Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 244—266 (1950).

Über Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung. I.

Herrn ERICH KAMKE zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

Wolfgang Haack und Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Einleitung.

In der Differentialgeometrie hat es sich als recht vorteilhaft erwiesen, bei der Untersuchung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit nach Möglichkeit n unabhängige Linearformen (PFAFF'sche Formen) aufzustellen und dann ausschließlich invariante Ableitungen bezüglich der PFAFF'schen Formen an Stelle der gewöhnlichen partiellen Ableitungen zu verwenden[1]). Selbst bei der elementaren Flächentheorie ($n = 2$) hat sich das Verfahren bewährt. Im folgenden soll diese Methode auf ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen I. Ordnung mit zwei unbekannten Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen angewandt werden.

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a^k u_k + b^k v_k + c\,u + d\,v + e = 0 \qquad &&(\text{über } k \text{ summiert},\\ &\bar{a}^k u_k + \bar{b}^k v_k + \bar{c}\,u + \bar{d}\,v + \bar{e} = 0 &&k = 1, 2).\end{aligned}$$

Hier bedeuten u, v die gesuchten Funktionen, u_k, v_k die partiellen Ableitungen nach den unabhängigen Veränderlichen x^1, x^2 und a^k, $\bar{a}^k$, $b^k \ldots\ldots \bar{e}$ eindeutige reelle Funktionen von den reellen Veränderlichen x^1, x^2.

Jede der Gleichungen (1) enthält je eine Richtungsdifferentiation für u und für v. Durch geeignete Linearkombination der beiden Gleichungen kann erreicht werden, daß diese vier Richtungen paarweise zusammenfallen. Das führt zu den Charakteristiken des Systems (1) und zur Kennzeichnung des hyperpolischen, parabolischen und elliptischen Falles. Wir beschränken uns auf die Untersuchung hyperbolischer Systeme. Die Erklärung der Charakteristiken durch das Zusammenfallen gewisser Ableitungsrichtungen wurde in den letzten zehn Jahren im Zusammenhang mit gasdynamischen Untersuchungen mehrfach angewandt. Herr R. COURANT teilte in seinem Göttinger Vortrag 1948 ein Verfahren mit, das ebenfalls auf Richtungsableitungen

---

[1]) Vgl. etwa W. BLASCHKE: „Vorlesungen über Differentialgeometrie I". Berlin 1945.

W. HAACK: „Differentialgeometrie Teil II". Wolfenbüttel und Hannover 1948.

aufbaut und dem unsrigen etwa bis zu der „Normalform" verwandt ist, jedoch ohne Bezugnahme auf die PFAFF'schen Formen[2]).

Im Abschnitt I werden die charakteristischen Richtungen und zwei dazugehörige lineare Differentialformen ω_1, ω_2 aufgestellt und die partiellen Ableitungen durch die invarianten Ableitungen bezüglich ω_1, ω_2 ersetzt. Führt man statt der Funktionen u, v geeignete Linearkombinationen U, V ein, so läßt sich das System (1) auf die Normalform

$$
\begin{aligned}
U_\alpha &= AU + BV + C \\
V_{\bar{\alpha}} &= \bar{A}U + \bar{B}V + \bar{C}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

bringen, in der die Indices $\alpha, \bar{\alpha}$ die invarianten Ableitungen bezüglich ω_1, ω_2 bedeuten und $A, \bar{A}, B \ldots . \bar{C}$ Funktionen von x^1, x^2 sind, die aus den Koeffizienten von (1) und deren Ableitungen gebildet werden. Man findet leicht Sonderfälle, in denen U, V durch Quadraturen bestimmt werden können. Denkt man eine lineare hyperbolische Differentialgleichung II. Ordnung als System in der Form (1) geschrieben und bildet die dazugehörige Normalform (2), so entspricht den quadrierbaren Fällen im Wesentlichen das Verschwinden der LAPLACE'schen Invarianten[3]).

Im Abschnitt II werden zunächst die Bedingungen aufgestellt, unter denen das CAUCHY'sche Anfangswertproblem für die Normalform (2) eindeutige und stetige Lösungen U, V besitzt, aus denen auf die Lösungen u, v von (1) geschlossen werden kann. Die Bedingungen für die Differenzierbarkeit von u, v werden gesondert angegeben. Im Zusammenhang damit wird untersucht, wie sich Unstetigkeiten, die längs der Anfangskurve gegeben sind, in das Innere des Bereiches fortpflanzen. Die Existenzbeweise werden mittels eines einfachen Iterationsverfahrens geführt, das gleichzeitig zur numerischen Berechnung des CAUCHY'schen Anfangswertproblems von (1) bzw. (2) brauchbar ist[4]).

---

[2]) Inzwischen sind folgende Veröffentlichungen erschienen:

COURANT-FRIEDRICHS: „Supersonic Flow And Shock Waves". New York 1948 (Kap. II).

FRIEDRICHS, K. O.: „Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables". Amer. J. Math. 70, S. 555—589 (1948).

COURANT and LAX: „On nonlinear partial differential equations with two independent variables". Pure And Applied Mathematics, Vol. II, 2—3 (S. 255—273).

[3]) Siehe G. DARBOUX: „Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, Paris 1889, Bd. 2 (Kap. II).

L. BIEBERBACH: „Theorie der Differentialgleichungen", Berlin 1930, S. 353.

[4]) Für Existenzsätze vergleiche man auch O. PERRON: „Über Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet". Math. Zeitschr. Bd. 27 (1928).

W. A. HURWITZ: „Randwertaufgaben bei Systemen von linearen partiellen Differentialgleichungen I. Ordnung". Diss. Göttingen 1910

Ausgehend vom CAUCHY'schen Anfangswertproblem werden im Abschnitt III verschiedene gemischte Anfangs- und Randwertprobleme bzw. charakteristische Anfangswertprobleme untersucht und die Bedingungen für die eindeutige Lösung des Systems (1) zusammengestellt.

Nachdem hiermit die Grundlagen geschaffen und die wichtigsten Existenzsätze bewiesen sind, sollen in einer demnächst folgenden zweiten Mitteilung die zu zwei PFAFF'schen Formen gehörigen Integralsätze in Betracht gezogen werden. Dabei zeigt sich, daß das CAUCHY'sche Anfangswertproblem, welches U, V oder u, v längs einer beliebigen Kurve K vorgibt, zurückgeführt werden kann auf ein spezielles „charakteristisches Anfangswertproblem", das unabhängig von der Kurve K ist. Ist die Lösung dieses charakteristischen Anfangswertproblems bekannt, so ergibt sich die Lösung des CAUCHY'schen Anfangswertproblems für eine beliebige Anfangskurve K durch Quadraturen. Der Sachverhalt entspricht demjenigen, der unter dem Namen „RIEMANN'sche Methode" bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bekannt ist. Das charakteristische Anfangswertproblem für die Normalform (2) folgt ebenso zwangsläufig wie bei der RIEMANN'schen Methode. Das Verfahren beruht auf der Bestimmung eines „quasi-RIEMANN'schen Funktionensystems" und stellt eine Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Methode von hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Systeme von Differentialgleichungen dar [5]).

Die Überlegungen der Abschnitte I bis III lassen sich weitgehend auf quasilineare Systeme von Differentialgleichungen übertragen und führen, wie in der zweiten Mitteilung gezeigt wird, mittels Differenzenrechnung unmittelbar zur näherungsweisen Bestimmung der gesuchten Funktionen für alle in den Abschnitten II, III behandelten Anfangsbzw. Randwertprobleme.

Abschnitt I.

Die Normalform zum System (1).

Ist $S(x^1, x^2)$ eine differenzierbare Funktion und sind α^i stetige Funktionen von x^1, x^2, so nennen wir

$$S_\alpha = \alpha^i S_i \equiv \alpha^1 \frac{\partial S}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial S}{\partial x^2} \tag{I 1}$$

die Richtungsdifferentiation von S in Richtung α^i, bzw. die „invariante Ableitung" von S bezüglich des Vektors α^i. Danach sind in dem System

[5]) Eine Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Methode in anderer Richtung siehe auch: F. RELLICH: „Verallgemeinerung der RIEMANN'schen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung in zwei Veränderlichen." Math. Ann. Bd. 103 (1930).

(1) die Ableitungen nach vier im allgemeinen verschiedenen Richtungen $a^k, b^k, \bar{a}^k, \bar{b}^k$ enhalten. Durch Linearkombinationen der beiden Gleichungen (1), indem wir die erste mit einer Funktion λ_1 und die zweite mit λ_2 multiplizieren und addieren, ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$(\lambda_1 a^k + \lambda_2 \bar{a}^k) u_k + (\lambda_1 b^k + \lambda_2 \bar{b}^k) v_k + \ldots\ldots = 0. \tag{I 2}$$

Bei variablen λ_1, λ_2 bestimmen die Klammern zwei projektiv aufeinander bezogene Strahlenbüschel, deren Fixstrahlen durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a^1 + \lambda_2 \bar{a}^1, & \lambda_1 a^2 + \lambda_2 \bar{a}^2 \\ \lambda_1 b^1 + \lambda_2 \bar{b}^1, & \lambda_1 b^2 + \lambda_2 \bar{b}^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ aber } \not\equiv 0 \tag{I 3}$$

gegeben sind. Diese Strahlen bestimmen die charakteristischen Richtungen unseres Systems (1).

