Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 3, S. 210—218 (1950).

Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von Erhard Schmidt.

Herrn ERICH KAMKE zum 60. Geburtstag am 18. August 1950 gewidmet.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Seit längerer Zeit ist bekannt[1]), daß der BRUNN-MINKOWSKIsche Satz, der sich in seiner klassischen Form auf die MINKOWSKIsche Linearkombination zweier konvexer Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezieht, auf beliebige abgeschlossene und beschränkte Mengen ausgedehnt werden kann. Die bisher durchgeführten Erweiterungen beziehen sich auf den etwas spezielleren Fall, wo eine der beteiligten Mengen eine Kugel ist. Dieser Sonderfall reicht bekanntlich aus, um die bedeutsamste Folgerung — nämlich das Bestehen der isoperimetrischen Ungleichung mit MINKOWSKIschen Maßzahlen — zu ziehen. In bezug auf das Isoperimetrieproblem bei beliebigen Punktmengen wurden in den letzten Jahren vor allem auch in methodischer Beziehung einige bemerkenswerte Fortschritte erzielt. Vor allem sind hier die Arbeiten von A. DINGHAS[2]), E. SCHMIDT[3]) und H. BUSEMANN[4]) zu nennen. Ein Vergleich mit den älteren Abhandlungen (vor allem der beiden erstgenannten Autoren) lehrt, daß die Verwendung der Analysis zugunsten der Mengengeometrie stark zurücktritt. Die mengen-

---

[1]) Eine erste Beweisskizze stammt von L. LUSTERNIK (Die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung für beliebige meßbare Punktmengen. C. R. Acad. Sci. URSS. **1935** III, 55—58). Vgl. auch W. GROSS, Die Minimaleigenschaft der Kugel. Mh. Math. Physik **28** (**1917**), 77—97. Der erste symmetrisierungsfreie Beweis wurde von A. DINGHAS gegeben (Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa **149** (**1940**) 399—432). Vgl. auch E. SCHMIDT und A. DINGHAS, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abh. Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. **1943**, Nr. 7.

[2]) A. DINGHAS, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im euklidischen Raum von n Dimensionen. Math. Nachr. **2** (**1949**) 107—113.

[3]) E. SCHMIDT, Die BRUNN-MINKOWSKIsche Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. I und II, Math. Nachr. **1** (**1948**) 81—157 und **2** (**1949**) 171—244.

[4]) H. BUSEMANN, The isoperimetric problem for MINKOWSKI area. Amer. J. Math. **17** (**1949**) 743—762.

geometrische Arbeitsmethode ist den hier in Frage stehenden Problemen unmittelbarer angepaßt und die damit verbundene höhere Leistungsfähigkeit tritt in den allerletzten Arbeiten deutlich hervor.

Die vorliegende Arbeit schließt an die kürzlich erschienene Abhandlung von E. SCHMIDT [3]) an, in welcher simultan für den euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Raum ein Beweis des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes gegeben und außerdem der Erweiterung des klassischen Satzes ein „Spiegelbild" an die Seite gestellt wird, dessen Geltung sich ebenso auf alle drei Geometrien erstreckt. — Meine Ausführungen beziehen sich vorläufig nur auf den euklidischen Raum, dagegen wird der BRUNN-MINKOWSKIsche Satz in allgemeinerer Form für zwei beliebige Punktmengen gewonnen. Dieser bezieht sich auf die MINKOWSKIsche Addition zweier Mengen, die in der üblichen Weise definiert ist. Verschiedene Erwägungen legen es nahe, in geeigneter Weise eine MINKOWSKIsche Subtraktion zweier Mengen einzuführen. Es zeigt sich dann, daß das Spiegelbild des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes, das von E. SCHMIDT in einer etwas spezielleren Form entdeckt wurde, in analoger Weise der Subtraktion zugeordnet ist, und zwar so, daß sich der eine Satz unmittelbar und formal aus dem andern durch das Gesetz ergibt, welches Summe und Differenz miteinander verbindet.

Das betonte Hervortretenlassen dieser formalen Beziehungen scheint mir mannigfache Vorteile zu bieten und an einer gewissen Symmetrie der Aussagen wurde konsequent festgehalten.

