Über die dichteste Kugellagerung.

Von

L. Fejes in Kolozsvár.

1. Wir betrachten einen hinreichend großen Würfel des gewöhnlichen euklidischen Raumes und legen in denselben in einer gewissen Anordnung eine Anzahl gleichgroßer Kugeln, etwa vom Halbmesser 1. Als Maß für die Dichte dieser Kugellagerung erklären wir den Gesamtinhalt der eingelagerten Kugeln geteilt durch den Inhalt des gegebenen Würfels. Weiter betrachten wir nun eine Folge von Würfeln $W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots$, deren Inhalte unbegrenzt zunehmen, und zugleich mit jedem Würfel W_i den Maximalwert $\overline{D_i}$ der Dichten aller möglichen Kugellagerungen. Die Zahlenfolge $\overline{D_1}, \overline{D_2}, \ldots, \overline{D_i}, \ldots$ strebt dann einem Grenzwert zu: $\overline{D}_i \to \overline{D}$. Wir wollen uns in diesem Aufsatz einer Abschätzung dieser Grenzdichte $\overline{D}$ zuwenden.

In dem Werke von Hilbert-Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, § 7 (Berlin, Springer, 1932) wird das Problem der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung behandelt. Es werden hier also nur derartige Kugelanordnungen zum Vergleich zugelassen, deren Mittelpunkte ein räumliches Gitter bilden. Als Lösung ergibt sich die „rhomboedrische Kugellagerung" mit einer Dichte

$$D_0 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{6} = 0{,}7405.$$

Über das Problem der dichtesten Kugellagerung bei einer beliebigen Kugelanordnung steht dort S. 46: „... Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt."

Die Frage, ob es eine Kugellagerung mit einer Dichte $D > D_0$ gibt, ist daher noch nicht gelöst. Wir wollen jedoch zeigen, daß *die Dichte einer beliebigen*[1]) *Kugellagerung stets kleiner ist als der Inhalt einer Kugel geteilt durch den Inhalt des umbeschriebenen regulären Dodekaeders*:

$$\overline{D} < \frac{4\pi}{3} : 10\sqrt{2\,(65-29\sqrt{5})} = 0{,}7546. \tag{1}$$

Die rechtsstehende Konstante liegt nur weniger als 2% oberhalb D_0.

[1]) In dem Beweis haben wir uns teilweise lediglich auf die Anschauung gestützt. Der Beweis bezieht sich daher ganz strenggenommen nur auf derartige Kugellagerungen,

Wir können unser Ergebnis auch etwas anders aussprechen: Ein räumliches Gebiet mit einem hinreichend großen Inhalt J enthält angenähert höchstens $\frac{3}{4\pi}\overline{D}\,J = 0{,}1802\,J$ Einheitskugeln. Wir wissen dabei bereits, daß diese Konstante nicht unter $\frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}1768$ gedrückt werden kann.

2. Vor dem Beweis wenden wir uns zunächst dem entsprechenden Problem in der Ebene zu[2]): Es seien demnach in einem Quadrat vom Flächeninhalt T n Kreise mit dem gemeinsamen Halbmesser 1 vorhanden, die sich teilweise berühren können, aber nie überdecken. Bezeichnen wir die Kreismittelpunkte mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so gilt für ein beliebiges Punktpaar $\overline{P_i P_k} \geqq 2$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k)$.

Wir greifen einen beliebigen Punkt, etwa P_i, heraus und errichten auf sämtlichen Strecken $P_iP_1, P_iP_2, \ldots, P_iP_n$ in ihren Mittelpunkten die Lote. Wir betrachten ferner von den Halbebenen, die durch diese Lote bestimmt werden, diejenigen, die P_i enthalten, fassen die Durchschnittsmenge T_i dieser Halbebenen ins Auge und bezeichnen den Flächeninhalt von T_i, falls er endlich ist, ebenfalls mit T_i. Wir behaupten, daß

$$T_i \geqq 2\sqrt{3}$$

ausfällt und daß das Gleichheitszeichen nur in dem Falle gelten kann, wenn T_i ein dem um P_i geschlagenen Einheitskreis k_i umbeschriebenes reguläres Sechseck ist.