Definition. Das System (1) heißt in dem Gebiet der x^1, x^2 Ebene hyperbolisch, in dem (I 3) genau zwei reelle, verschiedene Wurzeln $\lambda_1 : \lambda_2$ besitzt. Fallen die Wurzeln zusammen, so nennt man (1) parabolisch, sind sie konjugiert komplex, elliptisch.

Im folgenden beschränken wir uns auf solche Gebiete der x^1, x^2 Ebene, in denen (1) hyperbolisch ist und bezeichnen mit $\nu_1 : \nu_2$, $\mu_1 : \mu_2$ die zwei Wurzeln von (I 3). Dann lassen sich die charakteristischen Richtungen bei geeigneter Wahl der Bezeichnung in (1) schreiben:

$$\text{I) } \alpha^i = \nu_1 a^i + \nu_2 \bar{a}^i; \quad \text{II) } \bar{\alpha}^i = \mu_1 a^i + \mu_2 \bar{a}^i. \tag{I 4}$$

Wir werden künftig kurz von Richtung I oder II bzw. α^i oder $\bar{\alpha}^i$ sprechen und meist so normieren, daß $\alpha^1 \alpha^1 + \alpha^2 \alpha^2 = 1$ und $\bar{\alpha}^1 \bar{\alpha}^1 + \bar{\alpha}^2 \bar{\alpha}^2 = 1$ ist. Wegen (I 3) gibt es Funktionen $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \varrho_1 (\nu_1 b^k + \nu_2 \bar{b}^k) &= \varrho_2 (\nu_1 a^k + \nu_2 \bar{a}^k) \\ \sigma_1 (\mu_1 b^k + \mu_2 \bar{b}^k) &= \sigma_2 (\mu_1 a^k + \mu_2 \bar{a}^k). \end{aligned} \qquad k = 1, 2 \tag{I 5}$$

Gleichung (I 2) läßt sich nach (I 4) und (I 5) wegen (I 1) in den Formen schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho_1 u_\alpha + \varrho_2 v_\alpha + \ldots\ldots &= 0 \\ \sigma_1 u_{\bar{\alpha}} + \sigma_2 v_{\bar{\alpha}} + \ldots\ldots &= 0. \end{aligned} \tag{I 6}$$

Hier können ϱ_1, σ_1 nicht gleichzeitig verschwinden wegen (I 3) ($\not\equiv 0$). Sind $\varrho_1 \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$, dann können wir $\varrho_1 = \sigma_1 = 1$; $\varrho_2 = \varrho$, $\sigma_2 = \sigma$ setzen und (I 6) unter Beachtung von

$$\varrho v_\alpha = (\varrho v)_\alpha - v \varrho_\alpha$$

in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} (u + \varrho v)_\alpha + (\nu_1 c + \nu_2 \bar{c}) u + (\nu_1 d + \nu_2 \bar{d} - \varrho_\alpha) v + \nu_1 e + \nu_2 \bar{e} &= 0 \\ (u + \sigma v)_{\bar{\alpha}} + (\mu_1 c + \mu_2 \bar{c}) u + (\mu_1 d + \mu_2 \bar{d} - \sigma_{\bar{\alpha}}) v + \mu_1 e + \mu_2 \bar{e} &= 0. \end{aligned} \tag{I 7}$$

Führen wir an Stelle der Funktionen u, v die Funktionen U, V ein:

$$\text{(I 8)}\qquad \begin{aligned} U &= u + \varrho v \\ V &= u + \sigma v \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} u &= \frac{U\sigma - V\varrho}{\sigma - \varrho} \\ v &= \frac{V - U}{\sigma - \varrho} \end{aligned},$$

dann läßt sich (I 7) schreiben:

$$\text{(I 9)}\qquad \begin{aligned} U_\alpha &= AU + BV + C \\ V_{\bar{\alpha}} &= \bar{A}U + \bar{B}V + \bar{C} \end{aligned}.$$

Diese Gleichungen nennen wir die Normalform des Systems (1). *Die Koeffizienten $A, \bar{A}, B \ldots\ldots \bar{C}$ sind elementar berechenbare Funktionen von x^1, x^2. Sie sind stetig, wenn die Koeffizienten in* (1) *und die Richtungsableitungen*

$$\text{(I 10)}\qquad \varrho_\alpha = \left(\frac{\nu_1 b^1 + \nu_2 \bar{b}^1}{\nu_1 a^1 + \nu_2 \bar{a}^1}\right)_\alpha, \quad \sigma_{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\mu_1 b^1 + \mu_2 \bar{b}^1}{\mu_1 a^1 + \mu_2 \bar{a}^1}\right)_{\bar{\alpha}}$$

stetig sind.

Falls ϱ_1 oder σ_1 in (I 6) verschwinden, so gelangt man zu derselben Normalform, wenn $u = U$ bzw. $v = V$ gesetzt werden[6]).

Die charakteristischen Richtungen werden nach (I 4) *und* (I 3) *durch die Vektoren α^i und $\bar{\alpha}^i$ gegeben. Die beiden Scharen der charakteristischen Kurven genügen den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen:*

$$\text{(I 11)}\qquad \text{I)}\ \begin{aligned} \dot{x}^1 &= \alpha^1 \\ \dot{x}^2 &= \alpha^2 \end{aligned}; \qquad \text{II)}\ \begin{aligned} \dot{x}^1 &= \bar{\alpha} \\ \dot{x}^2 &= \bar{\alpha}^2 \end{aligned}.$$

Die Charakteristiken bilden ein Kurvennetz, wenn die rechten Seiten in (I 11), *$\alpha^i, \bar{\alpha}^i$, und erst recht, wenn wegen* (I 3) *und* (I 4) *die Koeffizienten $a^k, \bar{a}^k, b^k, \bar{b}^k$ stetig differenzierbar sind.* Zu den Vektoren $\alpha^i, \bar{\alpha}^i$ gibt es ein Paar kontragredienter Vektoren $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$, die durch das Gleichungssystem

$$\text{(I 12)}\qquad \begin{aligned} \alpha^i \alpha_i &= 1 \qquad & \alpha^i \bar{\alpha}_i &= 0 \\ \bar{\alpha}^i \alpha_i &= 0 \qquad & \bar{\alpha}^i \bar{\alpha}_i &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt sind. Sie bilden die Linearformen:

---

[6]) Die durch (I 3) ausgeschlossenen Systeme (1) der Form:

$$\begin{aligned} a\,u_{x^1} + b\,v_{x^1} + \ldots &= 0 \\ \bar{a}\,u_{x^2} + b\,v_{x^2} + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

untersuchte F. Rellich. Siehe F. Rellich: „Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von part. Differentialgleichungen" Math. Ann. Bd. 109 (1934).

(I 13) $$\omega_1 = \alpha_i\, d x^i; \qquad \omega_2 = \bar{\alpha}_i\, d x^i.$$

Wegen (I 11) *ist längs einer Charakteristik mit der Fortschreitungsrichtung I die Form* $\omega_2 = 0$ *und* $t_1 = \int \omega_1$ *der Parameter, nach dem* (I 11) I) *differenziert ist; entsprechendes gilt für die andere Charakteristik* ($\omega_1 = 0$; $t_2 = \int \omega_2$).

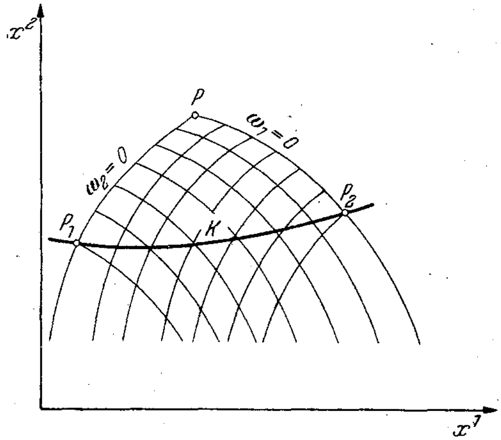

Fig. 1.

In der Normalform (I 9) bedeutet U_α die gewöhnliche Ableitung von U nach dem Parameter $t_1 = \int \omega_1$ längs einer Charakteristik $\omega_2 = 0$. Sind PP_1 und PP_2 (siehe Bild 1) die durch den Punkt P des Bereiches gehenden Charakteristiken, dann läßt sich die Normalform (I 9) in Integralform schreiben:

(I 14) $$\begin{aligned} U(P) &= U(P_1) + \int_{P_1}^{P} (A U + B V + C)\, \omega_1 \\ V(P) &= V(P_2) + \int_{P_2}^{P} (\bar{A} U + \bar{B} V + \bar{C})\, \omega_2 . \end{aligned}$$

Ist in (I 9) $B = 0$ oder $\bar{A} = 0$, so ist das System (I 9) geschlossen integrierbar. U, V und damit u, v sind durch Quadraturen zu bestimmen [7]. Für die integrablen Fälle von (I 9) behandeln wir sogleich ein Cauchy'sches Anfangswertproblem.