Eine unmittelbare Folgerung des hier betrachteten BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes in der erwähnten allgemeinen Form ist das Bestehen der isoperimetrischen Ungleichung, welche sich nunmehr auf eine Relativoberfläche bezieht, die sich auf Grund einer beliebig wählbaren „Eichmenge" definieren läßt. Ist die Eichmenge insbesondere die Einheitskugel, so handelt es sich um die übliche (untere) MINKOWSKIsche Oberfläche. Für konvexe Eichmengen mit inneren Punkten ergeben sich verallgemeinerte MINKOWSKIsche Oberflächen, wie sie kürzlich von H. BUSEMANN [4]) untersucht wurden.

I.

In diesem ersten Abschnitt werden die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Resultate zusammengestellt. Die Beweise der einzelnen Aussagen erbringen wir im dritten Abschnitt.

A und B sollen zunächst beliebige Punktmengen des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen. Die Wahl eines ausgezeichneten Punktes Z als gemeinsames Bezugszentrum ist nützlich.

So kann ein beliebiger Punkt X gegebenenfalls durch den ihm zugeordneten im Zentrum Z entspringenden Ortsvektor $\mathfrak{x}$ charakterisiert werden. Eine Translation τ soll eine Punktmenge A in die translationsgleiche Punktmenge A^{τ} überführen. Die Translation τ selbst wird in vielen Fällen durch Z^{τ} gekennzeichnet.

Zunächst wird eine Definition der Minkowskischen Addition gegeben; diese ist der klassischen Linearkombination nachgebildet und ist geläufig. Neu wird eine Definition der Minkowskischen Subtraktion vorgeschlagen. — Es bezeichne $\overline{A}$ die am Zentrum Z gespiegelte Punktmenge A. Nun formulieren wir die

Definition 1 a. b.

a. Die Minkowskische Summe $A+B$ zweier Punktmengen A und B ist die Vereinigungsmenge aller A^τ, erstreckt über sämtliche Translationen τ, für die $Z^\tau \in B$ gilt.

b. Die Minkowskische Differenz $A-B$ zweier Punktmengen A und B ist der Durchschnitt aller A^τ, erstreckt über sämtliche Translationen τ, für die $Z^\tau \in \overline{B}$ gilt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die soeben definierten Mengen $A+B$ und $A-B$ in anderer äquivalenter Weise zu charakterisieren. Wir erwähnen noch eine vektorgeometrische Interpretation, welche gelegentlich gute Dienste zu leisten vermag: Es sollen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ortsvektoren von Punkten der Mengen A und B bezeichnen. Es ist dann $A+B$ die Menge derjenigen Punkte, deren Ortsvektor $\mathfrak{x}$ die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt stets zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so daß $\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ist. Analog ist $A-B$ die Menge derjenigen Punkte, deren Ortsvektor $\mathfrak{y}$ die folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem Vektor $\mathfrak{b}$ gibt es einen Vektor $\mathfrak{a}$, so daß $\mathfrak{y} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ist.

Eine singuläre Rolle in unserem Zusammenhang spielt die leere Menge O. Einerseits kann ihre besondere Erwähnung kaum unterlassen werden, da eine Minkowskische Differenz $A-B$ in vielen Fällen leer wird; andererseits aber verlieren die folgenden in diesem Abschnitt zusammengestellten Gesetze in der Regel ihre Gültigkeit, wenn nicht alle angeschriebenen Punktmengen nichtleer sind. Die hier notwendigen Konventionen $A+O=O$, $A-O=O$, $O-A=O$ bedingen eine Unstetigkeit, welche die meisten Regeln zu Fall bringt. Es ist jedoch zu erwähnen, daß unser Zentrum Z kalkülmäßig die Rolle des Nullelements übernimmt. Dies erkennt man, indem man die mühelos verifizierbaren Relationen $A+Z=A$, $A-Z=A$, $A-A=Z$ in Betracht zieht. Die letzte der drei Beziehungen ist zwar nur für beschränkte A richtig.

