satz 2). Dabei liegen in dem letzteren Problem die eigentlichen Schwierigkeiten. Indem wir Satz 2 auf die Darbouxschen Differentialgleichungen anwenden, denen die Variablen

[5a]) Zusatz bei der Korrektur vom 13. 7. 60: Ein neuer Beweis von Satz 4, der sich auf [*13*], Theorem 2, stützt, soll in einer späteren Arbeit gegeben werden. Dort wird auch der Fall einer zweimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 behandelt.

[6]) Siehe insbesondere [*19*], S. 373, [*20*] und [*21*], S. 106.

[7]) Siehe [*11*], Satz 3, sowie [*12*], Theorem 10 und Theorem 11.

u, v als Funktionen der konjugiert-isothermen Parameter α, β der Fläche $\mathfrak{F}$ genügen, erhalten wir in § 3 die gesuchten a-priori-Abschätzungen (11) und (12).

In der vorliegenden Arbeit wird von der Theorie der elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen kein Gebrauch gemacht. Vielmehr stützen sich alle Beweise auf Satz 2. Es sei bemerkt, daß sich dieses Theorem auch auf die Gewinnung von a-priori-Abschätzungen bei einer großen Klasse Monge-Ampèrescher Gleichungen anwenden läßt, was an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

§ 1. Lokales Verhalten

Hauptziel dieses Paragraphen ist die sinngemäße Übertragung des bekannten Satzes von HURWITZ über Folgen analytischer Funktionen[8]) auf eine Klasse von Abbildungen $(u, v) \to (x, y)$, die einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen (Satz 1). Zum Beweis werden die folgenden drei Hilfssätze benötigt:

HILFSSATZ 1. VORAUSSETZUNGEN:

(I) *Die Funktionen* $f^{(k)}(w) = f^{(k)}(u, v)$ $(k = 1, 2, \ldots;\ w = u + iv)$ *sind für* $|w| < R$ *reell und zweimal stetig differenzierbar und genügen außerdem für* $|w| < R$ *der Differentialungleichung*

$$|f^{(k)}_{w\bar{w}}| \leqq M\left(|f^{(k)}_w| + |f^{(k)}|\right) \tag{1.1}$$

mit einer festen positiven, von k unabhängigen Zahl M.

(II) *Die Relationen*

$$f^{(k)}(w) \to f(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.2}$$

und

$$f^{(k)}_w(w) \to f_w(w) \qquad (k \to \infty) \tag{1.3}$$

gelten gleichmäßig für $|w| < R$.

(III) *Es ist*

$$f(0) = f_w(0) = 0. \tag{1.4}$$

BEHAUPTUNG. *Entweder ist* $f(w) \equiv 0$, *oder es gibt eine positive ganze Zahl p mit*

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_w(w)}{w^p} \neq 0. \tag{1.5}$$

BEWEIS. Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge eines Resultates von P. HARTMAN und A. WINTNER[9]).

HILFSSATZ 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, und außerdem sei*

$$f^{(k)}_w(w) \neq 0 \tag{1.6}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ *und* $|w| < R$. *Dann verschwindet die Grenzfunktion* $f(w) = \lim\limits_{k \to \infty} f^{(k)}(w)$ *identisch für* $|w| < R$.

[8]) Vgl. z. B. CARATHÉODORY [3], S. 65.

[9]) Siehe [10], Theorem 1 und 2. Die Beweisidee geht auf CARLEMAN [4] zurück.

Beweis. Angenommen, es sei $f(w) \not\equiv 0$. Dann gibt es nach Hilfssatz 1 eine positive ganze Zahl p mit

$$\lim_{\substack{w \to 0 \\ (w \neq 0)}} \frac{f_w(w)}{w^p} = A \neq 0. \tag{1.7}$$

Man setze

$$\varphi(w) = A\, w^p. \tag{1.8}$$

Wegen (1.3) und (1.7) lassen sich dann eine positive Zahl r mit $r < R$ und eine positive ganze Zahl k_0 so bestimmen, daß für $|w| = r$ die Ungleichung

$$|f_w^{(k_0)}(w) - \varphi(w)| < |\varphi(w)| \tag{1.9}$$

erfüllt ist. Daraus folgt aber [10])

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg f_w^{(k_0)}(w) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|w|=r} d \arg \varphi(w) = p > 0. \tag{1.10}$$

Also gibt es ein w_0 mit $|w_0| < r$ und $f_w^{(k_0)}(w_0) = 0$ im Widerspruch zu (1.6). Damit ist gezeigt, daß die Funktion $f(w)$ für $|w| < R$ identisch verschwindet, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Um die nächsten Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der folgenden

Definition 1. *$\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ ist die Menge aller komplexwertigen Funktionen $z(w) = x(u,v) + i\,y(u,v)$ $(w = u + iv)$ mit den folgenden Eigenschaften: $x = x(u,v)$ und $y = y(u,v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in einem Gebiet D der w-Ebene und genügen dort den Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \Delta x = a(x,y)\,(x_u^2 + x_v^2) + b(x,y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + c(x,y)\,(y_u^2 + y_v^2) + d(x,y)\,(x_u y_v - x_v y_u) \end{cases} \tag{1.11}$$

und

$$\begin{cases} \Delta y = \tilde a(x,y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde b(x,y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde c(x,y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde d(x,y)\,(x_u y_v - x_v y_u). \end{cases} \tag{1.12}$$

Dabei sind die Koeffizienten $a(z) = a(x,y), \dots, \tilde d(z) = \tilde d(x,y)$ $(z = x + iy)$ reell und für $|z| < \infty$ definiert. Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|a(z)|, \dots, |\tilde d(z)| \leq M_0 \tag{1.13}$$

für $|z| < \infty$ und

$$\begin{cases} |\tilde a(z_2) - \tilde a(z_1)| \leq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(a(z_2) - \tilde b(z_2)) - (a(z_1) - \tilde b(z_1))| \leq M_1 |z_2 - z_1| \\ |(b(z_2) - \tilde c(z_2)) - (b(z_1) - \tilde c(z_1))| \leq M_1 |z_2 - z_1| \\ |c(z_2) - c(z_1)| \leq M_1 |z_2 - z_1| \end{cases} \tag{1.14}$$

für $|z_1| < \infty$ und $|z_2| < \infty$, wobei M_0 und M_1 zwei feste positive Zahlen bedeuten.

---

[10]) Zu den hier verwendeten Fundamentaleigenschaften der Umlaufszahlen vgl. z.B. Fenchel [8].

HILFSSATZ 3. *Die Funktion $z(w)=x(u,v)+iy(u,v)$ gehöre zu $\Gamma_0(M_0,M_1;D)$ und genüge in einer in D enthaltenen Kreisscheibe $|w-w_0|\leqq\varrho$ den Ungleichungen*

$$|z(w)-z_0|<\frac{1}{72M_0}\qquad(z_0=x_0+iy_0) \tag{1.15}$$

und

$$|z_u|+|z_v|\leqq K<\infty. \tag{1.16}$$

Ferner sei Θ eine beliebige reelle Zahl. Dann gibt es eine für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion $g(\eta)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(I) *Es ist*

$$g(0)=g'(0)=0, \tag{1.17}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g'(\eta)|\leqq 1 \tag{1.18}$$

und

$$|g''(\eta)|\leqq 72M_0 \tag{1.19}$$

für $|\eta|<\frac{1}{72M_0}$.

(II) *Die Funktion*

$$\begin{cases} f(w)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)- \\ \qquad -g\big(\cos\Theta\cdot(y(u,v)-y_0)-\sin\Theta\cdot(x(u,v)-x_0)\big)\end{cases} \tag{1.20}$$

genügt für $|w-w_0|<\varrho$ der Differentialungleichung

$$|f_{w\bar w}|\leqq(288KM_0+24K^2M_1)\,(|f_w|+|f|). \tag{1.21}$$

BEWEIS. Man setze

$$\xi(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big)+\sin\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big) \tag{1.22}$$

und

$$\eta(u,v)=\cos\Theta\cdot\big(y(u,v)-y_0\big)-\sin\Theta\cdot\big(x(u,v)-x_0\big). \tag{1.23}$$

Dann genügen die Funktionen $\xi=\xi(u,v)$ und $\eta=\eta(u,v)$ für $w\in D$ den Differentialgleichungen

$$\begin{cases}\Delta\xi=A(\xi,\eta)\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+B(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +C(\xi,\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+D(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u)\end{cases} \tag{1.24}$$

und

$$\begin{cases}\Delta\eta=\tilde A(\xi,\eta)\,(\xi_u^2+\xi_v^2)+\tilde B(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_u+\xi_v\eta_v)+ \\ \qquad +\tilde C(\xi,\eta)\,(\eta_u^2+\eta_v^2)+\tilde D(\xi,\eta)\,(\xi_u\eta_v-\xi_v\eta_u)\end{cases} \tag{1.25}$$

mit

$$\begin{cases}A(\xi,\eta)=a(x,y)\cos^3\Theta+\big(\tilde a(x,y)+b(x,y)\big)\cos^2\Theta\sin\Theta+ \\ \qquad +\big(\tilde b(x,y)+c(x,y)\big)\cos\Theta\sin^2\Theta+\tilde c(x,y)\sin^3\Theta,\end{cases} \tag{1.26}$$

$$(1.27)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) = b(x,y)\cos^3\Theta + \\ \qquad + \left(-2a(x,y) + \tilde{b}(x,y) + 2c(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(-2\tilde{a}(x,y) - b(x,y) + 2\tilde{c}(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta - \\ \qquad - \tilde{b}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.28)\quad \begin{cases} C(\xi,\eta) = c(x,y)\cos^3\Theta + \left(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta + \tilde{a}(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.29)\quad D(\xi,\eta) = d(x,y)\cos\Theta + \tilde{d}(x,y)\sin\Theta$$