Es seien die Voraussetzungen zu (I 9) und (I 11) erfüllt. Ferner sei K eine Anfangskurve, die durch stetig differenzierbare Funktionen $x^1 = x^1(\lambda)$; $x^2 = x^2(\lambda)$ mit $(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 \neq 0$ und nirgends charakteristischer Richtung gegeben ist. Auf dieser Kurve werden u, v als stetig differenzierbare Funktionen von λ vorgegeben, damit sind nach (I 8) U, V auf K bekannt. Es sei $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda)$. Wir beschränken uns auf den Fall $B = 0$. Dann wird die erste Gleichung von (I 9) $U_\alpha = A U + C$. Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für die Richtung α, d. h. für die durch den Anfangspunkt gehende Charakteristik I. (Siehe Bild 1). Daher ist $U(x^1, x^2)$ an der Stelle P (kurz $U(P)$):

[7]) Ob u, v tatsächlich in (1) eingesetzt werden können, ist damit nicht gezeigt, denn aus (I 9) folgt nur die Stetigkeit von $U_\alpha = (u + \varrho v)_\alpha$, $V_{\bar{\alpha}} = (u + \sigma v)_{\bar{\alpha}}$, daraus aber nicht die Existenz von u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2}.

$$U(P) = e^{\int\limits_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_1) + \int\limits_{P_1}^{P} C e^{-\int\limits_{P_1}^{P'} A\,\omega_1} \omega_1 \right\}. \tag{I 15}$$

P' ist ein veränderlicher Punkt auf der Charakteristik PP_1. Läuft P_1 auf K nach P_2, so gewinnt man aus (I 15) die Werte der Funktion U auf der Charakteristik II. Damit ist aber U längs der Charakteristik PP_2 eine bekannte Funktion, und die zweite Gleichung in (I 9) ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für V längs der Charakteristik II. Es folgt für V

$$V(P) = e^{\int\limits_{P_2}^{P} \bar{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_2) + \int\limits_{P_2}^{P} (\bar{C} + \bar{A}\,U)\, e^{-\int\limits_{P_2}^{P''} \bar{B}\,\omega_2} \omega_2 \right\}. \tag{I 16}$$

Der Fall $\bar{A} = 0$ erledigt sich analog. Damit ist das CAUCHY'sche Anfangswertproblem für die integrablen Fälle von (1) durch Quadraturen gelöst unter der Voraussetzung, daß die aus U, V bestimmten u, v die Eigenschaft haben, daß die Ableitungen u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} existieren (vgl. [7])).

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die hyperbolische Differentialgleichung

$$z_{x^1 x^2} + a\, z_{x^1} + b\, z_{x^2} + c\, z + d = 0 \tag{I 17}$$

mit a, b, c, d Funktionen von x^1, x^2 durch Quadraturen lösbar ist, falls eine der LAPLACE'schen Invarianten $a_{x^1} + ab - c$ oder $b_{x^2} + ab - c$ verschwindet[3]). Wir setzen $u = z$, $v = z_{x_1}$ und erhalten mit

$$\text{I)}\ \alpha^1 = 1,\ \alpha^2 = 0;\quad \text{II)}\ \bar{\alpha}^1 = 0,\ \bar{\alpha}^2 = 1 \tag{I 18}$$

und mit $u = U$, $b\,u + v = V$ die Normalform

$$\begin{aligned} U_\alpha &= -b\,U + V, \\ V_{\bar{\alpha}} &= (b_{x^2} + a\,b - c)\,U - a\,V - d. \end{aligned} \tag{I 19}$$

Sie ist integrabel, wenn die Invariante $b_{x^2} + a\,b - c$ verschwindet.

Abschnitt II.

Existenzsätze für das System (1) und (I 9).

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen für die Existenz eindeutiger Lösungen des CAUCHY'schen Problems für das System (1) bzw. das System (I 9) untersucht werden.

1) Normalform.

Wir beginnen mit der Normalform (I 9) und schreiben sie unter Beibehaltung der Buchstaben in der Form:

$$\text{(II 1)}\qquad \begin{aligned} U_\alpha + A\,U + C &= B\,V \\ V_{\bar\alpha} + \bar B\,V + \bar C &= \bar A\,U\,. \end{aligned}$$

Zunächst beweisen wir den folgenden *Satz:*

Es seien A, $\bar A$, B, $\bar B$, C, $\bar C$ in einem Gebiet der x^1, x^2-Ebene stetig, das die Anfangskurve K enthält und in dem das Kurvennetz gegeben ist, welches durch die „charakteristischen Differentialgleichungen" (I 11)

$$\text{I)}\ \begin{aligned} \dot x^1 &= \alpha^1 \\ \dot x^2 &= \alpha^2 \end{aligned} \qquad\qquad \text{II)}\ \begin{aligned} \dot x^1 &= \bar\alpha^1 \\ \dot x^2 &= \bar\alpha^2 \end{aligned}$$

mit α^1, α^2, $\bar\alpha^1$, $\bar\alpha^2$ stetig differenzierbar und $\begin{vmatrix} \alpha^1 & \alpha^2 \\ \bar\alpha^1 & \bar\alpha^2 \end{vmatrix} \neq 0$ *bestimmt wird. Die Anfangskurve K sei in der Form $x^1 = x^1(\lambda)$, $x^2 = x^2(\lambda)$ mit stetig differenzierbaren Funktionen x^1, x^2 und $(\dot x^1)^2 + (\dot x^2)^2 \neq 0$ gegeben, so daß nirgends ihre Tangente mit einer charakteristischen Richtung α oder $\bar\alpha$ zusammenfällt. Werden U, V auf K als stetige Funktionen vorgegeben,*

$$\text{(II 2)}\qquad U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda), \quad V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda),$$

so gibt es in einer gewissen Umgebung der Anfangskurve K genau eine Lösung U, V von (II 1) *bzw.* (I 9) *mit U, V, U_α, $V_{\bar\alpha}$ stetig und $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda)) = \Psi(\lambda)$.*

Beweis. Wir definieren sukzessive Funktionen $U^0, V^0, U^1, V^1, \ldots\ldots$, die den Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen genügen:

$$\text{(II 3)}\qquad \begin{aligned} U^0_\alpha + A\,U^0 + C &= 0 \\ V^0_{\bar\alpha} + \bar B\,V^0 + \bar C &= 0 \end{aligned} \qquad \text{mit } U^0 = \Phi,\ V^0 = \Psi \text{ auf } K$$

$$\text{(II 4)}\qquad \begin{aligned} U^n_\alpha + A\,U^n + C &= B\,V^{n-1} \\ V^n_{\bar\alpha} + \bar B\,V^n + \bar C &= \bar A\,U^{n-1} \end{aligned} \qquad \text{mit } U^n = \Phi,\ V^n = \Psi \text{ auf } K$$

Jedes der Systeme (II 3), (II 4) wird in der gleichen Weise gelöst wie (I 15), (I 16) (vgl. Bild 1). Die Funktionen $U^0, V^0, U^1, V^1 \ldots$ besitzen daher die Integraldarstellungen

$$\text{(II 5)}\qquad \begin{aligned} U^0(P) &= e^{-\int_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_1) - \int_{P_1}^{P} C\, e^{\int_{P_1}^{P'} A\,\omega_1} \omega_1 \right\} \\ V^0(P) &= e^{-\int_{P_2}^{P} \bar B\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_2) - \int_{P_2}^{P} \bar C\, e^{\int_{P_2}^{P''} \bar B\,\omega_2} \omega_2 \right\} \end{aligned}$$

$$
\text{(II 6)} \qquad
\begin{aligned}
U^n(P) &= e^{-\int\limits_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_1) - \int\limits_{P_1}^{P} (C - B V^{n-1})\, e^{\int\limits_{P_1}^{P'} A\,\omega_1} \omega_1 \right\} \\
V^n(P) &= e^{-\int\limits_{P_2}^{P} \bar{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_2) - \int\limits_{P_2}^{P} (\bar{C} - \bar{A} U^{n-1})\, e^{\int\limits_{P_2}^{P''} \bar{B}\,\omega_2} \omega_2 \right\}
\end{aligned}
$$

(Wegen P', P'' vgl. (I 15).)

Es soll gezeigt werden, daß in einer passend zu wählenden Umgebung G eines jeden Punktes der Anfangskurve K die Funktionenfolge (II 6) gegen die Lösungen U, V von (II 1) konvergiert.

