

## Verzweigungslasten elastoplastischer Kreisplatten

Von

O. Bruhns und K. Thermann, Bochum, BRD

Mit 5 Abbildungen

(Eingegangen am 5. November 1973)

### Zusammenfassung — Summary

**Verzweigungslasten elastoplastischer Kreisplatten.** Aufbauend auf den Arbeiten von Shanley und Hill wird eine Theorie zur Bestimmung von Verzweigungspunkten elastoplastisch deformierter Kontinua hergeleitet. Unter Annahme eines homogenen Grundzustandes mit bekanntem Spannungsfeld ergeben sich lineare partielle Differentialgleichungen für ein mögliches Geschwindigkeitsfeld. Die Eindeutigkeit dieses Geschwindigkeitsfeldes wird untersucht. Eine mögliche Lösung besteht stets in einem solchen Geschwindigkeitsfeld, welches wiederum zu homogenen Deformationszuständen führt. Neben dieser trivialen Lösung existieren für „kritische“ Werte des Spannungszustandes (Verzweigungslasten) auch Lösungen, die zu inhomogenen Deformationen führen. Als Beispiel werden für einen geführten kreiszylindrischen Körper unter radialer Beanspruchung diese Verzweigungslasten ermittelt. Dabei zeigt sich, daß sowohl für Druck- als auch für Zugbeanspruchung Verzweigungslasten existieren.

**Bifurcation Loads of Elastic-Plastic Cylindrical Plates.** Based on the works of Shanley and Hill a theory is developed to determine bifurcation of elastic-plastic continua. Under the assumption of a homogeneous current state, with known stress distribution we get a set of linear partial differential equations for a possible velocity field. The uniqueness of this velocity field is examined. One possible solution is a velocity field which again leads to homogeneous deformations. In addition to this trivial solution there exist solutions for “critical” values of the stress state (corresponding to bifurcation loads), which lead to nonhomogeneous deformations. As an example these bifurcation loads are examined for a guided cylindrical body under radial load. It is shown that there exist bifurcation loads for compression as well as for tension.

### 1. Einführung

Stabilitätsprobleme spielen im Ingenieurwesen eine bedeutende Rolle. Für elastische Strukturen liegen seit langem eine gut ausgebaute Theorie und Lösungsverfahren vor. Im Gegensatz dazu ist die Stabilitätstheorie elastoplastischer Stoffe weit weniger gut entwickelt und relativ jungen Ursprungs. Selbst für den einfachen Druckstab, dessen kritische Last im elastischen Bereich schon von Euler angegeben wurde, hat die Einbeziehung plastischer Deformationen lange Zeit Kopfzerbrechen gemacht und zu widersprüchlichen Ergebnissen geführt. Eine Klärung brachten erst die Arbeiten von SHANLEY [1], [2]. Wesentliches Ergebnis dieser Untersuchungen war, daß der Verlust der Eindeutigkeit der Lösung (Verzweigung des Gleichgewichts) nicht unbedingt mit einem Stabilitätsverlust im dynamischen Sinne verbunden sein muß. Da jedoch nach Überschreiten

der Verzweigungslast die Deformationen des Systems verhältnismäßig stark anwachsen, ist mit der Verzweigungslast praktisch auch die Tragfähigkeitsgrenze erreicht. Der Aufdeckung von Mehrdeutigkeiten der Lösungen, d. h. der Ermittlung von Verzweigungspunkten, kommt deshalb besondere Bedeutung zu.

Die Grundlagen einer allgemeinen Kontinuumstheorie der Stabilität und Eindeutigkeit der Deformationen wurden von HILL [3]—[5] in den Jahren 1956 bis 1958 sowohl für starrplastische als auch für elastoplastische Stoffe entwickelt. Aufbauend auf diesen Arbeiten sind verschiedene Einzelprobleme behandelt worden. Erwähnt seien hier lediglich neuere Arbeiten von SEWELL [6], ARIARATNAM/CHENG/DUBEY [7]—[11], RAMSEY/VAUGHAN [12]—[14] und STORAKERS [15], [16]. In allen diesen Arbeiten werden „einfache“ Körper, wie z. B. Kreiszyylinder oder Quader, unter einfachen, meist homogenen Spannungszuständen im „Grundzustand“ betrachtet. Die analytische Behandlung von Problemen dieser Art wird durch die Annahme eines homogenen Grundzustandes wesentlich erleichtert, da sich der Körper dann als Ganzes entweder elastisch oder elastoplastisch deformiert.

In der vorliegenden Arbeit werden Verzweigungslasten für die dicke elastoplastische Kreisplatte unter radialer Belastung angegeben.

## 2. Grundgleichungen

### 2.1. Allgemeines

Wir betrachten einen Körper, der vom spannungsfreien Zustand  $B_0$  aus homogen deformiert wird (Abb. 1). Zu einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt  $t$  während dieser homogenen Deformation nehme der Körper die Konfiguration  $B$  ein. In der Stabilitätsliteratur ist es üblich, diesen Zustand mit „Grundzustand“

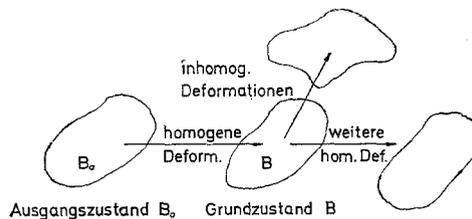


Abb. 1. Deformationszustände

zu bezeichnen. Der Spannungs- und Verzerrungszustand in  $B$  sowie das Geschwindigkeitsfeld, welches zu weiteren homogenen Deformationen führt, seien als bekannt vorausgesetzt. Wir fragen nun, ob ein solches Geschwindigkeitsfeld existiert, welches vom Grundzustand  $B$  aus zu nicht homogenen Deformationen führt. Wenn es ein solches Geschwindigkeitsfeld gibt, so liegt eine Verzweigung des Gleichgewichts vor. Die zugehörige Belastung ist die Verzweigungslast. In diesem Abschnitt werden die Bedingungen, denen das gesuchte Geschwindigkeitsfeld unterworfen ist, aufgestellt. Maßzahlen von Vektoren und Tensoren beziehen sich im folgenden auf ein raumfestes Koordinatensystem der Referenzkonfiguration  $B$ . Unseren Betrachtungen liegt ein inkompressibler elastoplastischer Werkstoff zugrunde.