und

$$(1.30)\quad \begin{cases} \widetilde{A}(\xi,\eta) = \tilde{a}(x,y)\cos^3\Theta - \left(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta - \\ \qquad - \left(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta - c(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.31)\quad \begin{cases} \widetilde{B}(\xi,\eta) = \tilde{b}(x,y)\cos^3\Theta - \\ \qquad - \left(2\tilde{a}(x,y) + b(x,y) - 2\tilde{c}(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(2a(x,y) - \tilde{b}(x,y) - 2c(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \qquad + b(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.32)\quad \begin{cases} \widetilde{C}(\xi,\eta) = \tilde{c}(x,y)\cos^3\Theta - \left(\tilde{b}(x,y) + c(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(\tilde{a}(x,y) + b(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta - a(x,y)\sin^3\Theta, \end{cases}$$

$$(1.33)\quad \widetilde{D}(\xi,\eta) = -d(x,y)\sin\Theta + \tilde{d}(x,y)\cos\Theta,$$

wobei die Größen x, y auf der rechten Seite von (1.26)—(1.33) durch die Variabeln ξ, η vermöge der Substitution

$$(1.34)\quad \begin{cases} x = x_0 + \xi\cos\Theta - \eta\sin\Theta \\ y = y_0 + \xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta \end{cases}$$

auszudrücken sind. Aus (1.26)—(1.33) folgt

$$(1.35)\quad \begin{cases} A(\xi,\eta) - \widetilde{B}(\xi,\eta) = \left(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\right)\cos^3\Theta + \\ \qquad + \left(3\tilde{a}(x,y) + 2\left(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\right)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(2\left(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\right) + 3c(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \qquad + \left(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\right)\sin^3\Theta \end{cases}$$

und

$$(1.36)\quad \begin{cases} B(\xi,\eta) - \widetilde{C}(\xi,\eta) = \left(b(x,y) - \tilde{c}(x,y)\right)\cos^3\Theta + \\ \qquad + \left(2\left(\tilde{b}(x,y) - a(x,y)\right) + 3c(x,y)\right)\cos^2\Theta\sin\Theta + \\ \qquad + \left(2\left(\tilde{c}(x,y) - b(x,y)\right) - 3\tilde{a}(x,y)\right)\cos\Theta\sin^2\Theta + \\ \qquad + \left(a(x,y) - \tilde{b}(x,y)\right)\sin^3\Theta. \end{cases}$$

Setzt man $\zeta = \xi + i\eta$, so ergeben sich für die Koeffizienten $A(\zeta) = A(\xi,\eta), \ldots, \widetilde{D}(\zeta) = \widetilde{D}(\xi,\eta)$ die folgenden Abschätzungen:

$$(1.37)\quad |A(\zeta)|, \ldots, |D(\zeta)| \leqq 12 M_0 \qquad (|\zeta| < \infty)$$

und

$$(1.38)\quad \begin{cases} |\tilde{A}(\zeta_2) - \tilde{A}(\zeta_1)| \leqq 12 M_1 |\zeta_2 - \zeta_1| \\ |(A(\zeta_2) - \tilde{B}(\zeta_2)) - (A(\zeta_1) - \tilde{B}(\zeta_1))| \leqq 12 M_1 |\zeta_2 - \zeta_1| \\ |(B(\zeta_2) - \tilde{C}(\zeta_2)) - (B(\zeta_1) - \tilde{C}(\zeta_1))| \leqq 12 M_1 |\zeta_2 - \zeta_1| \\ |C(\zeta_2) - C(\zeta_1)| \leqq 12 M_1 |\zeta_2 - \zeta_1| \\ (|\zeta_1| < \infty,\ |\zeta_2| < \infty). \end{cases}$$

Man definiere nun die Funktion $X = X(\eta, g_0, g_1)$ durch die Gleichung

$$(1.39)\quad \begin{cases} X(\eta, g_0, g_1) = -\tilde{A}(g_0, \eta)\, g_1^3 + (A(g_0, \eta) - \tilde{B}(g_0, \eta))\, g_1^2 + \\ \qquad + (B(g_0, \eta) - \tilde{C}(g_0, \eta))\, g_1 + C(g_0, \eta). \end{cases}$$

Wegen (1.38) genügt X in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich von (η, g_0, g_1) einer Lipschitzbedingung, und aus (1.37) folgt die Abschätzung

$$(1.40)\quad |X(\eta, g_0, g_1)| \leqq 72 M_0$$

für $\quad |\eta| < \infty, \quad |g_0| < \infty \quad$ und $\quad |g_1| \leqq 1.$

Nach einem fundamentalen Existenzsatz gibt es eine für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$ zweimal stetig differenzierbare, reelle Lösung $g = g(\eta)$ der Differentialgleichung

$$(1.41)\quad g''(\eta) = X(\eta, g(\eta), g'(\eta))$$

mit

$$(1.42)\quad g(0) = g'(0) = 0$$

und

$$(1.43)\quad |g'(\eta)| \leqq 1$$ [11].

Hieraus folgt insbesondere

$$(1.44)\quad |g''(\eta)| \leqq 72 M_0 \quad \left(|\eta| < \frac{1}{72 M_0}\right).$$

Wir betrachten nun die folgende reelle Funktion der Variablen u, v [12]:

$$(1.45)\quad f(w) = f(u, v) = \xi(u, v) - g(\eta(u, v)).$$

Wegen (1.15) ist $|\eta(u, v)| < \frac{1}{72 M_0}$ $(|w - w_0| < \varrho)$. Also ist $f(w)$ für $|w - w_0| < \varrho$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt

$$(1.46)\quad \begin{cases} \Delta f = \Delta \xi - g'(\eta)\, \Delta \eta - g''(\eta)\,(\eta_u^2 + \eta_v^2) \\ \quad = [A(\xi, \eta) - g'(\eta)\, \tilde{A}(\xi, \eta)]\,(\xi_u^2 + \xi_v^2) + \\ \quad + [B(\xi, \eta) - g'(\eta)\, \tilde{B}(\xi, \eta)]\,(\xi_u \eta_u + \xi_v \eta_v) + \\ \quad + [C(\xi, \eta) - g'(\eta)\, \tilde{C}(\xi, \eta) - g''(\eta)]\,(\eta_u^2 + \eta_v^2) + \\ \quad + [D(\xi, \eta) - g'(\eta)\, \tilde{D}(\xi, \eta)]\,(\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u). \end{cases}$$

[11]) Siehe z.B. KAMKE [16], S. 124—126.

[12]) Zu diesem Schritt vergleiche man LEWY [20], insbes. S. 691.

Ersetzt man hierin die Größen ξ_u und ξ_v durch die Ausdrücke

$$\xi_u = f_u + g'(\eta)\,\eta_u \tag{1.47}$$

und

$$\xi_v = f_v + g'(\eta)\,\eta_v \tag{1.48}$$

und berücksichtigt (1.39) und (1.41), so erhält man für $f(w)$ die Differentialgleichung

$$\Delta f = P(f_u^2 + f_v^2) + Q(f_u\eta_u + f_v\eta_v) + R(\eta_u^2 + \eta_v^2) + S(f_u\eta_v - f_v\eta_u) \tag{1.49}$$

mit

$$P = A(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\tilde{A}(\xi,\eta), \tag{1.50}$$

$$Q = B(\xi,\eta) + [2A(\xi,\eta) - \tilde{B}(\xi,\eta)]\,g'(\eta) - 2\tilde{A}(\xi,\eta)\,g'(\eta)^2, \tag{1.51}$$

$$\left\{\begin{aligned} R = &-[\tilde{A}(\xi,\eta) - \tilde{A}(g(\eta),\eta)]\,g'(\eta)^3 + \\ &+ \left[\left(A(\xi,\eta) - \tilde{B}(\xi,\eta)\right) - \left(A(g(\eta),\eta) - \tilde{B}(g(\eta),\eta)\right)\right] g'(\eta)^2 + \\ &+ \left[\left(B(\xi,\eta) - \tilde{C}(\xi,\eta)\right) - \left(B(g(\eta),\eta) - \tilde{C}(g(\eta),\eta)\right)\right] g'(\eta) + \\ &+ \left[C(\xi,\eta) - C(g(\eta),\eta)\right] \end{aligned}\right. \tag{1.52}$$

und

$$S = D(\xi,\eta) - g'(\eta)\,\tilde{D}(\xi,\eta). \tag{1.53}$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (1.49) abschätzen. Zunächst erhält man aus (1.16), (1.22), (1.23), (1.43), (1.47) und (1.48) die Ungleichungen

$$|\xi_u|, \ldots, |\eta_v| \leqq K \tag{1.54}$$

und

$$|f_u|, \quad |f_v| \leqq 2K \tag{1.55}$$

für $|w - w_0| < \varrho$.

Ferner ergeben sich aus den Darstellungen (1.50)—(1.53) unter Berücksichtigung der Ungleichungen (1.37), (1.38) und (1.43) die folgenden Abschätzungen für die Koeffizienten P, Q, R und S:

$$\left\{\begin{aligned} &|P|,\ |Q|,\ |S| \leqq 72\,M_0 \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \frac{1}{72\,M_0}\right) \end{aligned}\right. \tag{1.56}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &|R| \leqq 48\,M_1\,|\xi - g(\eta)| \\ &\left(|\xi| < \infty,\ |\eta| < \frac{1}{72\,M_0}\right). \end{aligned}\right. \tag{1.57}$$

Trägt man dies in (1.49) ein und beachtet (1.45), so entsteht

$$\left\{\begin{aligned} |\Delta f| \leqq\ &|P f_u + Q\eta_u + S\eta_v|\,|f_u| + \\ &+ |P f_v + Q\eta_v - S\eta_u|\,|f_v| + (\eta_u^2 + \eta_v^2)\,|R| \\ \leqq\ &288\,K\,M_0(|f_u| + |f_v|) + 96\,K^2 M_1\,|f(w)|, \end{aligned}\right. \tag{1.58}$$

also

$$|f_{w\bar{w}}| \leqq (288 K M_0 + 24 K^2 M_1)\left(|f_w| + |f|\right) \tag{1.59}$$

für $|w - w_0| < \varrho$, womit **Hilfssatz 3** vollständig bewiesen ist.