Zum Beweis betrachten wir den um P_i mit dem Halbmesser $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ geschlagenen Kreis K_i, d. h. den Umkreis des erwähnten Sechsecks. Wir zeigen, daß unsere Ungleichung schon für den Inhalt des in K_i liegenden Teiles von T_i gilt.

Wir stehen daher folgender Aufgabe gegenüber: Wir betrachten eine Anzahl von Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, die in dem von k_i und K_i begrenzten Kreisring liegen und voneinander einen Abstand $\geqq 1$ besitzen. Wir zeichnen die durch Q_j gelegten, auf P_iQ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ senkrechten Sekanten von K_i und betrachten den Gesamtinhalt t_i der von diesen Sekanten bestimmten Kreisabschnitte. Dann haben wir zu zeigen, daß t_i sein Maximum im Falle eines regulären Sechsecks erreicht.

---

bei denen eine, mit einer beliebigen Einheitskugel konzentrische Kugel eines Halbmessers von etwa 2,5 von den übrigen Kugelmittelpunkten höchstens zwölf enthält. Wir erhalten sicherlich eine derartige Kugellagerung, falls jede Kugel von zwölf anderen berührt wird.

[2]) Der Grundgedanke des hier folgenden Beweises stimmt mit demjenigen, den ich in meinem Aufsatz: Über einen Geometrischen Satz. Math. Zeitschr. **46** (1940), S. 83 – 85 mitgeteilt habe, überein. Einige Änderungen im Beweis werden uns die Betrachtung des räumlichen Problems erleichtern.

Wir bemerken vor allem, daß in unserem Kreisring höchstens 7 Punkte vom kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen können. Man rechnet aber leicht nach, daß in diesem Fall sämtliche Punkte sehr nahe an K_i liegen müssen; die Sekanten schneiden mithin nur einen überaus kleinen Teil von K_i ab.

Zur Untersuchung verbleibt daher nur noch der Fall $m \leqq 6$. In diesem ist aber unsere Behauptung trivial!

Weiterhin bemerken wir, daß die soeben bewiesene Ungleichung noch richtig bleibt, wenn wir T_i durch den ins Quadrat T fallenden Teil T'_i von T_i ersetzen. Um dies in Evidenz zu setzen, genügt es, sämtliche Kreise an den Quadratseiten zu spiegeln und im Beweis auch diese Spiegelbilder in Betracht zu ziehen.

Addieren wir die Ungleichungen $T'_i \geqq 2\sqrt{3}$, so erhalten wir auf der linken Seite den Quadratinhalt $T \geqq 2\sqrt{3}\, n$,

$$n \leqq \frac{\sqrt{3}}{6} T.$$

Damit haben wir aber die zu beweisende Abschätzung der Anzahl der Einheitskreise, die in einem Quadrat vom Inhalt T eingelagert werden können, mit dem genauen Wert der Konstanten bestimmt. Die bestmögliche Kreislagerung wird verwirklicht, wenn wir die Ebene mit regulären Sechsecken auspflastern und die Kreise in diese legen. Diese Kreislagerung ist gitterförmig: die Kreismittelpunkte gehören dem „gleichseitigen Dreiecksgitter" an.

3. Im Raume läßt sich die angedeutete Abschätzung (1) analog zum Vorigen auf folgende Extremalaufgabe zurückführen: Wir betrachten eine endliche Anzahl von Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_n$, deren Abstand voneinander $\geqq 1$ ist, errichten im Punkt P_i die auf $P_0 P_i$ senkrechte Ebene e_i und betrachten von den durch e_i bestimmten beiden Halbräumen denjenigen, der P_0 enthält. Wir fassen den Durchschnitt S dieser Halbräume ($i = 1, 2, \ldots, n$) ins Auge und wollen das Minimum des Inhalts von S bestimmen.