## 2.2. Stoffgesetz

Bei Formänderungen im elastoplastischen Bereich läßt sich der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\mathbf{D}$  additiv aufspalten in einen Anteil  $\mathbf{D}_e$ , der rein elastisches, und einen Anteil  $\mathbf{D}_p$ , der rein plastisches Verhalten beschreibt, also

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p. \quad (2.1)$$

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\mathbf{D}$  ist dabei definiert als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T). \quad (2.2)$$

Der antimetrische Anteil dieses Geschwindigkeitsgradienten ergibt den Tensor der Drehgeschwindigkeiten  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^T). \quad (2.3)$$

Zur Beschreibung inkompressiblen elastischen Stoffverhaltens postulieren wir einen Zusammenhang zwischen Verzerrungsgeschwindigkeit und Jaumannscher Zeitableitung des Spannungsdeviators  $\mathbf{T}$  in der Form

$$\mathbf{D}_e = \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{T}}, \quad (2.4)$$

der aufbauend auf Hill vielfach in der Literatur über Stabilitätsprobleme benutzt wird. Die Jaumannsche Spannungsänderungsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{S}}$  ist durch die Beziehung [17]

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{W}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{W} \quad (2.5)$$

definiert.  $\mathbf{S}$  ist dabei der Spannungstensor, der sich in bekannter Weise aus dem Deviator  $\mathbf{T}$  und dem Kugeltensor des hydrostatischen Druckes  $p$  zusammensetzt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - p\mathbf{1} \quad (2.6)$$

$G$  ist der Schubmodul.  $(\dot{\quad})$  kennzeichnet hier und im folgenden die substantielle Ableitung nach der Zeit, die bei raumbezogenen Tensoren neben der partiellen Ableitung nach der Zeit bei festgehaltenen Raumkoordinaten noch einen konvektiven Anteil enthält. Das Stoffgesetz (2.4) repräsentiert nun streng genommen hypoelastisches Verhalten. LEHMANN [18] hat jedoch nachgewiesen, daß man zumindest für solche Stoffe wie beispielsweise Metalle, deren elastische Verzerrungen stets klein bleiben, das elastische Verhalten hinreichend genau durch ein hypoelastisches approximieren kann.

Das Stoffgesetz für rein plastische Deformationen nehmen wir an zu

$$\mathbf{D}_p = \dot{\lambda}\mathbf{T} + \varkappa\dot{\mathbf{T}}. \quad (2.7)$$

Dabei stellt der erste Term dieser Beziehung den Anteil dar, der sich nach der Theorie des plastischen Potentials unter Verwendung der Fließbedingung

von Huber—Mises—Hencky

$$F(\mathbf{T}, \dots) = \text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{T}) - k^2(w) = 0 \quad (2.8)$$

einstellt. Der zweite Term stellt eine Erweiterung dieser „Normalenregel“ dar. Mit dieser Modifikation des Stoffgesetzes läßt sich in vielen Fällen das reale Werkstoffverhalten besser erfassen [19].

Die freien Größen im Stoffgesetz (2.7) —  $\lambda$  und  $\kappa$  — sind so zu bestimmen, daß während plastischer Deformationen die Fließbedingung (2.8) stets erfüllt bleibt, also  $\dot{F} = 0$  wird.

Führen wir dazu als Maß für die Verfestigung den Ausdruck

$$B(w) = \frac{dk^2(w)}{2dw} \quad (2.9)$$

als eine Funktion der plastischen Arbeit  $w$  ein<sup>1</sup>, so läßt sich  $\lambda$  eliminieren. Wir erhalten so aus (2.7)

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{B} \left[ (1 - \beta) \frac{\text{Sp}(\dot{\mathbf{T}}\mathbf{T})}{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{T})} \mathbf{T} + \beta \dot{\mathbf{T}} \right] \quad (2.10)$$

Über den Parameter

$$\beta = \kappa B; \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (2.11)$$

läßt sich nun in diesem Stoffgesetz der Anteil des zweiten Terms von (2.7) steuern. Setzen wir z. B. in (2.10)  $\beta = 0$ , so wird dieses Gesetz wie üblich allein durch die Normalenregel bestimmt. Für  $\beta = 1$  verschwindet gerade dieser Anteil, und wir erhalten ein Stoffgesetz, das auch im Bereich plastischer Deformationen die Inkremente von Spannungen und Verzerrungen miteinander verknüpft.

Mit (2.4) und (2.10) folgt dann aus der Verknüpfung (2.1) für Belastungsvorgänge im elastoplastischen Zustand der Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p = \frac{1}{B} \left[ \left( \beta + \frac{B}{2G} \right) \dot{\mathbf{T}} + (1 - \beta) \frac{\text{Sp}(\dot{\mathbf{T}}\mathbf{T})}{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{T})} \mathbf{T} \right]. \quad (2.12)$$

Entlastungsvorgänge, die rein elastisch erfolgen, sollen hier ausgeschlossen bleiben. Das setzt voraus, daß die Belastungsbedingung, die unter Verwendung von (2.8) üblicherweise in der Form

$$\text{Sp}(\mathbf{T}\dot{\mathbf{S}}) \geq 0 \quad (2.13)$$

angegeben wird [19], stets erfüllt ist. (2.13) wollen wir später benutzen, um die Gültigkeit unserer Lösungen zu kontrollieren.

