

## Schallnahe Überschallströmung um rotationssymmetrische Körper

Von

W. Frank und J. Zierep, Karlsruhe, BRD

Mit 9 Abbildungen

(Eingegangen am 3. August 1973)

### Zusammenfassung — Summary

**Schallnahe Überschallströmung um rotationssymmetrische Körper.** In der vorliegenden Arbeit wird der Kopfwellenabstand und die Kopfwellenform für schlanke Rotationskörper in schallnaher Überschallströmung hergeleitet. Diese theoretischen Ergebnisse werden mit Messungen für stumpfe Körper (Kegelhalbkörper, Kugel) verglichen. Es zeigt sich, daß die für schlanke Körper gefundenen Gesetzmäßigkeiten mit nur geringfügigen Modifikationen auch für stumpfe Körper gültig sind. Insbesondere stimmen für beide Körperklassen die asymptotischen Gesetzmäßigkeiten für große Kopfwellenabstände überein.

**Transonic Supersonic Flow around Bodies of Revolution.** In this paper shock-wave-distance and shock form for slender bodies of revolution in transonic supersonic flow is deduced. The theoretical results are compared with experiments for blunt bodies (cone-half bodies, sphere). It is shown that the results for slender bodies fit also, with only slight modifications, that for blunt bodies. Especially the asymptotic results for large shock-wave-distance agree completely.

### 1. Einleitung

*Ebene* schallnahe Überschallströmungen um spitze, schlanke Körper sind von den Verfassern ausführlich untersucht worden [1]—[5]. Hierbei interessierte vor allem der Kopfwellenabstand, die Kopfwellenform sowie die Größe des lokalen Unterschallgebietes zwischen Stoß und Körper. Die Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit den in unserem Institut durchgeführten Messungen ist überraschend gut. Dies hat uns ermutigt, nun ebenfalls den für die Anwendungen ungleich wichtigeren Fall der schallnahen Überschallströmung um *Rotationskörper* zu behandeln. Im folgenden werden zunächst einige theoretische Ergebnisse für den Kopfwellenabstand und die Kopfwellenform für *schlanke* Rotationskörper hergeleitet. Anschließend werden Meßergebnisse für *stumpfe* Körper (Kegelhalbkörper, Kugel) diskutiert. Es zeigt sich das überraschende Ergebnis, daß die für die schlanken Körper hergeleiteten Daten mit nur geringfügigen Modifikationen auch im Fall der stumpfen Körper gültig bleiben. Insbesondere ergeben sich für schlanke und für stumpfe Körper bei großen Kopfwellenabständen dieselben asymptotischen Gesetzmäßigkeiten. Daraus kann geschlossen werden, daß die zwei Grundvoraussetzungen der Theorie (Einfrierungseigenschaft, Abklingen der *u*-Störung vor dem Körper) für schlanke und für stumpfe Körper in gleicher Weise gültig sind.

Über abgelöste Kopfwellen vor stumpfen Körpern in *Hyperschallströmungen* gibt es eine umfangreiche Literatur. Uns interessiert, das sei demgegenüber mit Nachdruck hervorgehoben, besonders die *Schallnähe*.

## 2. Theorie des Kopfwellenabstandes und der Kopfwellenform für schlanke Rotationskörper

Der Stoßabstand ist bereits in [1] angegeben. Wir rekapitulieren kurz die Herleitung. Hierzu benutzen wir die Einfrierungseigenschaft der schallnahen Strömungen. Danach kann für Anström-Mach-Zahlen  $M_\infty$  die nur wenig größer als 1 sind — also für große Stoßabstände — zwischen Kopfwelle und Körperspitze in sehr guter Näherung dieselbe Geschwindigkeitsverteilung angenommen werden, wie sie bei Schallanströmung vorliegt. Für den letzteren Fall kennt man den asymptotischen Geschwindigkeitsverlauf vor schlanken Rotationskörpern aus einer Arbeit von MÜLLER und MATSCHAT [6]. Für die reduzierte Geschwindigkeit  $U$  gilt

$$U = \frac{1}{\tau^2} \left( \frac{u}{c^*} - 1 \right) = \frac{b}{\left( -\frac{x}{l} \right)^{3/2}}. \quad (2.1)$$

$\tau$  bezeichnet den Körperdickenparameter,  $l$  die Länge des Körpers und  $b$  eine Konstante, die die betrachtete Profilklassse charakterisiert.