Hinsichtlich der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich nun gegenüber der Lösung in der Ebene ein wesentlicher Unterschied. Bei der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung wird jede Kugel von zwölf anderen berührt. Von den Berührungspunkten liegen sechs auf einem Großkreis, je drei auf den verschiedenen Seiten desselben Großkreises (Hilbert, Anschauliche Geometrie, S. 41, Abb. 47c). Der Inhalt von S erreicht jedoch sein Minimum nicht für diese Punktekonfiguration. Bei der extremalen Anordnung liegen von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ebenfalls zwölf auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k, aber in den Eckpunkten eines regulären Ikosaeders. In diesem Falle ist also S ein reguläres Dodekaeder.

Ließe sich der Raum durch reguläre Dodekaeder auspflastern, so wäre das Problem der dichtesten Kugellagerung völlig gelöst. Dies trifft aber, wie bekannt, nicht zu! Wir können uns darüber z. B. schon dadurch überzeugen, daß der Flächenwinkel des Dodekaeders $\omega = 116^0 34'$ kein Teiler von 360^0 ist. In (1) muß daher tatsächlich das $<$-Zeichen stehen.

Zum Beweis der Extremaleigenschaft des Dodekaeders umschreiben wir ihm eine Kugel K. Wir zeigen analog zum Problem in der Ebene, daß schon der Inhalt des in K liegenden Teiles von S sein Minimum im Falle eines regulären Dodekaeders erreicht.

Wir haben verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Anzahl m der Punkte, die in der von k und K begrenzten Kugelschale enthalten sind. Wir beginnen mit dem anziehendsten Fall $m = 12$.

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen. Um über das Problem, welchem wir gegenüberstehen, größere Klarheit zu gewinnen, schicken wir eine Bemerkung voraus.

In der Ebene gehören sechs Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$, die auf einem Einheitskreis liegen, den Ecken eines regulären Sechsecks an. Auf einer Einheitskugel können höchstens zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen. Dieselben sind aber durch diese Bedingungen noch keineswegs bestimmt: sie können vielmehr ganz verschiedenartig verteilt sein. Außer den beiden Verteilungen, die in HILBERT, Anschauliche Geometrie, S. 41, Abb. 47a, c veranschaulicht sind, ist uns bereits die ikosaedrische bekannt. Da aber die Kantenlänge des der Einheitskugel einbeschriebenen Ikosaeders

$$a = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}0515, \tag{2}$$

also größer als 1 ist, so haben die Punkte bei dieser Verteilung noch einen kleinen Spielraum. All dies zeigt schon die Mannigfaltigkeit, die uns bei dem räumlichen Problem begegnet.

Betrachten wir nach dieser Bemerkung den Kugelabschnitt v_i, den e_i von K abschneidet! Den Inhalt von v_i bezeichnen wir mit $\bar{v}$. Die zu v_i gehörige Kugelkalotte sei t_i; ihr Flächeninhalt $\bar{t}$.

Es seien t_i und t_k zwei Kugelkalotten, die sich teilweise überdecken; bezeichnen wir mit t_{ik} ihren Durchschnitt sowie den Flächeninhalt derselben. Wir bezeichnen ferner mit $v(t_{ik})$ den Inhalt des Durchschnitts von v_i und v_k.

Nun können sich aber auch drei Kugelkalotten t_i, t_k, t_l teilweise überdecken. Ihr Durchschnitt sei t_{ikl}; der Inhalt des Durchschnitts von v_i, v_k, v_l sei $\mathfrak{v}(t_{ikl})$. Letztere hängt nicht nur vom Inhaltsmaß t_{ikl} ab, sondern auch von der Gestalt des Gebietes t_{ikl}. Sie ist eine Funktionale! Dagegen ist $v(t_{ik})$ eine gewöhnliche Funktion des Inhaltsmaßes t_{ik}.