Durch Überschieben mit dem Spannungsdeviator und anschließende Spurbildung läßt sich in (2.12) nun noch die Spur von  $\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}$  durch die Spur von  $\mathbf{T}\mathbf{D}$  ausdrücken

$$\text{Sp}(\mathbf{T}\dot{\mathbf{T}}) = \frac{B\delta}{1 - \beta} \text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D}), \quad (2.14)$$

<sup>1</sup> Es soll hier angemerkt werden, daß sich der Verlauf der Funktion  $B(w)$  nach der gewählten Form des Verfestigungsgesetzes  $k^2(w)$  richtet. So nimmt z. B. für einen linearen Verfestigungsansatz  $B$  den Wert einer konstanten Größe an. Die auf die Volumeneinheit bezogene plastische Arbeit  $w$  ist definiert durch  $\dot{w} = \text{Sp}(\mathbf{D}_p\mathbf{T})$ .

wobei wir  $\delta$  als neue dimensionslose Stoffgröße eingeführt haben

$$\delta = \frac{1 - \beta}{1 + \frac{B}{2G}}, \quad (2.15)$$

die für rein elastisches Verhalten den Wert 0, für elastisch-idealplastisches Verhalten den Wert 1 annimmt.

Dann können wir schließlich (2.12) nach den substantiellen Ableitungen der Spannungen auflösen, die wir im folgenden benötigen werden:

$$\dot{\mathbf{S}} = \eta \mathbf{D} - \dot{p} \mathbf{1} - \eta \delta \frac{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D})}{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{T})} \mathbf{T} + \mathbf{W}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{W}, \quad (2.16)$$

mit

$$\eta = \frac{2G}{1 + \beta \cdot \frac{2G}{B}}. \quad (2.17)$$

### 2. 3. Gleichgewicht

Die Gleichgewichtsbedingung, die bei verschwindenden Massenkräften

$$\text{Div } \mathbf{S} = 0 \quad (2.18)$$

lautet, muß selbstverständlich für jeden Körperpunkt zu allen Zeiten gelten. Daraus folgt, daß auch die substantielle Zeitableitung der Gleichgewichtsbedingung verschwinden muß:

$$[\text{Div } \mathbf{S}]' = 0. \quad (2.19)$$

Die Ausführung dieser Operation erfordert eine etwas längere Rechnung.

Als Ergebnis erhalten wir [10]

$$\text{Div } \dot{\mathbf{S}}_R = \text{Div} [\dot{\mathbf{S}} + \text{Sp}(\mathbf{U}) \mathbf{S} - \mathbf{U}\mathbf{S}] = 0. \quad (2.20)$$

$\mathbf{S}_R$  stellt dabei den unsymmetrischen 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor dar [17], der die Spannungen bezüglich der Ausgangsflächen in der Referenzkonfiguration mißt. Er wird deshalb auch als nomineller Spannungstensor bezeichnet.

### 2. 4. Feldgleichungen und Randbedingungen

Für die hier betrachteten homogenen Spannungszustände sind die Gleichgewichtsbedingungen (2.18) identisch erfüllt. Unterwirft man nun den Körper im Grundzustand  $B$  einem Geschwindigkeitsfeld, so ergeben sich nach dem Stoffgesetz (2.16) Spannungsänderungen, die ihrerseits den Bedingungen des „fortgesetzten Gleichgewichts“ (2.20) genügen müssen.

Die Bedingungen für ein mögliches Geschwindigkeitsfeld lauten dann

$$\text{Div} \left[ \eta \mathbf{D} - \dot{p} \mathbf{1} - \eta \delta \frac{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D})}{\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{T})} \mathbf{T} - \mathbf{D}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{W} \right] = 0 \quad (2.21)$$

oder in Komponentenform

$$\begin{aligned} & \eta d_k^i \Big|_i - p_{,i} \delta_k^i - \eta \delta \left( \frac{\tau_s^r d_r^s}{\tau_s^r \tau_r^s} \tau_k^i \right) \Big|_i \\ & - (d_r^i \sigma_k^r) \Big|_i - (\sigma_r^i \omega_{,k}^r) \Big|_i = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit  $( )_{,i}$  als partieller,  $( ) \Big|_i$  als kovarianter Ableitung nach der Koordinate  $i$ , der Referenzkonfiguration und  $\delta_k^i$ ,  $\sigma_k^i$ ,  $\tau_k^i$ ,  $d_k^i$  und  $\omega_{,k}^i$  jeweils als Maßzahlen von  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{W}$ .

Da nun voraussetzungsgemäß die Spannungen im Grundzustand bekannt sind, stellt (2.22) drei lineare partielle Differentialgleichungen für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{u}$  dar. Die in diesen Gleichungen enthaltene Änderungsgeschwindigkeit des hydrostatischen Druckes läßt sich unter Zuhilfenahme der Inkompressibilitätsbedingung

$$d_r^r = 0 \quad (2.23)$$

eliminieren.

Bei der Formulierung der zu (2.22) gehörenden Randbedingungen haben wir zu unterscheiden zwischen dem Teil der Oberfläche  $O_u$ , für den der Geschwindigkeitszustand vorgegeben ist, und dem Teil  $O_f$ , der Kräfte- und Momentenbedingungen unterliegt. Zur vollständigen Formulierung der Kräfte- und Momentenbedingungen gehören nun nicht nur Angaben über die Oberflächenbelastung selbst, sondern zusätzlich auch darüber, wie sich diese im Laufe der Zeit ändert.

Da sich die Flächenvektoren der Flächenelemente dem Betrage und der Richtung nach während des Belastungsprozesses verändern, ist es sinnvoll, die Belastungsvektoren pro Flächenelement des Grundzustandes vorzuschreiben. Es wird also nicht die Änderungsgeschwindigkeit der wirklichen, sondern die der nominellen Oberflächenspannungen vorgeschrieben. Für richtungstreue Belastungen haben wir also

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \mathbf{S}_R \mathbf{n}_R &= \mathbf{f}^* \\ \dot{\mathbf{S}}_R \mathbf{n}_R &= \dot{\mathbf{f}}^* \end{aligned} \right\} \text{(auf } O_f) \\ & \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ (auf } O_u) \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{n}_R$  als Normalenvektor des Flächenelementes in der Referenzkonfiguration und  $\mathbf{f}^*$  und  $\mathbf{u}^*$  als vorgegebenen Belastungs- bzw. Geschwindigkeitsvektoren.