Es sei l die größte der in G auftretenden Längen der Charakteristiken, sowie M eine gemeinsame Schranke für alle bekannten Funktionen in G. Daraus folgen nach (II 5) für U^0, V^0 die Abschätzungen:

$$
\text{(II 7)} \qquad
\begin{aligned}
|U^0(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + l M e^{Ml}\} = S, \\
|V^0(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + l M e^{Ml}\} = S,
\end{aligned}
$$

wobei S als Abkürzung für die rechte Seite gesetzt ist.

Es gibt eine Zahl N derart, daß das Iterationsverfahren (II 5), (II 6) aus dem Bereich B des vierdimensionalen x^1, x^2, U, V-Raumes mit x^1, x^2 aus G und $|U| < N$, $|V| < N$ nicht hinausführt, wenn die Umgebung G der Kurve K hinreichend eingeengt wird. Angenommen, es sei eine Abschätzung

$$
|U^{n-1}(P)| < \bar{U}^{n-1}, \quad |V^{n-1}(P)| < \bar{V}^{n-1}
$$

gefunden, dann gelten nach (II 6) die Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
|U^n(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\bar{V}^{n-1})\, l e^{Ml}\} \\
|V^n(P)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\bar{U}^{n-1})\, l e^{Ml}\}
\end{aligned}
$$

oder nach (II 7)

$$
\begin{aligned}
|U^n(P)| &\leqq S + l M e^{2Ml}\bar{V}^{n-1} \\
|V^n(P)| &\leqq S + l M e^{2Ml}\bar{U}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dann wird aber mit der Abkürzung $\varkappa = l M e^{2lM}$

$$
\begin{aligned}
|U^1(P)| &\leqq S(1 + l M e^{2Ml}) = S(1 + \varkappa) \\
|U^2(P)| &\leqq S[1 + \varkappa(1 + \varkappa)] \\
\text{(II 8 a)} \qquad |U^n(P)| &\leqq S\{1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^n\}
\end{aligned}
$$

und ebenso

$$
\text{(II 8 b)} \qquad |V^n(P)| \leqq S\{1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^n\}.
$$

Wählt man G, d. h. also die Länge l so, daß

$$
\text{(II 9)} \qquad \varkappa = l M e^{2Ml} < 1,
$$

so ist die rechts stehende Summe für $\lim n \to \infty$ konvergent, und es gibt eine Zahl N, so daß

$$|U^n(P)| < N; \quad |V^n(P)| < N.$$

Zum Beweis der Konvergenz des Iterationsverfahrens bilden wir nach (II 5) und (II 6) die Differenzen konsekutiver Funktionen und erhalten die Abschätzungen

$$\text{(II 10)} \qquad \begin{aligned} |U^1(P) - U^0(P)| &\leqq N\,M\,l\,e^{2Ml} \\ |V^1(P) - V^0(P)| &\leqq N\,M\,l\,e^{2Ml}. \end{aligned}$$

Für $U^{n-1} - U^{n-2}$ und $V^{n-1} - V^{n-2}$ seien die Induktionsannahmen

$$\text{(II 11)} \qquad \begin{aligned} |U^{n-1}(P) - U^{n-2}(P)| &\leqq N\,(M\,l)^{n-1}\,(e^{2Ml})^{n-1} \\ |V^{n-1}(P) - V^{n-2}(P)| &\leqq N\,(M\,l)^{n-1}\,(e^{2Ml})^{n-1} \end{aligned}$$

richtig, dann folgt aus (II 6)

$$\text{(II 12)} \qquad \begin{aligned} |U^n(P) - U^{n-1}(P)| &\leqq N\,(M\,l)^n\,(e^{Ml})^{2n} \\ |V^n(P) - V^{n-1}(P)| &\leqq N\,(M\,l)^n\,(e^{Ml})^{2n}. \end{aligned}$$

Aus der Forderung (II 9) ergibt sich sofort die gleichmäßige Konvergenz der unendlichen Summen

$$\text{(II 13)} \qquad U^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U^n - U^{n-1}); \quad V^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (V^n - V^{n-1})$$

gegen stetige Ortsfunktionen U, V. Dann kann in (II 6) der Grenzübergang $n \to \infty$ auch unter den Integralen vorgenommen werden. Durch Differentiation in Richtung α bzw. $\bar{\alpha}$ folgt, daß U, V Lösungen des Anfangswertproblemes von (II 1) sind und daß U_α, $V_{\bar{\alpha}}$ stetig sind.

Angenommen, es gäbe zwei Lösungen von (II 1) U_1, V_1; U_2, V_2 mit $U_1 = U_2 = \Phi$, $V_1 = V_2 = \Psi$ auf K, dann folgt aus (II 6) nach Durchführung des Grenzüberganges $n \to \infty$

$$\text{(II 14)} \qquad \begin{aligned} U_1 - U_2 &= e^{-\int_{P_1}^{P} A\,\omega_1} \int_{P_1}^{P} B\,(V_1 - V_2)\, e^{\int_{P_1}^{P'} A\,\omega_1}\, \omega_1 \\ V_1 - V_2 &= e^{-\int_{P_2}^{P} \bar{B}\,\omega_2} \int_{P_2}^{P} \bar{A}\,(U_1 - U_2)\, e^{\int_{P_2}^{P''} \bar{B}\,\omega_2}\, \omega_2 . \end{aligned}$$

Die Maximalwerte von $|U_1 - U_2|$ und $|V_1 - V_2|$ in G seien μ_1 und μ_2. Dann folgt aus (II 14) und (II 9)

$$\text{(II 15)} \qquad |U_1 - U_2| \leqq \mu_2\,\varkappa, \quad |V_1 - V_2| \leqq \mu_1\,\varkappa.$$

Diese Ungleichungen gelten insbesondere an den Stellen, wo $|U_1 - U_2|$ bzw. $|V_1 - V_2|$ ihre Maximalwerte annehmen. Hier wird

(II 16) $$\mu_1 \leqq \mu_2 \varkappa; \quad \mu_2 \leqq \mu_1 \varkappa.$$

Wegen $\varkappa < 1$ folgt daraus sofort $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

2) Das allgemeine System (1).

Nach dem soeben bewiesenen Satz folgt unmittelbar die Existenz stetiger Lösungen für das CAUCHY'sche Anfangswertproblem des allgemeinen Differentialgleichungssystems (1) unter Beachtung der Gleichungen (I 8). Allerdings können wir u, v nur insofern als Lösungen bezeichnen, daß sie in den Linearkombinationen U, V die zugehörige Normalform (I 9) befriedigen. Sollen u, v Lösungen des Systems (1) im üblichen Sinne sein, so müssen die partiellen Ableitungen u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} existieren, was unter den schwachen Voraussetzungen des obigen Existenzsatzes nicht der Fall zu sein braucht. Der Existenzsatz garantiert nur die Stetigkeit von U_α und $V_{\bar{\alpha}}$, d. h. daß $(u + \varrho v)_\alpha$ und $(u + \sigma v)_{\bar{\alpha}}$ stetig sind, nicht aber die Existenz der Ableitungen $U_{\bar{\alpha}} = (u + \varrho v)_{\bar{\alpha}}$ und $V_\alpha = (u + \sigma v)_\alpha$. Es ist also zu untersuchen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen $U_{\bar{\alpha}}$ und V_α existieren. Daraus folgt leicht die Existenz von U_{x^1}, U_{x^2}, V_{x^1}, V_{x^2} und daraus u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2}. Bei dieser Untersuchung kommt man besonders einfach zum Ziel, wenn man die PFAFF'schen Formen ω_1, ω_2 (I 13) durch einen integrierenden Faktor zu vollständigen Differentialen ergänzt. Diese Integrabilität wird nur für das Ende dieses Abschnitts vorausgesetzt.

Sind die Koeffizienten von (1) a^k, $\bar{a}^k$, b^k, $\bar{b}^k$ *zweimal stetig differenzierbar und* c, $\bar{c}$, d, $\bar{d}$, e, $\bar{e}$ *einmal stetig differenzierbar bezüglich* x^1, x^2 *und* ϱ *und* σ (I 10) *stetig; erfüllt ferner die CAUCHY'sche Anfangskurve K die Forderungen des vorigen Satzes und sind u, v auf K durch stetig differenzierbare Funktionen*

(II 17) $$u(K(\lambda)) = \varphi(\lambda), \quad v(K(\lambda)) = \psi(\lambda)$$

gegeben, dann gibt es genau eine Lösung des Systems (1), *für die* u, v, u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} *stetig sind und* $u = \varphi$, $v = \psi$ *auf* K [8]).

Beweis. Unter den gemachten Voraussetzungen können wir vom System (1) auf die Normalform (I 9) übergehen und die Stetigkeit von U_α, $V_{\bar{\alpha}}$ nach dem vorigen Satz annehmen. Die Werte von U, V auf K folgen aus (II 17) und (I 8). Angenommen, es seien p, q integrierende Faktoren der Linearformen ω_1, ω_2 (I 13), dann sind die Linearformen

(II 18) $$\Omega_1 = p\,\alpha_i\,d x^i; \quad \Omega_2 = q\,\bar{\alpha}_i\,d x^i$$

vollständige Differentiale, deren äußere Ableitungen (vgl. Teil II Abschnitt IV) $[d\,\Omega_1]$, $[d\Omega_2]$ verschwinden.