Bezeichnen wir den Halbmesser von K mit R, so wird der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S:

$$\mathrm{V} = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\bar{v} + \sum v(t_{ik}) - \sum \mathfrak{v}(t_{ikl}), \tag{3}$$

wobei die Summation auf sämtliche Zahlenpaare bzw. Zahlentripel ($i \leqq 12$, $h \leqq 12$, $l \leqq 12$; $i \neq k$, $k \neq l$, $l \neq i$) zu erstrecken ist.

Bei der ikosaedrischen Anordnung verschwinden sämtliche t_{ikl}, und die t_{ik} besitzen einen gemeinsamen Wert $\overline{\overline{t}}$. Der Dodekaederinhalt ist daher

$$V_D = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\bar{v} + 30\, v(\overline{\overline{t}}). \tag{4}$$

Wir müssen zeigen, daß $V \geqq V_D$, d. h.

$$\Sigma\, v(t_{ik}) - \Sigma\, \mathfrak{v}(t_{ikl}) \geqq 30\, v(\overline{\overline{t}}) \tag{5}$$

ausfällt.

Es sei zunächst festgestellt, daß

$$\Sigma\, t_{ik} - \Sigma\, t_{ikl} \geqq 30\,\overline{\overline{t}} \tag{6}$$

ist. Der von den Kugelkalotten t_i bedeckte Teil der Kugeloberfläche K ist nämlich $12\,\bar{t} - \Sigma\, t_{ik} + \Sigma\, t_{ikl}$. Im ikosaedrischen Fall wird aber K von den Kugelkalotten völlig bedeckt. Es gilt folglich

$$12\,\bar{t} - \Sigma\, t_{ik} + \Sigma\, t_{ikl} \leqq 12\,\bar{t} - 30\,\overline{\overline{t}},$$

womit (6) bewiesen ist.

Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß $v(t)$ für $0 \leqq t \leqq \bar{t}$ eine monoton zunehmende, von unten konvexe Funktion von t ist[3]): Wir können daher die

---

[3]) Legen wir durch den Kugelmittelpunkt P_0 eine Ebene e, die von der vorgegebenen Kugelkalotte t_i einen Teil s abschneidet. Die Zentralprojektion von s auf e_i sei s^*. Die behauptete Konvexität von $v(t)$ ist mit der Behauptung gleichwertig, daß der Flächeninhalt s für $s \leqq \frac{\bar{t}}{2}$ eine von unten konvexe Funktion des Inhalts s^* ist. Um diese Behauptung einzusehen, bezeichnen wir die Schnittpunkte von e mit dem Begrenzungskreis von t_i mit A und B; der Mittelpunkt von t_i sei P_i'. Im sphärischen Dreieck $\Delta P_i' A B$ sei $\measuredangle A P_i' B = 2\varphi$, $\measuredangle P_i' A B = \measuredangle P_i' B A = \psi$ und schließlich $\measuredangle P_i' P_0 A = \measuredangle P_i' P_0 B = c$. Dann gilt $\operatorname{cotg} \psi = \cos c \cdot \operatorname{tg} \varphi$ und demzufolge

$$s = R^2 (1 - \cos c)\, \varphi - R^2 (2\varphi + 2\psi - \pi) = R^2 [\pi - 2 \operatorname{arc\,cotg} (\cos c \cdot \operatorname{tg} \varphi) - 2\varphi \cos c],$$
$$s^* = \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 c\, (2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Es ergibt sich daraus

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2 R^2 \cos c \cdot \sin^2 c \cdot \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2 \varphi}, \quad \frac{ds^*}{d\varphi} = 2 R^2 \sin^2 c \cdot \sin^2 \varphi,$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2 \varphi}.$$

Letztere ist für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ eine monoton zunehmende Funktion von φ und folglich auch von s^*, womit alles bewiesen ist.