Jetzt sind wir in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

SATZ 1. *Es sei* $z^{(k)}(w) = x^{(k)}(u,v) + i\,y^{(k)}(u,v)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von Funktionen aus* $\Gamma_0(M_0, M_1; D)$ *mit* $\frac{\partial(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial(u,v)} \neq 0$ $(w \in D)$, *die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jedem endlichen abgeschlossenen Teilbereich von* D *gegen eine in* D *einmal stetig differenzierbare Funktion* $z(w) = x(u,v) + i\,y(u,v)$ *konvergieren. Dann ist entweder*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \qquad (w \in D) \tag{1.60}$$

oder

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0 \qquad (w \in D). \tag{1.61}$$

BEWEIS. Angenommen, die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ verschwindet in einem Punkt $w_0 \in D$. Dann gibt es eine reelle Zahl Θ mit

$$x_u \cos\Theta + y_u \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0) \tag{1.62}$$

und

$$x_v \cos\Theta + y_v \sin\Theta = 0 \qquad (w = w_0). \tag{1.63}$$

Ferner lassen sich auf Grund unserer Voraussetzungen zwei positive Zahlen ϱ und K so bestimmen, daß die Kreisscheibe $|w - w_0| \leqq \varrho$ zu D gehört und für $|w - w_0| \leqq \varrho$ und alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} |z^{(k)}(w) - z_0^{(k)}| \leqq \dfrac{1}{1 + 72 M_0} \\ \left(z_0^{(k)} = z^{(k)}(w_0) = x_0^{(k)} + i\,y_0^{(k)}\right) \end{array}\right. \tag{1.64}$$

und

$$|z_u^{(k)}(w)| + |z_v^{(k)}(w)| \leqq K \tag{1.65}$$

erfüllt sind. Nach Hilfssatz 3 gibt es dann eine Folge reeller Funktionen $\{g_k(\eta)\}$, die für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$ zweimal stetig differenzierbar sind und außerdem den folgenden Bedingungen genügen:

(I) Es ist

$$g_k(0) = g_k'(0) = 0, \tag{1.66}$$

und es gelten die Ungleichungen

$$|g_k'(\eta)| \leqq 1 \tag{1.67}$$

und

$$|g_k''(\eta)| \leqq 72 M_0 \tag{1.68}$$

für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$

(II) Die reellen Funktionen

$$(1.69)\quad \begin{cases} f^{(k)}(w) = \cos\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right) + \sin\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \\ \qquad - g_k\left(\cos\Theta\cdot\left(y^{(k)}(u,v) - y_0^{(k)}\right) - \sin\Theta\cdot\left(x^{(k)}(u,v) - x_0^{(k)}\right)\right) \end{cases}$$

sind für $|w-w_0|<\varrho$ erklärt und genügen dort der Differentialungleichung

$$(1.70)\qquad |f_{w\bar{w}}^{(k)}| \leqq M\left(|f_w^{(k)}| + |f^{(k)}|\right)$$

mit

$$(1.71)\qquad M = 288 K M_0 + 24 K^2 M_1 .$$

Da die Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial(u,v)}$ $(k=1,2,\ldots)$ in D nicht verschwinden, so ist

$$(1.72)\qquad f_w^{(k)}(w) \neq 0$$

für $|w-w_0|<\varrho$ und $k=1,2,\ldots$. Ferner entnimmt man aus (1.66)—(1.68) die Existenz einer Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen derart, daß die Funktionen $g_{k_\nu}(\eta)$ zusammen mit ihren ersten Ableitungen gleichmäßig in $|\eta| \leqq \frac{1}{72 M_0}$ gegen eine für $|\eta| < \frac{1}{72 M_0}$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $g(\eta)$ konvergieren, für die

$$(1.73)\qquad g(0) = g'(0) = 0$$

ausfällt. Setzt man also $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ und

$$(1.74)\quad \begin{cases} f(w) = \cos\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right) + \sin\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \\ \qquad - g\left(\cos\Theta\cdot\left(y(u,v) - y_0\right) - \sin\Theta\cdot\left(x(u,v) - x_0\right)\right), \end{cases}$$

so ist $f(w)$ für $|w-w_0|<\varrho$ einmal stetig differenzierbar, und die Relationen

$$(1.75)\qquad f^{(k_\nu)}(w) \to f(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

und

$$(1.76)\qquad f_w^{(k_\nu)}(w) \to f_w(w) \qquad (\nu\to\infty)$$

gelten gleichmäßig für $|w-w_0| \leqq \varrho$. Aus (1.62), (1.63) und (1.73) folgt

$$(1.77)\qquad f(w_0) = f_w(w_0) = 0 .$$

Hilfssatz 2 wird also anwendbar und liefert

$$(1.78)\qquad f(w) \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right).$$

Daraus, sowie aus (1.74), folgt aber

$$(1.79)\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0 \qquad \left(|w-w_0| \leqq \varrho\right)$$

und somit $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 0$ in D, somit Satz 1 bewiesen ist.

§ 2. Abschätzung der Funktionaldeterminante

Wir stellen uns jetzt das Problem, unter geeigneten Normierungsbedingungen die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ einer Abbildung $(u, v) \to (x, y)$ nach unten abzuschätzen, falls x und y einem System elliptischer Differentialgleichungen der Form (13) und (14) genügen. Die Überlegungen beruhen einerseits auf Satz 1 und andererseits auf der Kenntnis der a-priori-Schranken für die ersten Ableitungen von x und y, über die die nächsten beiden Hilfssätze Auskunft geben.

HILFSSATZ 4. *Die komplexwertige Funktion $z = z(w) = x(u, v) + i y(u, v)$ sei für $|w - w_0| < \varrho$ zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialungleichung*

$$|\Delta z| \leqq \alpha(|z_u|^2 + |z_v|^2) \tag{2.1}$$

mit $0 \leqq \alpha < 1$. Außerdem sei

$$|z(w)| \leqq 1 \tag{2.2}$$

für $|w - w_0| < \varrho$. Dann gibt es eine feste positive, nur von α abhängige Zahl $k = k(\alpha)$ mit

$$\left(|z_u| + |z_v|\right)_{w = w_0} \leqq \frac{k(\alpha)}{\varrho}. \tag{2.3}$$

Für den Beweis dieses Hilfssatzes sei auf [*12*], Theorem 2, verwiesen [13]).

HILFSSATZ 5. *Es sei Γ^* eine Menge von komplexwertigen Funktionen $z = z(w) = x(u, v) + i y(u, v)$, die in der Kreisscheibe $|w| < 1$ zweimal stetig differenzierbar und außerdem für $|w| \leqq 1$ gleichgradig stetig sind. Ferner gelte für alle Funktionen $z(w) \in \Gamma^*$ die Differentialungleichung*

$$|\Delta z| \leqq \beta(|z_u|^2 + |z_v|^2) \tag{2.4}$$

mit einer positiven Zahl β. Dann hat man für $0 \leqq r < 1$ und $0 < \nu < 1$ die Abschätzungen

$$\underset{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma^*}}{\text{Obere Grenze}} \left(|z_u| + |z_v|\right) < \infty \tag{2.5}$$

und

$$\underset{\substack{|w_1|,\ |w_2| \leqq r,\ w_1 \neq w_2 \\ z(w) \in \Gamma^*}}{\text{Obere Grenze}} \frac{|z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)|}{|w_2 - w_1|^\nu} < \infty. \tag{2.6}$$

BEWEIS. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ^* gibt es eine positive, nur von β und r abhängige Zahl $\delta(\beta, r)$ mit $\delta(\beta, r) < 1 - r$, so daß die Ungleichung

$$|z(w_2) - z(w_1)| \leqq \frac{1}{2\beta} \tag{2.7}$$

[13]) Der Satz verliert seine Gültigkeit für $\alpha \geqq 1$ (vgl. [*12*], S. 230). Für den Beweis des folgenden Hilfssatzes reicht die weniger tiefliegende Behauptung aus, daß (2.3) für $0 \leqq \alpha < \alpha_0$ gilt, wobei α_0 eine feste positive Zahl bedeutet (vgl. [*11*], § 2).

für $|w_2 - w_1| \leqq \delta(\beta, r)$ $(|w_1|, |w_2| \leqq 1)$ und alle Funktionen $z(w) \in \Gamma^*$ erfüllt ist. Es sei nun w_0 eine beliebige komplexe Zahl mit $|w_0| \leqq r$, und man setze

$$Z(w) = 2\beta\,(z(w) - z(w_0)). \tag{2.8}$$

Offenbar ist die Funktion $Z(w)$ für $|w - w_0| < \delta(\beta, r)$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Differentialungleichung

$$|\Delta Z| \leqq \tfrac{1}{2}\,(|Z_u|^2 + |Z_v|^2). \tag{2.9}$$

Ferner ist

$$|Z(w)| \leqq 1 \qquad (|w - w_0| < \delta(\beta, r)). \tag{2.10}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 4 (mit $\alpha = \frac{1}{2}$, $\varrho = \delta(\beta, r)$) ergibt sich

$$(|Z_u| + |Z_v|)_{w=w_0} \leqq \frac{k(\frac{1}{2})}{\delta(\beta, r)}, \tag{2.11}$$

also

$$(|z_u| + |z_v|)_{w=w_0} \leqq \frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta \cdot \delta(\beta, r)}, \tag{2.12}$$

womit die Ungleichung (2.5) bewiesen ist. Um (2.6) zu beweisen, setze man

$$\hat{Z}(w) = z(w) - z(0). \tag{2.13}$$

Wegen (2.4) und (2.12) hat man für $|w| \leqq \frac{1}{2}(1 + r)$ die Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned} |\Delta \hat{Z}| &\leqq \beta\,(|z_u|^2 + |z_v|^2) \\ &\leqq \beta \cdot \left(\frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta \cdot \delta\left(\beta, \frac{1+r}{2}\right)} \right)^2 \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

und

$$|\hat{Z}(w)| \leqq \frac{k(\frac{1}{2})}{2\beta \cdot \delta\left(\beta, \frac{1+r}{2}\right)}. \tag{2.15}$$

Daraus folgt (2.6) nach einem bekannten potentialtheoretischen Satz[14]).