### 3. Anwendung der Grundgleichungen auf Kreisplatten

Als Beispiel betrachten wir eine beliebig dicke kreiszylindrische Platte unter gleichförmig auf dem Zylindermantel verteilter radialer Belastung. Nach einer homogenen Deformation hat die Platte im Grundzustand  $B$  den Radius  $a$  und die Dicke  $t$ . Die von Null verschiedenen Metrikkoeffizienten und Christoffelsymbole des zugrunde gelegten Zylinderkoordinatensystems

$$(x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z)$$

sind bekanntlich

$$\begin{aligned} g^{11} &= g_{11} = g^{33} = g_{33} = 1; \\ g^{22} &= r^{-2}; \quad g_{22} = r^2; \\ I_{22}^1 &= -r; \quad I_{12}^2 = r^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der homogene Spannungszustand in  $B$  stellt sich gemischtvariant dar als

$$\sigma_k^i = \sigma_{Rk}^i = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Führen wir nun für den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}$  ein

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = (u, v, w),$$

so lassen sich die Tensoren der Verzerrungsgeschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit angeben zu

$$d_k^i = \begin{pmatrix} u' & \frac{1}{2} \left( u^* + v' - \frac{2v}{r} \right) & \frac{1}{2} (u^+ + w') \\ \frac{1}{2r^2} \left( u^* + v' - 2 \frac{v}{r} \right) & \frac{u}{r} + \frac{v^*}{r^2} & \frac{1}{2r^2} (v^+ + w^*) \\ \frac{1}{2} (u^+ + w') & \frac{1}{2} (v^+ + w^*) & w^+ \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$\omega_k^i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} (u^* - v') & \frac{1}{2} (u^+ - w') \\ -\frac{1}{2r^2} (u^* - v') & 0 & \frac{1}{2r^2} (v^+ - w^*) \\ -\frac{1}{2} (u^+ - w') & -\frac{1}{2} (v^+ - w^*) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

wobei hier und im folgenden

$$(\ )' = \frac{\partial}{\partial r} (\ ); \quad (\ )^* = \frac{\partial \varphi}{\partial} (\ ); \quad (\ )^+ = \frac{\partial}{\partial z} (\ )$$

gelten sollen.

Nach diesen Vorbereitungen können die Feldgleichungen (2.22) und (2.23) leicht ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{2v^*}{r^3} - \frac{u}{r^2} + \delta w^{+'} - \theta [u^+ - w']^+ - 2q' &= 0 \\ \Delta v + \frac{2u^*}{r} - \frac{2v'}{r} + \delta w^{*'} - \theta [v^+ - w^*]^+ - 2q^* &= 0 \\ \Delta w - 2\delta w^{++} + \theta \Delta w - 2q^+ &= 0 \\ u' + \frac{u}{r} + \frac{v^*}{r^2} + w^+ &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zur Abkürzung sind dabei bezogene Größen

$$\theta = \frac{\sigma}{\eta}; \quad q = \frac{\dot{p}}{\eta} \quad (3.6)$$

und der Operator

$$\Delta(\ ) = (\ )'' + \frac{1}{r} (\ )' + \frac{1}{r^2} (\ )^{**} + (\ )^{++} \quad (3.7)$$

verwendet worden.

(3.5) stellt 4 lineare partielle Differentialgleichungen für  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $q$  dar, die noch von allen drei Raumvariablen  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  abhängen. Die Lösung dieses Systems wird wesentlich vereinfacht, wenn man sich — wie es hier geschehen soll — auf ein zweidimensionales Grundgebiet beschränkt, indem man annimmt, daß die unbekannt Funktionen nur von  $r$  und  $z$ , nicht aber von  $\varphi$  abhängen. Physikalisch bedeutet dies, daß nur rotationssymmetrische Geschwindigkeitsfelder zugelassen werden. Einige Bemerkungen über den allgemeineren Fall nicht-rotationssymmetrischer Geschwindigkeitsfelder findet man in [20].

#### 4. Rotationssymmetrische Beulformen

Setzen wir also in (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\ ) = (\ )^* = 0,$$

so entkoppelt sich das Gleichungssystem in eine Gleichung, die nur die unbekannt Funktion  $v$  enthält:

$$\Delta v - \frac{2v'}{r} - \theta v^{++} = 0, \quad (4.1)$$

und in drei weitere Gleichungen für  $u$ ,  $w$  und  $q$ :

$$\begin{aligned} \Delta u - \frac{u}{r^2} + \delta w^{++} - \theta [u^+ - w^+] + 2q' &= 0, \\ \Delta w - 2\delta w^{++} + \theta \Delta w - 2q^+ &= 0, \\ u' + \frac{u}{r} + w^+ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Zur Formulierung der Randbedingungen nehmen wir an, daß die Platte an den Rändern  $z = \pm t/2$  spannungsfrei bleibe, während sie an den Mantelflächen  $r = a$  reibungsfrei (geschmiert) geführt werde. In radialer Richtung sei hier zudem eine über die Mantelflächen konstante Geschwindigkeit vorgegeben.