JENSENsche Ungleichung[4]) anwenden. Dazu sei nur noch bemerkt, daß ein beliebiges konvexes Zwölfflach höchstens $3 \cdot 12 - 6 = 30$ Kanten hat. Die Anzahl der t_{ik} beträgt daher ebenfalls höchstens 30. Wir erhalten mithin:

$$(7) \quad \frac{1}{30}\sum v(t_{ik}) \geqq v\left(\frac{\Sigma t_{ik}}{30}\right) \geqq v\left(\overline{\overline{t}} + \frac{1}{30}\sum t_{ikl}\right) \geqq v(\overline{\overline{t}}) + \frac{1}{30}v'(\overline{\overline{t}})\sum t_{ikl}.$$

Alles ist daher auf dem Beweis der Ungleichung

$$(8) \qquad v'(\overline{\overline{t}})\,\Sigma\, t_{ikl} \geqq \Sigma\, \mathfrak{v}(t_{ikl})$$

zurückgeführt. Dieser Beweis gelingt aber schon durch eine ganz grobe Abschätzung. Es genügt zu zeigen, daß für jedes t_{ikl}

$$(9) \qquad \frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}} \leqq \frac{v(\overline{\overline{t}})}{\overline{\overline{t}}}$$

gilt. Die rechtsstehende Konstante ist nämlich wegen der Konvexität von $v(t)$ kleiner als $v'(\overline{\overline{t}})$. In (9) lassen sich aber die auf beiden Seiten vorkommenden Größen leicht abschätzen bzw. berechnen. Betrachten wir zunächst $\frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}}$.

Vor allem bemerken wir, daß der Durchschnitt von v_i, v_k, v_l sich in erster Annäherung als ein Tetraeder mit der Grundfläche t_{ikl} auffassen läßt. Ist h die zur Grundfläche t_{ikl} gehörige Höhe dieses Tetraeders, so gilt

$$(10) \qquad \frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}} \sim \frac{1}{3}h.$$

Wir müssen daher h abschätzen. Die Höhe h erreicht ihr Maximum, falls $\Delta P_i P_k P_l$ in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 übergeht. In diesem Fall wird das „Dreieck" t_{ikl} ebenfalls gleichseitig. Wir bestimmen den Halbmesser ϱ seines Inkreises.

Es sei $\Delta P_i P_k P_l$ eine Fläche des k einbeschriebenen Ikosaeders ($\overline{P_i P_k} = \overline{P_k P_l} = \overline{P_l P_i} = a$); der Mittelpunkt dieser Fläche sei Q. Wir projizieren Q vom Kugelmittelpunkt P_0 auf die Kugeloberfläche K; die Projektion sei Q'. Der sphärische Abstand zwischen Q' und P_i ist

$$(11) \qquad \widehat{Q'P_i} = u(a) = R \arcsin \frac{\sqrt{3}\,a}{3}.$$

Dies ist genau der sphärische Radius des Begrenzungskreises der betrachteten Kugelkalotten t_i. Mit Rücksicht auf den Wert

$$(12) \qquad R = \sqrt{3\,(5 - 2\sqrt{5})} = 1,2584$$

---

[4]) Ist $f(x)$ eine in (a, b) von unten konvexe Funktion, so gilt für die in (a, b) liegenden Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$. JENSEN: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Math. 30 (1906), S. 175—193.

gilt nun

$$\varrho = u(a) - u(1) \sim u'(1)(a-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} R(a-1) = 0{,}046. \tag{13}$$

Für den auf t_{ikl} ruhenden Flächenwinkel α des Tetraeders gilt: $\cos\alpha = \frac{1}{R}$. Die Höhe h des Tetraeders beträgt daher

$$h \sim \varrho \operatorname{tg}\alpha = \varrho \sqrt{R^2 - 1} \sim 0{,}035. \tag{14}$$

Mithin bleibt der Quotient $\frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ unter einer Schranke, dessen Näherungswert $\frac{1}{3} h \sim 0{,}012$ beträgt.