Definition 2. *$\Gamma_1(M_0, M_1)$ ist die Menge aller für $|w| < 1$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $z(w) = x(u, v) + i\,y(u, v)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(I) *$z = z(w)$ bildet die Kreisscheibe $|w| \leqq 1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ $(z = x + iy)$ ab, und es ist*

$$x_u\,y_v - x_v\,y_u \neq 0 \tag{2.16}$$

für $|w| < 1$.

(II) *Die Funktionen $x = x(u, v)$ und $y = y(u, v)$ genügen für $|w| < 1$ den partiellen Differentialgleichungen:*

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x = {} & h_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + h_2(x, y)\,(x_u\,y_u + x_v\,y_v) + \\ & + h_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + h_4(x, y)\,(x_u\,y_v - x_v\,y_u) \end{aligned}\right. \tag{2.17}$$

[14]) Siehe z. B. [*12*], Lemma 1.

und

$$(2.18)\quad \begin{cases} \Delta y = \tilde{h}_1(x, y)\,(x_u^2 + x_v^2) + \tilde{h}_2(x, y)\,(x_u y_u + x_v y_v) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(x, y)\,(y_u^2 + y_v^2) + \tilde{h}_4(x, y)\,(x_u y_v - x_v y_u)\,. \end{cases}$$

Dabei sind die Koeffizienten $h_1(x, y), \ldots, \tilde{h}_4(x, y)$ *für* $|z| \leqq 1$ *einmal stetig differenzierbare, reelle Funktionen, und es gelten für* $|z| \leqq 1$ *die Abschätzungen*

$$(2.19)\quad \sum_{\nu=1}^{4} \left(|h_\nu(x, y)| + |\tilde{h}_\nu(x, y)|\right) < M_0 < \infty$$

und

$$(2.20)\quad \sum_{\nu=1}^{4} \left(\left|\frac{\partial \omega_\nu}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \omega_\nu}{\partial y}\right|\right) < M_1 < \infty$$

mit

$$(2.21)\quad \omega_1(x, y) = \tilde{h}_1(x, y)\,,$$

$$(2.22)\quad \omega_2(x, y) = h_1(x, y) - \tilde{h}_2(x, y)\,,$$

$$(2.23)\quad \omega_3(x, y) = h_2(x, y) - \tilde{h}_3(x, y)$$

und

$$(2.24)\quad \omega_4(x, y) = h_3(x, y)\,.$$

Es gilt nun der folgende

HILFSSATZ 6. *Es sei* Γ_1^* *eine Teilmenge von Funktionen* $z(w)$ *aus* $\Gamma_1(M_0, M_1)$, *die für* $|w| \leqq 1$ *gleichgradig stetig sind. Dann gelten für* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$ *die folgenden Abschätzungen*

$$(2.25)\quad \underset{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}}{\text{Obere Grenze}} \left(|z_u| + |z_v|\right) < \infty\,,$$

$$(2.26)\quad \underset{\substack{|w_1|,\ |w_2| \leqq r,\ w_1 \neq w_2 \\ z(w) \in \Gamma_1^*}}{\text{Obere Grenze}} \frac{|z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)|}{|w_2 - w_1|^\nu} < \infty$$

und

$$(2.27)\quad \underset{\substack{|w| \leqq r \\ z(w) \in \Gamma_1^*}}{\text{Untere Grenze}} |x_u y_v - x_v y_u| > 0\,.$$

BEWEIS. Wegen (2.19) genügt jede Funktion $z(w) \in \Gamma_1^*$ der Differentialungleichung

$$(2.28)\quad |\Delta z| \leqq 2M_0\left(|z_u|^2 + |z_v|^2\right) \qquad \left(|w| < 1\right).$$

Hilfssatz 5 wird also anwendbar und liefert die Abschätzungen (2.25) und (2.26). Die Ungleichung (2.27) beweisen wir durch eine reductio ad absurdum. Angenommen, (2.27) sei falsch. Dann gibt es eine Punktfolge $\{w_k\}$ mit $|w_k| \leqq r$ und eine Funktionenfolge $\{z^{(k)}(w)\} \in \Gamma_1^*$ mit

$$(2.29)\quad \lim_{k \to \infty} \left(x_u^{(k)} y_v^{(k)} - x_v^{(k)} y_u^{(k)}\right)_{w = w_k} = 0\,.$$

Wegen (2.25), (2.26) und $|z(w)| \leqq 1$ $\left(|w| \leqq 1\right)$ gibt es eine Teilfolge $\{k_\nu\}$ der natürlichen Zahlen, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I) Es ist

$$\lim_{\nu \to \infty} w_{k_\nu} = w^* \tag{2.30}$$

mit $|w^*| \leqq r < 1$.

(II) Die Funktionen $z^{(k_\nu)}(w)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konvergieren zusammen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $|w| \leqq R < 1$ gegen eine für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbare Grenzfunktion $z(w) = x(u, v) + i\, y(u, v)$. Daraus, sowie aus (2.29), entnimmt man die Gleichung

$$(x_u\, y_v - x_v\, y_u)_{w = w^*} = 0. \tag{2.31}$$

Offenbar ist $\Gamma_1(M_0, M_1) \subset \Gamma_0(M_0, M_1; D)$ mit $D = \{|w| < 1\}$[15]. Also ist Satz 1 auf die Funktionenfolge $\{z^{(k_\nu)}(w)\}$ anwendbar und liefert wegen (2.31) die Gleichung

$$x_u\, y_v - x_v\, y_u \equiv 0 \qquad (|w| < 1). \tag{2.32}$$

Wir wollen zeigen, daß dies unmöglich ist. Zunächst gibt es wegen

$$|z^{(k_\nu)}(w)| = 1 \qquad (|w| = 1) \tag{2.33}$$

und der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge Γ_1^* eine positive Zahl ϱ mit $\varrho < 1$ und

$$|z^{(k_\nu)}(w)| > \tfrac{1}{2} \qquad (|w| \geqq \varrho;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{2.34}$$

Also bilden die Funktionen $z = z^{(k_\nu)}(w)$ die Kreisscheibe $|w| < \varrho$ auf Gebiete Δ_ν ab, die die Kreisscheibe $|z| \leqq \frac{1}{2}$ im Innern enthalten. Daraus, sowie aus (2.16), folgt aber

$$\iint\limits_{|w| < \varrho} \left| \frac{\partial(x^{(k_\nu)}, y^{(k_\nu)})}{\partial(u, v)} \right| du\, dv = \iint\limits_{\Delta_\nu} dx\, dy \geqq \iint\limits_{|z| \leqq \frac{1}{2}} dx\, dy = \frac{\pi}{4} \tag{2.35}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots$. Durch Grenzübergang $(\nu \to \infty)$ entsteht

$$\iint\limits_{|w| < \varrho} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv \geqq \frac{\pi}{4}, \tag{2.36}$$

im Widerspruch zu (2.32). Damit ist Hilfssatz 6 in allen Teilen bewiesen.

Definition 3. *$\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ ist die Teilmenge aller komplexwertigen Funktionen $z(w)$ aus $\Gamma_1(M_0, M_1)$, für die*

$$z(0) = 0 \tag{2.37}$$

und

$$\iint\limits_{|w| < 1} (|z_u|^2 + |z_v|^2)\, du\, dv \leqq P < \infty \tag{2.38}$$

ausfällt.

---

[15]) Man braucht nur

$$a(z) = \begin{cases} h_1(z) & (|z| \leqq 1) \\ h_1(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}, \ldots, \tilde{d}(z) = \begin{cases} \tilde{h}_4(z) & (|z| \leqq 1) \\ \tilde{h}_4(1/\bar{z}) & (|z| > 1) \end{cases}$$

zu setzen.

Nunmehr können wir das Hauptresultat dieses Paragraphen in folgender Form aussprechen:

SATZ 2 [16]). *Es sei* $0 \leqq r < 1$ *und* $0 < \nu < 1$. *Dann gibt es drei feste positive Zahlen* $\lambda_1 = \lambda_1(M_0, M_1, P, r)$, $\lambda_2 = \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)$ *und* $\lambda_3 = \lambda_3(M_0, M_1, P, r)$ *derart, daß für jede Funktion* $z(w) = x(u, v) + i\, y(u, v) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ *die Ungleichungen*

$$(2.39) \qquad |z_u| + |z_v| \leqq \lambda_1(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r),$$

$$(2.40) \qquad \begin{cases} |z_u(w_2) - z_u(w_1)| + |z_v(w_2) - z_v(w_1)| \leqq \lambda_2(M_0, M_1, P, r, \nu)\ |w_2 - w_1|^\nu \\ \qquad (|w_1| \leqq r,\ |w_2| \leqq r) \end{cases}$$

und

$$(2.41) \qquad |x_u y_v - x_v y_u| \geqq \lambda_3(M_0, M_1, P, r) \qquad (|w| \leqq r)$$

erfüllt sind [17]).