Nach (2.24) folgen daraus dann die Randbedingungen

$$\begin{aligned} z = \pm \frac{t}{2}: \dot{\sigma}_R^{3j} &= 0 \quad (j = 1, 2, 3) \\ r = a: \quad u &= \text{const} \\ \dot{\sigma}_R^{1k} &= 0 \quad (k = 2, 3), \end{aligned} \quad (4.3)$$

die wir auch mit Hilfe des Stoffgesetzes (2.16) und (2.20) durch die Geschwindigkeitskomponenten und die Änderungsgeschwindigkeit des hydrostatischen Druckes ausdrücken können.

$$z = \pm \frac{t}{2}: \quad v^+ = 0, \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u^+ + w' &= 0 \\ (1 - \delta) w^+ - q &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$r = a: \quad \frac{1}{2} v' - (1 - \theta) \frac{v}{r} = 0, \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \text{const} = U \\ w' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

#### 4.1. Verzweigungslasten bei Schergeschwindigkeiten

Betrachten wir zunächst die entkoppelte Differentialgleichung (4.1) für die Schergeschwindigkeit  $v$  mit den beiden Randbedingungen (4.4) und (4.6). Der Separationsansatz

$$v(r, z) = rg(r) f(z) \quad (4.8)$$

überführt (4.1) in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 g'' + rg' - (1 + cr^2) g = 0, \quad (4.9)$$

$$(1 - \theta) f'' + cf = 0. \quad (4.10)$$

Da nach (4.4)  $v^+$  am oberen und unteren Plattenrand  $z = \pm \frac{t}{2}$  verschwinden muß, kommt als Grundlösung von (4.10) nur

$$f = \sin \sqrt{\frac{c}{1 - \theta}} z \quad (4.11)$$

in Frage mit

$$c = (1 - \theta) (2n - 1)^2 \frac{\pi^2}{t^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.12)$$

Die Gleichung (4.9) wird durch die modifizierten Bessel-Funktionen erster Ordnung  $I_1(\sqrt{c} r)$  und  $K_1(\sqrt{c} r)$  gelöst. Da diese Lösung für  $r = 0$  endlich bleiben muß, erhalten wir schließlich nach (4.8) für  $v(r, z)$

$$v(r, z) = Ar I_1(\sqrt{c} r) \sin \left( \sqrt{\frac{c}{1 - \theta}} z \right) \quad (4.13)$$

mit  $A$  als beliebiger Konstanten.

Die für  $r = a$  zu erfüllende Randbedingung (4.6) liefert als Bestimmungsgleichung für den Eigenwert  $\theta$

$$I_0(\sqrt{c} a) \sqrt{c} a - 2(1 - \theta) I_1(\sqrt{c} a) = 0. \quad (4.14)$$

Die Auswertung von (4.14) und (4.12) ist im allgemeinen nur numerisch möglich. Für  $\sqrt{c} a \ll 1$  läßt sich jedoch über die bekannten Reihenentwicklungen von  $I_0(\sqrt{c} a)$  und  $I_1(\sqrt{c} a)$  folgende Näherungsformel herleiten:

$$\theta = -c \frac{a^2}{8}$$

bzw. mit (2.17) und (3.6)

$$\sigma = -\frac{1}{32} \left[ \frac{2a}{t} \pi(2n-1) \right]^2 \frac{2G}{1 + \beta \frac{2G}{B}}. \quad (4.15)$$

Das allgemeine Ergebnis kann Abb. 2 entnommen werden.

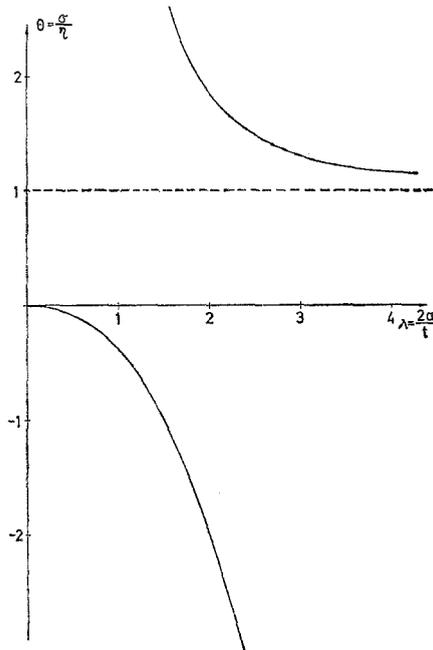


Abb. 2. Scher-Verzweigungslasten

#### 4.2. Verzweigungslasten beim Ausbeulen der Platte

Das verbleibende System (4.2) läßt sich umformen in eine Gleichung, die nur noch  $w$  enthält:

$$(1 + \theta) \Delta \Delta w - (2\theta + 3\delta) \Delta w^{++} + 3\delta w^{++++} = 0 \quad (4.16)$$

sowie zwei weitere Gleichungen, aus denen sich  $q$  und  $u$  bei bekanntem  $w$  leicht integrieren lassen:

$$2q^+ = (1 + \theta) \Delta w - 2\delta w^{++}, \quad (4.17)$$

$$(ru)' = -rw^+. \quad (4.18)$$

Der Lösungsansatz

$$w(r, z) = J_0(\nu r) \cdot \psi(z) \quad (4.19)$$

überführt (4.16) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1 + \theta) \nu^4 \psi - \nu^2(2 - 3\delta) \psi'' + (1 - \theta) \psi'''' = 0, \quad (4.20)$$

deren Lösung

$$\psi(z) = C_1 \operatorname{sh} \lambda_1 z + C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_3 \operatorname{sh} \lambda_2 z + C_4 \operatorname{ch} \lambda_2 z \quad (4.21)$$

ist. Die  $\lambda_i$  sind dabei die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (4.20)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\nu}{\sqrt{2(1-\theta)}} \sqrt{2 - 3\delta \pm \sqrt{(2 - 3\delta)^2 - 4(1 - \theta^2)}}. \quad (4.22)$$