Es bezeichne nun weiter A^* die zu A komplementäre Punktmenge. Es gilt nun

$$(1\,\mathrm{a})\quad A-B=(A^*+\overline{B})^*;\qquad (1\,\mathrm{b})\quad A+B=(A^*-\overline{B})^*,$$

eine Beziehung also, welche ausdrückt, daß Addition und Subtraktion durch eine komplementäre Transformation auseinander hervorgehen. Ferner gelten die Rechengesetze

$$(2\,\mathrm{a})\quad (A+B)+C=A+(B+C);\qquad (2\,\mathrm{b})\quad (A-B)-C=A-(B+C).$$

Weiter gelten die Relationen

$$(3\,\mathrm{a})\quad (A-B)+B\leqq A;\qquad (3\,\mathrm{b})\quad (A+B)-B\geqq A.$$

Im folgenden werden die Punktmengen A und B als abgeschlossen und beschränkt vorausgesetzt. — Es sei nun Ω eine $(k-1)$-dimensionale Ebene durch das Zentrum Z. $S(A)$ bedeute sodann die durch Symmetrisierung an der Ebene Ω aus A hervorgehende Punktmenge. Die Symmetrisierung S kann in der folgenden Weise kurz erklärt werden: Zuerst definieren wir $S(A)$ für eine lineare auf einer orthogonal zu Ω stehenden Geraden a liegende Punktmenge A als eine in a liegende abgeschlossene und bezüglich Ω symmetrisch liegende Strecke der Länge $V_1(A)$, wobei V_1 das lineare LEBESGUEsche Maß bezeichnen soll. Um nun zu einer Definition von $S(A)$ für ein beliebiges A zu gelangen, gehen wir wie folgt vor:

$A = \Sigma a A$, wobei sich die Mengenaddition (im gewöhnlichen Sinn) über alle auf Ω orthogonal stehenden Geraden a erstrecken soll, welche mit A einen nichtleeren Durchschnitt haben. Nun definieren wir: $S(A) = \Sigma S(aA)$.

Die Symmetrisierung von Summe und Differenz zweier abgeschlossener und beschränkter Punktmengen unterliegt nun dem folgenden Gesetz

(4 a) $S(A+B) \geqq S(A) + S(B)$; (4 b) $S(A-B) \leqq S(A) - S(B)$.

Weiter bedeute $r(A)$ den Volumradius von A, d. h. den Radius derjenigen Kugel, deren Volumen gleich dem k-dimensionalen LEBESGUEschen Maß $V(A)$ ist. Sodann gelten die Relationen

(5 a) $r(A+B) \geqq r(A) + r(B)$; (5 b) $r(A-B) \leqq r(A) - r(B)$.

Diese beiden Gesetze verallgemeinern in der in der Einleitung angedeuteten Weise die sich auf den euklidischen Fall beziehenden Theoreme von E. SCHMIDT, nämlich den BRUNN-MINKOWSKIschen Satz (Relation (5 a)) und das Spiegeltheorem (Relation (5 b)).

Bevor wir weitergehen, soll nochmals daran erinnert werden, daß in den Sätzen (1) bis (5) alle angeschriebenen Mengen (d. h. auch die in Klammer gesetzten) als nichtleer vorausgesetzt werden müssen. Dies ist besonders beim Spiegeltheorem (5 b) zu beachten.

Nun leiten wir über zum Problem der isoperimetrischen Ungleichung. Es bedeute $V(A)$ das k-dimensionale LEBESGUEsche Maß von A.

Definition 2 a. b.

a. Die äußere Relativoberfläche $F_{+B}(A)$ der abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge A bezüglich einer ebensolchen Eichpunktmenge B erklären wir durch

$$F_{+B}(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A+\varrho B) - V(A)}{\varrho}.$$

b. Die innere Relativoberfläche $F_{-B}(A)$ ist analog durch

$$F_{-B}(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A) - V(A-\varrho B)}{\varrho}$$

definiert.

Unter ϱB verstehen wir die Menge der Punkte mit den Ortsvektoren $\varrho \mathfrak{b}$, wobei $\mathfrak{b}$ die Ortsvektoren der Punkte von B bezeichnen.

Die so eingeführten Relativoberflächen genügen simultan der folgenden isoperimetrischen Ungleichung

$$F_{\pm B}(A)^k \geqq k^k V(B)\, V(A)^{k-1}. \tag{6 a b}$$

Ungleichungen dieser Art für verallgemeinerte Minkowskische Oberflächen wurden von H. Busemann[4]) abgeleitet.