BEWEIS. Für jede Funktion $z = z(w) \in \Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gilt die auf LEBESGUE [*17*] zurückgehende Abschätzung [18])

$$(2.42) \qquad |z(w_2) - z(w_1)| \leqq 4 \sqrt{\frac{\pi P}{-\log|w_2 - w_1|}} \qquad (|w_2 - w_1| < 1;\ |w_1|, |w_2| \leqq 1).$$

Daraus folgt die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$. Anwendung von Hilfssatz 6 (mit $\Gamma_1^* = \Gamma_2(M_0, M_1, P)$) liefert die Behauptung.

§ 3. Differentialgeometrische Anwendungen (berandete Flächen)

Hauptziel dieses Paragraphen ist die Herleitung neuer a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement. Für unsere Untersuchungen benötigen wir einige Grundformeln der Differentialgeometrie, die wir hier zur Bequemlichkeit des Lesers noch einmal anführen [19]). Dabei verwenden wir die in der Vektoralgebra üblichen Bezeichnungen [20]).

Unter einem regulären Flächenstück $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine in einem Gebiet Ω der uv-Ebene definierte Vektorfunktion

$$(3.1) \qquad \mathfrak{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(I) $x(u, v)$, $y(u, v)$ und $z(u, v)$ sind reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktionen in Ω.

(II) Für $(u, v) \in \Omega$ ist

$$(3.2) \qquad |\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v| > 0.$$

---

16) Dieses Theorem enthält Satz 3 aus [*11*], sowie Theorem 10 und Theorem 11 aus [*12*].

17) Auf Grund von Hilfssatz 5 und (2.28) sind die Größen λ_1 und λ_2 in Wahrheit von M_1 unabhängig.

18) Vgl. z. B. [*12*], Lemma 16.

19) Wegen ausführlicher Beweise sei z. B. auf BLASCHKE [*1*] verwiesen.

20) Vgl. z. B. BLASCHKE [*1*], § 1—2.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Flächennormale $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}(u,v)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{N}=\frac{\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|} \tag{3.3}$$

erklärt und stellt eine in Ω einmal stetig differenzierbare Vektorfunktion dar. Auf $\mathfrak{F}$ betrachten wir die beiden quadratischen Differentialformen

$$ds^2=(d\mathfrak{x})^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{3.4}$$

(erste Fundamentalform) und

$$-d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{N}=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \tag{3.5}$$

(zweite Fundamentalform). Aus (3.2)—(3.5) folgt

$$E=\mathfrak{x}_u^2,\qquad F=\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v,\qquad G=\mathfrak{x}_v^2, \tag{3.6}$$

$$EG-F^2=|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|^2>0 \tag{3.7}$$

und

$$L=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{uu},\qquad M=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{uv},\qquad N=\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{vv}. \tag{3.8}$$

Das Oberflächenelement von $\mathfrak{F}$ ist

$$do=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{3.9}$$

und die mittlere Krümmung H sowie die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{F}$ sind durch die Ausdrücke

$$H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)} \tag{3.10}$$

bzw.

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \tag{3.11}$$

erklärt

Für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u,v)$ und die ersten Ableitungen des Normalenvektors $\mathfrak{N}(u,v)$ hat man die Gauß-Weingartenschen Ableitungsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu}&=\left\{\begin{matrix}1\,1\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1\,1\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+L\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{uv}&=\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+M\mathfrak{N}\\ \mathfrak{x}_{vv}&=\left\{\begin{matrix}2\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_u+\left\{\begin{matrix}2\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_v+N\mathfrak{N}\end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

und

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{N}_u&=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\mathfrak{x}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\mathfrak{x}_v\\ \mathfrak{N}_v&=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\mathfrak{x}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\mathfrak{x}_v.\end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

Dabei sind $\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}$ die Christoffelschen Symbole

$$(3.14)\quad \left\{\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} &= \frac{G E_u + F E_v - 2 F F_u}{2(EG - F^2)}\\
\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} &= \frac{2 E F_u - E E_v - F E_u}{2(EG - F^2)}\\
\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} &= \frac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)}\\
\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} &= \frac{E G_u - F E_v}{2(EG - F^2)}\\
\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} &= \frac{2 G F_v - G G_u - F G_v}{2(EG - F^2)}\\
\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} &= \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ der Fläche $\mathfrak{F}$ in Ω dreimal stetig differenzierbar ist. Dann lauten die Integrabilitätsbedingungen für das System (3.12)—(3.13), also die Gauß-Codazzischen Gleichungen, folgendermaßen:

$$(3.15)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{LN - M^2}{EG - F^2} &= K\\
&= (EG - F^2)^{-2}\left\{\begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2} G_u\\ F & G & \frac{1}{2} G_v\\ \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{1}{2} E_v & F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu}\end{vmatrix} - \right.\\
&\qquad\left. - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2} E_v\\ F & G & \frac{1}{2} G_u\\ \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u & 0\end{vmatrix}\right\}
\end{aligned}\right.$$

und

$$(3.16)\quad \left\{\begin{aligned}
L_v - M_u &= \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} L + \left(\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\right) M - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} N\\
M_v - N_u &= \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} L + \left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right) M - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} N.
\end{aligned}\right.$$

(3.15) ist das Theorema Egregium von GAUSS, welches besagt, daß K durch die Funktionen E, F und G eindeutig bestimmt ist. Auch wenn keine Realisierung des Linienelements ds^2 durch eine reguläre Fläche $\mathfrak{F}$ im dreidimensionalen Raume vorliegt, bezeichnen wir den Ausdruck auf der rechten Seite von (3.15) als Gaußsche Krümmung der Differentialform ds^2.

Es sei nun $\mathfrak{F}$ ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung. Wegen $LN - M^2 > 0$ lassen sich dann unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an Stelle von (u, v) neue Variable (α, β) (isotherm-konjugierte

Parameter) so einführen, daß stets

$$-d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{N} = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) \qquad (\lambda \neq 0) \tag{3.17}$$

ausfällt. Wie DARBOUX zuerst erkannt hat, genügen die Funktionen $u(\alpha, \beta)$ und $v(\alpha, \beta)$ einem eigentümlichen System partieller Differentialgleichungen der Form (13) und (14) mit Koeffizienten $h_1, \ldots, \tilde{h}_4$, die nur von der *ersten* Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{F}$ abhängen[21]. Dies ist der Ausgangspunkt unserer weiteren Überlegungen. Für unsere Zwecke ist es erforderlich, die Parameter (α, β) *im Großen* einzuführen, was im nächsten Hilfssatz geschehen soll.

HILFSSATZ 7. *Es sei* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ $\big((u, v) \in \Omega\big)$ *ein reguläres Flächenstück positiver Gaußscher Krümmung* $K(u, v)$. *Außerdem seien die Koeffizienten* $E(u, v)$, $F(u, v)$ *und* $G(u, v)$ *des Linienelementes* ds^2 *von* $\mathfrak{F}$ *für* $(u, v) \in \Omega$ *viermal stetig differenzierbar. Dann gibt es zu jeder in* Ω *enthaltenen Kreisscheibe* $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqq \varrho^2$ *ein Paar reeller Funktionen* $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(I) $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *sind für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *zweimal stetig differenzierbar und bilden die Kreisscheibe* $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ *eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe* $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqq \varrho^2$ *ab. Außerdem ist* $u(0, 0) = u_0$, $v(0, 0) = v_0$ *und*

$$u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha \neq 0 \tag{3.18}$$

für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.

(II) $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *genügen für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *den partiellen Differentialgleichungen*

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta u + \left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \\ &\quad + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{K_v}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0 \end{aligned}\right. \tag{3.19}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta v + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{K_u}{2K}\right)(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + \\ &\quad + \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{K_v}{2K}\right)(v_\alpha^2 + v_\beta^2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{3.20}$$

(III) *Für* $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ *gelten die Darstellungen*

$$L = \sqrt{K}\sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}, \tag{3.21}$$

$$M = -\sqrt{K}\sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.22}$$

und

$$N = \sqrt{K}\sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \tag{3.23}$$

[21] Siehe [*6*], § 725. Diese fundamentale Tatsache wurde bereits von H. LEWY bei der Lösung des Weylschen Problems für den Fall einer analytischen Metrik benutzt (s. [*21*], insbes. S. 106).

BEWEIS. Nach einem Theorem von L. NIRENBERG ([*23*], S. 349) ist der Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ von $\mathfrak{F}$ dreimal stetig differenzierbar, und die dritten Ableitungen von $\mathfrak{x}(u, v)$ genügen in jedem endlichen, abgeschlossenen Teilbereich $\tilde{\Omega}$ von Ω einer Hölder-Bedingung. Somit sind auch die zweiten Fundamentalgrößen L, M und N von $\mathfrak{F}$ in Ω stetig differenzierbar und besitzen in $\tilde{\Omega}$ hölderstetige erste Ableitungen. Daraus, sowie aus $LN - M^2 > 0$, folgt die Existenz zweier reeller Funktionen $u = u(\alpha, \beta)$ und $v = v(\alpha, \beta)$, die

1. die Eigenschaften (I) besitzen,

2. für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ den partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta u = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.24}$$

und

$$\Delta v = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}}\right)\right](u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \tag{3.25}$$

genügen und

3. die Gleichungen

$$\frac{L}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{v_\alpha^2 + v_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}, \tag{3.26}$$

$$\frac{M}{\sqrt{LN - M^2}} = -\frac{u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.27}$$

und

$$\frac{N}{\sqrt{LN - M^2}} = \frac{u_\alpha^2 + u_\beta^2}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha} \tag{3.28}$$

erfüllen[22]). Wendet man jetzt die Gauß-Codazzischen Gln. (3.15)—(3.16) an, so erhält man aus (3.24)—(3.28) die Behauptungen (II) und (III) unseres Hilfssatzes[23]). Damit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Unser nächstes Ziel besteht darin, das Dirichletsche Integral

$$\iint_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta$$

nach oben abzuschätzen. Es gilt der folgende

HILFSSATZ 8. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt. Außerdem sei*

$$|E|,\ |F|,\ |G| \leqq \eta^+ < \infty, \tag{3.29}$$

$$EG - F^2 \geqq \eta^- > 0 \tag{3.30}$$

und

$$K \geqq \varkappa > 0 \tag{3.31}$$

[22]) Siehe [*13*], Lemma 2.