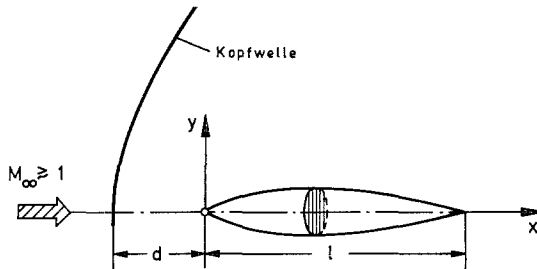


Abb. 1. Die benutzten Bezeichnungen

Benutzt man die Prandtlsche Relation über den Stoß auf der Achse, so kommt mit (2.1) und einigen elementaren gasdynamischen Umformungen für den Stoßabstand  $d$  die asymptotische Darstellung

$$\frac{d}{l} = \frac{b^{2/3}}{\bar{\lambda}^{2/3}} \quad (2.2)$$

$\bar{\lambda}$  ist hierin der schallnahe Ähnlichkeitsparameter

$$\bar{\lambda} = \frac{M_\infty^2 - 1}{(\kappa + 1)\tau^2 M_\infty^2}. \quad (2.3)$$

Im weiteren wollen wir die Begrenzung des lokalen Unterschallgebietes ermitteln. Von besonderem Interesse ist hier die Kopfwellenform. Die elementaren

Zwischenrechnungen seien im folgenden unterdrückt. Wir geben nur den Weg sowie die Ergebnisse an. Ausgangspunkt ist die Beziehung für die Stoßneigung, die Stoßpolargleichung sowie die Differentialgleichungen für das Strömungsfeld in schallnaher Näherung (siehe z. B. [7]). Man erhält nach Ausführung eines Grenzüberganges auf der Rotationsachse folgenden Zusammenhang zwischen der Stoßkrümmung  $K_{st,0}$  und dem Geschwindigkeitsgradienten  $\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial X}\right)_0$  in reduzierten Größen

$$K_{st,0} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial X}\right)_0. \quad (2.4)$$

Der hier auftretende Wert  $\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial X}\right)_0$  kann mit (2.1)–(2.3) sowie der Prandtl'schen Relation ermittelt werden zu

$$\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial X}\right)_0 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l}. \quad (2.5)$$

Nähert man nun die Stoßkurve durch eine Parabel an, errechnet sich deren Krümmung im Scheitel, so gilt (s. Abb. 1)

$$\frac{y}{l} = \sqrt{\frac{2}{M_\infty^2 - 1}} \sqrt{\frac{d+x}{(-K_{st,0})l}}. \quad (2.6)$$

Berücksichtigt man hier (2.4) und (2.5), so kommt für die Form des abgelösten Stoßes

$$\frac{y}{l} = \frac{4}{\sqrt{3(M_\infty^2 - 1)}} \sqrt{\frac{d}{l} \frac{d+x}{l}}. \quad (2.7)$$

Im Schnittpunkt  $S$  der Schalllinie mit der Kopfwelle hat die Stoßneigung den Wert

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{Schall}} = \sqrt{\frac{2}{M_\infty^2 - 1}}.$$

(2.7) liefert dann für die Abszisse

$$\frac{x_s}{l} = -\frac{1}{3} \frac{d}{l} \quad (2.8a)$$

und die Ordinate dieses Punktes

$$\frac{y_s}{l} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{M_\infty^2 - 1}} \frac{d}{l}. \quad (2.8b)$$

### 3. Der Versuchsstand

Die Versuche wurden in den intermittierend arbeitenden Überschallkanälen des Institutes für Strömungslehre und Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe durchgeführt. Eine Beschreibung der Anlage findet sich z. B. in [5].