II.

In diesem zweiten Abschnitt treten wir knapp kommentiert auf die Spezialisierungen ein, die sich dadurch ergeben, daß wir die eine der beiden im ersten Abschnitt betrachteten Punktmengen durch eine abgeschlossene Kugel K_ϱ vom Radius ϱ ersetzen, deren Mittelpunkt im Zentrum Z des Raumes angenommen wird. Wir lassen Definitionen und Sätze in der gleichen Reihenfolge kurz passieren:

Definition 3 a. b. c. Wir setzen

a. $A_\varrho = A + K_\varrho$; b. $A_{-\varrho} = A - K_\varrho$; c. $A^\varrho = K_\varrho - A$. A_ϱ und $A_{-\varrho}$ heißen äußere und innere Parallelmenge von A im Abstand ϱ; A^ϱ ist die von E. Schmidt betrachtete und auch so bezeichnete Punktmenge, auf die sich das Spiegeltheorem in der speziellen Form bezieht. — Es ergeben sich jetzt die folgenden Relationen:

(7 a) $A_{-\varrho} = ((A^*)_\varrho)^*$; (7 b) $A_\varrho = ((A^*)_{-\varrho})^*$;

(8 a) $(A + B)_\varrho = A + B_\varrho$; (8 b) $(A - B)_{-\varrho} = A - B_\varrho$;

(9 a) $(A_{-\varrho})_\varrho \leqq A$; (9 b) $(A_\varrho)_{-\varrho} \geqq A$;

(10 a) $S(A_\varrho) \geqq (S(A))_\varrho$; (10 b) $S(A_{-\varrho}) \leqq (S(A))_{-\varrho}$.

Endlich gewinnt man als verschiedene Varianten des Brunn-Minkowskischen Satzes die drei Ungleichungen

$$r_\varrho(A) \geqq r(A) + \varrho; \tag{11 a}$$

$$r_{-\varrho}(A) \leqq r(A) - \varrho; \tag{11 b}$$

$$r^\varrho(A) \leqq \varrho - r(A). \tag{11 c}$$

Die Funktionale der linken Seiten bezeichnen die Volumradien der Mengen A_ϱ, $A_{-\varrho}$ und A^ϱ. Diese Relationen bilden in gewissem Sinn eine Schlüsselposition bei der neuzeitlichen Behandlung der Isoperimetrieprobleme. Alle drei Ungleichungen wurden von E. Schmidt[3]) abgeleitet. Die beiden ersten habe ich mit Erwähnung des gegenseitigen Zusammenhangs gelegentlich kurz mitgeteilt[5]). Die erste und wesent-

---

[5]) H. Hadwiger, Inhaltsungleichungen für innere und äußere Parallelmengen. Experientia **2** (**1946**) 490.

lichste Ungleichung ist indessen bereits von L. LUSTERNIK angegeben [6]) und später erstmals vollständig und exakt von A. DINGHAS [7]) begründet worden.

Der Vollständigkeit wegen formulieren wir noch die

Definition 4 a. b.

a. Die äußere MINKOWSKIsche Oberfläche $F_+(A)$ der abgeschlossenen und beschränkten Punktmenge A ist erklärt durch

$$F_+(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A_\varrho) - V(A)}{\varrho}.$$

b. Die innere MINKOWSKIsche Oberfläche $F_-(A)$ ist analog durch

$$F_-(A) = \liminf_{\varrho \to +0} \frac{V(A) - V(A_{-\varrho})}{\varrho}$$

definiert.

Diese MINKOWSKIschen Oberflächenmaße genügen der isoperimetrischen Ungleichung

(12 a b) $$F_\pm(A)^k \geqq k^k \omega_k V(A)^{k-1},$$

wobei ω_k das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

III.

In diesem dritten Abschnitt stellen wir die Beweise der im ersten Abschnitt ausgesprochenen Behauptungen (1) bis (6) zusammen; die Aussagen (7) bis (12) des zweiten Abschnittes ergeben sich aus (1) bis (6) durch Spezialisierung und bedürfen keiner besonderen Beweisführung.