[23]) Zu diesem letzten Schritt des Beweises vgl. [*13*], S. 39—42.

für $(u, v) \in \Omega$. *Dann gilt für die in Hilfssatz 7 erklärten Abbildungsfunktionen* $u = u(\alpha, \beta)$ *und* $v = v(\alpha, \beta)$ *die Ungleichung*

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \cdot \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \tag{3.32}$$

Beweis. Zunächst entnimmt man aus (3.10) und aus den Darstellungen (3.21)–(3.23) für die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{F}$ den Ausdruck

$$H = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)}{u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha}. \tag{3.33}$$

Es sei nun R eine beliebige positive Zahl mit $R < 1$, und $\mathfrak{G}$ sei das bei der Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ entstehende Bildgebiet der Kreisscheibe $\alpha^2 + \beta^2 < R^2$. Dann erhält man aus (3.33) die Gleichung

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do = \tfrac{1}{2} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} \sqrt{K}\,[E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)]\, d\alpha\, d\beta. \tag{3.34}$$

Ferner gilt wegen (3.29)–(3.31) für $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{K}\,[E(u_\alpha^2 + u_\beta^2) + 2F(u_\alpha v_\alpha + u_\beta v_\beta) + G(v_\alpha^2 + v_\beta^2)] \\ &\qquad \geqq \frac{\eta^- \sqrt{\varkappa}}{2\eta^+} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2). \end{aligned}\right. \tag{3.35}$$

Trägt man diese in (3.34) ein, so entsteht

$$\left\{\begin{aligned} &\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<R^2} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \\ &\leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\mathfrak{G}} |H|\, do \leqq \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\Omega} |H|\, do = \frac{4\eta^+}{\eta^- \sqrt{\varkappa}} \iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do. \end{aligned}\right. \tag{3.36}$$

Durch Grenzübergang $(R \to 1)$ ergibt sich schließlich (3.32), womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

Aus den letzten beiden Hilfssätzen und den Resultaten von § 2 erhält man die gesuchten a-priori-Abschätzungen für die zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ einer Fläche durch ihre erste Fundamentalform. Dabei ziehen wir beliebige reguläre Flächenstücke $\mathfrak{F}$ in Betracht, deren Gaußsche Krümmung positiv ist und für die $\iint\limits_{\mathfrak{F}} |H|\, do < \infty$ ausfällt. Unser Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Satz 3. Voraussetzungen:

(I) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ $\big((u, v) \in \Omega\big)$ *ist der Ortsvektor eines regulären Flächenstückes* $\mathfrak{F}$ *mit dem Linienelement*

$$ds^2 = (d\mathfrak{x})^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{3.37}$$

Dabei sind die Funktionen $E(u,v)$, $F(u,v)$ und $G(u,v)$ in Ω viermal stetig differenzierbar und genügen dort den Ungleichungen

$$|E|,\quad |F|,\quad |G| \leqq a, \tag{3.38}$$

$$|E_u|,\quad \ldots,\quad |G_v| \leqq a, \tag{3.39}$$

$$|E_{uu}|,\quad \ldots,\quad |G_{vv}| \leqq a, \tag{3.40}$$

$$|E_{uuu}|, \ldots, |G_{vvv}| \leqq a \tag{3.41}$$

und

$$EG - F^2 \geqq a^{-1} \tag{3.42}$$

mit einer festen positiven Konstanten a.

(II) *Für die Gaußsche Krümmung $K(u,v)$ von ds^2 gilt die Ungleichung*

$$K(u,v) \geqq b > 0 \qquad \big((u,v) \in \Omega\big). \tag{3.43}$$

(III) *Es ist*

$$\iint_{\mathfrak{F}} |H|\, do \leqq c < \infty, \tag{3.44}$$

wobei H die mittlere Krümmung von $\mathfrak{F}$ bedeutet.

BEHAUPTUNG. *Für $\varrho > 0$ und $0 < \nu < 1$ gelten Abschätzungen der Form*

$$|\mathfrak{x}_{uu}|, \ldots, |\mathfrak{x}_{vv}| \leqq \tau_0(a, b, c, \varrho) < \infty \qquad \big((u,v) \in \Omega_\varrho\big) \tag{3.45}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} |\mathfrak{x}_{uu}(u_2,v_2) - \mathfrak{x}_{uu}(u_1,v_1)| \\ \vdots \\ |\mathfrak{x}_{vv}(u_2,v_2) - \mathfrak{x}_{vv}(u_1,v_1)| \end{array}\right\} \leqq \tau_1 \cdot \left(\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}\right)^{\nu} \\ \qquad\qquad \big((u_1,v_1) \in \Omega_\varrho,\ (u_2,v_2) \in \Omega_\varrho\big) \end{array}\right. \tag{3.46}$$

mit $\tau_1 = \tau_1(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty$.

BEWEIS. Es sei (u_0, v_0) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ, und es sei $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ die in Hilfssatz 7 erklärte Abbildung. Die Funktionen

$$\xi(\alpha,\beta) = \frac{u(\alpha,\beta) - u_0}{\varrho} \tag{3.47}$$

und

$$\eta(\alpha,\beta) = \frac{v(\alpha,\beta) - v_0}{\varrho} \tag{3.48}$$

führen dann die Kreisscheibe $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ eineindeutig und stetig in die Kreisscheibe $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$ über, und es gilt $\xi(0,0) = \eta(0,0) = 0$ sowie $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\alpha,\beta)} \neq 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 < 1)$. Außerdem gelten auf Grund von (3.19) und (3.20) die Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\xi = h_1(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + h_2(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\alpha + \xi_\beta\eta_\beta) + \\ \qquad + h_3(\xi,\eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + h_4(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.49}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\eta = \tilde{h}_1(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2) + \tilde{h}_2(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\alpha + \xi_\beta\eta_\beta) + \\ \qquad + \tilde{h}_3(\xi,\eta)\,(\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2) + \tilde{h}_4(\xi,\eta)\,(\xi_\alpha\eta_\beta - \xi_\beta\eta_\alpha) \end{array}\right. \tag{3.50}$$

mit

$$(3.51)\qquad \begin{cases} h_1(\xi,\eta) = -\varrho\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + \dfrac{K_u}{2K}\right) \\ h_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \dfrac{K_v}{2K}\right) \\ h_3(\xi,\eta) = -\varrho\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} \\ h_4(\xi,\eta) = 0 \end{cases}$$

und

$$(3.52)\qquad \begin{cases} \tilde h_1(\xi,\eta) = -\varrho\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} \\ \tilde h_2(\xi,\eta) = -\varrho\left(2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + \dfrac{K_u}{2K}\right) \\ \tilde h_3(\xi,\eta) = -\varrho\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} + \dfrac{K_v}{2K}\right) \\ \tilde h_4(\xi,\eta) = 0. \end{cases}$$

Aus (3.51) und (3.52) folgt

$$(3.53)\qquad \begin{cases} \omega_1(\xi,\eta) = \tilde h_1(\xi,\eta) = -\varrho\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} \\ \omega_2(\xi,\eta) = h_1(\xi,\eta) - \tilde h_2(\xi,\eta) = \varrho\left(2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\right) \\ \omega_3(\xi,\eta) = h_2(\xi,\eta) - \tilde h_3(\xi,\eta) = \varrho\left(\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right) \\ \omega_4(\xi,\eta) = h_3(\xi,\eta) = -\varrho\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\ {}^{24)}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man die Gln. (3.14)—(3.15) und macht von den Abschätzungen (3.38)—(3.43) Gebrauch, so erhält man aus (3.51)—(3.53) für $\xi^2+\eta^2 \leqq 1$ die Ungleichungen

$$(3.54)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(|h_\nu(\xi,\eta)| + |\tilde h_\nu(\xi,\eta)|\right) < M_0 = M_0(a,b,\varrho) < \infty$$

und

$$(3.55)\qquad \sum_{\nu=1}^{4}\left(\left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\xi}\right| + \left|\frac{\partial\omega_\nu}{\partial\eta}\right|\right) < M_1 = M_1(a,\varrho) < \infty.$$

Ferner hat man wegen Hilfssatz 8 die Abschätzung

$$(3.56)\qquad \begin{cases} \displaystyle\iint_{\alpha^2+\beta^2<1} (\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2 + \xi_\beta^2 + \eta_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle = \frac{1}{\varrho^2}\iint_{\alpha^2+\beta^2<1} (u_\alpha^2 + v_\alpha^2 + u_\beta^2 + v_\beta^2)\, d\alpha\, d\beta \\ \displaystyle \leqq \frac{4a^2}{\varrho^2\sqrt{b}}\iint_{\mathfrak{F}} |H|\, do \leqq \frac{4a^2 c}{\varrho^2\sqrt{b}} = P = P(a,b,c,\varrho) < \infty. \end{cases}$$

[24]) In den Ausdrücken auf den rechten Seiten von (3.51)—(3.53) sind die Größen u, v durch die Variablen ξ, η mit Hilfe der Substitution $u = u_0 + \varrho\xi$, $v = v_0 + \varrho\eta$ auszudrücken.