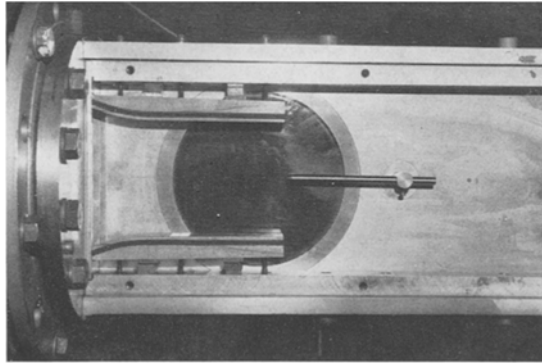


Abb. 2. Ansicht der geöffneten Meßstrecke. Strömung von links nach rechts

Das Erzeugen der schallnahen Überschallströmung erfolgte durch den Einbau von zwei profilierten Holzbacken in die Meßstrecke (s. Abb. 2). Durch Veränderung des engsten Querschnittes sowie des Austrittsquerschnittes der Backen konnte die Anström—Mach-Zahl variiert werden. Das Abstimmen der Meßstrecke auf konstante Geschwindigkeit erfolgte mit Hilfe des Einbaus einer Meßhalbscheibe in den Kanal. Diese ermöglichte es, den statischen Druck sowohl längs der Düsenachse als auch senkrecht dazu zu messen. Die Holzbacken wurden so lange mit Distanzstücken unterlegt, bis sich in der Meßstrecke eine nahezu konstante Druckverteilung eingestellt hatte. Auf diese Weise wurde erreicht, daß auf der Kanalachse in einem Bereich von maximal 140 mm Länge und senkrecht dazu bis fast an die Holzbacken parallele Strömungsverhältnisse in der Düse herrschten. Bezüglich der Abmessungen in der Meßstrecke s. Abb. 3.

In dieser so erzeugten schallnahen Überschallparallelströmung wurden Kegelhalbkörper untersucht. Sie wurden in die Halterung an der Kanalmittelachse eingeschraubt. Die Profilnase befand sich dabei unmittelbar hinter dem Austrittsquerschnitt der Holzbacken. Die Abmessungen der Körper waren so gewählt, daß die vom Backenende ausgehende Machsche Linie den Rotationskörper erst

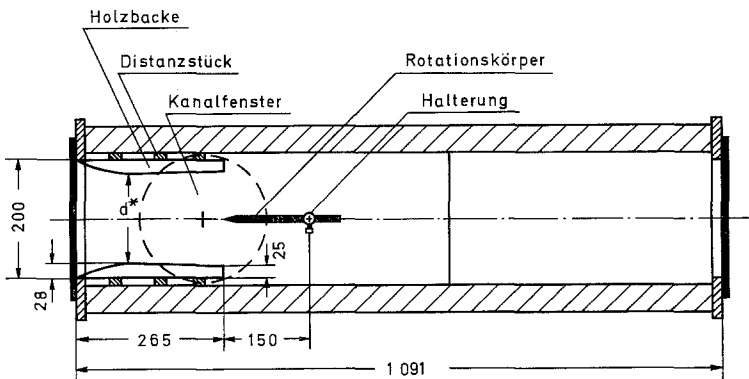


Abb. 3. Schnitt durch die Meßstrecke. Längenangaben in mm

stromab der Körperschulter erreichte. Dadurch war sichergestellt, daß das Profil parallel angeströmt wird. Die untersuchten Kegelhalbkörper hatten einen Durchmesser von 1,6–10 mm. Der halbe Öffnungswinkel  $\theta$  der Körperspitze variierte von  $9^\circ$ – $90^\circ$ .

#### 4. Der Kopfwellenabstand von Kegelhalbkörpern

Die Abb. 4a–c zeigen eine Auswahl von Schlierenaufnahmen abgelöster Kopfwellen vor Kegelhalbkörpern. Die Anströmung erfolgt von links nach rechts. Bei der Untersuchung der Kegelhalbkörper mit einem halben Öffnungswinkel von  $\theta = 9^\circ$  bis  $\sim 25^\circ$  ergaben sich folgende experimentelle Schwierigkeiten.