Der Parameter  $\nu$  ist bestimmt durch die Randbedingung (4.7)  $w' = 0$ :

$$J_1(\nu a) = 0. \quad (4.23)$$

Aus (4.17) und (4.18) ergeben sich dann  $u$  und  $q$  zu

$$u(r, z) = -\frac{1}{\nu} J_1(\nu r) [C_1 \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2 \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 z + C_3 \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 z + C_4 \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 z], \quad (4.24)$$

$$2q(r, z) = J_0(\nu r) \{ (1 + \theta - 2\delta) [C_1 \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2 \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 z + C_3 \lambda_2 \operatorname{ch} \lambda_2 z + C_4 \lambda_2 \operatorname{sh} \lambda_2 z] - \nu^2(1 + \theta) [C_1 \lambda_1^{-1} \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2 \lambda_1^{-1} \operatorname{sh} \lambda_1 z + C_3 \lambda_2^{-1} \operatorname{ch} \lambda_2 z + C_4 \lambda_2^{-1} \operatorname{sh} \lambda_2 z] \}. \quad (4.25)$$

Die Lösung  $u(r, z)$  (4.24) erfüllt bereits auf Grund des Ansatzes (4.19) von  $w$  die homogene Randbedingung  $u(r = a) = 0$ . Der homogene Deformationszustand führt auf ein auf den Mantelflächen konstantes Geschwindigkeitsfeld  $u$ , das jederzeit superponiert werden kann. Die für  $z = \pm \frac{t}{2}$  zu erfüllenden Randbedingungen ergeben ein homogenes Gleichungssystem für die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$ , aus dem die Eigenwertdeterminante folgt. Dieses Gleichungssystem zerfällt in jeweils zwei Gleichungen für  $C_1$  und  $C_3$  bzw.  $C_2$  und  $C_4$ . Für den symmetrischen Modus ( $C_2 = C_4 = 0$ ) lautet die Eigenwertgleichung

$$\frac{\operatorname{th} \left( \lambda_2 \frac{t}{2} \right)}{\operatorname{th} \left( \lambda_1 \frac{t}{2} \right)} = \frac{\lambda_1 [\lambda_1^2 + \nu^2] [\lambda_2^2 (1 - \theta) + \nu^2 (1 + \theta)]}{\lambda_2 [\lambda_2^2 + \nu^2] [\lambda_1^2 (1 - \theta) + \nu^2 (1 + \theta)]}, \quad (4.26)$$

für den antisymmetrischen Modus ( $C_1 = C_3 = 0$ )

$$\frac{\operatorname{th} \left( \lambda_1 \frac{t}{2} \right)}{\operatorname{th} \left( \lambda_2 \frac{t}{2} \right)} = \frac{\lambda_1 [\lambda_1^2 + \nu^2] [\lambda_2^2 (1 - \theta) + \nu^2 (1 + \theta)]}{\lambda_2 [\lambda_2^2 + \nu^2] [\lambda_1^2 (1 - \theta) + \nu^2 (1 + \theta)]}. \quad (4.27)$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann im allgemeinen wieder nur numerisch erfolgen. Dabei ist zu beachten, daß auch komplexe  $\lambda_i$  auftreten.

Für dünne Kreisplatten ( $\frac{t}{2a} \ll 1$ ) erhält man durch Reihenentwicklung von (4.27) die Näherungslösung

$$\theta = -\frac{1}{6} (4 - 3\delta) \left( j_1 \frac{t}{2a} \right)^2, \tag{4.28}$$

d. h.

$$\sigma = -\frac{1}{6} (4 - 3\delta) \left( j_1 \frac{t}{2a} \right)^2 \frac{2G}{1 + \beta \frac{2G}{B}}.$$

Dabei sind wie üblich  $j_1$  die Nullstellen der Bessel-Funktion  $J_1$ .

Die niedrigsten Eigenwerte, die sich bei der numerischen Auswertung von (4.26) und (4.27) ergeben, sind in den Abb. 3 bzw. 4 über dem Dicken-Durchmesser-Verhältnis  $t/2a$  aufgetragen.

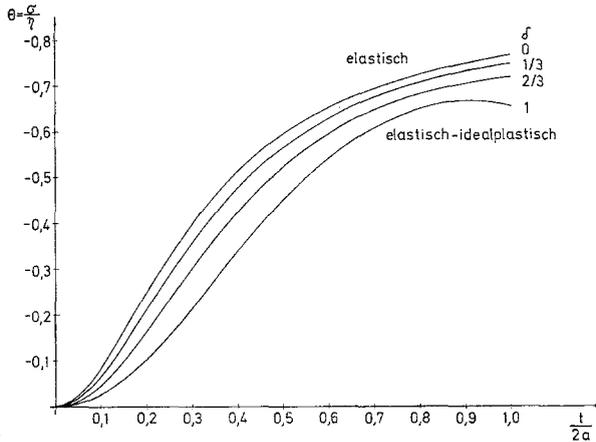


Abb. 3. Verzweigungslasten: antisymmetrischer Beulmodus

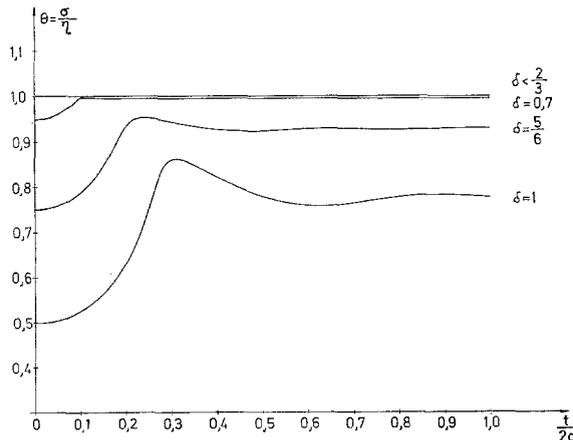


Abb. 4. Verzweigungslasten: symmetrischer Beulmodus

Für den symmetrischen Beulmodus ergeben sich kritische Spannungen  $\theta < 1$  im Parameterbereich  $\frac{2}{3} < \delta \leq 1$ . Im Bereich  $0 \leq \delta \leq \frac{2}{3}$  liefert die Eigenwertgleichung (4.26) kritische Spannungen, deren kleinste Werte beliebig nahe bei  $\theta = 1$  liegen, diesen Wert selbst jedoch nicht annehmen.