Hieraus schließt man, daß die Funktion

$$\zeta(\gamma) = \xi(\alpha, \beta) + i\,\eta(\alpha, \beta) \qquad (\gamma = \alpha + i\beta) \tag{3.57}$$

zur Klasse $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ gehört (vgl. Definition 3). Ferner gelten wegen (3.21)—(3.23) für $|\gamma| < 1$ die Darstellungen

$$L = \sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha}, \tag{3.58}$$

$$M = -\sqrt{K}\,\sqrt{E\,G - F^2} \cdot \frac{\xi_\alpha \eta_\alpha + \xi_\beta \eta_\beta}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha} \tag{3.59}$$

und

$$N = \sqrt{K} \cdot \sqrt{E\,G F^2 -} \cdot \frac{\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2}{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha}, \tag{3.60}$$

und aus (3.38)—(3.42) entnimmt man eine Ungleichung der Form

$$K(u, v) \leqq k(a) < \infty \qquad \big((u, v) \in \Omega\big). \tag{3.61}$$

Setzt man $\gamma = 0$ und wendet Satz 2 auf die Abbildung $\gamma \to \zeta(\gamma)$ an, so erhält man aus (3.58)—(3.60) für $(u, v) \in \Omega_\varrho$ die Abschätzungen

$$|L|, \ldots, |N| \leqq \tau_0'(a, b, c, \varrho) \tag{3.62}$$

mit

$$\tau_0'(a, b, c, \varrho) = \sqrt{k(a)} \cdot a \cdot \frac{\lambda_1(M_0, M_1, P, 0)^2}{\lambda_3(M_0, M_1, P, 0)} < \infty. \tag{3.63}$$

Jetzt sei (u_1, v_1) ein beliebiger Punkt in Ω_ϱ mit $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \leqq \frac{\varrho^2}{4}$, und es sei $\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ derjenige Punkt der Kreisscheibe $|\gamma| \leqq 1$, der durch die Abbildung $(\alpha, \beta) \to (u, v)$ in den Punkt (u_1, v_1) übergeführt wird. Wendet man Satz 2 an und berücksichtigt die Tatsache, daß die Funktionenmenge $\Gamma_2(M_0, M_1, P)$ für $|\gamma| \leqq 1$ gleichgradig stetig ist, so erhält man Ungleichungen der Form

$$|\gamma_1| \leqq R^+(a, b, c, \varrho) < 1 \tag{3.64}$$

und

$$|\gamma_1| \leqq R^-(a, b, c, \varrho) \cdot \sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} \tag{3.65}$$

mit

$$R^-(a, b, c, \varrho) < \infty. \tag{3.66}$$

Aus den Darstellungen (3.58)—(3.60) sowie den Abschätzungen (3.38)—(3.42) und (3.64)—(3.66) ergeben sich dann durch abermalige Anwendung von Satz 2 die Ungleichungen

$$\left.\begin{cases} |L(u_1, v_1) - L(u_0, v_0)| \\ \vdots \\ |N(u_1, v_1) - N(u_0, v_0)| \end{cases}\right\} \leqq \tau_1' \cdot \left(\sqrt{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}\right)^\nu \tag{3.67}$$

mit

$$0 < \nu < 1$$

und

$$\tau_1' = \tau_1'(a, b, c, \varrho, \nu) < \infty. \tag{3.68}$$

Wendet man jetzt die Gaußschen Ableitungsgleichungen (3.12) an, so erhält man aus (3.62) und (3.67) die gesuchten Abschätzungen (3.45) und (3.46), womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

§ 4. Differentialgeometrische Anwendungen (geschlossene Flächen)

In diesem Paragraphen lösen wir das Weylsche Einbettungsproblem für den Fall einer dreimal stetig differenzierbaren Metrik ds^2 (Satz 4). Wir beginnen zunächst mit einigen allgemeinen Bemerkungen über geschlossene Flächen[25]).

Es sei Σ eine kompakte, zweidimensionale, analytische Mannigfaltigkeit. Dann verstehen wir unter einer regulären geschlossenen Fläche $\mathfrak{C}$ eine reelle, auf Σ erklärte Vektorfunktion $\mathfrak{x}=(x, y, z)$, die in den lokalen Koordinaten (u, v) von Σ zweimal stetig differenzierbar ist und außerdem der Bedingung $|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|>0$ genügt. Im folgenden setzen wir stets Σ als orientierbar voraus. Dann sind der Normalenvektor $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{C}$ und folglich auch die Krümmungsgrößen K und H eindeutig durch die Gln. (3.3) bzw. (3.10)—(3.11) definiert.

Für unsere späteren Überlegungen benötigen wir eine auf MINKOWSKI zurückgehende Integralformel, die wir zur Bequemlichkeit des Lesers hier noch einmal beweisen.

HILFSSATZ 9. *Für jede reguläre, geschlossene, orientierbare Fläche* $\mathfrak{C}$ *gilt die Gleichung*

$$\iint_{\mathfrak{C}} H\,do = -\iint_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{x}\mathfrak{N})\,K\,do. \tag{4.1}$$

BEWEIS[26]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{C}$ auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist. Dann stellt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{N}\,d\mathfrak{N}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_u)\,du + (\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_v)\,dv \tag{4.2}$$

ein invariantes Differential auf Σ dar, und es gilt die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_u) = 2(\mathfrak{x}\mathfrak{N}_u\mathfrak{N}_v) - \{(\mathfrak{x}_u\mathfrak{N}_v\mathfrak{N}) - (\mathfrak{x}_v\mathfrak{N}_u\mathfrak{N})\}. \tag{4.3}$$

Durch Anwendung der Weingartenschen Ableitungsgleichungen folgt

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}\mathfrak{N}\mathfrak{N}_u) = 2\{K(\mathfrak{x}\mathfrak{N}) + H\}\,|\mathfrak{x}_u\times\mathfrak{x}_v|. \tag{4.4}$$

Integriert man (4.4) über Σ, so erhält man die gesuchte Integralformel (4.1), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Von nun an setzen wir stets voraus, daß Σ der Einheitskugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ homöomorph ist und daß die Gaußsche Krümmung K von $\mathfrak{C}$ überall positiv ausfällt. Dann gilt bekanntlich die Gleichung

$$\iint_{\Sigma} K\,do = 4\pi, \tag{4.5}$$

---

25) Vgl. dazu H. HOPF [*15*], Kap. II.

26) Vgl. dazu HERGLOTZ [*14*].

und nach einem Theorem von HADAMARD [9][27]) ist $\mathfrak{E}$ eine Eifläche, d.h. K ist positiv, und $\mathfrak{E}$ ist Rand eines konvexen Körpers. Unser nächstes Ziel besteht darin, den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{E}$ durch das Linienelement ds^2 abzuschätzen. Zu diesem Zweck überdecken wir Σ durch ein zulässiges System von Parameterumgebungen Σ_k $(k=1, \ldots, N)$, die jeweils den Kreisscheiben

$$\Omega_k = \{|w_k| < 1\} \qquad (w_k = u_k + i\, v_k)$$

homöomorph sind. In jedem Parametergebiet Ω_k erscheint dann der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{E}$ als eine gewöhnliche Vektorfunktion $\mathfrak{x}_k(w_k) = \mathfrak{x}_k(u_k, v_k)$, und für zwei Variable $w_k \in \Omega_k$ und $w_l \in \Omega_l$, die denselben Punkt auf Σ repräsentieren, gelten die Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k(u_k, v_k) = \mathfrak{x}_l(u_l, v_l) \tag{4.6}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= (d\mathfrak{x}_k)^2 = E_k(u_k, v_k)\, du_k^2 + 2F_k(u_k, v_k)\, du_k\, dv_k + G_k(u_k, v_k)\, dv_k^2 \\ &= (d\mathfrak{x}_l)^2 = E_l(u_l, v_l)\, du_l^2 + 2F_l(u_l, v_l)\, du_l\, dv_l + G_l(u_l, v_l)\, dv_l^2. \end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

Um unsere Resultate übersichtlich zu formulieren, bedienen wir uns der in der Funktionalanalysis üblichen Bezeichnungen. Wir sagen, der Vektor $\mathfrak{x}$ bzw. die Metrik ds^2 sei auf Σ p-mal stetig differenzierbar, wenn die Funktionen $\mathfrak{x}_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ bzw. die Koeffizienten $E_k(u, v), \ldots, G_k(u, v)$ $(k=1, \ldots, N)$ für $|w| < 1$ p-mal stetig differenzierbar sind. In diesem Fall erklären wir die Normen $\|\mathfrak{x}\|_p$, $\|\mathfrak{x}\|_{p+\nu}$ $(0<\nu<1)$ und $\|ds^2\|_p$ durch die Gleichungen

$$\|\mathfrak{x}\|_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \leq p} \operatorname*{Obere\ Grenze}_{|w|<1} \left| \frac{\partial^{m+n} \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right|, \tag{4.8}$$

$$\|\mathfrak{x}\|_{p+\nu} = \|\mathfrak{x}\|_p + \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n=p} \operatorname*{Obere\ Grenze}_{\substack{|w'|, |w''|<1 \\ w' \neq w''}} \frac{\left| \dfrac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w'') - \dfrac{\partial^p \mathfrak{x}_k}{\partial u^m\, \partial v^n}(w') \right|}{|w'' - w'|^{\nu}} \tag{4.9}$$

und

$$\|ds^2\|_p = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m+n \leq p} \operatorname*{Obere\ Grenze}_{|w|<1} \left(\left| \frac{\partial^{m+n} E_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial^{m+n} G_k}{\partial u^m\, \partial v^n} \right| \right). \tag{4.10}$$

Mit diesen so erklärten Normen bilden die auf Σ definierten Vektoren $\mathfrak{x}$ und Metriken ds^2 Banachsche Räume. Nunmehr können wir unsere a-priori-Abschätzungen folgendermaßen formulieren:

HILFSSATZ 10. *Es sei $\mathfrak{E}$ eine reguläre Eifläche mit einer viermal stetig differenzierbaren Metrik $ds^2 = (d\mathfrak{x})^2$. Außerdem gelten die Abschätzungen*

$$\|ds^2\|_3 \leqq \alpha, \tag{4.11}$$

$$E_k G_k - F_k^2 \geqq \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.12}$$

und

$$K \geqq \alpha^{-1} \tag{4.13}$$

[27]) Weitere Beweise bei HOPF [15], Kap. IV.

mit einer festen positiven Zahl α. *Dann gibt es einen konstanten Vektor* $\mathfrak{y}$ *derart, daß für* $0<\nu<1$ *die Ungleichung*

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha,\nu) < \infty \tag{4.14}$$

erfüllt ist.