Für die Körper mit  $\theta = 9^\circ$  bis  $\theta \approx 15^\circ$  läßt sich aus einschlägigen Tabellenwerken (s. z. B. [8]) entnehmen, daß die Kopfwelle erst für Machsche Zahlen  $M_\infty < 1,05$  ablöst. Solche niedrigen Anström–Mach-Zahlen ließen sich bei der von

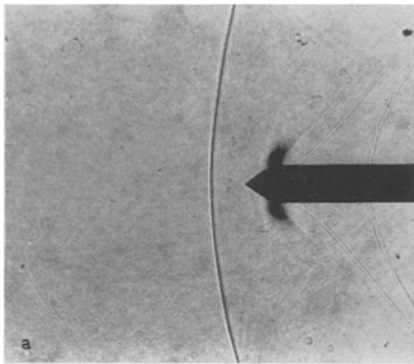
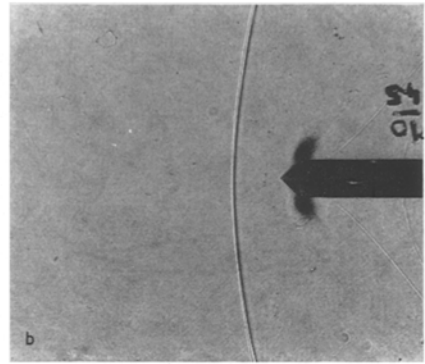
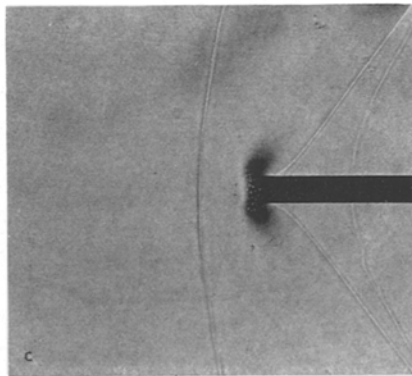
a)  $\theta = 35^\circ$ b)  $\theta = 45^\circ$ c)  $\theta = 90^\circ$ 

Abb. 4a, b, c. Schlierenaufnahmen der Umströmung von Kegelhalbkörpern bei

$$M_\infty = 1,08 \quad \frac{d}{D} = 1,75$$

uns verwendeten Versuchsanordnung nicht mehr einwandfrei einstellen. Für die Körper mit  $15^\circ < \theta < 25^\circ$  war die Stoßstärke schon bei einem Abstand von nur wenigen Millimetern von der Kegelspitze so gering, daß der Stoß im Schlierenbild nicht mehr eindeutig aufgelöst werden konnte. Wir beschränkten daher die experimentelle Untersuchung auf Kegelhalbkörper mit  $\theta > 25^\circ$ . Es handelt sich also in diesem Fall um Körper, die nicht mehr als schlank bezeichnet werden können und gegebenenfalls sogar stumpf sind.

Mißt man den Kopfwellenabstand  $d$  im vorliegenden Fall von der Schulter bis zum Stoß, so liefern die Experimente das interessante Ergebnis, daß  $d/D$  vom Öffnungswinkel des Kegels unabhängig ist. M. a. W. bei diesen dicken Kegelhalbkörpern bestimmt sich der Stoßabstand allein durch die Verdrängungswirkung des Halbkörpers. Die Eigenschaften der Spitze gehen hier nicht oder nur unwesentlich ein. Dies wurde bereits in einer Arbeit von MOECKEL [9] vorausgesetzt und findet sich auch bei CABANNES [10]. Es handelt sich hierbei um eine typische Eigenschaft von dicken oder gegebenenfalls stumpfen Körpern. Beim