Beweis (1 a). Nach Def. 1 b ist $A - B = \Pi A^\tau$ erstreckt über alle τ mit $Z^\tau \in \overline{B}$; hieraus folgt zunächst $(A - B)^* = (\Pi A^\tau)^* = \Sigma (A^\tau)^* = \Sigma (A^*)^\tau = A^* + \overline{B}$ und hieraus $A - B = (A^* + \overline{B})^*$.

Beweis (1 b). Ersetzen wir in (1 a) A durch A^* und B durch $\overline{B}$, so ergibt sich $A^* - B = (A + B)^*$ oder also $A + B = (A^* - \overline{B})^*$.

Beweis (2 a). Er ergibt sich nach der vektoriellen Interpretation der MINKOWSKIschen Addition in trivialer Weise.

Beweis (2 b). Nach (1 a) hat man zunächst

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= ((A - B)^* + \overline{C})^* = ((A^* + \overline{B}) + \overline{C})^* \\ &= (A^* + (\overline{B} + \overline{C}))^* = A - (B + C).\end{aligned}$$

Beweis (3 a). Es sei $P \in (A - B) + B$; nach Def. 1 a gibt es eine Translation τ mit $Z^\tau \in B$, so daß $P \in (A - B)^\tau$ gilt. Bezeichnet jetzt $-\tau$ die zu τ inverse Translation, so ist $P^{-\tau} \in A - B$; da nun $Z^{-\tau} \in \overline{B}$ gilt,

[6]) loc. cit. Fußnote 1).

[7]) loc. cit. Fußnote 1).

hat man nach Def. 1 b demnach $P^{-\tau} \in A^{-\tau}$ oder also $P \in A$. Damit ist aber der Nachweis erbracht.

Beweis (3 b). In (3 a) ersetzen wir A durch A^* und B durch $\overline{B}$ und gewinnen zunächst $(A^* - \overline{B}) + \overline{B} \leqq A^*$, also $((A^* - \overline{B}) + \overline{B})^* \geqq A$. Verwenden wir nun (1 a), so folgt $(A^* - \overline{B})^* - B \geqq A$ und weiter nach (1 b) endlich $(A + B) - B \geqq A$.

Beweis (4 a). 1. Fall. $A \leqq a$ und $B \leqq b$ sollen zunächst lineare Punktmengen sein, welche auf den beiden orthogonal zu Ω stehenden Geraden a und b liegen. Es ist dann $A + B$ eine ebenfalls lineare Punktmenge, welche auf der Geraden $c = a^{\tau_0}$ liegt, wobei τ_0 irgendeine Translation bezeichnet, für die $Z^{\tau_0} = b$ gilt. Es bedeute nun $q(X)$ den orientierten Abstand eines beliebigen Raumpunktes X von Ω und es sei P derjenige Punkt von A, für welchen $q(P)$ den maximalen Wert, Q dagegen derjenige Punkt von B, für welchen $q(Q)$ den minimalen Wert annimmt. Man bedenke hierbei, daß die Mengen A und B abgeschlossen und beschränkt sind. Es sei nun α diejenige Translation, für die $Z^{\alpha} = Q$ ist; nach Def. 1 a gilt sodann $A^{\alpha} \leqq A + B$. Weiter sei β diejenige Translation, für die $Z^{\beta} = P$ ist. Die Menge derjenigen Punkte P^{τ}, für die $Z^{\tau} \in B$ gilt, ist dann wie leicht ersichtlich mit B^{β} identisch. Wieder nach Def. 1 a ist demnach auch $B^{\beta} \leqq A + B$. Andererseits ist der Durchschnitt $A^{\alpha} B^{\beta}$ mit P^{α} identisch. Bedeutet $V_1(A)$ das Lebesguesche lineare Maß, so hat man der oben erwähnten Sachlage zufolge $V_1(A) + V_1(B) \leqq V_1(A + B)$. — Nun sind $S(A)$, $S(B)$ und $S(A + B)$ nach Definition der Symmetrisierung Strecken der Längen $V_1(A)$, $V_1(B)$ und $V_1(A + B)$, die auf den Geraden a, b und c symmetrisch zu Ω liegen. Da weiter Z auf Ω liegt, ist ebenfalls $S(A) + S(B)$ eine Strecke der Länge $V_1(A) + V_1(B)$. In Verbindung mit der oben gemachten Feststellung betreffend die linearen Maße folgt offenbar $S(A) + S(B) \leqq S(A + B)$, also die zu beweisende Behauptung für den betrachteten 1. Fall.

2. Fall. A und B sollen jetzt beliebig sein, und es sei $P \in S(A) + S(B)$. Nach Def. 1 a ist dann $P \in (S(A))^{\tau_0}$, wobei $Z^{\tau_0} \in S(B)$ gilt. Es bezeichne nun c diejenige auf Ω orthogonal stehende Gerade, für welche $P \in c$ gilt, und es sei $c = a^{\tau_0}$; also ist $P \in a^{\tau_0} (S(A))^{\tau_0} = (S(aA))^{\tau_0}$. Bezeichnet noch andererseits b diejenige auf Ω orthogonal stehende Gerade, für welche $Z^{\tau_0} \in b$ gilt, so hat man offenbar $Z^{\tau_0} \in b\, S(B) = S(bB)$. Mit Rückblick auf die oben stehende Relation betreffend P schließt man wieder nach Def. 1 a $P \in S(aA) + S(bB)$ und im Hinblick darauf, daß nunmehr aA und bB lineare Mengen sind, nach dem 1. Fall $P \in S(aA + bB)$, also erst recht $P \in S(A + B)$. Damit ist der Nachweis abgeschlossen.

Beweis (4 b). Nach (3 a) hat man zunächst $S((A - B) + B) \leqq S(A)$ und mit Verwendung von (4 a) folgt hieraus $S(A - B) + S(B) \leqq S(A)$ oder weiter auch $(S(A - B) + S(B)) - S(B) \leqq S(A) - S(B)$; mit Verwendung von (3 b) endlich schließt man jetzt auf $S(A - B) \leqq S(A) - S(B)$.

Beweis 5a. Wir begründen zunächst in knapper Art ein von A. DINGHAS[8]) herangezogenes Lemma, das sich auf die simultane Symmetrisierung zweier Mengen bezieht. Dieses lautet:

$$V(S(A)\,S(B)) = V(A\,B) + V(S(A\,B^*)\,S(B\,A^*)).$$

In der Tat: Bezeichnet g eine veränderliche stets auf Ω orthogonal stehende Gerade, $d\,g$ das $(k-1)$-dim. Volumdifferential des Durchstoßpunktes $g\,\Omega$, so hat man zunächst

$$V(S(A)\,S(B)) = \int \mathrm{Min}\,[V_1(A\,g),\, V_1(B\,g)]\,d\,g.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}&\mathrm{Min}\,[V_1(A\,g),\, V_1(B\,g)]\\&= V_1(A\,B\,g) + \mathrm{Min}\,[V_1(A\,g) - V_1(A\,B\,g),\, V_1(B\,g) - V_1(A\,B\,g)],\end{aligned}$$

so daß sich durch Integration über alle g hieraus die Aussage des Lemmas ergibt. Nun zum eigentlichen Beweis: Es bedeute $\mathfrak{S}'$ das System aller Punktmengen A', die sich durch nacheinander ausgeführte Symmetrisierungen an verschiedenen durch das Zentrum Z hindurchlaufenden Ebenen Ω aus A gewinnen lassen. Die A' sind abgeschlossen und gleichmäßig beschränkt. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}''$ das System aller abgeschlossenen Punktmengen A'', welche als Limesmengen konvergenter Folgen aus $\mathfrak{S}'$ darstellbar sind. Die Metrik sei hierbei auf die hier übliche Distanz $d(A, B) = \inf \sigma\,(A_\sigma \geqq B,\, B_\sigma \geqq A)$ bezogen. Es bezeichne K eine Kugel vom Radius $r(A)$ und dem Mittelpunkt in Z; offenbar ist $V(A) = V(K)$.

Nun setzen wir $J = \sup V(A''_\varrho K)$, wobei $\varrho > 0$ fest gedacht und die Bildung der oberen Schranke über alle A'' des Systems $\mathfrak{S}''$ verstanden wird. Nach dem bekannten Auswahlsatz gibt es in $\mathfrak{S}''$ ein A'', so daß $J = V(A''_\varrho K)$ gilt. Gewiß ist $J \leqq V(K)$; wir zeigen aber sogleich, daß $J = V(K)$ ist. In der Tat: Nehmen wir zunächst $J < V(K)$ an. Wegen $V(A''_\varrho) \geqq V(K)$ — man beachte hier, daß für jedes $A' \in \mathfrak{S}'$ stets $V(A') = V(A) = V(K)$ gelten muß — folgert man wegen $V(A''_\varrho K) < V(K)$, daß es zu einem geeignet klein gewählten $\varepsilon > 0$ zwei kongruente Kugeln P_ε und Q_ε vom Radius ε geben muß, so daß $P_\varepsilon \leqq A''_\varrho K^*$ und $Q_\varepsilon \leqq K A''^*_\varrho$ gilt. Wenden wir nunmehr das einleitend bereit gestellte Lemma für $A = A''_\varrho$ und $B = K$ an, so gewinnt man zunächst $V(S(A''_\varrho)\,K) \geqq V(A''_\varrho K) + V(S(P_\varepsilon)\,S(Q_\varepsilon))$. Hierbei sei die Symmetrisierung S so gewählt, daß Ω auf der Zentralen der beiden Kugeln P_ε und Q_ε orthogonal steht. Im Hinblick auf (10a) — man bedenke, daß diese Relation durch (4a) bewiesen ist — ergibt sich aus der oben stehenden Beziehung jetzt $V(A'''_\varrho K) \geqq V(A''_\varrho K) + V(P_\varepsilon)$, wobei wir abkürzend $A''' = S(A'')$ gesetzt haben. Da nun aber — wie leicht er-

[8]) loc. cit. Fußnote 2); im folgenden übernehme ich einige wesentliche Punkte der DINGHAS'schen Beweiskonstruktion.

sichtlich ist — $A''' \in \mathfrak{S}''$ gilt, hat man mit $V(A_\varrho''' K) > J$ einen Widerspruch mit der Definition von J.

Es gibt nun offenbar ein $A' \in \mathfrak{S}'$, so daß $A_\varrho' \geqq A''$ also auch $A_{2\varrho}' \geqq A_\varrho''$ und wegen $V(A_\varrho'' K) = J = V(K)$ endlich $A_{2\varrho}' \geqq K$ gilt. Alle vorausgegangenen Betrachtungen über A gelten natürlich ebenso auch für B und zusammengefaßt läßt sich folgendes sagen: Es gibt endlich viele Symmetrisierungen an Ebenen Ω durch Z, so daß simultan A in A' und B in B' übergeführt wird, wobei $A_{2\varrho}' \geqq K_{r(A)}$ und $B_{2\varrho}' \geqq K_{r(B)}$ gilt. Nun ist aber nach (4a) zunächst $(A+B)' \geqq A' + B'$ und nach passender Verwendung von (8a) weiter $(A+B)_{4\varrho}' \geqq A_{2\varrho}' + B_{2\varrho}'$. In Verbindung mit den oben stehenden erfüllten Bedingungen für A' und B' einerseits und (10a) andererseits gewinnt man hieraus $((A+B)_{4\varrho})' \geqq K_{r(A)} + K_{r(B)} = K_{r(A)+r(B)}$, so daß sich auf $r_{4\varrho}(A+B) \geqq r(A) + r(B)$ und dann mit $\varrho \to 0$ auf $r(A+B) \geqq r(A) + r(B)$ schließen läßt. Damit ist der Beweis beendet.

Beweis (5b). Nach (2a) ist $(A-B)+B \leqq A$, so daß zunächst $r((A-B)+B) \leqq r(A)$ ist; nach (5a) gilt demnach auch $r(A-B) + r(B) \leqq r(A)$ oder also $r(A-B) \leqq r(A) - r(B)$.

Beweis (6ab). Diese Beweise ergeben sich in zwangsläufiger Weise durch Anwendung von (5a) und (5b) auf Grund der Umrechnungsformel $V(A) = \omega_k r(A)^k$ aus der Definition 2 a. b. durch triviale Rechnung. ω_k ist das Volumen der k-dim. Einkeitskugel.

(Eingegangen am 7. März 1950.)