8) Die Stetigkeit der Ableitungen läßt sich auch ohne Verwendung integrierender Faktoren beweisen. Dabei kommt man mit geringeren Voraussetzungen für die Koeffizienten des Systems (1) aus. Kurz gesagt ist nötig, daß die ersten Ableitungen von a^k, $\bar{a}^k$, b^k, $\bar{b}^k$ und die c, $\bar{c}$, d, $\bar{d}$, e, $\bar{e}$ in G längs eines nichtcharakteristischen Richtungsfeldes stetig differenzierbar sind.

$$\text{(II 19)} \qquad \begin{aligned} [d\,\Omega_1] &= \{(p\,\alpha_1)_{x^2} - (p\,\alpha_2)_{x^1}\}\,[d\,x^2\,d\,x^1] = 0 \\ [d\,\Omega_2] &= \{(q\,\bar{\alpha}_2)_{x^1} - (q\,\bar{\alpha}_2)_{x^1}\}\,[d\,x^2\,d\,x^1] = 0. \end{aligned}$$

Dies gibt je eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für p, q, deren Koeffizienten nach unseren Voraussetzungen in der Umgebung von K stetig differenzierbare Funktionen sind. Damit ist die Existenz von p, q, beide nicht gleich Null in der Umgebung von K, gesichert [9]). Jetzt stellen die invarianten Ableitungen bezüglich Ω_1, Ω_2 gewöhnliche partielle Ableitungen bezüglich des krummlinigen Koordinatensystemes, das durch die Charakteristiken gebildet wird, dar. Die dazugehörigen krummlinigen Koordinaten seien s und τ (vgl. Bild 2). Die Anfangskurve K läßt sich in diesem Koordinatensystem in der Form $s = f(\tau)$ oder $\tau = g(s)$ darstellen, da sie nirgends mit dem Kurvennetz zusammenfallende Richtung hat. Die Lösungen von (II 1) lassen sich dann in der Form darstellen

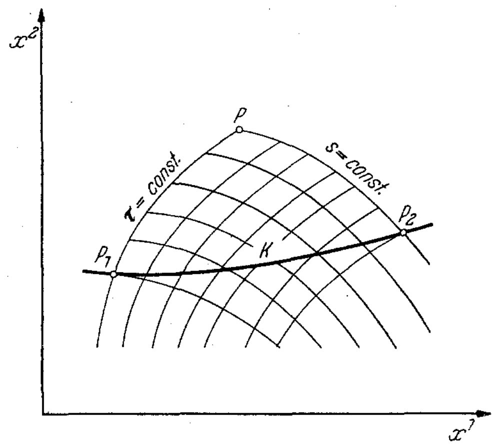

Fig. 2.

$$\text{(II 20)} \qquad \begin{aligned} U(s,\tau) &= e^{-\int\limits_{f(\tau)}^{s} \frac{A(t,\tau)}{p(t,\tau)}\,dt} \left\{ \Phi(\tau) - \int\limits_{f(\tau)}^{s} \frac{C(t,\tau) - B(t,\tau)\,V(t,\tau)}{p(t,\tau)} \cdot e^{\int\limits_{f(\tau)}^{t} \frac{A(u,\tau)}{p(u,\tau)}\,du}\, dt \right\} \\ V(s,\tau) &= e^{-\int\limits_{g(s)}^{\tau} \frac{\bar{B}(s,t)}{q(s,t)}\,dt} \left\{ \Psi(s) - \int\limits_{g(s)}^{\tau} \frac{\bar{C}(s,t) - \bar{A}(s,t)\,U(s,t)}{q(s,t)} \cdot e^{\int\limits_{g(s)}^{t} \frac{\bar{B}(s,u)}{q(s,u)}\,du}\, dt \right\}. \end{aligned}$$

Damit ist U_τ und V_s sofort bildbar. Wegen der Stetigkeit von U_s, V_τ folgt damit die Stetigkeit von U_τ, V_s und daraus die Stetigkeit von U_{x^1}, U_{x^2}, V_{x^1}, V_{x^2}. Daraus ergibt sich die Stetigkeit von u_{x^1}, u_{x^2}, v_{x^1}, v_{x^2} (I 8) und die Lösbarkeit des Problems (1).

3) Ausbreitung von Unstetigkeiten.

Wir führen wieder das charakteristische Kurvennetz s, τ ein. Es sei wie bisher vorgegeben: Die Funktionen $U(K(\lambda)) = \Phi(\lambda)$, $V(K(\lambda))$

[9]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 335. Courant-Hilbert: Methoden der math. Physik, Band II, Seite 54 (Fußnote).

$= \Psi(\lambda)$ stetig auf K, dagegen seien die Ableitungen $\Phi'(\lambda)$, $\Psi'(\lambda)$ im Punkt B von K (vgl. Bild 3) nicht stetig. Sie sollen bei B einen rechten und einen linken Grenzwert besitzen, B wird also als Sprungstelle der Ableitung angenommen. Nach dem ersten Existenzsatz (II; 1) folgt allein aus der Stetigkeit der Anfangswerte die Stetigkeit der Ableitungen U_α, $V_{\bar\alpha}$ im ganzen Existenzbereich. Daher muß mindestens $U_{\bar\alpha}(B)$ oder $V_\alpha(B)$ unstetig sein, denn sonst wären $U_\lambda(B)$ und $V_\lambda(B)$ stetig entgegen der Voraussetzung. Nach (II 20) gilt im Innern des Bereiches für die Ableitungen nach den krummlinigen Parametern

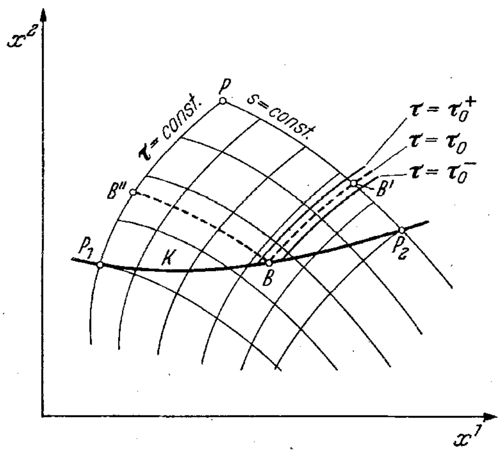

Fig. 3.

$$\text{(II 21)} \qquad U_\tau(s,\tau) = e^{-\int\limits_{f(\tau)}^{s} \frac{A(t,\tau)}{p(t,\tau)}\,dt}\,\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} + \cdots.$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind für die folgenden Überlegungen unwesentlich. U_τ ist längs jeder Kurve $\tau = \text{const}$ stetig (siehe Bild 3), mit Ausnahme der durch B gehenden Kurve $\tau = \tau_0$. Nähern wir uns von beiden Seiten der Kurve $\tau = \tau_0$, so wird die Differenz

$$\text{(II 22)} \quad U_\tau(s,\tau_0^+) - U_\tau(s,\tau_0^-) = e^{-\int\limits_{f(\tau_0)}^{s} \frac{A(t,\tau_0)}{p(t,\tau_0)}\,dt}\left\{\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0^+} - \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_0^-}\right\}.$$

Entsprechendes gilt für die durch B gehende Charakteristik der anderen Schar $s = s_0$

$$V_s(s_0^+,\tau) - V_s(s_0^-,\tau) = e^{-\int\limits_{g(s_0)}^{\tau} \frac{\overline{B}(s_0,t)}{q(s_0\,t)}\,dt}\left\{\frac{d\Psi(s)}{ds}\bigg|_{s=s_0^+} - \frac{d\Psi(s)}{ds}\bigg|_{s=s_0^-}\right\}.$$

Der Sprung pflanzt sich also bei U_τ längs BB', bei V_s längs BB'' fort. Die vor den Klammern stehenden e-Funktionen geben die Intensität der **Fortpflanzung** der Sprünge an.

Abschnitt III.

Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für das System (I 9) und (1).

Bei der Anwendung auf aerodynamische und andere physikalische Probleme treten außer dem CAUCHY'schen Anfangswertaufgaben häufig noch andere auf, die man das „charakteristische" und das „gemischte Anfangswertproblem" nennt. Wir wollen in diesem Abschnitt die Probleme und die Bedingungen der Lösbarkeit formulieren.

1) Das charakteristische Anfangswertproblem für die Normalform (I 9).

Bild 4 zeigt ein Stück des charakteristischen Netzes. $P_1 P_3$ ist eine charakteristische Kurve der zweiten Schar $\omega_1 = 0$, $P_2 P_3$ eine der ersten $\omega_2 = 0$.