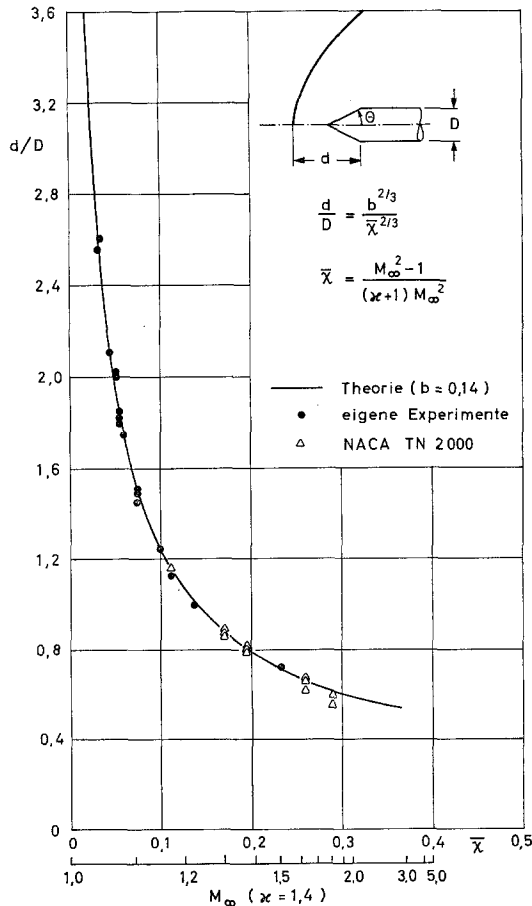


Abb. 5. Kopfwellenabstände vor Kegelhalbkörper

schlanken Rotationskörper kommt es dagegen sehr wohl auf die Eigenschaften der Körperspitze an. Da der Dickenparameter  $\tau$  beim vorliegenden Problem ohne Einfluß ist, wurde die folgende Auftragung für die Meßwerte gewählt

$$\frac{d}{D} = f(\bar{\chi}) \quad (4.1)$$

mit  $\bar{\chi}$  als schallnahen Ähnlichkeitsparameter (2.3) und  $\tau = 1$ .

(4.1) entspricht völlig den früheren Darstellungen im Fall des schlanken Körpers. In Abb. 5 ist eine größere Zahl von eignen Meßergebnissen und die von HEBERLE, WOOD und GOODERUM [11] eingetragen. Die ausgezogene Kurve ist die Theorie für den schlanken Körper

$$\frac{d}{D} = \frac{b^{2/3}}{\bar{\chi}^{2/3}} \quad (4.2)$$

mit  $b = 0,14$ .

Die Übereinstimmung der Meßergebnisse mit der Theorie ist sehr gut. Hieraus kann der Schluß gezogen werden, daß die beiden Voraussetzungen der Theorie, die zum Ergebnis (2.2) geführt haben, nämlich

1. die Einfriereigenschaft der schallnahen Strömungen,
2. das asymptotische Verhalten der  $u$ -Störung (2.1),

auch für die schallnahen Strömungen um stumpfe Körper gelten.

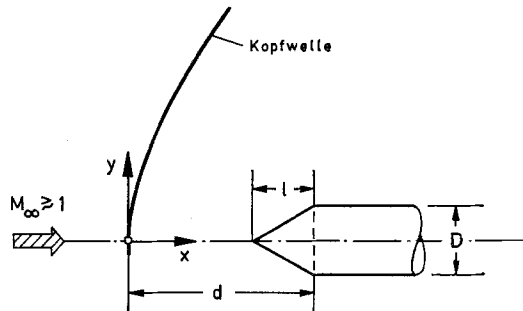


Abb. 6. Bezeichnungen beim Kegelhalbkörper

Interessant ist weiterhin eine Konsequenz für die Kopfwellenform. Wir ersetzen hierzu in (2.7) die Bezugslänge  $l$  durch  $D$ , und legen den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Scheitel des Stoßes. Mit den Bezeichnungen von Abb. 6 wird dann

$$\frac{y}{D} = \frac{4}{\sqrt{3(M_\infty^2 - 1)}} \sqrt{\frac{d-l}{D} \cdot \frac{x}{D}} \approx \frac{4}{\sqrt{3(M_\infty^2 - 1)}} \sqrt{\frac{d}{D} \cdot \frac{x}{D}} \quad (4.3)$$

Die benutzte Näherung ist um so besser, je größer  $d/l$  ist. Dies verlangt entweder einen großen Kopfwellenabstand oder einen stumpfen Körper. Aus (4.3)

ist sofort zu entnehmen, daß, wenn  $d/D$  nicht vom Öffnungswinkel des Kegels abhängt, auch die Gestalt der Kopfswelle von  $\theta$  unabhängig sein muß. Diese Eigenschaft hat bereits BUSEMANN [12] angedeutet. Damit bestimmt sich also auch die Größe des lokalen Unterschallgebietes allein durch die Verdrängungswirkung des Halbkörpers.

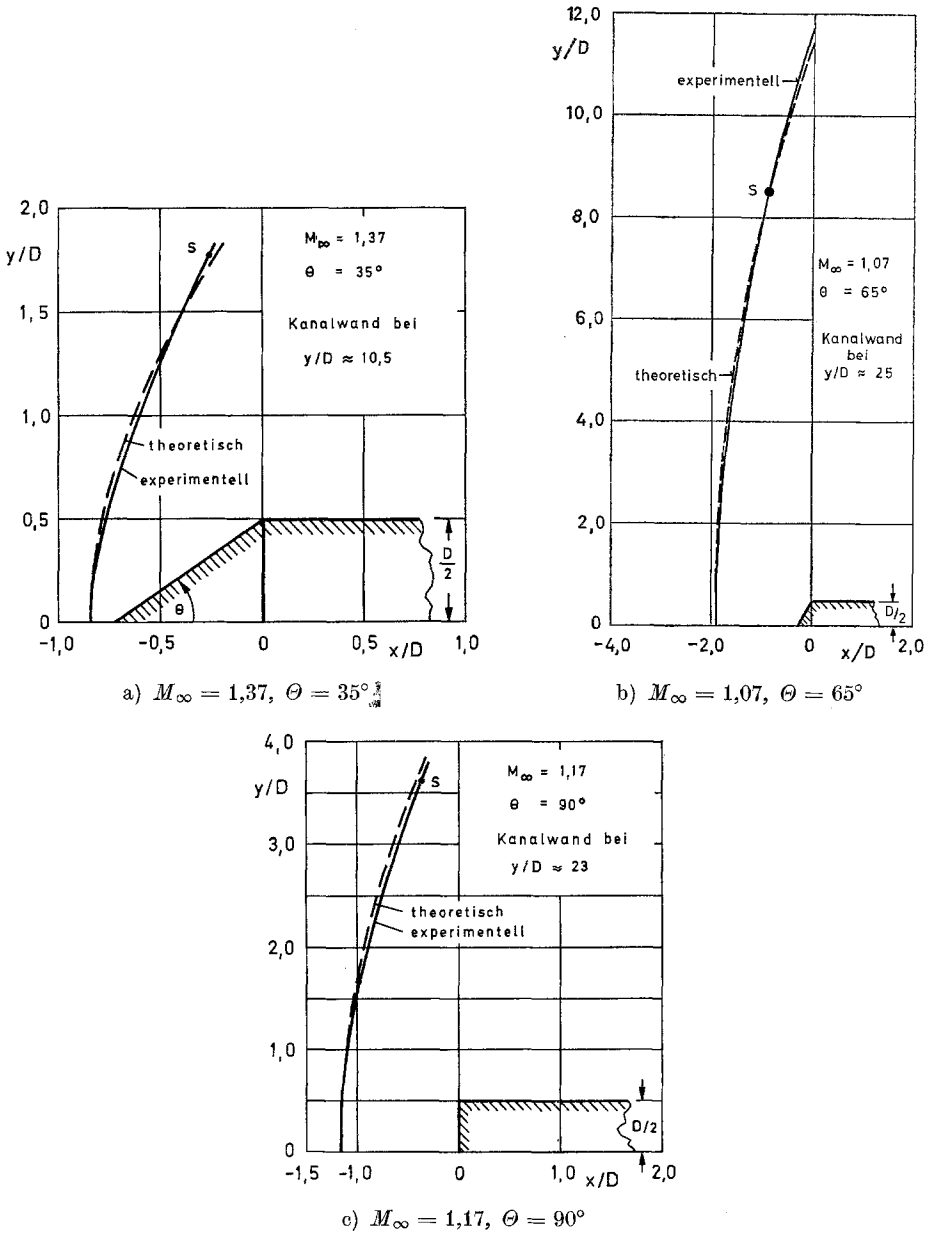


Abb. 7a, b, c. Vergleich der berechneten mit der experimentell ermittelten Kopfwellenform für Kegelhalbkörper



Die Abb. 7a—c zeigen einen Vergleich von errechneten und experimentell ermittelten Kopfwellenformen. Die Übereinstimmung beider Ergebnisse ist im Bereich des lokalen Unterschallgebietes recht gut. Die Kanalwand befindet sich in allen Fällen weit oberhalb des Schallpunktes.

Abschließend noch einige Bemerkungen zum Einfluß der Kanalwände auf die Meßwerte. Es wurden Kegelhalbkörper unterschiedlichen Durchmessers in der Meßstrecke bei derselben Anström—Mach-Zahl untersucht. Hierdurch konnte das Verhältnis von Düsenhöhe  $H$  bzw. Düsenbreite  $B$  zum Körperdurchmesser  $D$  in folgenden Grenzen variiert werden:

$$15 < \frac{H}{D} < 95, \quad 5 < \frac{B}{D} < 31.$$

Aus der sehr guten Übereinstimmung der eigenen Meßergebnisse untereinander sowie mit denen anderer Autoren [11] kann geschlossen werden, daß im betrachteten Fall der Kanalwandeinfluß nur gering war.