### 5. Homogene Deformationen und Belastungsbedingung

Die Lösung der Gln. (4.1), (4.2) und (4.4)–(4.7), die homogene Deformationszustände beschreiben, wird durch

$$u = \frac{U}{a} r; \quad w = -2 \frac{U}{a} z; \quad q = -2 \frac{U}{a} (1 - \delta); \quad v = 0 \quad (5.1)$$

gegeben.  $U$  ist dabei die nach (4.7) auf der Mantelfläche vorgeschriebene konstante Radialgeschwindigkeit. Die Verzweigungslasten sind bisher in Abhängigkeit von den geometrischen Größen des Grundzustandes angegeben worden. Für die praktische Anwendung ist es jedoch vorteilhaft, als Parameter die geometrischen Größen des spannungsfreien Körpers zu benutzen.

Zunächst erhalten wir aus dem Stoffgesetz (2.16) mit (5.1)

$$\dot{\sigma} = 3\eta(1 - \delta) \frac{U}{a}, \quad (5.2)$$

Berücksichtigen wir nun

$$U = \frac{da}{dt}, \quad (5.3)$$

so läßt sich (5.2) leicht integrieren mit dem Ergebnis

$$\frac{a}{a_0} = \exp \left[ \frac{1}{3} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\eta(1 - \delta)} \right]. \quad (5.4)$$

Mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung folgt daraus dann die Beziehung

$$\frac{2a}{t} = \frac{2a_0}{t_0} \exp \left[ \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma}{\eta(1 - \delta)} \right]. \quad (5.5)$$

Allen bisherigen Überlegungen liegt die Voraussetzung zugrunde, daß keine Entlastungszonen im Körper auftreten sollen. Das bedeutet, daß die Belastungsbedingung (2.13) stets erfüllt sein muß. Für den hier betrachteten kreiszylindrischen Körper erhalten wir aus (2.13)

$$\eta(1 - \delta) \sigma w^+ \leq 0. \quad (5.6)$$

Da nun die Funktion  $w^+$  bei geeigneter Wahl homogener Deformationen stets so bestimmt werden kann, daß sie ihr Vorzeichen nicht ändert, kann die Bedingung (5.6) immer erfüllt werden.

## 6. Praktische Anwendung und Diskussion

Die kritischen Spannungen  $\sigma$ , bei denen Verzweigungen des Gleichgewichts möglich sind, sind bisher in Abhängigkeit von der dimensionslosen Stoffgröße  $\delta$  und den jeweils aktuellen geometrischen Größen  $t/2a$  angegeben worden. Da beide Parameter nun selbst Funktionen der Spannung sind, kann aus den Ergebnissen nicht direkt abgelesen werden, wann für eine Platte mit gegebenem Stoffverhalten und den Ausgangsabmessungen  $a_0$  und  $t_0$  die Verzweigungslast erreicht ist. In diesem Abschnitt soll daher gezeigt werden, wie man zu vorgegebenem Spannungs-Dehnungs-Diagramm das „Beulspannungsdiagramm“  $\sigma(2a_0/t_0)$  erhält.

Als Beispiel wählen wir das Spannungs-Dehnungs-Gesetz, welches der deutschen Stahlbauvorschrift DIN 4114 [21] zugrunde liegt:

$$\frac{\sigma^* - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} = \text{th} \frac{E\varepsilon - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \quad (6.1)$$

mit

$$\sigma_p = 0,8\sigma_F. \quad (6.2)$$

Dabei ist  $\sigma_p$  die Elastizitätsgrenze,  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\sigma^*$  die Spannung im Zugversuch.  $\varepsilon$  wollen wir als natürliche Dehnung

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (6.3)$$

interpretieren.

Für den Zugversuch gilt

$$k^2 = \frac{2}{3} \sigma^{*2}. \quad (6.4)$$

Die Veränderung von  $k^2$  mit  $w$  ergibt sich dabei zu

$$\frac{dk^2}{dw} = \frac{4}{3} \frac{P}{1 - \frac{P}{E}} = 2B \quad (6.5)$$

mit

$$P = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon} = E \left[ 1 - \left( \frac{\sigma^* - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2 \right] = E \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} k - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2 \right]. \quad (6.6)$$

Für die Kreisplatte unter radialer Belastung haben wir

$$k^2 = \frac{2}{3} \sigma^2, \quad (6.7)$$

so daß wir schließlich die Stoffgröße  $\delta$  in der Form

$$\delta = (1 - \beta) \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2 \quad (6.8)$$

angeben können.

Mit (6.8) folgt nach (5.5)

$$\frac{2\alpha}{t} = \frac{2\alpha_0}{t_0} \exp \left[ \sigma_P + (\sigma_F - \sigma_P) \operatorname{arth} \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right]. \quad (6.9)$$

Die kritische Spannung  $\sigma$  finden wir dann mit (6.8) und (6.9) als Lösung der transzendenten Eigenwertgleichung (4.27) (für antisymmetrische Beulformen) in Abhängigkeit von der „Schlankheit“

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\alpha_0}{t_0}. \quad (6.10)$$

Für eine erste Näherung bei dünnen Kreisplatten können wir (4.27) durch die Reihenentwicklung (4.28) ersetzen. Damit sind wir in der Lage, eine Beziehung  $\tilde{\lambda}(\sigma)$  anzugeben.