Nun ist noch $\frac{v(\bar{\bar{t}})}{\bar{\bar{t}}}$ abzuschätzen. Dieser Quotient läßt sich aber leicht genau berechnen. Es gilt zunächst

$$\bar{v} = \frac{\pi}{3}(R-1)^2(2R+1) = 0{,}2460, \quad \bar{t} = 2\pi R(R-1) = 2{,}0431, \tag{15}$$

$$V_D = 10\sqrt{2(65 - 29\sqrt{5})} = 5{,}5508.$$

Mit Rücksicht auf diese Zahlenwerte ergibt sich aus (4) $30\,v(\bar{\bar{t}}) = 0{,}15$. Es gilt ferner $12\,\bar{t} - 30\,\bar{\bar{t}} = 4\pi R^2$, woraus wir $30\,\bar{\bar{t}} = 4{,}62$ erhalten. Folglich gilt

$$\frac{v(\bar{\bar{t}})}{\bar{\bar{t}}} = 0{,}032 > \frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}},$$

womit alles bewiesen ist[5]).

Jetzt können wir uns von der Annahme, daß die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen, freimachen. Nehmen wir an, daß ein Punkt vom Mittelpunkt P_0 der Kugel K den Abstand r besitzt $(1 < r < R)$. Der Inhalt des zugehörigen Kugelabschnitts ist $\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r)$. Bei einer extremalen Anordnung ist aber sicherlich

$$\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r) + 11\bar{v} > \frac{4\pi R^3}{3} - V_D.$$

Es ergibt sich daraus, daß r nicht etwa die Größe 1,1 überschreiten kann. Damit ist der Fall $m < 12$ ebenfalls mit erledigt!

Wir wollen jetzt eine untere Schranke für den Winkel $\measuredangle P_i P_0 P_k$ bestimmen. Im $\Delta P_0 P_i P_k$ sei $\overline{P_0 P_i} = 1$, $\overline{P_0 P_k} = 1{,}1$, $\overline{P_i P_k} = 1$. Dann ist $\measuredangle P_i P_0 P_k = \beta = \arccos 0{,}55 = 56^0\,38'$ und dies ist die gesuchte untere

---

[5]) Damit wurde z. B. bewiesen, daß unter denjenigen Zwölfflachen, die einer gegebenen Kugel umbeschrieben sind, der Inhalt des regulären Zwölfflachs ein lokales Minimum besitzt. Es ist anzunehmen, daß dieses Minimum ein absolutes ist. Bemerken wir dazu, daß unter den konvexen Polyedern mit der Eckenzahl 20, die einer Kugel einbeschrieben sind, der Inhalt für das reguläre Dodekaeder nicht einmal sich als ein lokales Maximum erweist; s. L. FEJES, Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern. Tôhoku Math. Journ. **46** (1939), S. 79—83.

Schranke. Nimmt nämlich $P_0 P_i$ um Δh zu, so muß $\overline{P_0 P_k}$ um mehr als Δh abnehmen, damit die Summe der Kugelabschnitte nicht weiter abnimmt. Der Winkel $\sphericalangle P_i P_0 P_k$ nimmt daher stets zu, bis $\overline{P_0 P_i} = \overline{P_0 P_k}$ wird.

Ersetzen wir nun die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ durch ihre Zentralprojektionen $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$ auf k, so wird der zu untersuchende Inhalt V verkleinert. Der kürzeste Abstand der Punkte $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{12}$ ist sicherlich größer als $2 \sin \frac{\beta}{2} = 0{,}95$. Die Differenz $a - 0{,}95$ ist aber etwa doppelt so groß als $a - 1$. Folglich ist auch $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ angenähert doppelt so groß wie früher, d. h. noch immer wesentlich kleiner als $\frac{v(\overline{\overline{t}})}{\overline{\overline{t}}}$.

Die obige Überlegung ist nur als eine erste Orientierung zu betrachten. Wir können uns aber damit begnügen, da wir ja die Feinheit unserer Abschätzung durch eine Reihe grober Vernachlässigungen verdorben haben.