BEWEIS. Zunächst folgt aus (4.11) die Existenz eines konstanten Vektors $\mathfrak{y}$ mit

$$\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\|_1 \leqq c_0(\alpha) < \infty. \tag{4.15}$$

Ferner läßt sich eine positive Zahl $R<1$ so bestimmen, daß die Parameterumgebungen Σ_k' $(k=1,\ldots,N)$, die den Kreisscheiben $\Omega_k'=\{|w_k|<R\}$ $(k=1,\ldots,N)$ entsprechen, Σ vollständig überdecken. Die Behauptung (4.14) ist bewiesen, wenn es gelingt, Abschätzungen der Form

$$|D^2\mathfrak{x}_k(w)| \leqq \varphi_0(\alpha) < \infty \qquad (k=1,\ldots,N;\ |w|<R) \tag{4.16}$$

und

$$\begin{cases} |D^2\mathfrak{x}_k(w'') - D^2\mathfrak{x}_k(w')| \leqq \varphi_1(\alpha,\nu)\,|w''-w'|^\nu \\ (k=1,\ldots,N;\ |w'|,|w''|<R;\ 0<\nu<1) \end{cases} \tag{4.17}$$

mit $\varphi_1(\alpha,\nu)<\infty$ herzuleiten. Dabei bedeutet $D^2\mathfrak{x}_k$ die Gesamtheit aller partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}_k$. Es seien $\mathfrak{E}_k$ $(k=1,\ldots,N)$ die den Parameterumgebungen Σ_k' entsprechenden Flächenstücke auf $\mathfrak{E}$. Wegen Hilfssatz 9 ist dann

$$\begin{cases} \iint\limits_{\mathfrak{E}_k} |H|\,do \leqq \iint\limits_{\mathfrak{E}} |H|\,do = \left|\iint\limits_{\mathfrak{E}} H\,do\right| = \left|\iint\limits_{\mathfrak{E}} (\mathfrak{x}-\mathfrak{y},\mathfrak{N})\,K\,do\right| \\ \qquad \leqq \iint\limits_{\mathfrak{E}} |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|\,K\,do \leqq \operatorname{Max}\limits_{\Sigma} |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}| \cdot \iint\limits_{\Sigma} K\,do. \end{cases} \tag{4.18}$$

Daraus, sowie aus (4.5) und (4.15), folgt

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}_k} |H|\,do \leqq 4\pi\,c_0(\alpha) < \infty \qquad (k=1,\ldots,N). \tag{4.19}$$

Wendet man jetzt auf die Vektorfunktionen $\mathfrak{x}_k(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$ Satz 3 mit $a=\alpha$, $b=\alpha^{-1}$, $c=4\pi c_0(\alpha)$ und $\varrho=1-R$ an, so erhält man die gesuchten Abschätzungen (4.16) und (4.17), womit unser Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich

SATZ 4. *Es sei* ds^2 *ein auf der Einheitskugel* Σ *vorgegebenes, dreimal stetig differenzierbares Linienelement, welches überall positiv-definit ist und positive Gaußsche Krümmung besitzt. Dann gibt es eine reguläre Eifläche* $\mathfrak{E}$ *mit* $(d\mathfrak{x})^2=ds^2$. *Außerdem ist* $\|\mathfrak{x}\|_{2+\nu}<\infty$ *für* $0<\nu<1$.

BEWEIS. Da ds^2 auf Σ dreimal stetig differenzierbar ist, so gibt es eine Folge analytischer Metriken ds_n^2 [28]) mit

$$\|ds_n^2 - ds^2\|_3 \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{4.20}$$

[28]) D. h. Metriken ds_n^2 mit Koeffizienten $E_k^{(n)}(u,v)$, $F_k^{(n)}(u,v)$ und $G_k^{(n)}(u,v)$ $(k=1,\ldots,N)$, die für $u^2+v^2<1$ analytisch sind.

Dann lassen sich zwei positive Zahlen n_0 und α so bestimmen, daß für $n \geqq n_0$ die Ungleichungen

$$\| d s_n^2 \|_3 \leqq \alpha, \tag{4.21}$$

$$E_k^{(n)} G_k^{(n)} - F_k^{(n)2} \geqq \alpha^{-1} \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{4.22}$$

und

$$K^{(n)} \geqq \alpha^{-1} \tag{4.23}$$

erfüllt sind[29]). Nach dem Theorem von WEYL-LEWY[30]) existiert dann eine Folge regulärer Eiflächen $\{\mathfrak{E}_n\}$ mit

$$(d\mathfrak{x}^{(n)})^2 = d s_n^2 . \tag{4.24}$$

Wendet man jetzt Hilfssatz 10 an, so entnimmt man aus (4.21)—(4.24) die Existenz einer Folge konstanter Vektoren $\{\mathfrak{y}^{(n)}\}$, so daß für $n \geqq n_0$ und $0 < \nu < 1$ die Ungleichung

$$\| \mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)} \|_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.25}$$

erfüllt ist. Man setze $\mathfrak{z}^{(n)} = \mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{y}^{(n)}$. Dann wird

$$(d\mathfrak{z}^{(n)})^2 = d s_n^2 \tag{4.26}$$

und

$$\| \mathfrak{z}^{(n)} \|_{2+\nu} < \Phi(\alpha, \nu) . \tag{4.27}$$

Wegen (4.27) gibt es eine Teilfolge $\{n_j\}$ der natürlichen Zahlen und eine auf Σ zweimal stetig differenzierbare Vektorfunktion $\mathfrak{z}$ mit

$$\| \mathfrak{z}^{(n_j)} - \mathfrak{z} \|_2 \to 0 \qquad (j \to \infty) . \tag{4.28}$$

Daraus, sowie aus (4.27), folgt

$$\| \mathfrak{z} \|_{2+\nu} \leqq \Phi(\alpha, \nu) < \infty \tag{4.29}$$

für $0 < \nu < 1$. Setzt man nun $n = n_j$ in (4.26) und geht zur Grenze $(j \to \infty)$ über, so entsteht

$$(d\mathfrak{z})^2 = d s^2 , \tag{4.30}$$

womit Satz 4 vollständig bewiesen ist.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. Berlin: Springer 1930. — [2] BUSEMANN, H.: Convex Surfaces. New York: Interscience Publishers 1958. — [3] CARATHÉODORY, C.: Conformal Representation. Cambridge 1952. — [4] CARLEMAN, T.: Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre a deux variables. Comptes Rendus Paris **197**, 471—474 (1933). — [5] CHERN, S. S.: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 279—290 (1945). — [6] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, III. Paris 1894. — [7] EFIMOV, N. W.: Flächenverbiegung

[29]) $K^{(n)}$ ist die Gaußsche Krümmung von $d s_n^2$.

[30]) Siehe S. 129 dieser Arbeit.

im Großen (mit einem Nachtrag von E. REMBS und K. P. GROTEMEYER). Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [8] FENCHEL, W.: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Mat. Tidsskr. (B) 66—87 (1932.) — [9] HADAMARD, J.: Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. J. de Math. pures et appl. 3, 331—387 (1897). — [10] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. 75, 449—476 (1953). — [11] HEINZ, E.: Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Annalen 131, 411—428 (1956). — [12] HEINZ, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Math. 5, 197—271 (1956/57). — [13] HEINZ, E.: On elliptic Monge-Ampère equations and WEYL's embedding problem. J. d'Analyse Math. 7, 1—52 (1959). — [14] HERGLOTZ, G.: Über die Starrheit der Eiflächen. Abhandlungen math. Sem. Univ. Hamburg 15, 127—129 (1943). — [15] HOPF, H.: Lectures on Differential Geometry in the Large. Applied Math. and Stat. Laboratory, Stanford University, Stanford, California 1956. — [16] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [17] LEBESGUE, H.: Sur le problème de DIRICHLET. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 24, 371—402 (1907). — [18] LEWY, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. I. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 417—434 (1935). — [19] LEWY, H.: A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations. II. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 365—374 (1937). — [20] LEWY, H.: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 689—692 (1936). — [21] LEWY, H.: On the existence of a closed surface realizing a given Riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24, Nr. 2, 104—106 (1938). — [22] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure and Appl. Math. 6, 103—156 (1953). — [23] NIRENBERG, L.: The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large. Comm. Pure and Appl. Math. 6, 337—394 (1953). — [24] POGORELOW, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1957. — [25] WEYL, H.: Über die Bestimmung einer geschlossenen Fläche durch ihr Linienelement. Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich 61, 40—72 (1916), wiederabgedruckt in Selecta HERMANN WEYL, Basel u. Stuttgart, 148—178 (1956). — [26] WINTNER, A.: On WEYL's imbedding problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42, Nr. 3, 157—160 (1956). — [27] WINTNER, A.: On WEYL's identity in the differential geometry of surfaces. Ann. di Mat. Pura ed Appl. Ser. IV, 41, 257—268 (1956).

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 29. Dezember 1959)