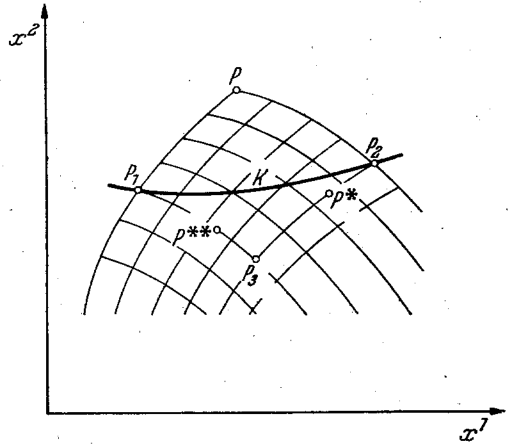

Fig. 4.

Bei dem charakteristischen Anfangswertproblem für die Normalform (I 9) *wird*

(III 1) $$U = \Phi(t_2)$$

als stetige Funktion von t_2 auf $P_1 P_3$ und

(III 2) $$V = \Psi(t_1)$$

als stetige Funktion von t_1 auf $P_2 P_3$ vorgegeben. (Wegen t_1, t_2 siehe zu (I 13)). Dann läßt sich zunächst die Funktion U auf der Charakteristik $P_2 P_3$ bestimmen. Es sei P^* irgend ein Punkt auf $P_2 P_3$, dann ist wegen (III 2) der Ausdruck $BV + C$ in (I 9) bekannt und man hat längs der Charakteristik $P_2 P_3$ in (I 9) eine lineare Differentialgleichung für U mit der Lösung

(III 3) $$U(P^*) = e^{\int_{P_3}^{P^*} A\,\omega_1} \left\{ \Phi(P_3) + \int_{P_3}^{P^*} (BV + C)\, e^{-\int_{P_3}^{P^{*\prime}} A\,\omega_1} \omega_1 \right\}$$

($P^{*\prime}$ ist ein variabler Punkt auf der Charakteristik $P_2 P_3$, der zwischen P^* und P_3 liegt). Die Integrationskonstante ist dabei so gewählt, daß $U(P_3)$ mit dem gegebenen Wert von U auf $P_1 P_3$ übereinstimmt. In derselben Weise ergibt sich für V für jeden Punkt P^{**}, der auf der Charakteristik $P_1 P_3$ liegt:

$$\text{(III 4)} \qquad V(P^{**}) = e^{\int\limits_{P_3}^{P^{**}} \overline{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi(P_3) + \int\limits_{P_3}^{P^{**}} (\overline{A}\,U + \overline{C})\, e^{-\int\limits_{P_3}^{P^{**\prime}} \overline{B}\,\omega_2}\, \omega_2 \right\}.$$

Jetzt kann man für irgendeinen Punkt P (s. Bild 4) die Funktionen U, V durch ein Iterationsverfahren bestimmen, welches in allen Teilen demjenigen entspricht, das für das CAUCHY'sche Anfangswertproblem im Abschnitt II behandelt wurde.

2) Das charakteristische Anfangswertproblem für das System (1).

Ist das Gleichungssystem in der allgemeinen Form (1) gegeben, so wird es darauf ankommen, für die Funktionen u, v „charakteristische Anfangswerte" zu definieren. Wir beginnen mit dem trivialen Fall:

Ist $u + \varrho v$ (s. (I 8)) auf der Charakteristik $P_1 P_3$ und $u + \sigma v$ auf $P_2 P_3$ vorgegeben, so sind u, v in jedem Punkt des Bereiches eindeutig bestimmt gemäß 1).

Um zu erkennen, welche Vorgaben für die Funktionen u, v auf das charakteristische Anfangswertproblem von 1) führen, gehen wir aus von der Normalform (I 9) und ersetzen dort U, V durch $U = u + \varrho v$ bzw. $V = u + \sigma v$. Nach (I 3), (I 6) können ϱ und σ nicht gleichzeitig verschwinden. Die Gleichungen

$$\text{(III 5)} \qquad (u + \varrho v)_\alpha = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C,$$

$$\text{(III 6)} \qquad (u + \sigma v)_{\overline{\alpha}} = \overline{A}(u + \varrho v) + \overline{B}(u + \sigma v) + \overline{C}$$

betrachten wir längs der durch P_3 gehenden Charakteristiken (s. Bild 4).

Ist u längs der beiden Charakteristiken durch P_3 vorgegeben, so stellt (III 5) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung längs der Charakteristik $P_2 P_3$ dar und bestimmt damit v bis auf eine Integrationskonstante $v(P^*)$. Ebenso wird (III 6) eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung längs der anderen Charakteristik $P_1 P_3$. Bei ihrer Integration ist die Integrationskonstante so zu wählen, dass der Wert $v(P_3)$ mit dem aus Gleichung (III 5) erhaltenen übereinstimmt. Beginnt man mit Gleichung (III 6) längs der Charakteristik $P_1 P_3$, so kann man die Integrationskonstante so wählen, daß $v(P^{**})$ einen gegebenen Wert annimmt. Daraus folgt:

Sind ϱ und σ von Null verschieden, so führt die Vorgabe der Funktion u auf den beiden durch P_3 gehenden Charakteristiken und des Wertes der Funktion v in irgend einem Punkte einer der beiden Charakteristiken auf das charakteristische Anfangswertproblem von 1) und damit auf eine eindeutige Lösung. Entsprechendes gilt bei der Vorgabe der Funktion v und eines Wertes der Funktion u.

Ist dagegen eine der Größen ϱ oder σ, z. B. $\varrho = 0$, so bleibt bei Vorgabe der Funktion v längs der Charakteristiken der Sachverhalt ungeändert; gibt man dagegen u längs beider Charakteristiken vor, so läßt sich aus (III 5) v längs der Charakteristik P_2P_3 mittels einer linearen Gleichung berechnen. (III 6) bestimmt dann v eindeutig längs der Charakteristik P_1P_3. Daraus folgt:

Ist $\varrho = 0$ und $B \neq 0$, so sind allein durch Vorgabe der Funktion u längs zweier Charakteristiken die beiden Funktionen u, v als Lösungen des Systems (1) bestimmt.

Zu dem Fall $\varrho = 0$ gelangt man u. a., wenn man von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgeht (vgl. (I 17)). Man erhält die Normalform (I 19). Es muß daher $u = z$ auf den durch P_3 gehenden Charakteristiken vorgegeben werden oder $v = z_{x^1}$ auf diesen Charakteristiken und u z. B. im Punkt P_3. Für $b = 0$ ergibt sich die Normalform nach (I 19) unmittelbar durch $u = U$, $v = V$. Es braucht dann nur noch $u = z$ auf P_1P_3 und $v = z_{x^1}$ auf P_2P_3 vorgegeben zu werden. Die Setzung $u = z_{x^1}$, $v = z_{x^2}$ führt bei $c = 0$ (I 17) zur Vorgabe von $u = z_{x^1}$ auf P_2P_3, $v = z_{x^2}$ auf P_1P_3.

3) Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für die Normalform (I 9).

Von besonderer Bedeutung ist der Fall, daß längs eines Stückes einer nicht charakteristischen Kurve K die Funktionswerte U, V bzw. u, v vorgegeben sind und längs einer zweiten nicht charakteristischen Kurve R, die von einem Punkt P_1 von K ausgeht und *nicht* mit K im gleichen Winkelraum der durch P_1 gehenden Charakteristiken liegt, gewisse Randwerte der Funktionen U, V bzw. u, v gegeben sind (vgl. Bild 5).

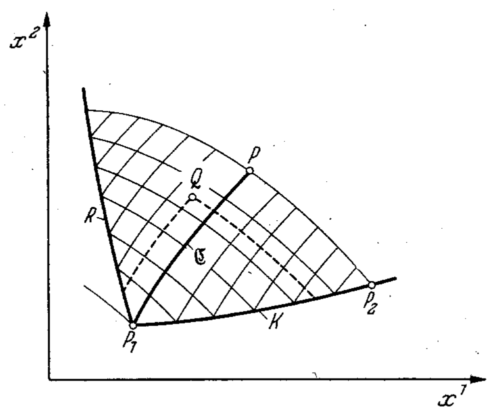

Fig. 5.

Betrachten wir ein Stück von K vom Randpunkt P_1 bis zu irgend einem Punkt P_2, so bestimmen zwei entsprechend durch P_1 und P_2 gehende Charakteristiken ein Gebiet P_1PP_2, das „Einflußgebiet" von K auf P, in dem U, V bzw. u, v als Cauchy'sches Anfangswertproblem über K bestimmt sind. Damit sind beide gesuchten Funktionen längs der Charakteristik P_1P bekannt, und das „gemischte Anfangs- und Randwertproblem" führt auf ein „gemischtes charakteristisches Randwertproblem". Es kommt darauf an zu untersuchen, welche Vorgaben längs des Randes R gemacht werden können, damit beide Funktionen U, V in dem Gebiet RP_1P eindeutig bestimmt sind.

Am einfachsten ist es, wenn wir uns von vornherein auf die Normalform (I 9) beschränken. Ist P_1P eine Charakteristik der Schar $\omega_2 = 0$ (I 13), so können wir längs des Randes R die Funktion U mit $\lim_{R \to P_1} U(R) = U(P_1)$ willkürlich vorgeben, auf der charakteristischen Kurve P_1P sind U, V aus dem „Einflußgebiet" der Anfangskurve K bekannt.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz kann in ähnlicher Weise wie in Abschnitt II bewiesen werden. Man geht wieder von einem U^0, V^0 aus, in dem man in (I 9) B und $\overline{A}$ als Null annimmt. Um in Q die U^0, V^0 zu bestimmen (Bild 5), bildet man die entsprechenden Linienintegrale auf den durch Q gehenden Charakteristiken. Dabei beginnen die Integrale für U in den Punkten der Kurve R, in denen U bekannt ist. Die Integrale für V beginnen auf P_1P, wo V bekannt ist. Durch entsprechende Iterationen erhält man die gesuchten Lösungen U, V als Grenzfunktionen.

Unter Beachtung von (I 8) folgt daraus eine Formulierung des „charakteristischen Anfangs- und Randwertproblems" für das System (1).

Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus $(u + \varrho v)_\alpha = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C$, daß es ausreicht, $u + \varrho v$ auf R und v oder u auf PP_1 vorzugeben.

Ist $\varrho = 0$, so ist u auf R und u oder v auf PP_1 vorzugeben.

Ist $U = u$, $V = v$, so ist u auf R und u oder v auf PP_1 vorzugeben.

4) Gemischte Anfangs- und Randwertprobleme für System (1).

Die längs der Randkurve R in 3) angenommene Vorgabe der Linearkombination $u + \varrho v$ ist in vielen Fällen ungeeignet oder in Anwendungen mit den physikalischen Gegebenheiten nicht ausführbar. Wir zeigen zunächst, daß es genügt, wenn nur u längs des Randes R und U, V längs K bekannt sind (Bild 5).

Ohne die Buchstaben in (I 9) zu ändern, schreiben wir (I 9) wieder in der Form

$$\text{(III 7)} \qquad \begin{aligned} U_\alpha + AU + C &= BV \\ V_{\overline{\alpha}} + \overline{B}V + \overline{C} &= \overline{A}U. \end{aligned}$$

Zunächst ist mit U, V längs K auch sicher V längs der Charakteristik $PP_1 = \mathfrak{C}$ des Einflußgebietes bekannt. Wir werden zeigen, *daß es stets in dem Winkelraum zwischen der Charakteristik $PP_1 = \mathfrak{C}$ und der Randkurve R ein an den Punkt P_1 grenzendes Gebiet gibt, in dem* (III 7) *genau eine Lösung besitzt, die die Vorgaben $V = \Psi$ auf $\mathfrak{C}$ und $u = u(R)$ auf R erfüllt.*

Beweis. Durch formale Umformung von (I 8) erhalten wir auf dem Rande R

(III 8) $$U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V(R) - u(R)\};$$

dabei ist $u(R)$ gegeben, dagegen $V(R)$ noch nicht bekannt.

Wir bestimmen sukzessive Funktionen $U^0, V^0, U^1, V^1 \ldots\ldots$ und beginnen, indem wir in (III 7) die rechte Seite der zweiten Gleichung als Null annehmen, mit

(III 9) $$V^0_{\bar\alpha} + \bar B V^0 + \bar C = 0;$$

dabei ist $V^0(\mathfrak{C}) = \Psi$. Im beliebigen Punkt Q (s. Bild 5) ergibt sich daraus $V^0(Q)$ zu

(III 10) $$V^0(Q) = e^{-\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} \bar B \omega_2} \left\{ \Psi - \int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} \bar C e^{\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q''} \bar B \omega_2} \omega_2 \right\}.$$

Damit ist $V^0(R)$ bekannt, woraus sich nach (III 8) auf dem Rand R

(III 11) $$U^0(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V^0(R) - u(R)\}$$

berechnet. Für $U^0(Q)$ gelte gemäß (III 7) die Gleichung

(III 12) $$U^0_\alpha + A U^0 + C = B V^0,$$

wobei $U^0(R)$ durch (III 11) gegeben ist. Daher wird

(III 13) $$U^0(Q) = e^{-\int\limits_{R}^{Q} A \omega_1} \left\{ U^0(R) - \int\limits_{R}^{Q} (C - B V^0) e^{\int\limits_{R}^{Q'} A \omega_1} \omega_1 \right\}.$$

V^n wird bestimmt aus

(III 14) $$V^n_{\bar\alpha} + \bar B V^n + \bar C = \bar A U^{n-1} \quad \text{mit} \quad V^n(\mathfrak{C}) = \Psi.$$

Man erhält

(III 15) $$V^n(Q) = e^{-\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} \bar B \omega_2} \left\{ \Psi - \int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} (\bar C - \bar A U^{n-1}) e^{\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q''} \bar B \omega_2} \omega_2 \right\}.$$

Ebenso wird U^n bestimmt aus

(III 16) $$U^n_\alpha + A U^n + C = B V^n$$

mit

(III 16a) $$U^n(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V^n(R) - u(R)\}.$$

Es wird

(III 17) $$U^n(Q) = e^{-\int\limits_{R}^{Q} A \omega_1} \left\{ U^n(R) - \int\limits_{R}^{Q} (C - B V^n) e^{\int\limits_{R}^{Q'} A \omega_1} \omega_1 \right\}.$$

Da wir die Lösung im Durchschnitt des Winkelraumes mit einer Umgebung des Punktes P_1 bestimmen wollen, sei in diesem Teil G der x^1, x^2-Ebene mit $M > 1$ eine feste Schranke für alle vorkommenden gegebenen Funktionen bezeichnet; insbesondere sei auch

$$M \geqq \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)} u(R) \qquad \text{und} \qquad M \geqq \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}.$$

Mit l bezeichnen wir die größte in G auftretende Länge der charakteristischen Kurven. Wir wollen zunächst zeigen, daß es ein gewisses Gebiet G, d. h. eine gewisse Länge l, gibt, so daß alle Funktionen der Folge $U^0, V^0, \ldots, U^n, V^n$ für beliebig großes n unter einer festen Schranke liegen.

Nach (III 10) ist

$$|V^0(Q)| \leqq e^{Ml}(M + M l e^{Ml}) = e^{Ml} S, \tag{III 18}$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$S = M + M l e^{Ml}. \tag{III 18a}$$

Nach (III 11) und (III 18) ergibt sich für $U^0(R)$, also auf dem Rande

$$|U^0(R)| \leqq 2M + M|V^0| \leqq 2M + M e^{Ml} S.$$

In einem Punkt Q von G gilt dann nach (III 13)

$$\begin{aligned} |U^0(Q)| &\leqq e^{Ml}\{2M + M e^{Ml} S + (M + M e^{Ml} S)\, l e^{Ml}\} \\ &\leqq e^{Ml}\{2M + 2Ml e^{Ml} + e^{Ml} S(M + M l e^{Ml})\}, \end{aligned}$$

$$|U^0(Q)| \leqq e^{Ml}(2S + e^{Ml} S^2). \tag{III 19}$$

In derselben Weise schätzen wir $V^n(Q)$ und $U^n(Q)$ ab, dabei wollen wir mit $\overline{U}^{n-1}$ eine Majorante von U^{n-1} bezeichnen. Aus (III 15) folgt sofort

$$\begin{aligned} |V^n(Q)| &\leqq e^{Ml}\{M + (M + M\overline{U}^{n-1})\, l e^{Ml}\} \\ &\leqq e^{Ml}\{S + l M e^{Ml} \overline{U}^{n-1}\}. \end{aligned} \tag{III 20}$$

Etwas mühsamer ist die Abschätzung von $U^n(Q)$. Zunächst folgt aus (III 17), (III 16a) unter Beachtung von (III 20)

$$\begin{aligned} |U^n(Q)| \leqq e^{Ml}\{2M + M e^{Ml}(S + l M e^{Ml} \overline{U}^{n-1}) \\ + l[M + M e^{Ml}(S + l M e^{Ml} \overline{U}^{n-1})]\, e^{Ml}\}. \end{aligned}$$

Fügen wir in der Klammer noch $l M e^{Ml}$ hinzu, so ist

$$\begin{aligned} |U^n(Q)| &\leqq e^{Ml}\{2M + 2Ml e^{Ml} + e^{Ml} S(M + M l e^{Ml}) \\ &\qquad + \overline{U}^{n-1} M l e^{2Ml}(M + M l e^{Ml})\} \\ &\leqq e^{Ml}\{2S + e^{Ml} S^2 + \overline{U}^{n-1} M l e^{2Ml} S\}. \end{aligned}$$

Um den Zusammenhang mit (III 19) zu verdeutlichen, schreiben wir das Ergebnis in der Form

$$\text{(III 21)} \qquad |U^n(Q)| \leqq e^{Ml}(2S + e^{Ml}S^2) + SMl e^{3Ml} \cdot \bar{U}^{n-1}.$$