Und nun gelangen wir zu dem in Fußnote [1]) angedeuteten Teil des Beweises, wobei wir uns statt durch strenge Überlegungen von der Anschauung führen lassen. Dieses Verfahren scheint uns darum berechtigt zu sein, da es uns im wesentlichen nur auf eine grobe Abschätzung ankommt, die sich aber exakt nur schwierig verfolgen läßt. Es handelt sich um den Fall $m > 12$.

Wir gehen von der nach der Anschauung naheliegenden Tatsache aus, daß von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ höchstens zwölf sich auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k befinden können[6]) oder vielmehr, daß im Falle $\overline{P_0 P_1} = \overline{P_0 P_2} = \cdots = \overline{P_0 P_{12}} = 1$ für den 13. Punkt $\overline{P_0 P_{13}} > R \sim 1{,}26$ gilt[7]). Nähern wir P_{13} dem Punkte P_0, so müssen sich mehrere der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ von P_0 entfernen[8]) und der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S nimmt bei dieser Operation sicherlich zu, bis für irgendeinen Punkt (etwa für P_i) $\overline{P_0 P_i} = \overline{P_0 P_{13}}$ wird.

Diese Betrachtungen zeigen, daß, wenn wir in die von k und K begrenzte Kugelschale noch weitere Punkte $P_{14}, P_{15}, \ldots$ hineindrängen, der zu untersuchende Inhalt V den neuen Punkten entsprechend stets zunimmt.

4. Wir wollen nun in der ikosaedrischen Anordnung der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ den gemeinsamen Inhalt der zu denselben Punkten gehörigen Polyeder $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$ untersuchen.

---

[6]) Dies nachzuweisen ist an und für sich schon keine allzuleichte Aufgabe. Es läßt sich dagegen zeigen, daß sich auf einer Kugel mit dem Halbmesser $\frac{1}{a} \sim 0{,}95$ — die also einem Ikosaeder mit der Kantenlänge 1 umbeschrieben ist — genau zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$ befinden können, und zwar in einer einzigen möglichen Anordnung.

[7]) Es gilt auf Grund eines groben Experiments etwa $\overline{P_0 P_{13}} > 1{,}38$.

[8]) Vermutlich ist $\sum_{i=1}^{13} \overline{P_0 P_i} > 12 + 1{,}38$ woraus unmittelbar alles folgen würde.

Die um P_1 mit dem Halbmesser R geschlagene Kugel K_1 enthält von $P_2, \ldots, P_{12}$ 5 Punkte, deren Abstand von P_1 gleich a ist. Die zu diesen Punkten gehörigen Kugelabschnitte von K_1 besitzen den Inhalt

$$\frac{\pi}{3}(R-a)^2(2R+a) = 0{,}1601.$$

Mithin gilt für den Inhalt V_1 des in K_1 liegenden Teiles von S_1

$$V_1 > \frac{4\pi R^3}{3} - 5 \cdot 0{,}1601 - 7 \cdot 0{,}2460 = 5{,}8258.$$

Folglich ist der Mittelwert M der Inhalte von $S, S_1, S_2, \ldots, S_{12}$

$$M > \frac{5{,}5492 + 12 \cdot 5{,}8258}{13} = 5{,}8045,$$

eine Zahl, die schon erheblich größer ist als der Inhalt des einer Einheitskugel umbeschriebenen Rombendodekaeders, der den mit S bezeichneten Polyedern in der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung entspricht.

Diese Bemerkung bietet uns eine Möglichkeit für eine weitere Verschärfung der im vorigen bewiesenen Abschätzung von $\overline{D}$, ja vielleicht sogar für den Beweis der Vermutung: $\overline{D}$ wäre D_0 gleich. Jedenfalls kann obige Bemerkung als eine Begründung dieser Vermutung angesehen werden.

(Eingegangen am 4. Mai 1942.)