

Das Rayleigh-Stokes-Problem für die Ecke*

Von

J. Zierep, Karlsruhe, BRD

Mit 2 Abbildungen

*(Eingegangen am 14. August 1978)***1. Einleitung**

Die Grenzschicht in einer längs angeströmten Ecke ist ein charakteristisches Beispiel für eine dreidimensionale zähe Strömung. Sie ist für die Anwendungen von großem Interesse und wiederholt in der Literatur für laminare und auch für turbulente Strömung untersucht worden [1], [2], [3], [4].

Das Rayleigh-Stokes-Problem für die Ecke ist dem Verfasser bisher nicht begegnet. Die Lösung soll hier gegeben werden. Es handelt sich um eine neue exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Sie läßt sich in analytischer Form angeben und sehr einfach diskutieren. Sie bestätigt die typischen Grenzschichteigenschaften der früher hergeleiteten Grenzschichtlösung des Problems.

2. Herleitung der Rayleigh-Stokes-Lösung für die Ecke

Wir betrachten eine rechtwinklige Ecke (Abb. 1) und bestimmen die Strömung im ersten Quadranten: $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

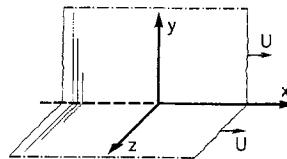


Abb. 1. Die Koordinaten für die Strömung in der rechtwinkligen Ecke

Die aus den beiden Halbebenen $\{-\infty < x < \infty, y \geq 0\}$, $\{-\infty < x < +\infty, z \geq 0\}$ bestehende Ecke wird zum Zeitpunkt $t = 0$ momentan auf die konstante Geschwindigkeit U in x -Richtung gebracht. Erfragt ist die im Stromfeld einsetzende Bewegung. Wird nicht die Ecke beschleunigt, sondern die Außenströmung, so liefert eine Galilei-Transformation sofort auch hier die Lösung.

* Herrn Professor Dr. Dr. h. c. H. Görtler zum 70. Geburtstag gewidmet.

Für den Fall der beschleunigten Ecke lauten die

Anfangsbedingung (AB):

$$t < 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad u = 0 \quad (2.1)$$

und die

Randbedingungen (RB):

$$\begin{aligned} y = 0, \quad z \geq 0, \\ t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad z = 0, \quad y \geq 0, \quad u = U \\ y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ein ähnlicher Schluß wie im Fall der Rayleigh-Stokeschen Plattenströmung führt hier zu der Aussage

$$u = u(y, z, t), \quad v = w \equiv 0, \quad p \equiv \text{konst.} \quad (2.3)$$

Aufgrund der Eckengeometrie muß hierin u invariant gegenüber Vertauschung von y und z sein. Die Bewegungsgleichungen (Kontinuität und Navier-Stokes-Gleichungen) führen zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2.4)$$

Das Anfangs-Randwertproblem (2.1), (2.2) für die Differentialgleichung (2.4) läßt sich mit bekannten Methoden lösen. Wir skizzieren den Lösungsweg. Durch

$$\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = \eta, \quad \frac{z}{\sqrt{\nu t}} = \zeta \quad (2.5)$$

werden neue Ähnlichkeitsvariable eingeführt.

(2.4) geht für die Funktion $u = u(\eta, \zeta)$ über in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\zeta}{2} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.6)$$

Die in η und ζ symmetrische Lösung lautet

$$u = A \int_0^\eta \int_0^\zeta e^{-\frac{\eta^2 + \zeta^2}{4}} d\zeta d\sigma + B, \quad A, B = \text{konst.} \quad (2.7)$$

Beachtet man (2.2), so kommt das bemerkenswert einfache Endergebnis

$$\boxed{\frac{u}{U} = 1 - \phi\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) \cdot \phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right)} \quad (2.8)$$

mit

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\alpha^2} d\alpha$$

als Gaußscher Fehlerfunktion.

Wird nicht die Ecke sondern die Außenströmung beschleunigt, so kommt anstelle von (2.8) die Lösung

$$\frac{u}{U} = \phi\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \cdot \phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) \tag{2.9}$$

Diese Darstellung läßt sich besonders einfach mit der Grenzschichtlösung [1] vergleichen.

3. Diskussion der Rayleigh-Stokes-Lösung für die Ecke

Die Lösung (2.8) ist symmetrisch in den Ähnlichkeitsvariablen (2.5) aufgebaut und zeigt eine enge Verwandtschaft mit der Lösung für das zugehörige ebene Problem. Wir führen die folgenden Grenzübergänge aus:

$$z \rightarrow \infty \text{ (} y \text{ fest), so wird } \frac{u}{U} \rightarrow 1 - \phi\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \tag{3.1a}$$

$$y \rightarrow \infty \text{ (} z \text{ fest), so kommt } \frac{u}{U} \rightarrow 1 - \phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right). \tag{3.1b}$$

In beiden Fällen erhalten wir die bekannte ebene Lösung, die in genügender Entfernung von der Ecke auftreten muß.