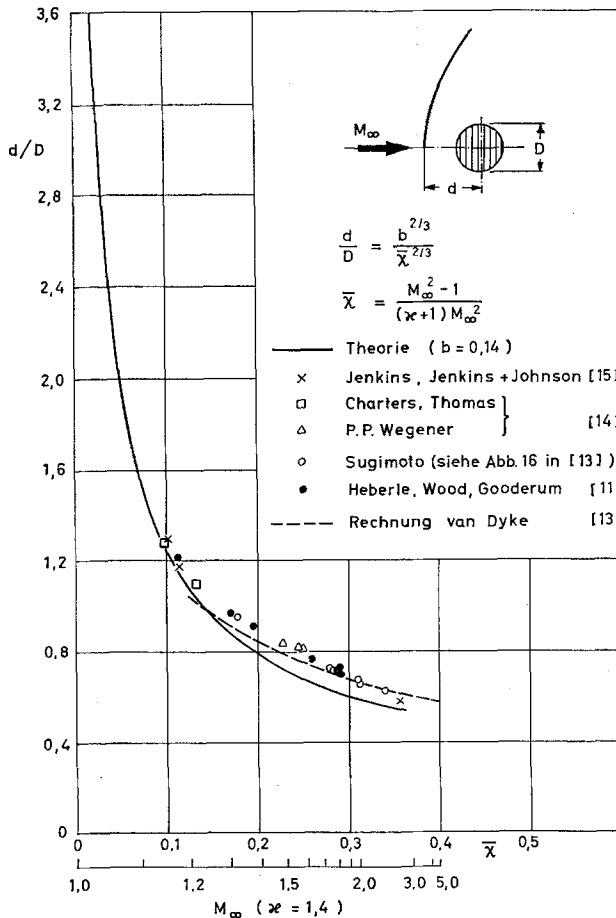


Abb. 8. Kopfwellenabstände vor Kugeln

### 5. Der Kopfwellenabstand von Kugeln

In Arbeiten von HEBERLE et al. [11], von VAN DYKE und GORDON [13], von WEGENER und BUZYNA [14] und von JENKINS et al. [15] sind u. a. Meßergebnisse für Kopfwellenabstände bei Kugeln enthalten. In Abb. 8 wurden die Abstände  $d$  der Stoßwelle vom Kugelzentrum, dimensionslos gemacht durch den Kugeldurchmesser  $D$ , über dem schallnahen Ähnlichkeitsparameter  $\bar{\zeta}$  (2.3) aufgetragen. Die Kugel wird durch  $\tau = 1$  erfaßt. Daneben ist in Abb. 8 das Ergebnis der Theorie für den Kegelhalbkörper (4.2) eingezeichnet, ebenso die Rechnung von VAN DYKE [13].

Ein Vergleich der experimentell ermittelten Kopfwellenformen von Kugel und Kegelhalbkörper in [11] führt zu dem überraschenden Ergebnis, daß bei ein und derselben Anström—Mach-Zahl die Stoßformen von Kugel und Kegelhalbkörper identisch sind (s. Abb. 9).

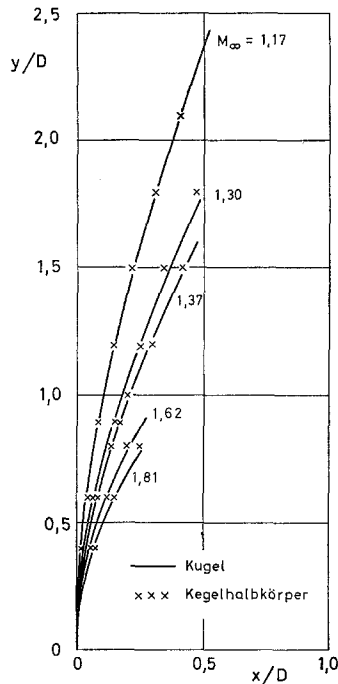


Abb. 9. Vergleich der experimentellen Kopfwellenform von Kugel und Kegelhalbkörper bei verschiedenen Anström—Mach-Zahlen