Für elastisches Verhalten gilt das bekannte Ergebnis

$$\tilde{\lambda} = \frac{2}{3} j_1 \sqrt{-\frac{E}{\sigma}} \exp \left( -\frac{3}{2} \frac{\sigma}{E} \right); \quad (6.11)$$

für Spannungen oberhalb der Elastizitätsgrenze erhalten wir

$$\tilde{\lambda} = \frac{2}{3} j_1 \sqrt{-\frac{E}{\sigma}} \sqrt{1 - \frac{3}{4} (1 - \beta) \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2} \sqrt{\frac{1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}{1 - (1 - \beta) \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{3}{2E} \left[ \sigma_P + (\sigma_F - \sigma_P) \operatorname{arth} \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right] \right\}. \quad (6.12)$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, daß die Größe  $\eta$  im vorliegenden Falle ebenfalls noch eine Funktion von  $\sigma$  ist:

$$\eta = 2G \frac{1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}{1 - (1 - \beta) \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{\sigma_F - \sigma_P} \right)^2}. \quad (6.13)$$

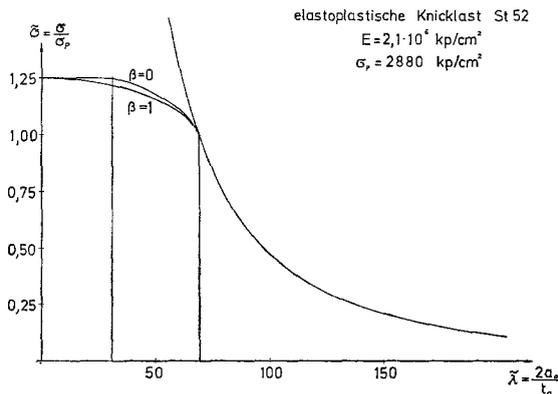


Abb. 5. Beullast für St 52

Eine Auswertung der Formeln (6.11) und (6.12) für Stahl St 52 ist in Abb. 5 angegeben.

Im Bereich elastischer Deformationen wird die Beulspannung durch die bekannte Euler-Hyperbel wiedergegeben. Je nach Wahl des Stoffgesetzes (2.7) ergeben sich im Bereich elasto-plastischer Deformationen unterschiedliche Beulspannungen. Die den Grenzfällen  $\beta = 0$  und  $\beta = 1$  entsprechenden Kurvenverläufe sind dargestellt.

#### Literatur

- [1] SHANLEY, F. R.: The column paradox. *J. Aeronaut. Sci.* **13**, 678 (1946).
- [2] SHANLEY, F. R.: Inelastic column theory. *J. Aeronaut. Sci.* **14**, 261–268 (1947).
- [3] HILL, R.: On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid. *J. Mech. Phys. Sol.* **5**, 153–161 (1957).
- [4] HILL, R.: Stability of rigid-plastic solids. *J. Mech. Phys. Sol.* **6**, 1–8 (1957).
- [5] HILL, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Sol.* **6**, 236–249 (1958).
- [6] SEWELL, M. J.: A yield-surface corner lowers the buckling stress of an elastic-plastic plate under compression. *J. Mech. Phys. Sol.* **21**, 19–45 (1973).
- [7] ARIARATNAM, S. T., and R. N. DUBEY: Some cases of bifurcation in elastic-plastic solids in plane strain. *Quart. Appl. Math.* **27**, 349–358 (1969).
- [8] DUBEY, R. N., and S. T. ARIARATNAM: Bifurcation in elastic-plastic solids in plane stress. *Quart. Appl. Math.* **27**, 381–390 (1969).
- [9] DUBEY, R. N.: Instabilities in thin elastic-plastic tubes. *Int. J. Solids Struct.* **5**, 699–711 (1969).
- [10] CHENG, S. Y., S. T. ARIARATNAM, and R. N. DUBEY: Axisymmetric bifurcation in an elastic-plastic cylinder under axial load and lateral hydrostatic pressure. *Quart. Appl. Math.* **29**, 41–51 (1971).
- [11] DUBEY, R. N., and S. T. ARIARATNAM: Necking instabilities in elastic-plastic plates. *Int. J. Eng. Sci.* **10**, 145–154 (1972).
- [12] RAMSEY, H.: On the stability of elastic-plastic and rigid-plastic plates of arbitrary thickness, and flat bars of arbitrary width. *Int. J. Solids Struct.* **5**, 921–940 (1969).
- [13] VAUGHAN, H.: Instabilities in a perfectly plastic solid cylinder under axial compression. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)* **20**, 982–988 (1969).
- [14] Ramsey, H., and H. VAUGHAN: Dynamic elastic-plastic buckling of rectangular plates in sustained flow. *Quart. Appl. Math.* **28**, 473–487 (1971).
- [15] STORAKERS, B.: Bifurcation and instability modes in a thick-walled visco-plastic pressure vessel. *Proc. 2nd IUTAM Symposium on Creep in Structures*, Gothenburg, 1970.
- [16] STORAKERS, B.: Bifurcation and instability modes in thick-walled rigid-plastic cylinders under pressure. *J. Mech. Phys. Sol.* **19**, 339–351 (1971).
- [17] TRUESDELL, C., and W. NOLL: Nonlinear field-theories of mechanics, in: *Handbuch der Physik*, Bd. III, 3 (FLÜGGE, S., Hrsg.). Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1965.
- [18] LEHMANN, TH.: On large elastic-plastic deformations, in: *Foundations of Plasticity* (SAWCZUK, A., Hrsg.). Noordhoff International Publishing. 1972.
- [19] LEHMANN, TH.: Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen. *Ing.-Archiv* **41**, 297–310 (1972).
- [20] BRUHNS, O., und K. THERMANN: Stabilitätsprobleme elasto-plastischer Kontinua. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)* **54**, T73–T75 (1974).
- [21] DIN 4114, Blatt 2: Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), Berechnungsgrundlagen, Richtlinien, Ausgabe Okt. 1955.

*Dr.-Ing. O. Bruhns und Dr.-Ing. K. Thermann*  
*Institut für Mechanik*  
*der Ruhr-Universität Bochum*  
*Postfach 2148*  
*D-4630 Bochum*  
*Bundesrepublik Deutschland*