Damit haben wir eine Rekursionsformel gewonnen, die nur Majoranten der Funktionen $U^0, U^1, \ldots$ enthält. Führen wir die Abkürzungen ein

$$\Gamma = e^{Ml}(2S + e^{Ml}S^2); \quad \varkappa = S \cdot Ml e^{3Ml},$$

dann wird nach (III 19) und (III 21)

$$|U^0(Q)| \leqq \Gamma$$
$$|U^1(Q)| \leqq \Gamma(1+\varkappa)$$
$$|U^2(Q)| \leqq \Gamma[1 + \varkappa(1+\varkappa)]$$

und schließlich

$$\text{(III 21 a)} \qquad |U^n(Q)| \leqq \Gamma(1 + \varkappa + \varkappa^2 + \cdots + \varkappa^n).$$

Daraus folgt sofort: *Es gibt eine Zahl N derart, daß*

$$|U^n(Q)| < N$$

für alle n, wenn die in (III 21 a) *rechts stehende Summe für* $\lim n \to \infty$ *konvergiert*, d. h. wenn $\varkappa < 1$. Das ist der Fall, wenn wir unser Gebiet G so einschränken, daß

$$\text{(III 22)} \qquad \varkappa = SMl e^{3Ml} < 1.$$

Beachten wir (III 20), so folgt unmittelbar, daß auch alle Funktionen $V^n(Q)$ im Gebiet G eine gemeinsame Schranke haben.

Wir zeigen nun weiter: *In dem durch* (III 22) *bestimmten Gebiet G konvergiert das Iterationsverfahren gleichmäßig gegen stetige Funktionen U, V mit $V(\mathfrak{C}) = \Psi$ und*

$$U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)}\{V(R) - u(R)\}.$$

Es ist

$$\text{(III 23)} \qquad |V^1 - V^0| < NMl e^{2Ml}.$$

Die Abschätzung von $|U^1 - U^0|$ ergibt sich aus (III 17), (III 13) unter Beachtung von (III 11), (III 16 a) zu

$$|U^1 - U^0| < e^{Ml}\{N M^2 l (e^{Ml})^2 + N(Ml)^2(e^{Ml})^3\},$$

$$\text{(III 24)} \qquad |U^1 - U^0| < NSMl(e^{Ml})^3; \quad S = M + e^{Ml}Ml.$$

Wir machen die Induktionsvoraussetzung

$$\text{(III 25)} \qquad \begin{aligned} |V^n - V^{n-1}| &< N S^{n-1}(e^{Ml})^{3n-1}(Ml)^n \\ |U^n - U^{n-1}| &< N S^n (e^{Ml})^{3n}(Ml)^n. \end{aligned}$$

Es folgt mit den gleichen Überlegungen wie bei (III 23), (III 24) aus (III 15), (III 17)

$$
\begin{aligned}
&|V^{n+1} - V^n| < N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)-1} (Ml)^{n+1} \\
\text{(III 26)}\qquad &|U^{n+1} - U^n| < e^{Ml}\{N M S^n (e^{Ml})^{3(n+1)-1} (Ml)^{n+1} \\
&\qquad\qquad + M l N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1}\} \\
&\qquad < N S^n (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1} \{M + M l e^{Ml}\}
\end{aligned}
$$

und daraus mit $S = M + M l e^{Ml}$

$$|U^{n+1} - U^n| < N S^{n+1} (e^{Ml})^{3(n+1)} (Ml)^{n+1}.$$

Nach (III 22) ist aber überall in G die Ungleichung erfüllt

$$S (e^{Ml})^3 M l < 1,$$

daher konvergieren die Summen

$$V^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (V^\nu - V^{\nu-1})$$

und

$$U^0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (U^\nu - U^{\nu-1})$$

gegen stetige Grenzfunktionen U, V. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz darf in (III 15), (III 17) der Grenzübergang unter den Integralen vorgenommen werden. Es wird

$$\text{(III 27)}\qquad V(Q) = e^{-\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} \bar{B}\,\omega_2} \left\{ \Psi - \int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q} (\bar{C} - \bar{A} U)\, e^{\int\limits_{\mathfrak{C}}^{Q''} \bar{B}\,\omega_2}\, \omega_2 \right\}$$

und

$$\text{(III 28)}\qquad U(Q) = e^{-\int\limits_{R}^{Q} A\,\omega_1} \left\{ U(R) - \int\limits_{R}^{Q} (C - B V)\, e^{\int\limits_{R}^{Q'} A\,\omega_1}\, \omega_1 \right\}$$

mit

$$\text{(III 29)}\qquad U(R) = u(R) + \frac{\varrho(R)}{\sigma(R)} \{V(R) - u(R)\}.$$

Beachtet man (I 8), so erkennt man sofort, daß u auf R die vorgegebenen Werte $u(R)$ und V auf $\mathfrak{C}$ die Werte Ψ annimmt. Durch Differentiation von (III 27), (III 28) in Richtung α, bzw. $\bar{\alpha}$ folgt das Erfülltsein von (III 7).

Damit ist die *Existenz einer Lösung des „charakteristischen Anfangs- und Randwertproblems“* bei den Vorgaben V auf $P P_1 = \mathfrak{C}$ und u auf R bewiesen mit stetigen Ableitungen $V_{\bar{\alpha}} = (u + \sigma v)_{\bar{\alpha}}$ und $U_\alpha = (u + \varrho v)_\alpha$.

Zur Frage der Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe zwei Lösungen U_1, V_1 und U_2, V_2 mit $V_1(\mathfrak{C}) = V_2(\mathfrak{C}) = \Psi$. Mit entsprechenden Maximalwerten μ_1, μ_2 wie bei (II 15) wird nach (III 27), (III 28) und (III 29)

$$\text{(III 30)} \qquad \begin{aligned} |V_1 - V_2| &\leqq e^{2Ml} M l \mu_1 \leqq \varkappa \mu_1 \\ |U_1 - U_2| &\leqq e^{Ml}\{M^2 l e^{2Ml} + e^{3Ml}(Ml)^2\} \mu_2 \leqq \varkappa \mu_2 \end{aligned}$$

wegen (III 22) und (III 18a). Daher ist genau wie im Abschnitt II $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Damit ist die am Anfang von 4) aufgestellte Behauptung bewiesen. Der Beweis ist geführt unter den Voraussetzungen der Stetigkeit der Koeffizienten von (III 7). Es sind die gleichen Voraussetzungen, die früher unter (I 9), (I 10), (I 11) gemacht wurden; dazu kommt $\sigma \neq 0$ auf R und stetige Vorgaben auf $PP_1 = \mathfrak{C}$ und R.

Aus dem gegebenen Existenzsatz folgen unmittelbar *Sätze für die Lösungen des allgemeinen Systems* (1) unter Beachtung, daß längs der Charakteristik $PP_1 = \mathfrak{C}$ die Gleichung gilt:

$$\text{(III 31)} \qquad (u + \varrho v)_\alpha = A(u + \varrho v) + B(u + \sigma v) + C.$$

Erfüllt das allgemeine System (1) die Voraussetzungen des Abschnittes II, so gibt es eine eindeutige und stetige bzw. stetig differenzierbare Lösung u, v derart, daß

I. auf dem Rande R die Funktion $u(R)$ und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ die Funktion $v(\mathfrak{C})$ gegebene Werte annimmt; $(\sigma \neq 0)$

oder

II. auf dem Rande R und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ die Funktion u vorgegebene Werte annimmt und v in einem Punkt von $\mathfrak{C}$ vorgegeben ist; $(\sigma \neq 0)$

oder

III. v auf R und u auf $\mathfrak{C}$ gegeben sind; $(\varrho \neq 0)$

oder

IV. v auf R und $\mathfrak{C}$, aber u nur in einem Punkt auf $\mathfrak{C}$ gegeben sind $(\varrho \neq 0)$.

Darüber hinaus läßt sich der Existenzsatz erweitern auf das folgende gemischte charakteristische Anfangswertproblem:

Längs des Randes R ist eine beliebige Funktion $\Phi(u, v)$ und auf der Charakteristik $\mathfrak{C}$ etwa $u + \sigma v$ vorgegeben, derart, daß $\begin{vmatrix} 1 & \sigma \\ \Phi_u & \Phi_v \end{vmatrix} \neq 0$ auf R. Statt der Vorgabe längs der Charakteristik $\mathfrak{C}$ kann man u, v längs der beliebigen Anfangskurve K durch P_1 vorgeben und $\Phi(u, v)$ längs R wie oben.

Hierin ist auch der in der Strömungslehre wichtige Fall enthalten, daß das Verhältnis der Geschwindigkeitskomponenten auf einer Randkurve vorgegeben ist.

Es würde zu weit führen, auf alle Fallunterscheidungen einzugehen.

(Eingegangen am 10. März 1950.)