Daraus und aus der Tatsache, daß sich die experimentellen Werte in Abb. 8 asymptotisch der theoretischen Kurve für den Kegelhalbkörper nähern, kann man folgende Schlüsse ziehen:

1. Die theoretischen Überlegungen für den schlanken Körper führen offenbar auch bei der Kugel zu richtigen asymptotischen Aussagen,

2. Aus den Abb. 7a—c und Abb. 9 folgt, daß für den schallnahen Bereich näherungsweise die Form des abgelösten Stoßes für die Kugel mit Hilfe der Beziehung (4.3) errechnet werden kann. Dazu muß allerdings für den dimensionslosen Kopfwellenabstand  $d/D$  das theoretische Ergebnis (4.2) für den Kegelhalbkörper eingesetzt werden.

#### Literatur

- [1] ZIEREP, J.: Der Kopfwellenabstand bei einem spitzen, schlanken Körper in schallnaher Überschallströmung. *Acta Mechanica* **5**, 204—208 (1968).
- [2] FRANK, W.: Experimentelle Untersuchungen über den Kopfwellenabstand bei spitzen, schlanken Körpern in schallnaher Überschallströmung. Diplomarbeit angefertigt am Lehrstuhl für Strömungslehre der Universität Karlsruhe (1968).
- [3] ZIEREP, J.: Theoretische und experimentelle Bestimmung des Kopfwellenabstandes bei einem spitzen, schlanken Profil in transsonischer Überschallströmung. *Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl.* **15**, 141—147 (1970).
- [4] ZIEREP, J.: Theorie und Experiment bei schallnahen Strömungen, in: *Übersichtsbeiträge zur Gasdynamik* (LEITER, E., und J. ZIEREP, Hrsg.), S. 117—162. Wien—New York: Springer. 1971.
- [5] FRANK, W.: Die Untersuchung der schallnahen Überschallströmung um schlanke Profile. Diss. Universität Karlsruhe (1972).
- [6] MÜLLER, E. A., und K. MATSCHAT: Ähnlichkeitslösungen der transsonischen Gleichungen bei der Anström—Mach-Zahl 1. *Proc. Int. Congr. Appl. Mech.* **1964**, 1061—1068.
- [7] ZIEREP, J.: Theorie der schallnahen und der Hyperschallströmungen. Karlsruhe: Verlag G. Braun. 1966; siehe auch Taschenbuchausgabe: *Theoretische Gasdynamik 2*. Karlsruhe: Verlag G. Braun. 1972.
- [8] Notes and Tables for Use in the Analysis of Supersonic Flow. NACA TN 1428 (1947).
- [9] MOECKEL, W. E.: Approximate method for predicting form and location of detached shock waves ahead of plane or axially symmetric bodies. NACA TN 1912 (1949).
- [10] CABANNES, H.: Theorie des ondes de choc. In: *Handbuch der Physik* (FLÜGGE, S., Hrsg.), Bd. IV, Strömungsmech. III, S. 162—224. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer. 1960.
- [11] HEBERLE, W., G. P. WOOD, and P. B. GOODERUM: Data on Shape and Location of Detached Shock Waves on Cones and Spheres. NACA TN 2000 (1950).
- [12] BUSEMANN, A.: A Review of Analytical Methods for the Treatment of Flows with Detached Shocks. NACA TN 1858 (1949).
- [13] VAN DYKE, M. D., and H. D. GORDON: Supersonic Flow Past a Family of Blunt Axisymmetric Bodies. NASA TR R-1 (1959).
- [14] WEGENER, P. P., and G. BUZYNA: Experiments on Shock Stand-off Distance in non-equilibrium Flow. *Journ. Fluid Mech.* **37**, 325—335 (1969).
- [15] JENKINS, A. H., B. Z. JENKINS, and L. H. JOHNSON: Transonic and Low Supersonic Shock Shape Solutions. *AIAA Journ.* **4**, 1483—1485 (1966).

*Dr.-Ing. W. Frank und Prof. Dr.-Ing. J. Zierep*  
*Lehrstuhl für Strömungslehre*  
*Universität Karlsruhe*  
*Kaiserstraße 12*  
*D-7500 Karlsruhe*  
*Bundesrepublik Deutschland*