Von besonderem Interesse ist eine Aussage über die *Grenzschichtdicke* in der Ecke. Stellen wir wie üblich die Forderung, daß die Außenströmung bis auf 1% erreicht sein soll, so liefert (2.9) die Bedingung

$$\phi\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right) \cdot \phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right) = 0,99. \tag{3.2}$$

Dies ist eine implizite Darstellung für den Grenzschichtrand in der Ebene $x = \text{konst.}$ Die größte Dicke wird auf der Winkelhalbierenden $y = z$ angenommen (Abb. 2). Hier kommt

$$y = z = \delta, \quad \phi^2\left(\frac{\delta}{2\sqrt{vt}}\right) = 0,99,$$

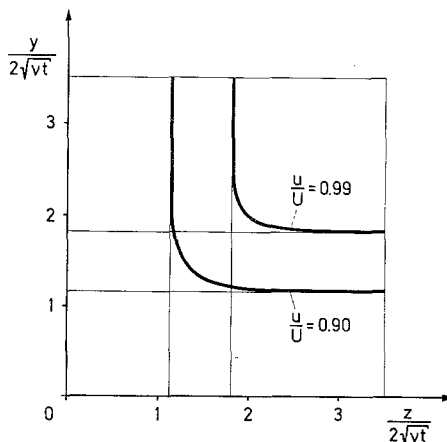


Abb. 2. Verlauf der Kurven $u/U = 0,99; 0,90$ in der Ebene $x = \text{konst.}$

d. h.

$$\left(\frac{\delta}{\sqrt{\nu t}}\right)_{\text{räumlich}} = 3,968. \quad (3.3)$$

Demgegenüber gilt im ebenen Fall

$$\left(\frac{\delta}{\sqrt{\nu t}}\right)_{\text{eben}} = 3,643. \quad (3.4)$$

Die Grenzschichtdicke ist also bei der Ecke größer als im Fall der Strömung über der Ebene. Die Zunahme des Maximums beträgt allerdings nur etwa 10%. Auch diese Aussage stimmt mit den früher aus der Grenzschichtlösung [1] erhaltenen Ergebnissen gut überein.

Interessant ist auch der Vergleich der Reibungswiderstände im ebenen und räumlichen Fall.

Im Fall der *Ecke* gilt bei beschleunigter Außenströmung (2.9). Damit kommt für die Wandschubspannung bei $y = 0$:

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}} \phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right). \quad (3.5)$$

Dies ergibt bei einem Rechteck mit den Seiten b und l für den Reibungswiderstand einen Beitrag

$$W_R = l \int_{z=0}^b \tau_w dz.$$

(3.5) führt hierin zu

$$(C_R)_{\text{räumlich}} = \frac{W_R}{\frac{\rho}{2} U^2 b l} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\nu}{U b} \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{\nu t}}} \phi(\alpha) d\alpha. \quad (3.6)$$

Eine ganz entsprechende Rechnung liefert im *ebenen Fall* das Ergebnis

$$(C_R)_{\text{eben}} = \frac{2\nu}{\sqrt{\pi \nu t} U}. \quad (3.7)$$

Da die Fehlerfunktion ϕ als Integrand von (3.6) stets < 1 ist, erkennt man, daß

$$(C_R)_{\text{räumlich}} < (C_R)_{\text{eben}}$$

gilt. Beide Werte werden genau dann einander gleich, wenn ϕ in (3.6) durch 1 ersetzt wird, was dem ebenen Fall entspricht. Die Abnahme der Wandreibung hat ihre Ursache in der Abnahme der Wandschubspannung (3.5) und dies wiederum liegt an der Zunahme der Grenzschichtdicke beim Übergang der ebenen Strömung zur Ecke.

Literatur

- [1] Carrier, G. F.: The boundary layer in a corner. Quarterly Appl. Math. 4, 367—370 (1946).
- [2] Gersten, K.: Corner interference effects. AGARD-Rep. 299 (1959), ZAMM 39, 428—429 (1959).
- [3] Gersten, K., Miyashio, H.: Ein Verfahren zur Berechnung der Reibungsschicht entlang einer rechtwinkligen Ecke für inkompressible Strömung. Report 60/35, Institut für Strömungslehre der Techn. Hochschule Braunschweig (1960).
- [4] Steinheuer, J.: Three-dimensional boundary layers on rotating bodies and in corners. AGARDograph 97, 577—611 (1965).

*Professor Dr.-Ing. J. Zierep
Institut für Strömungslehre und Strömungsmaschinen
Universität Karlsruhe
D - 7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland*