Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl [1]).

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

[1]) Die vorliegende Abhandlung muß mehrfach auf frühere Arbeiten des Verf. über die isoperimetrische Aufgabe zurückverweisen — und zwar unter l. c.[1] auf die Arbeit „Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen", Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 689—788; unter l. c.[2] auf die Arbeit „Über die isoperimetrische Aufgabe im n-dimensionalen Raum konstanter negativer Krümmung. I.", ebenda **46** (1940), S. 204—230; unter l. c.[3] auf die Arbeit „Die isoperimetrischen Ungleichungen auf der gewöhnlichen Kugel und für Rotationskörper im n-dimensionalen sphärischen Raum", ebenda **46** (1940), S. 743—794.

§ 1.

Ein elementarer Satz über Gleichungssysteme mit ebensoviel Gleichungen wie Unbekannten.

1) Satz I. Es seien die Funktionen

$$f_\nu(x_1 \dots x_m; \xi_1 \dots \xi_l), \qquad \nu = 1 \dots m, \tag{1}$$

der m Variablen $x_1 \dots x_m$ und der l Parameter $\xi_1 \dots \xi_l$ in dem offenen Gebiet O des (x, ξ)-Raumes, d. h. des Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \dots x_m; \xi_1 \dots \xi_l$ definiert und einmal stetig differenzierbar. Es liege das nach den $x_1 \dots x_m$ aufzulösende System der m Gleichungen

$$f_\nu = 0, \quad \nu = 1 \dots m, \tag{2}$$

vor. Man bezeichne dabei eine Lösung als „mehrfach", wenn in ihr die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (f_1 \cdots f_m)}{\partial (x_1 \dots x_m)} = 0 \tag{3}$$

ist, und als „ausgeartet", wenn in ihr sämtliche Unterdeterminanten m-ter Ordnung der aus m Zeilen und $m + l$ Spalten bestehenden Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}, \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi_\lambda} \right\} \begin{matrix} \nu = 1 \dots m, \\ \mu = 1 \dots m, \ \lambda = 1 \dots l, \end{matrix} \tag{4}$$

verschwinden. Jede ausgeartete Lösung ist also a fortiori auch mehrfach. Wir machen nun die alleinige Voraussetzung, daß in der beschränkten, abgeschlossenen Teilpunktmenge A des offenen Definitionsgebietes O ausgeartete Lösungen nicht vorkommen.

Dann bildet im l-dimensionalen Parameterraum, d. h. im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $\xi_1 \dots \xi_l$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche das Gleichungssystem (2) *in A mehrfache Lösungen aufweist, eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null.*

Dabei soll in der Folge, wenn vom äußeren Inhalt die Rede ist, stets der äußere Inhalt im Sinne von Riemann-Peano-Jordan gemeint sein.

Daß die Punktmenge beschränkt und abgeschlossen ist, leuchtet ohne weiteres ein. Denn im $(m + l)$-dimensionalen (x, ξ)-Raum bilden diejenigen Punkte der beschränkten abgeschlossenen Punktmenge A, welche den Gleichungen (2) und (3) genügen, wegen der Stetigkeit der linken Seiten dieser Gleichungen eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge, deren Projektion auf den Parameterraum daher auch beschränkt und abgeschlossen ist.

Läßt für einen Punkt des Parameterraumes das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen zu, so haben die entsprechenden Punkte des (x, ξ)-Raumes, da A beschränkt ist, mindestens einen Häufungspunkt, welcher, da A abgeschlossen ist, auch A angehört. In einem solchen müssen dann die Gleichungen (2) und (3) gelten. Die betreffenden Punkte des Parameterraumes bilden daher einen Teil derjenigen beschränkten abgeschlossenen Punktmenge, deren äußerer Inhalt laut Satz I verschwindet. Also folgt aus Satz I a fortiori der

Zusatz zu Satz I. *Die Gesamtheit derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem* (2) *in A unendlich viele Lösungen besitzt, hat den äußeren Inhalt Null.*

Beweis des Satzes I. Es sei $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ ein Punkt von A, in welchem die Gleichungen (2) und (3) gelten. Dann gibt es voraussetzungsgemäß in der Funktionalmatrix (4) mindestens eine Unterdeterminante m-ter Ordnung, welche an dieser Stelle nicht verschwindet. Es sei also im Punkte $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ die Unterdeterminante

$$\frac{\partial (f_1 \ldots f_m)}{\partial (\xi_{\lambda_1} \ldots \xi_{\lambda_k}; x_{\mu_{k+1}} \ldots x_{\mu_m})} \neq 0. \tag{5}$$

Dabei bedeuten $\lambda_1 \ldots \lambda_l$ und $\mu_1 \ldots \mu_m$ Permutationen der Indizes $1 \ldots l$ und $1 \ldots m$, und es muß wegen (3) neben

$$k \leqq l \quad \text{und} \quad k \leqq m \text{ auch } k \geqq 1 \tag{6}$$

sein. Da die betrachtete Stelle dem Bereich A und mithin a fortiori dem offenen Definitionsgebiet O angehört, in welchem unsere Funktionen einmal stetig differenzierbar sind, so lassen sich auf Grund des Fundamentalsatzes über implizite Funktionen um den Punkt $(\bar{x}_{\mu_1} \ldots \bar{x}_{\mu_k}; \bar{\xi}_{\lambda_{k+1}} \ldots \bar{\xi}_{\lambda_l})$ als Mittelpunkt ein l-dimensionaler, abgeschlossener, achsenparalleler Würfel W des l-dimensionalen Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_k}$; $\xi_{\lambda_{k+1}} \ldots \xi_{\lambda_l}$ und um den Punkt $(\bar{x}_{\mu_{k+1}} \ldots \bar{x}_{\mu_m}; \bar{\xi}_{\lambda_1} \ldots \bar{\xi}_{\lambda_k})$ als Mittelpunkt ein m-dimensionaler, abgeschlossener, achsenparalleler Würfel W^* des m-dimensionalen Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_{\mu_{k+1}} \ldots x_m$; $\xi_{\lambda_1} \ldots \xi_{\lambda_k}$ von folgenden Eigenschaften bestimmen:

Der durch die beiden Würfel W und W^* als ihr sogenanntes topologisches Produkt definierte abgeschlossene Teilbereich $W W^*$ des $(m + l)$-dimensionalen (x, ξ)-Raumes liegt noch ganz in O; die Determinante auf der linken Seite von (5) bleibt im Bereich $W W^*$ von Null verschieden; die Gesamtheit derjenigen Punkte des Bereichs $W W^*$, welche das Gleichungssystem (2) befriedigen, wird gegeben durch Gleichungen von der Gestalt

$$\xi_{\lambda_\varrho} = \varphi_\varrho(x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_k};\ \xi_{\lambda_{k+1}} \ldots \xi_{\lambda_l}), \qquad \varrho = 1 \ldots k, \tag{7}$$

$$x_{\mu_\varrho} = \varphi_\varrho(x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_k};\ \xi_{\lambda_{k+1}} \ldots \xi_{\lambda_l}), \qquad \varrho = k + 1 \ldots m. \tag{8}$$

Dabei durchläuft der Punkt $(x_1 \ldots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \ldots \xi_{\lambda_l})$ den Würfel W, und die Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ sind in diesem eindeutig definiert und einmal stetig differenzierbar. In den durch die Gleichungen (7) und (8) bestimmten Punkten des Bereichs $W W^*$, oder was das gleiche bedeutet, in denjenigen Punkten dieses Bereichs, welche dem Gleichungssystem (2) genügen, gelten nun, wenn man die totalen Differentiale

$$(9) \qquad d f_\nu, \ \nu = 1 \ldots m, \quad d \varphi_\varrho, \ \varrho = 1 \ldots m,$$

als lineare homogene Formen der Unbestimmten $d x_1 \ldots d x_m; d \xi_1 \ldots d \xi_l$ betrachtet, in diesen die Identitäten

$$(10) \qquad \begin{cases} d \xi_{\lambda_\varrho} - d \varphi_\varrho = \sum_1^m {}_\nu \, a_{\varrho\nu} d f_\nu, & \varrho = 1 \ldots k, \\ d x_{\mu_\varrho} - d \varphi_\varrho = \sum_1^m {}_\nu \, a_{\varrho\nu} d f_\nu, & \varrho = k + 1 \ldots m. \end{cases}$$

Dabei ist die Matrix

$$(11) \qquad \{a_{\varrho\nu}\} \quad \begin{array}{l} \varrho = 1 \ldots m, \\ \nu = 1 \ldots m \end{array}$$

die Reziproke derjenigen Matrix, welche in dem betreffenden Punkte durch die Koeffizienten der Funktionaldeterminante (5) dargestellt wird, und deren Determinante daher im Bereich $W W^*$, wie festgesetzt, nicht verschwindet. Bezeichnet also a die Determinante der Matrix (11), so ist

$$(12) \qquad a \frac{\partial (f_1 \ldots f_m)}{\partial (\xi_{\lambda_1} \ldots \xi_{\lambda_k}; x_{\mu_{k+1}} \ldots x_{\mu_m})} = 1.$$

Andererseits erhält man für die aus den Koeffizienten der Differentiale $d x_{\mu_1} \ldots d x_{\mu_m}$ gebildete Determinante auf der linken Seite der Identitäten (10)

$$(13) \qquad (-1)^k \frac{\partial (\varphi_1 \ldots \varphi_k)}{\partial (x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_k})}$$

und auf der rechten Seite

$$(14) \qquad a \frac{\partial (f_1 \ldots f_m)}{\partial (x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_m})}.$$

Man hat also

$$(15) \qquad \left| \frac{\partial (\varphi_1 \ldots \varphi_k)}{\partial (x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_k})} \right| = |a| \left| \frac{\partial (f_1 \ldots f_m)}{\partial (x_1 \ldots x_m)} \right|,$$

wobei a durch (12) gegeben ist.

Man betrachte nun das mit den Gleichungen (7) gleichbedeutende Gleichungssystem

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi_{\lambda_\varrho} = \varphi_\varrho (x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_k}; \xi_{\lambda_{k+1}} \ldots \xi_{\lambda_l}), & \varrho = 1 \ldots k \\ \xi_{\lambda_\varrho} = \xi_{\lambda_\varrho}, & \varrho = k + 1 \ldots l. \end{cases}$$

Man erhält für die Funktionaldeterminante dieses Systems

$$\frac{\partial(\xi_{\lambda_1}\dots\xi_{\lambda_l})}{\partial(x_{\mu_1}\dots x_{\mu_k};\,\xi_{\lambda_{k+1}}\dots\xi_{\lambda_l})}=\frac{\partial(\varphi_1\dots\varphi_k)}{\partial(x_{\mu_1}\dots x_{\mu_k})}\tag{17}$$

und wegen (15)

$$\left|\frac{\partial(\xi_{\lambda_1}\dots\xi_{\lambda_l})}{\partial(x_{\mu_1}\dots x_{\mu_k};\,\xi_{\lambda_{k+1}}\dots\xi_{\lambda_l})}\right|=|a|\left|\frac{\partial(f_1\dots f_m)}{\partial(x_1\dots x_m)}\right|.\tag{18}$$

Wir ziehen jetzt den folgenden Hilfssatz heran[2]):

Es seien die Funktionen

$$v_\varrho=\psi_\varrho(u_1\dots u_l),\quad \varrho=1\dots l,$$

in einem abgeschlossenen Würfel des (u)-Raumes, d. h. des Raumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $u_1\dots u_l$ definiert und einmal stetig differenzierbar. Dann entspricht der Gesamtheit derjenigen Punkte des Würfels, in welchen die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(v_1\dots v_l)}{\partial(u_1\dots u_l)}=0$$

wird, im (v)-Raum, d. h. im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $v_1\dots v_l$, zunächst gewiß eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge, die natürlich auch leer sein kann. *Diese Punktmenge hat den äußeren Inhalt Null.*

Nun verschwindet wegen (18) die Funktionaldeterminante des Gleichungssystems (16) in denjenigen Punkten des Würfels W, welchen im Bereich $W\,W^*$ Punkte entsprechen, die den Gleichungen (2) und (3) gleichzeitig genügen. Gemäß dem Hilfssatz besitzen also die durch die Gleichungen (16) bestimmten zugehörigen Punkte des Parameterraumes den äußeren Inhalt Null. Damit ist bewiesen, daß die Menge derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem (2) im Bereich $W\,W^*$ mehrfache Lösungen aufweist, den äußeren Inhalt Null besitzt.

Nun bildet im $(m+l)$-dimensionalen (x,ξ)-Raum die Gesamtheit derjenigen Punkte von A, welche mehrfachen Lösungen entsprechen, eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge, die mit P bezeichnet werden möge. Zu jedem Punkt von P läßt sich ein Bereich $W\,W^*$ von den oben präzisierten Eigenschaften bestimmen, der den Punkt als inneren Punkt enthält. Nach dem Borelschen Satz wird daher P von endlich vielen solchen Bereichen überdeckt. Da in jedem die Projektion von P auf den Parameterraum, wie eben festgestellt, den äußeren Inhalt Null besitzt,

---

[2]) Der Leser findet einen einfachen Beweis dieses Hilfssatzes l. c.[1] § 4 III S. 712. Ein Beweis unter allgemeineren Voraussetzungen findet sich auch bei O. Haupt u. G. Aumann, „Differential- und Integralrechnung". Berlin, W. de Gruyter, 1938. Bd. 3, S. 139.

so hat die Vereinigungsmenge dieser Projektionen, welche die Projektion von P auf den Parameterraum darstellt, ebenfalls den äußeren Inhalt Null. Damit ist der Satz I bewiesen, aus welchem, wie schon bei der Formulierung erklärt, auch der Zusatz folgt.

2) Daß die Voraussetzung des Satzes I, laut welcher in dem betrachteten Bereich ausgeartete Lösungen nicht vorkommen dürfen, nicht überflüssig ist, und selbst bei seinem Zusatz, der doch bloß eine Konsequenz darstellt, nicht entbehrt werden kann, ist trivial. Bildet doch schon der Fall, daß eine der Gleichungen (2) eine identische Folge der übrigen ist, ein Beispiel dafür, daß ohne die betreffende Voraussetzung, die Behauptungen des Satzes und des Zusatzes nicht gesichert sind. Eindringender wird der Sachverhalt durch das folgende Beispiel illustriert:

Man definiere die Funktion

$$x^3 \cos \frac{\pi}{x}$$

für $x = 0$ durch Null und setze

$$f(x, \xi) = x^3 \cos \frac{\pi}{x} - \xi x^4.$$

Dann ist $f(x, \xi)$ für alle Werte von x und ξ einmal stetig differenzierbar und weist für ganzzahlige $n > \frac{1}{2} |\xi|$ an den Stellen $x = \frac{1}{2n}$ und $x = \frac{1}{2n+1}$ entgegengesetzte Vorzeichen auf. Die Gleichung

$$f(x, \xi) = 0$$

besitzt daher für *alle* Werte des Parameters ξ im Bereich $|x| \leqq 1$ unendlich viele Lösungen. Definiert man also etwa den Bereich A durch die Ungleichungen $|\xi| \leqq c$, $|x| \leqq 1$, wobei c eine beliebige positive Konstante bedeutet, so trifft die Behauptung des Zusatzes zum Satz I hier nicht zu. In der Tat ist auch die Voraussetzung nicht erfüllt, indem an der Stelle $x = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ verschwinden, und mithin diese Stelle für alle Werte von ξ eine ausgeartete Lösung darstellt.

3) Will man sich von Voraussetzungen befreien, so gestattet der Satz I die folgende Abwandlung.

Es seien die Funktionen (1) *in dem offenen Gebiet O des (x, ξ)-Raumes definiert und einmal stetig differenzierbar. Dann besitzt im Parameterraum die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche das Gleichungssystem im Definitionsgebiet mehrfache Lösungen aufweist, die nicht ausgeartet sind, das Maß Null.*

Beweis. Es sei $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ eine mehrfache, nicht ausgeartete Lösung im Definitionsgebiet. Dann läßt sich, da dieses offen ist, eine den Punkt als inneren Punkt enthaltende, innerhalb des Definitionsgebietes bleibende, $(m + l)$-dimensionale, abgeschlossene Kugel A bestimmen, deren

Mittelpunkt rationale Koordinaten besitzt, und deren Radius ebenfalls rational und so klein ist, daß eine derjenigen Unterdeterminanten m-ter Ordnung der Funktionalmatrix (4), welche im Punkte $(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m; \bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_l)$ voraussetzungsgemäß nicht verschwinden, in der ganzen Kugel von Null verschieden bleibt. Mithin kommen in der abgeschlossenen Kugel A keine ausgearteten Lösungen vor. Gemäß dem Satze I besitzt daher die Gesamtheit derjenigen Punkte des Parameterraumes, für welche das Gleichungssystem in der Kugel mehrfache Lösungen aufweist, den äußeren Inhalt Null und mithin a fortiori auch das Maß Null. Da nun, im (x, ξ)-Raum jeder Punkt, der einer mehrfachen nicht ausgearteten Lösung entspricht, wie eben festgestellt, einer solchen Kugel angehört, da es ferner solcher Kugeln offenbar nur abzählbar viele gibt, und da die Vereinigungsmenge abzählbar vieler Punktmengen vom Maße Null ebenfalls das Maß Null besitzt, so ist der Beweis für unsere Behauptung erbracht.

§ 2.

Anwendungen des Satzes über die Gleichungssysteme auf den Schnitt gegebener Mannigfaltigkeiten mit Scharen äquidistanter Flächen konstanten Krümmungsmaßes.

1) Im n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \ldots y_n$ sei eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit gegeben durch die Gleichungen

$$y_\nu = y_\nu(t_1 \ldots t_k), \quad \nu = 1 \ldots n, \; k \leqq n-1, \tag{1}$$

wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k)$ einen beschränkten, abgeschlossenen Bereich T des (t)-Raumes durchläuft, der nur solche Randpunkte enthält, die Häufungspunkte von inneren Punkten sind. Der Bereich T lasse sich in ein offenes Gebiet T_0 einbetten, in welchem die Funktionen (1) noch definiert und *zweimal* stetig differenzierbar sind, und in welchem an keiner Stelle sämtliche Unterdeterminanten k-ter Ordnung der Funktionalmatrix

$$\left\{\frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}\right\} \quad \begin{array}{l} \nu = 1 \ldots n, \\ \varkappa = 1 \ldots k, \end{array} \tag{2}$$

gleichzeitig verschwinden.

Eine Mannigfaltigkeit, welche diesen Voraussetzungen genügt, soll fortan kurz als eine „*beschränkte zweifach glatte*" Mannigfaltigkeit bezeichnet werden. Dabei ist festzustellen, daß bei einer eindeutigen und eindeutig umkehrbaren zweimal stetig differenzierbaren Transformation des (y)-Raumes eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit wieder in eine solche übergeht. Unsere Begriffsbestimmung ist daher auch unabhängig vom Koordinatensystem, sofern die in Betracht kommenden Koordinatentransformationen eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar sind.

Wird eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in einem Punkte, der einem inneren Punkte von T entspricht, von einer $(n-1)$-dimensionalen Ebene berührt, so ist das damit gleichbedeutend, daß die in dem Punkte ansetzenden k Vektoren mit den Komponenten

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_\varkappa} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial t_\varkappa}, \quad \varkappa = 1 \dots k,$$

in die Ebene fallen. Dieser Sachverhalt diene für den Fall, daß der Berührungspunkt einem Randpunkt von T entspricht, zur Definition der Berührung. Denn das entspricht, da jeder Randpunkt voraussetzungsgemäß Häufungspunkt von inneren Punkten ist, der Anschauung und ist zur Erhaltung der Stetigkeit offenbar geboten.

Eine Schar paralleler Ebenen wird durch Gleichungen von der Gestalt

$$\sum_1^n {}_\nu \xi_\nu y_\nu = \text{konst.}, \quad \sum_1^n {}_\nu \xi_\nu^2 > 0, \tag{3}$$

gegeben, wobei die Scharen auf die durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden des (ξ)-Raumes eindeutig und eindeutig umkehrbar abgebildet sind.

Wird die gegebene zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) von einer Ebene einer solchen Schar berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \dots t_k; \xi_1 \dots \xi_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \dots k, \tag{4}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \dots t_k; \ \xi_1 \dots \xi_n) = \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} \xi_\nu. \tag{5}$$

Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind nun die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, ξ)-Raumes, welches durch T_0 und den gesamten (ξ)-Raum als sogenanntes topologisches Produkt dieser beiden Gebiete gegeben wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Ferner ist vermöge der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung in jedem Punkte von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \dots f_k$ nach k unter den n Argumenten $\xi_1 \dots \xi_n$ von Null verschieden. Es können daher im Gebiete O ausgeartete Lösungen des Gleichungssystems (4) nicht vorkommen. Betrachtet man jetzt die $t_1 \dots t_k$ als die Variablen und die $\xi_1 \dots \xi_n$ als die Parameter, so erfüllt das Gleichungssystem (4) die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jeden beschränkten abgeschlossenen Teilbereich A von O. Wählt man als solchen das topologische Produkt von T mit einem beliebigen beschränkten, abgeschlossenen Bereich des (ξ)-Raumes, so ergibt der Zusatz zunächst das folgende Resultat:

Satz II. In jedem beschränkten, abgeschlossenen Bereich des (ξ)-Raumes besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Nun kann der äußere Inhalt einer unbeschränkten Punktmenge definiert werden als obere Grenze des äußeren Inhalts ihres Durchschnitts mit sämtlichen beschränkten, abgeschlossenen Punktmengen. Daher gilt der

Satz II′. *Die Gesamtheit derjenigen Punkte des (ξ)-Raumes, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, besitzt den äußeren Inhalt Null.*

Nun besteht diese Punktmenge aus Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt, und der äußere Inhalt des Durchschnitts einer solchen Punktmenge mit der Vollkugel

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \xi_\nu^2 \leqq r^2$$

ist gleich dem Produkt von $\frac{1}{n} r^n$ mit dem auf der Einheitskugel gemessenen äußeren Inhalt der Projektion der Punktmenge auf diese. Daraus folgt leicht, daß die obigen Sätze II und II′ gleichbedeutend sind mit dem

Satz II″. Auf der Einheitskugel

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \xi_\nu^2 = 1 \tag{6}$$

besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine gegebene beschränkte, zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Eine unmittelbare Konsequenz des Satzes II″ ist der

Satz II‴. *Es seien im (y)-Raum endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten — jede von beliebiger Dimensionszahl k — gegeben. Dann besitzt auf der Einheitskugel* (6) *die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen eine Ebenenschar entspricht, die eine der Mannigfaltigkeiten in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.*

2) Wird die gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) im Punkte $(t_1 \ldots t_k)$ von einer Kugel mit dem Mittelpunkt $(y_1^* \ldots y_n^*)$ berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$f_\varkappa(t_1 \ldots t_k;\; y_1^* \ldots y_n^*) = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{7}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$f_\varkappa = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} (y_\nu^* - y_\nu), \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{8}$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \ldots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß der Punkt $(y_1^* \ldots y_n^*)$ auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist hierbei als Berührung mit der Kugel vom Radius Null, der sogenannten Nullkugel, anzusehen. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, y^*)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit dem gesamten (y^*)-Raum gebildet wird, definiert und nach allen ihren Argumenten $t_1 \ldots t_k$; $y_1^* \ldots y_n^*$ einmal stetig differenzierbar. Ferner ist vermöge der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung mindestens eine der Funktionaldeterminanten der Funktionen $f_1 \ldots f_k$ nach k unter den n Argumenten $y_1^* \ldots y_n^*$ von Null verschieden. Diese Feststellungen führen genau so wie oben bei der Herleitung des Satzes II′ zum

Satz III. *Die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, besitzt den äußeren Inhalt Null.*

3) Es sei hier zunächst gestattet, zur Einführung an einige allbekannte ganz elementare geometrische Zusammenhänge zu erinnern.

Im n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \ldots y_n$ stellt die Gleichung

$$\alpha_0 \sum_1^n{}_\nu\, y_\nu^2 + 2 \sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu y_\nu + \alpha_{n+1} = 0 \tag{9}$$

für $\alpha_0 = 0$ eine Ebene dar; für $\alpha_0 \neq 0$ ist sie gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \left(y_\nu + \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}\right)^2 = \frac{\sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1}}{\alpha_0^2} \tag{10}$$

und stellt daher für

$$\sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} > 0 \tag{11}$$

eine Kugel dar, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \ldots \frac{-\alpha_n}{\alpha_0} \tag{12}$$

besitzt, und deren Radius durch die Formel

$$+\sqrt{\frac{\sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1}}{\alpha_0^2}} \tag{13}$$

gegeben wird.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} = 0 \tag{14}$$

stellt die Gleichung die Kugel mit dem Radius Null, die sogenannte Nullkugel dar, welche lediglich aus ihrem Mittelpunkte besteht, der die Koordinaten

$$\frac{-\alpha_1}{\alpha_0} \cdots \frac{-\alpha_n}{\alpha_0} \tag{15}$$

besitzt.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu^2 - \alpha_0\alpha_{n+1} < 0 \tag{16}$$

gibt es überhaupt keine reellen Punkte, welche der Gleichung genügen. Die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sollen als homogene Koordinaten der Kugeln und Ebenen betrachtet werden.

Sind $\alpha_0', \alpha_1' \ldots \alpha_n', \alpha_{n+1}'$ und $\alpha_0'', \alpha_1'' \ldots \alpha_n'', \alpha_{n+1}''$ die homogenen Koordinaten zweier Kugeln oder Ebenen, für welche (11) oder (14) gelten, oder mit anderen Worten, welche beide reelle Punkte besitzen, so zeigt die Gleichung

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_\nu'\alpha_\nu'' - \tfrac{1}{2}(\alpha_0'\alpha_{n+1}'' + \alpha_{n+1}'\alpha_0'') = 0 \tag{17}$$

an, daß die beiden Kugeln sich reell und orthogonal schneiden. Dabei ist der Schnitt einer Nullkugel mit einer durch sie hindurchgehenden Kugel oder Ebene als orthogonal zu rechnen.

Man betrachte nun die Schar von Kugeln oder Ebenen, welche gegeben ist durch die Gleichung

$$\eta_0\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{18}$$

wobei λ den inneren Parameter der Schar bedeutet, und $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ nicht sämtlich verschwinden.

Für

$$\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 > 0 \tag{19}$$

besteht die Schar aus der Gesamtheit der Kugeln oder Ebenen, welche durch den Schnitt der Einheitskugel

$$\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1 = 0$$

mit derjenigen Kugel oder Ebene hindurchgehen, die durch die Gleichung

$$\eta_0\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2\sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu = 0 \tag{20}$$

bestimmt wird, und mithin gemäß (19), (11), (17) die Einheitskugel reell und orthogonal schneidet und keine Nullkugel ist.

Ist

$$\sum_1^n {}_\nu\, \eta_\nu^2 - \eta_0^2 = 0, \tag{21}$$

so wird die Schar von denjenigen Kugeln oder Ebenen gebildet, welche mit der Einheitskugel nur den Punkt

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0} \cdots \frac{-\eta_n}{\eta_0}\right) \tag{22}$$

gemein haben und sie daher in diesem Punkte berühren. Dabei liegen sie bis auf den Berührungspunkt für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ ganz im Innern der Einheitskugel und für $\frac{\lambda}{\eta_0} < 0$ ganz im Äußern. Da nämlich wegen (21) $\eta_0 \neq 0$ ist, so ist die Gleichung (18) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n {}_\nu \left(y_\nu + \frac{\eta_\nu}{\eta_0}\right)^2 + \frac{\lambda}{\eta_0}\left(\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{23}$$

und diese Gleichung zeigt, daß, abgesehen vom Berührungspunkt (22),

$$\sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^2 - 1 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\eta_0}$$

entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Es sei endlich

$$\sum_1^n {}_\nu\, \eta_\nu^2 - \eta_0^2 < 0. \tag{24}$$

Setzt man dann

$$\lambda_0 = + \sqrt{\eta_0^2 - \sum_1^n {}_\nu\, \eta_\nu^2}, \tag{25}$$

so wird in der Gleichung (18) die charakteristische quadratische Form

$$\sum_1^n {}_\nu\, \alpha_\nu^2 - \alpha_0 \alpha_{n+1} = \lambda^2 - \lambda_0^2. \tag{26}$$

Es gibt daher für $|\lambda| < \lambda_0$ überhaupt keine reellen Punkte, welche der Gleichung (18) genügen, während sie für $\lambda = \pm \lambda_0$ Nullkugeln darstellt. Diese liegen in den sich an der Einheitskugel spiegelnden beiden Punkten

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0 + \lambda_0} \cdots \frac{-\eta_n}{\eta_0 + \lambda_0}\right), \quad \left(\frac{-\eta_1}{\eta_0 - \lambda_0} \cdots \frac{-\eta_n}{\eta_0 - \lambda_0}\right). \tag{27}$$

Für $|\lambda| > \lambda_0$ stellt die Schar gewöhnliche Kugeln oder Ebenen dar. Weder diese noch die Nullkugeln schneiden die Einheitskugel. Sie liegen vielmehr für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ ganz im Innern derselben und für $\frac{\lambda}{\eta_0} < 0$ ganz im Äußern. Da nämlich wegen (24) $\eta_0 \neq 0$ ist, so ist die Gleichung (18) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\sum_1^n {}_\nu \left(y_\nu + \frac{\eta_\nu}{\eta_0}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{\eta_0^2} + \frac{\lambda}{\eta_0}\left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 - 1\right) = 0, \tag{28}$$

und diese Gleichung zeigt, daß

$$\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 - 1 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{\eta_0}$$

entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Endlich folgt noch aus dem bilinearen Charakter der Bedingung (17), daß eine Orthogonalkugel der Einheitskugel von den Kugeln einer Schar (18) entweder alle oder keine senkrecht schneidet. Insbesondere ist dadurch festgestellt, daß eine Orthogonalkugel der Einheitskugel entweder durch beide oder durch keine der beiden Nullkugeln einer Schar (18) vom Typus (24) hindurchgeht, und daß jede Kugel einer solchen Schar von allen Orthogonalkugeln der Einheitskugel, die durch eine der beiden Nullkugeln gehen, senkrecht geschnitten wird.

4) Es werde nun dem Innern der Einheitskugel, also dem Gebiete

$$\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 < 1 \tag{29}$$

die Maßbestimmung

$$ds^2 = 4\,\frac{\sum_1^n {}_\nu d y_\nu^2}{\left(1 - \sum_1^n {}_\nu y_\nu^2\right)^2} \tag{30}$$

aufgeprägt. Dadurch wird ein hyperbolischer Raum mit dem Krümmungsmaß -1 definiert. Die hyperbolischen Ebenen werden durch den im Innern der Einheitskugel verlaufenden Teil ihrer Orthogonalkugeln repräsentiert. Auf Grund von (11) und (17) werden sie durch die Gleichung

$$\eta_0\left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2\sum_1^n {}_\nu \eta_\nu y_\nu = 0, \quad \sum_1^n {}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 > 0 \tag{31}$$

dargestellt, so daß also die $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ als homogene Ebenenkoordinaten auftreten.

Die Schar (18) stellt daher gemäß den oben gemachten Feststellungen im Fall (19) die Abstandsflächen der hyperbolischen Ebene mit den homogenen Koordinaten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ dar. Im Falle (21) stellt sie für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ die Schar äquidistanter Orizykelflächen dar, deren Euklidische Modellkugeln im Punkte

$$\left(\frac{-\eta_1}{\eta_0} \ldots \frac{-\eta_n}{\eta_0}\right) \tag{32}$$

die Innenseite der Einheitskugel berühren.

Im Falle (24) stellt endlich die Gleichung (18) für $|\lambda| > \lambda_0$ und $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ hyperbolische Kugeln dar. Nun wird gemäß den obigen Feststellungen jede dieser Kugeln von allen hyperbolischen Ebenen, welche durch die im Innern der Einheitskugel gelegene Nullkugel gehen, senkrecht geschnitten. Die Nullkugel bildet daher den hyperbolischen Mittelpunkt jeder Kugel der Schar. Wir sehen also, daß die Gleichung (18) im Falle (24) für $\frac{\lambda}{\eta_0} > 0$ die Schar konzentrischer hyperbolischer Kugeln darstellt, deren Mittelpunkt $(y_1^* \ldots y_n^*)$ gemäß (27) durch die Gleichungen

$$(33) \qquad y_\nu^* = \frac{-\eta_\nu}{\eta_0 + \operatorname{sign}(\eta_0)\,\lambda_0} = -\operatorname{sign}(\eta_0)\,\frac{\eta_\nu}{\lambda_0 + |\eta_0|}$$

bestimmt ist.

5) Es sei nun in unserem hyperbolischen Raum (29), (30) die beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) gegeben.

Wird die Mannigfaltigkeit im Punkte $(t_1 \ldots t_k)$ von einer Fläche der Schar (18) berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$(34) \qquad f_\varkappa(t_1 \ldots t_k, \lambda;\ \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k+1,$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(35) \qquad f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}\,[\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)], \quad \varkappa = 1 \ldots k,$$

$$(36) \qquad f_{k+1} = (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\,\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\,\lambda = 0,$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \ldots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß eine Nullkugel auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist dabei als Berührung zu rechnen. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind nun die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O des (t, λ, η)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit der gesamten (λ)-Geraden und dem gesamten (η)-Raum gebildet wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Man hat bei festem $t_1 \ldots t_k$ und mithin auch festem $y_1 \ldots y_n$ und bei festem η_0

$$(37) \qquad d f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa}\,(d\eta_\nu + y_\nu\, d\lambda), \quad \varkappa = 1 \ldots k,$$

$$(38) \qquad d f_{k+1} = 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu\, d\eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\, d\lambda.$$

Wir wollen nun zeigen, daß in jedem Punkte des Gebietes O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \ldots f_{k+1}$ nach $k+1$ unter den $n+1$ Argumenten $\lambda, \eta_1 \ldots \eta_n$ von Null verschieden ist. Andernfalls gäbe es nämlich in O einen Punkt, in welchem die nicht sämtlich verschwindenden

Koeffizienten $c_1 \ldots c_{k+1}$ sich so bestimmen ließen, daß identisch in den Differentialen $d\lambda, d\eta_1 \ldots d\eta_n$

$$\sum_1^{k+1}{}_{\varkappa} c_\varkappa d f_\varkappa = 0 \tag{39}$$

wird. Setzt man hier

$$d\eta_\nu = -y_\nu d\lambda, \qquad \nu = 1 \ldots n,$$

so wird

$$d f_\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k, \qquad d f_{k+1} = -\left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) d\lambda.$$

Mithin müßte $c_{\varkappa+1} = 0$ sein. Die Identität (39) erhielt also die Gestalt

$$\sum_1^k{}_\varkappa c_\varkappa d f_\varkappa = 0,$$

welche für $d\lambda = 0$ als Identität in den Differentialen $d\eta_1 \ldots d\eta_n$ zu der über die Matrix (2) gemachten Voraussetzung im Widerspruch steht.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (34), wenn man $t_1 \ldots t_k$ und λ als die Variablen betrachtet und $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A des Gebietes O erfüllt. Es sei nun R ein beliebiger beschränkter abgeschlossener Bereich des (η)-Raumes. Man definiere die Punktmenge A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte von O, welche der Gleichung

$$f_{k+1} = 0 \tag{42}$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k;\ \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und R durchläuft. Da durch diese Gleichung λ wegen (29) als stetige Funktion von $t_1 \ldots t_k, \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ bestimmt wird, so ist der Bereich A beschränkt und abgeschlossen. Auf Grund des Zusatzes zum Satz I geleitet nunmehr genau derselbe Weg, der über den Satz II zum Satz II′ führte, zu dem

Satz IV. Im Euklidischen $(\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge der Gleichung (18) eine Flächenschar bestimmen, die im hyperbolischen Raum (29), (30) eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Beschränkt man sich auf das durch (19) bestimmte Teilgebiet des (η)-Raumes, so ergibt sich a fortiori der

Satz V. *Im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum der homogenen hyperbolischen Ebenenkoordinaten* (31) *besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen hyperbolische Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar eine* *gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.*

Da nach den oben gemachten Feststellungen die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes erfüllt bleiben, wenn η_0 festgehalten wird, und nur $\eta_1 \ldots \eta_n$ als die Parameter betrachtet werden, so bleibt, wenn $\eta_0 = 0$ oder $\eta_0 = 1$ gehalten wird, der Satz IV in bezug auf den nunmehr n-dimensionalen $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum gültig. Im Falle $\eta_0 = 1$ gilt das a fortiori unter der Einschränkung (24), die dann in der Gestalt

$$\sum_1^n {}_\nu \eta_\nu^2 < 1 \tag{43}$$

erscheint. So erhalten wir den

Satz VI. Im Innern der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel (43) besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge der Gleichung (18) für $\eta_0 = 1$ eine hyperbolische konzentrische Kugelschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Der Mittelpunkt $(y_1^* \ldots y_n^*)$ der konzentrischen Kugelschar ist in diesem Fall gemäß (25), (33) gegeben durch die Gleichungen

$$y_\nu^* = \frac{-\eta_\nu}{1+\sqrt{1-\varrho^2}}, \quad \nu = 1 \ldots n, \quad r = \frac{\varrho}{1+\sqrt{1-\varrho^2}}, \tag{44}$$

oder

$$\eta_\nu = \frac{-2\,y_\nu^*}{1+r^2}, \qquad \varrho = \frac{2\,r}{1+r^2}, \qquad \nu = 1 \ldots n,$$

wobei

$$r^2 = \sum_1^n {}_\nu y_\nu^{*2}, \qquad r \geqq 0, \qquad \varrho^2 = \sum_1^n {}_\nu \eta_\nu^2, \qquad \varrho \geqq 0$$

gesetzt ist.

Nun erhält man, wenn $Q(\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Quotienten des hyperbolischen Volumenelementes des $(y_1^* \ldots y_n^*)$-Raumes durch das entsprechende Euklidische des $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raumes bedeutet,

$$Q(\eta_1 \ldots \eta_n) = \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^n \left|\frac{\partial\,(y_1^* \ldots y_n^*)}{\partial\,(\eta_1 \ldots \eta_n)}\right|. \tag{45}$$

Ist

$$r_1 < 1,$$

so ist auch der entsprechende Wert

$$\varrho_1 = \frac{2\,r_1}{1+r_1^2} = 1 - \frac{(1-r_1)^2}{1+r_1^2} < 1$$

und es folgt aus

$$r \leqq r_1$$

$$\varrho \leqq \varrho_1.$$

Mithin gilt für $r \leqq r_1$

$$Q(\eta_1 \ldots \eta_n) \leqq \left(\frac{2}{1-r_1^2}\right)^n \operatorname*{Max}_{\varrho \leqq \varrho_1} \left|\frac{\partial (y_1^* \ldots y_n^*)}{\partial (\eta_1 \ldots \eta_n)}\right|. \tag{46}$$

Da das Maximum auf der rechten Seite als Maximum des absoluten Betrages einer stetigen Funktion in einem beschränkten, abgeschlossenen Bereich endlich ist, so entspricht einer Punktmenge vom äußeren Euklidischen Inhalt Null des $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raumes vermöge der Gleichungen (44) im $(y_1^* \ldots y_n^*)$-Raum eine Bildpunktmenge, deren Durchschnitt mit der Kugel $r \leqq r_1$ den äußeren hyperbolischen Inhalt Null besitzt. Da das für jedes $r_1 < 1$ der Fall ist, so ist der äußere hyperbolische Inhalt der gesamten Bildpunktmenge gleich Null. Wir haben also als Konsequenz des Satzes VI den

Satz VI′. *Die Gesamtheit der Mittelpunkte der hyperbolischen konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, besitzt den äußeren hyperbolischen Inhalt Null.*

6) Jetzt kommen wir zu den Scharen äquidistanter Orizykelflächen.

Wird die gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit (1) im Punkte $(t_1 \ldots t_k)$ von einer Orizykelfläche einer solchen Schar berührt, so findet das gemäß (18), (21), (32) seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [\eta_\nu + y_\nu (\eta_0 + \lambda)] = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{47}$$

$$\left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 + 1\right) \eta_0 + 2 \sum_1^n {}_\nu y_\nu \eta_\nu + \left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 - 1\right) \lambda = 0, \tag{48}$$

$$\sum_1^n {}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 = 0. \tag{49}$$

Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\eta_0 > 0 \tag{50}$$

voraussetzen. Dann muß, wie aus der unter (23) begründeten Feststellung hervorgeht, auch

$$\lambda > 0 \tag{51}$$

sein. Nun gilt die Identität

$$\sum_1^n {}_\nu \eta_\nu^2 - \eta_0^2 + (\eta_0 + \lambda) \left\{\eta_0 \left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 + 1\right) + 2 \sum_1^n {}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda \left(\sum_1^n {}_\nu y_\nu^2 - 1\right)\right\} \tag{52}$$
$$= \sum_1^n {}_\nu [\eta_\nu + y_\nu (\eta_0 + \lambda)]^2 - \lambda^2.$$

Das Gleichungssystem (47), (48), (49) ist daher gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$f_\varkappa (t_1 \ldots t_k, \lambda, \eta_0; \eta_1 \ldots \eta_n) = 0, \quad \varkappa = 1 \ldots k + 2, \tag{53}$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)], \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{54}$$

$$f_{k+1} = (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\,\eta_0 + 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\,\lambda, \tag{55}$$

$$f_{k+2} = \sum_1^n{}_\nu [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)]^2 - \lambda^2, \tag{56}$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \ldots t_k)$ zu ersetzen ist. Auf Grund der Voraussetzungen (1) sind die Funktionen $f_\varkappa$ in dem offenen Gebiet O, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit den beiden Halbgeraden $\eta_0 > 0$ und $\lambda > 0$ und dem gesamten $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum gebildet wird, definiert und nach allen $k + n + 2$ Argumenten einmal stetig differenzierbar. Man hat bei festen $t_1 \ldots t_k$ und mithin auch festem $y_1 \ldots y_n$

$$d f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [d\eta_\nu + y_\nu(d\eta_0 + d\lambda)], \quad \varkappa = 1 \ldots k, \tag{57}$$

$$d f_{k+1} = 2\sum_1^n{}_\nu y_\nu\, d\eta_\nu + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1)\, d\eta_0 + (\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1)\, d\lambda, \tag{58}$$

$$d f_{k+2} = 2\sum_1^n{}_\nu [\eta_\nu + y_\nu(\eta_0 + \lambda)]\,[d\eta_\nu + y_\nu(d\eta_0 + d\lambda)] - 2\lambda\, d\lambda. \tag{59}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß in jedem Punkt von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten von $f_1 \ldots f_{k+2}$ nach $k + 2$ unter den $n + 2$ Argumenten λ, η_0, $\eta_1 \ldots \eta_n$ von Null verschieden ist. Andernfalls gäbe es nämlich in O einen Punkt, in welchem die nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $c_1 \ldots c_{k+2}$ sich so bestimmen ließen, daß identisch in den Differentialen $d\lambda$, $d\eta_0$, $d\eta_1 \ldots d\eta_n$

$$\sum_1^{k+2}{}_\varkappa c_\varkappa d f_\varkappa = 0 \tag{60}$$

wird. Setzt man hier

$$d\eta_\nu = -y_\nu(d\eta_0 + d\lambda), \quad \nu = 1 \ldots n, \tag{61}$$

so wird

$$d f_\varkappa = 0,\ \varkappa = 1 \ldots k, \quad d f_{k+1} = (1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\eta_0 - (1 + \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\lambda, \tag{62}$$
$$d f_{k+2} = -2\lambda\, d\lambda.$$

Man hätte daher identisch in $d\eta_0$ und $d\lambda$

$$c_{k+1}(1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\, d\eta_0 - \{c_{k+2}\, 2\lambda + c_{k+1}(1 + \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2)\}\, d\lambda = 0. \tag{63}$$

Wegen (29) wäre also $c_{k+1} = 0$ und mithin wegen (51) auch $c_{k+2} = 0$. Die Identität (60) erhielte also die Gestalt

$$\sum_{1}^{k} {}_{\varkappa}\, c_{\varkappa}\, d f_{\varkappa} = 0, \tag{64}$$

welche für $d\eta_0 = 0$, $d\lambda = 0$ als Identität in den Differentialen $d\eta_1 \ldots d\eta_n$ im Widerspruch zu der über die Matrix (2) getroffenen Voraussetzung steht.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (53), wenn man $t_1 \ldots t_k$, λ, η_0 als die Variablen betrachtet und $\eta_1 \ldots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A von O erfüllt. Es bezeichne nun $R(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, den durch die Ungleichungen

$$\alpha^2 \leqq \sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, \eta_\nu^2 \leqq \beta^2 \tag{65}$$

definierten beschränkten, abgeschlossenen Bereich des $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raumes. Man definiere den Bereich A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte des Gebietes O, welche den Gleichungen

$$f_{k+1} = 0, \quad f_{k+2} = 0$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k;\ \eta_1 \ldots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und $R(\alpha, \beta)$ durchläuft. Nun ist dieses Gleichungspaar gleichbedeutend mit dem Gleichungspaar (48), (49), und diese Gleichungen bestimmen wegen (50), (29) η_0 und λ als stetige Funktionen von $t_1 \ldots t_k;\ \eta_1 \ldots \eta_n$. Daher ist der so definierte Bereich A in der Tat beschränkt und abgeschlossen. Der Zusatz zum Satz I liefert mithin zunächst das Ergebnis:

Im Bereich $R(\alpha, \beta)$ besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge (18) und (21) eine Flächenschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Läßt man jetzt α gegen Null und β gegen unendlich konvergieren, so ergibt sich der

Satz VII. Im Euklidischen $(\eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche vermöge (18) und (21) eine Orizykelflächenschar bestimmen, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Auf demselben Wege, der vom Satz II′ zum Satz II″ führte, gelangen wir wegen (32) und (49) vom Satz VII zu dem

Satz VII′. *Man bezeichne den Punkt, in welchem alle Modellkugeln einer Orizykelflächenschar die Einheitskugel gemeinsam berühren, als den absoluten*

Punkt der Schar. Dann besitzt die Gesamtheit der absoluten Punkte der Orizykelflächenscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, auf der Einheitskugel den äußeren Inhalt Null.

7) Wir kommen jetzt zu den entsprechenden Sätzen in der sphärischen Geometrie.

Man projiziere die Kugel

$$\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, \xi_\nu^2 = 1 \tag{66}$$

vom Punkte

$$\xi_0 = 1,\ \xi_\nu = 0, \qquad \nu = 1 \dots n \tag{67}$$

aus stereographisch auf die Ebene

$$\xi_0 = 0. \tag{68}$$

Bezeichnet man im stereographischen Bilde die ξ_ν-Koordinate mit y_ν, so ergibt sich

$$\begin{cases} y_\nu = \dfrac{\xi_\nu}{1-\xi_0}, \quad \nu = 1 \dots n, \\[2ex] \xi_0 = \dfrac{\sum_{1}^{n}{}_\nu\, y_\nu^2 - 1}{\sum_{1}^{n}{}_\nu\, y_\nu^2 + 1}, \quad \xi_\nu = \dfrac{2\,y_\nu}{1 + \sum_{1}^{n}{}_\mu\, y_\mu^2}, \quad \nu = 1 \dots n, \end{cases} \tag{69}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, d y_\nu^2 = \left(\frac{1}{1-\xi_0}\right)^2 \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, d\xi_\nu^2, \qquad \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, d\xi_\nu^2 = 4\,\frac{\sum_{1}^{n}{}_\nu\, d y_\nu^2}{\left(1 + \sum_{1}^{n}{}_\nu\, y_\nu^2\right)^2}. \tag{70}$$

Wir erhalten also die sphärische Geometrie mit dem Krümmungsmaß 1, indem wir dem $(y_1 \dots y_n)$-Raum die Maßbestimmung

$$d s^2 = 4\,\frac{\sum_{1}^{n}{}_\nu\, d y_\nu^2}{\left(1 + \sum_{1}^{n}{}_\nu\, y_\nu^2\right)^2} \tag{71}$$

aufprägen.

Auf der Sphäre (66) wird eine Schar konzentrischer Kugeln gegeben durch die Schnitte der Sphäre mit der Ebenenschar

$$\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, \eta_\nu \xi_\nu + \lambda = 0, \qquad -\sqrt{\sum_{0}^{n}{}_\nu\, \eta_\nu^2} \leqq \lambda \leqq \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_\nu\, \eta_\nu^2}, \tag{72}$$

wobei λ den inneren Parameter der Schar bildet, $\lambda = 0$ der sphärischen Ebene der Schar entspricht, und die beiden diametralen Mittelpunkte auf der Sphäre die Koordinaten

$$(73) \qquad \frac{-\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2}}, \quad \frac{\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2}}, \qquad \nu = 0, 1 \ldots n$$

besitzen. Dabei liegen der erste dieser beiden Mittelpunkte und der Nordpol der stereographischen Projektion bei positivem Vorzeichen von $(\eta_0 + \lambda)$ auf entgegengesetzten, und bei negativem auf der gleichen Seite der betreffenden Kugel der Schar oder, was dasselbe besagt, der sie tragenden Ebene (72). Die Einführung von (69) in (72) ergibt als Gleichung der Kugelschar im (y)-Raum

$$(74) \qquad \eta_0 \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) + 2 \sum_1^n{}_\nu \eta_\nu y_\nu + \lambda \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) = 0.$$

Für die Koordinaten der beiden Mittelpunkte im (y)-Raum erhält man aus (73) und (69)

$$(75) \qquad \frac{-\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2} + \eta_0}, \quad \frac{\eta_\nu}{\sqrt{\sum_0^n{}_\mu \eta_\mu^2} - \eta_0}, \qquad \nu = 1 \ldots n.$$

Dabei liegt der erste dieser beiden Mittelpunkte bei positivem Vorzeichen von $(\eta_0 + \lambda)$ im Innern, und bei negativem im Äußern der durch die Gleichung (74) bestimmten Euklidischen Modellkugel.

Es sei nun auf der Sphäre (66) eine beschränkte zweifache glatte Mannigfaltigkeit gegeben. Dann wähle man das Koordinatensystem so, daß der Nordpol (67) der stereographischen Projektion nicht auf der Mannigfaltigkeit liegt. Dann bleibt sie in den stereographischen Koordinaten eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit, die durch die Gleichungen (1) gegeben sei. Wird die Mannigfaltigkeit im Punkte $t_1 \ldots t_k$ von einer Kugel der konzentrischen Schar (74) berührt, so findet das seinen Ausdruck in den Gleichungen

$$(76) \qquad f_\varkappa(t_1 \ldots t_k, \lambda; \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n) = 0, \qquad \varkappa = 1 \ldots k + 1,$$

wobei die Funktionen $f_\varkappa$ definiert sind durch die Gleichungen

$$(77) \qquad f_\varkappa = \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial t_\varkappa} [\eta_\nu + y_\nu (\eta_0 + \lambda)], \quad \varkappa = 1 \ldots k,$$

$$(78) \qquad f_{k+1} = \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 - 1\right) \eta_0 + 2 \sum_1^n{}_\nu y_\nu \eta_\nu + \left(\sum_1^n{}_\nu y_\nu^2 + 1\right) \lambda,$$

in welchen y_ν durch $y_\nu(t_1 \ldots t_k)$ zu ersetzen ist. Der Fall, daß einer der beiden durch (75) gegebenen Mittelpunkte der Schar auf der Mannigfaltigkeit liegt, ist dabei als Berührung mit der aus diesem Punkte bestehenden Nullkugel zu rechnen. Die Funktionen $f_\varkappa$, $\varkappa = 1 \ldots k+1$, sind in dem offenen Gebiet O des (t, λ, η)-Raumes, welches durch das topologische Produkt von T_0 mit der gesamten (λ)-Geraden und dem gesamten (η)-Raum gebildet wird, definiert und einmal stetig differenzierbar. Die Funktionen (77) stimmen mit den Funktionen (35) überein, während die Funktion (78) aus der Funktion (36) durch Vertauschung der Koeffizienten von η_0 und λ hervorgeht. Aus der entsprechenden Feststellung hinsichtlich der Funktionen (35), (36) ergibt sich daher durch Vertauschung von η_0 und λ das Resultat, daß in jedem Punkte von O mindestens eine der Funktionaldeterminanten der durch (77), (78) definierten Funktionen $f_1 \ldots f_{k+1}$ nach $k+1$ unter den $n+1$ Argumenten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ von Null verschieden ist.

Damit ist festgestellt, daß das Gleichungssystem (76), wenn man $t_1 \ldots t_k$ und λ als die Variablen betrachtet und $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ als die Parameter, die Voraussetzungen des Satzes I und seines Zusatzes für jede beschränkte, abgeschlossene Punktmenge A des Gebietes O erfüllt. Es sei nun R ein beliebiger beschränkter abgeschlossener Bereich des (η)-Raumes. Man definiere die Punktmenge A durch die Gesamtheit derjenigen Punkte von O, welche der Gleichung

$$f_{k+1} = 0$$

genügen, wobei der Punkt $(t_1 \ldots t_k;\ \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n)$ das topologische Produkt von T und R durchläuft. Da durch diese Gleichung λ als stetige Funktion von $t_1 \ldots t_k;\ \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ bestimmt wird, so ist der Bereich beschränkt und abgeschlossen. Auf Grund des Zusatzes zum Satz I geleitet nunmehr genau derselbe Weg, welcher über den Satz II zum II′ führte, zunächst zu dem Ergebnis:

Im Euklidischen $(\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n)$-Raum besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welchen vermöge der Gleichung (74) auf der Sphäre (66) eine konzentrische Kugelschar entspricht, die eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null.

Aus dieser Feststellung folgert man wegen (73) genau so, wie der Satz II″ aus dem Satz II′ abgeleitet wurde, den

Satz VIII. *Im sphärischen Raum besitzt die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche eine gegebene beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten berühren, den äußeren Inhalt Null.*

8) Die Ausführungen dieses Paragraphen mögen in den folgenden beiden Ergänzungen, die unmittelbar einleuchten, ihren Abschluß finden:

Satz IX. *Dieselbe Verallgemeinerung, durch welche der Satz* II″ *zum Satz* II‴ *erweitert wurde, gilt für alle im laufenden Paragraphen bewiesenen Sätze, d. h. alle diese Sätze bleiben bestehen, wenn es sich nicht um eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit handelt, sondern um endlich viele mit beliebigen Dimensionenzahlen.*

Da bei einer Punktmenge vom außeren Inhalt Null dieser Inhalt auch bei Einbeziehung aller ihrer Häufungspunkte gleich Null bleibt, so ergibt sich endlich der

Satz X. Der Zusatz zum Satz I sowie alle Sätze des laufenden Paragraphen behalten ihre Gültigkeit, wenn die Punktmengen, deren äußerer Inhalt laut Behauptung verschwindet, durch Einverleibung aller ihrer Häufungspunkte abgeschlossen werden.

§ 3.

Die den äquidistanten Flächenscharen konstanten Krümmungsmaßes angepaßten Koordinatensysteme.

1) Ist im n-dimensionalen Euklidischen Raum eine Schar paralleler Ebenen gegeben, so können wir das rechtwinklige Koordinatensystem so wählen, daß die Schar aus den Ebenen

$$x_1 = \text{konst} \tag{1}$$

besteht. Man hat dann

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_2^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = dx_1^2 + \tfrac{1}{4}\,(4 \sum_2^n{}_\nu\, dx_\nu^2). \tag{2}$$

Ist eine Schar konzentrischer Kugeln gegeben, so wähle man ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt O des rechtwinkligen Koordinatensystems $\xi_1 \ldots \xi_n$. Es sei nun P ein von O verschiedener Punkt mit den Koordinaten $\xi_1 \ldots \xi_n$ und P' seine Projektion von O aus auf die Einheitskugel. Man projiziere diese stereographisch vom Punkte

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0 \tag{3}$$

aus auf die Ebene

$$\xi_1 = 0.$$

Sind dann $\xi_1' \ldots \xi_n'$ die Koordinaten von P', und $0, x_2 \ldots x_n$ die Koordinaten des stereographischen Bildes, so erhält man entsprechend § 2 (69), (70)

$$(4)\quad x_\nu = \frac{\xi_\nu'}{1-\xi_1'},\quad \nu = 2\ldots n,\quad \xi_1' = \frac{\sum\limits_2^n{}_\nu x_\nu^2 - 1}{\sum\limits_2^n{}_\nu x_\nu^2 + 1},\quad \xi_\nu' = \frac{2\,x_\nu}{1+\sum\limits_2^n{}_\mu x_\mu^2},\quad \nu = 2\ldots n,$$

$$(5)\qquad \sum_1^n{}_\nu\, d\,\xi_\nu'^2 = \left(\frac{2}{1+\sum\limits_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d\,x_\nu^2.$$

Setzt man

$$(6)\qquad x_1^2 = \sum_1^n{}_\nu\, \xi_\nu^2,\quad x_1 > 0,$$

so hat man

$$(6')\qquad \xi_\nu' = \frac{\xi_\nu}{x_1},\quad \nu = 1\ldots n,$$

$$(7)\qquad ds^2 = \sum_1^n{}_\nu\, d\,\xi_\nu^2 = \sum_1^n [d(x_1\xi_\nu')]^2$$
$$= \Big(\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu'^2\Big) d\,x_1^2 + 2\Big(\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu'\, d\,\xi_\nu'\Big) x_1 d\,x_1 + x_1^2 \sum_1^n{}_\nu d\,\xi_\nu'^2.$$

Da nun

$$(8)\qquad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu'^2 = 1 \quad \text{und mithin} \quad \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu' d\,\xi_\nu' = 0$$

ist, so ergibt die Einführung von (5)

$$(9)\qquad ds^2 = d\,x_1^2 + x_1^2\left(\frac{2}{1+\sum\limits_2^n{}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d\,x_\nu^2,\quad x_1 > 0.$$

Hierbei ist zu beachten, daß im Falle

$$(10)\qquad \xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0$$

die Transformationsformeln (4) für $\xi_1 \geqq 0$ also $\xi_1 = x_1$ nicht definiert sind. Sonst ist die Transformation regulär, eindeutig und eindeutig umkehrbar.

Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht die Ebenenschar

$$x_1 = \text{konst.}$$

2) Es sei auf der n-dimensionalen Einheitssphäre, d. h. auf der Oberfläche einer $(n+1)$-dimensionalen Kugel vom Radius 1 eine Schar konzentrischer n-dimensionaler Kugeln gegeben. Man wähle die rechtwinkligen Koordinaten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_n$ so, daß die Sphäre die Gleichung

$$(11)\qquad \sum_0^n{}_\nu \eta_\nu^2 = 1$$

erhält, und die beiden diametralen Mittelpunkte der konzentrischen Kugelschar in die Schnittpunkte der η_0-Achse mit der Sphäre fallen. Nun definiere man zunächst die Koordinaten $y_1 \dots y_n$, indem man in der stereographischen Projektion § 2 (69), (70) ξ_ν durch η_ν ersetzt. Man erhält

$$(12) \qquad y_\nu = \frac{\eta_\nu}{1-\eta_0}, \quad \nu = 1 \dots n, \quad d s^2 = \sum_0^n {}_\nu \, d\eta_\nu^2 = \left(\frac{2}{1+\sum\limits_1^n {}_\nu y_\nu^2}\right)^2 \sum_1^n {}_\nu \, d y_\nu^2.$$

Der auf der Sphäre gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht jetzt im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $y_1 \dots y_n$ eine konzentrische Kugelschar um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Ersetzt man jetzt in den Gleichungen (4), (5), (7), (9) ξ_ν durch y_ν und x_1 durch x_1^*, während $x_2 \dots x_n$ ungeändert stehenbleiben, so werden die $y_1 \dots y_n$ in die $x_1^*, x_2 \dots x_n$ transformiert, und man erhält

$$(13) \qquad x_1^{*2} = \sum_1^n {}_\nu y_\nu^2, \qquad x_1^* > 0,$$

$$(14) \qquad x_\nu = \frac{y_\nu}{x_1^* - y_1}, \qquad \nu = 2 \dots n,$$

$$(15) \qquad \sum_1^n {}_\nu \, d y_\nu^2 = d x_1^{*2} + x_1^{*2} \left(\frac{2}{1+\sum\limits_2^n {}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n d x_\nu^2.$$

Die Einführung in (12) ergibt

$$(16) \qquad d s^2 = \left(\frac{2}{1+x_1^{*2}}\right)^2 d x_1^{*2} + \left(\frac{2 x_1^*}{1+x_1^{*2}}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\sum\limits_2^n {}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n {}_\nu \, d x_\nu^2.$$

Durch die Substitution

$$(17) \qquad x_1^* = \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}, \qquad 0 < x_1 < \pi,$$

erhält man schließlich das Resultat

$$(18) \qquad d s^2 = d x_1^2 + \sin^2 x_1 \left(\frac{2}{1+\sum\limits_2^n {}_\nu x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n {}_\nu \, d x_\nu^2, \qquad 0 < x_1 < \pi,$$

wobei x_1 alle Werte zwischen 0 und π und $x_2 \dots x_n$ alle reellen Werte durchlaufen. Wie aus der im Anschluß an (10) gemachten Feststellung hervorgeht, sind die Transformationsformeln (13), (14) für

$$(19) \qquad y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0, \quad y_1 \geqq 0$$

oder, was wegen des ersten Gleichungssystems (12) gleichbedeutend ist, für

$$(19') \qquad \eta_2 = \eta_3 = \cdots = \eta_n = 0, \quad \eta_1 \geqq 0$$

nicht definiert. Sonst ist die Transformation regulär, eindeutig und eindeutig umkehrbar. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht im Modellraum $(x_1 \ldots x_n)$ die Ebenenschar

$$x_1 = \text{konst.} \tag{20}$$

Diese Modellebenenschar stellt gleichzeitig auch die Abstandsflächen der durch die Gleichung

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

bestimmten sphärischen Ebene dar, welche die beiden Mittelpunkte der konzentrischen Kugelschar zu Polen besitzt. Die konzentrische Kugelschar kann nun gleichzeitig auch als Schar der Abstandsflächen zu dieser sphärischen Ebene aufgefaßt werden. Es ist bei dieser Auffassung der Schar zweckmäßig, $x_1 = \frac{\pi}{2} - x_1'$ zu setzen. Die Maßbestimmung (27) erhält dann die Gestalt

$$d s^2 = d x_1'^2 + \cos^2 x_1 \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n {}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n {}_\nu\, d x_\nu^2. \tag{21}$$

Dabei erhält die sphärische Ebene die Gleichung

$$x_1' = 0,$$

während die Schar der Abstandsflächen durch die Gleichung

$$x_1' = c = \text{konst}, \quad -\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}; \tag{21'}$$

dargestellt wird.

3) Es sei im hyperbolischen Raum vom Krümmungsmaß -1 eine konzentrische Kugelschar gegeben. Man wähle das Modell § 2 (29), (30) so, daß der gegebene Mittelpunkt der Kugelschar zum Mittelpunkt der Einheitskugel (29) wird. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht dann im Modellraum $(y_1 \ldots y_n)$ die Euklidische Kugelschar um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Bei der Transformation (13), (14), (15) erhält man

$$x_1^{*2} = \sum_1^n {}_\nu\, y_\nu^2, \qquad 0 < x_1^* < 1, \tag{22}$$

$$x_\nu = \frac{y_\nu}{x_1^* - y_1}, \qquad \nu = 2 \ldots n, \tag{23}$$

$$\sum_1^n {}_\nu\, d y_\nu^2 = d x_1^{*2} + x_1^{*2} \left(\frac{2}{1 + \sum_2^n {}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n {}_\nu\, d x_\nu^2. \tag{24}$$

Die Einführung dieser Gleichung in § 2 (30) ergibt

$$(25)\qquad d s^2 = \left(\frac{2}{1-x_1^{*2}}\right)^2 d x_1^{*2} + \left(\frac{2\,x_1^*}{1-x_1^{*2}}\right)^2 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d x_\nu^2.$$

Durch die Substitution

$$(26)\qquad x_1^* = \operatorname{tg} h\,\frac{x_1}{2}$$

erhält man schließlich das Resultat

$$(27)\qquad d s^2 = d x_1^2 + \sinh^2 x_1 \left(\frac{2}{1+\sum_2^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d x_\nu^2, \qquad x_1 > 0,$$

wobei x_1 alle positiven Werte durchläuft und $x_2 \ldots x_n$ alle reellen Werte. Für

$$(28)\qquad y_2 = y_3 = \cdots = y_n = 0, \quad y_1 \geqq 0$$

sind die Transformationsformeln (23) nicht definiert. Sonst ist die Transformation regulär eindeutig und eindeutig umkehrbar. Der gegebenen konzentrischen Kugelschar entspricht im Modellraum $(x_1 \ldots x_n)$ die Ebenenschar

$$(29)\qquad x_1 = \text{konst.}$$

4) Es sei im hyperbolischen Raum vom Krümmungsmaß -1 eine Schar äquidistanter Orizykelflächen gegeben. Man transformiere das Modell § 2 (29), (30) durch reziproke Radien so in den Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1^*, x_2 \ldots x_n$, daß die Einheitskugel in die Ebene

$$(30)\qquad x_1^* = 0,$$

ihr Inneres in den Halbraum

$$(31)\qquad x_1^* > 0$$

und der gemeinsame Berührungspunkt der Orizykelflächenschar mit der Einheitskugel in den unendlich fernen Punkt übergeht. Im so transformierten Modell geht die gegebene Orizykelflächenschar in die Ebenenschar

$$(32)\qquad x_1^* = \text{konst}, \quad \text{konst} > 0,$$

über, und man erhält die Maßbestimmung

$$(33)\qquad ds^2 = \frac{d x_1^{*2}}{x_1^{*2}} + \frac{1}{x_1^{*2}} \sum_2^n{}_\nu\, d x_\nu^2\ ^{3)}.$$

[3]) Eine Ausführung der kleinen Rechnung findet der Leser auch l. c.[2] S. 230. Dabei ist $x, y_1 \ldots y_{n-1}$ durch $x_1^*, x_2 \ldots x_n, \xi_0, \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$ durch $y_1 \ldots y_n$, dS durch ds zu ersetzen und zu beachten, daß in der letzten Zeile unter dem vorletzten Summenzeichen der Index 0 stehen muß anstatt des Druckfehlers 1.

Durch die Substitution

$$(34) \qquad x_1^* = e^{x_1}$$

erhält man schließlich das Resultat

$$(35) \qquad ds^2 = dx_1^2 + e^{-2x_1} \sum_2^n {}_\nu dx_\nu^2 = dx_1^2 + \frac{e^{-2x_1}}{4}\left(4 \sum_2^n {}_\nu dx_\nu^2\right),$$

wobei die $x_1 \ldots x_n$ alle reellen Werte durchlaufen.

Der gegebenen Schar äquidistanter Orizykelflächen entspricht die Ebenenschar

$$(36) \qquad x_1 = \text{konst.}$$

5) Es sei endlich im hyperbolischen Raum mit dem Krümmungsmaß -1 eine Schar von Abstandsflächen einer Ebene gegeben.

Man transformiere zunächst das Modell § 2 (29), (30) durch reziproke Radien so in den Halbraum

$$(37) \qquad z_1 > 0$$

mit den rechtwinkligen Koordinaten $z_1 \ldots z_n$, daß die Einheitskugel in die Ebene

$$(38) \qquad z_1 = 0$$

übergeht und die gegebene hyperbolische Ebene die Gleichung

$$(39) \qquad z_2 = 0$$

erhält. Dann entsprechen den Abstandsflächen der Schar im neuen Modell die Ebenen

$$(40) \qquad z_2 + \lambda z_1 = 0.$$

Ferner hat man für die hyperbolische Maßbestimmung

$$(41) \qquad ds^2 = \frac{1}{z_1^2} \sum_1^n {}_\nu z_\nu^2 \;{}^{4)}.$$

Setzt man bei Berücksichtigung der Ungleichung $z_1 > 0$

$$(42) \qquad z_1 = z_{n+1} \cos\varphi, \quad z_2 = z_{n+1} \sin\varphi, \quad z_{n+1} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

so erhält man

$$(43) \qquad ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\frac{1}{z_{n+1}^2} \sum_3^{n+1} {}_\nu dz_\nu^2\right\},$$

---

[4]) Siehe Anmerkung [3]), S. 27.

und die Abstandsflächen erhalten die Gleichung

$$\varphi = \text{konst}, \quad -\frac{\pi}{2} < \text{konst} < \frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Transformiert man jetzt den $(n-1)$-dimensionalen Halbraum

$$z_{n+1} > 0$$

mit den rechtwinkligen Koordinaten $z_3, z_4 \ldots z_{n+1}$ durch reziproke Radien so in das Gebiet

$$\sum_2^n{}_\nu\, x_\nu^2 < 1, \tag{45}$$

daß die Ebene

$$z_{n+1} = 0$$

in die Einheitskugel übergeht, so ergibt sich

$$\frac{1}{z_{n+1}^2} \sum_3^{n+1}{}_\nu\, d z_\nu^2 = \left(\frac{2}{1 - \sum_2^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d x_\nu^2 \,{}^{5)}. \tag{46}$$

Man setze ferner

$$\sinh x_1 = \operatorname{tg} \varphi. \tag{47}$$

Dann ist wegen $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ x_1 eindeutig und eindeutig umkehrbar durch φ bestimmt, und man hat

$$\cosh^2 x_1 = 1 + \sinh^2 x_1 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\cosh x_1 = \frac{1}{\cos \varphi}. \tag{48}$$

Ferner ergibt die Differentiation von (47)

$$\cosh x_1\, d x_1 = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \tag{49}$$

und bei Einführung von (48)

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = d x_1. \tag{50}$$

Die Einführung von (46), (48), (50) in (43) ergibt schließlich

$$d s^2 = d x_1^2 + \cosh^2 x_1 \left(\frac{2}{1 - \sum_2^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \sum_2^n{}_\nu\, d x_\nu^2, \tag{51}$$

wobei x_1 alle reellen Werte durchläuft, während der Punkt $(x_2 \ldots x_n)$ auf das Innere der Einheitskugel (45) beschränkt bleibt.

---

[5]) Siehe Anmerkung [3]).

Wie die Gleichungen (2), (9), (18), (21), (27), (35), (51) zeigen, erscheint die Maßbestimmung in den unseren Flächenscharen angepaßten Koordinatensystemen stets in der Gestalt

$$ds^2 = dx_1^2 + G(x_1)^2 \left(\frac{2}{1 + \mathsf{K} \sum\limits_2^n {}_\nu \, x_\nu^2} \right)^2 \sum_2^n {}_\nu \, dx_\nu^2, \tag{52}$$

wobei man K auf die Werte 0, -1, $+1$ beschränken kann, und $G(x_1)$ eine Funktion von x_1 bezeichnet.

§ 4.

Die Differentiation von Oberflächenintegralen bei gegebener Maßbestimmung.

1) Die nachstehenden Ausführungen greifen vielfach auf Begriffe und Sätze zurück, welche l. c.[1] entwickelt worden sind, und welche ich daher, um Wiederholungen zu vermeiden, im wesentlichen als bekannt voraussetzen muß. Zunächst seien hierzu die folgenden Feststellungen vorausgeschickt:

Wie aus der Erklärung der Begriffe eines k-dimensionalen Grundgebildes $(1 \leqq k \leqq n-1)$, einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit und eines n-dimensionalen regulären Körpers im n-dimensionalen Raum unmittelbar einleuchtet, bleiben die definierenden Eigenschaften dieser Gebilde bei einer eindeutigen und eindeutig umkehrbaren zweimal stetig differenzierbaren Transformation des n-dimensionalen Raumes invariant, und die Gebilde gehen daher in ebensolche im transformierten Raum über. Die Definition dieser Gebilde ist also auch unabhängig vom Koordinatensystem, sofern die in Betracht kommenden Koordinatentransformationen eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar sind.

Ein k-dimensionales Grundgebilde im n-dimensionalen Raum $(1 \leqq k \leqq n-1)$ ist gemäß der l. c.[1] § 5 II gegebenen Definition auf ein k-dimensionales achsenparalleles Parallelotop eines k-dimensionalen Parameterraumes mit den rechtwinkligen Koordinaten $t_1 \ldots t_k$ eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar bezogen. Damit ist das Grundgebilde noch keine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit im Sinne von § 2 (1); denn dazu fehlt noch die Einbettung. Um diese zu erreichen, bezeichne man einen solchen Teil eines Grundgebildes, der einem ganz im Innern des Bezugsparallelotops liegenden, zu diesem etwa ähnlichen und konzentrischen Parallelotop entspricht, als ein eingebettetes Grundgebilde. Ein solches stellt dann auch eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit dar, wobei das Innere des umfassenden Bezugsparallelotops, von welchem ausgegangen wurde, als das von der Definition geforderte offene Einbettungsgebiet T_0 dient.

Man bezeichne nun die Gesamtheit derjenigen Punkte einer Mannigfaltigkeit M, welche von einem ihrer Punkte P um weniger als δ, $\delta > 0$, entfernt sind, als die δ-Umgebung von P auf M. Dann gehört zu den l. c.[1] § 6 III S. 725, § 5 III formulierten Definitionseigenschaften einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit M_k im n-dimensionalen Raum die folgende:

Zu jedem Punkte P von M_k gibt es ein $\delta_P > 0$ und ein k-dimensionales Grundgebilde G_k, so daß die δ_P-Umgebung von P auf M_k vom Innern von G_k überdeckt wird. Da man erforderlichenfalls δ_P verkleinern kann, so darf angenommen werden, daß G_k ein eingebettetes Grundgebilde und mithin auch eine beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeit ist. Da nun M_k beschränkt und abgeschlossen ist, so kann man unter den Kugeln mit dem Mittelpunkt P und dem Radius δ_P gemäß dem Borelschen Satz schon endlich viele so auswählen, daß M_k von ihnen überdeckt wird. Also wird M_k auch von den entsprechenden endlich vielen zweifach glatten Mannigfaltigkeiten überdeckt. Da die endlich vielen k'-dimensionalen $(1 \leqq k' < k)$ Randmannigfaltigkeiten einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit definitionsgemäß ebenfalls reguläre k'-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind, so haben wir das Ergebnis, daß eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit einschließlich ihrer sämtlichen Randmannigfaltigkeiten niedrigerer Dimensionenzahl von endlich vielen beschränkten zweifach glatten Mannigfaltigkeiten überdeckt wird, deren jede natürlich die Dimensionenzahl der Mannigfaltigkeit besitzt, zu deren Überdeckung sie verwendet wird.

Wir sagen, eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Raum werde in einem ihrer Punkte von einer durch ihn gehenden $(n-1)$-dimensionalen Ebene berührt, wenn diese die k-dimensionale Tangentialebene des Punktes enthält, oder wenn der Punkt einer k'-dimensionalen Randmannigfaltigkeit $(1 \leqq k' < k)$ angehört, deren k'-dimensionale Tangentialebene in die Ebene fällt, oder endlich, wenn der Punkt einer 0-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehört, d. h. ein Eckpunkt ist. Die oben präzisierte Überdeckung der regulären Mannigfaltigkeit durch endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten gewährleistet die Gültigkeit des Satzes II''', § 2 und seiner Erweiterung Satz X, § 2. Dieser Sachverhalt läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Man bezeichne eine Richtung in bezug auf eine gegebene k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Euklidischen Raum als „*eigentlich singulär*“, wenn die Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Punkten von der zu dieser Richtung senkrechten $(n-1)$-dimensionalen Ebene im oben festgestellten Sinn berührt wird, und als „*singulär*“, wenn sie eigentlich singulär oder Häufungsrichtung eigentlich singulärer Richtungen ist. Man markiere jede Richtung durch das Paar der beiden diametralen „Richtungspunkte“, in welchen die Einheitskugel von dem parallelen Durchmesser geschnitten wird. *Dann bilden auf der Einheitskugel die Richtungspunkte der singulären Richtungen eine abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null.*

2) Man präge dem Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ die Maßbestimmung

$$(1) \qquad d\bar{s}^2 = \sum_1^n{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu}\, d x_\lambda\, d x_\mu, \quad a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda},$$

auf, wobei die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ stetige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ sind, die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form bilden und für $\mu \geqq 2$

$$(2) \qquad a_{1\mu} = a_{\mu 1} = 0$$

ist.

Werden zwei im Punkte $x_1 \ldots x_n$ ansetzende Richtungen durch die Vektoren U und V mit den Komponenten $u_1 \ldots u_n$ und $v_1 \ldots v_n$ repräsentiert, so hat man für den Winkel zwischen den beiden Richtungen, der mit

$$\measuredangle \{U, V\}$$

bezeichnet werden möge, in der Euklidischen Maßbestimmung die Formel

$$(3) \qquad \cos \measuredangle \{U, V\} = \frac{\sum_1^n{}_\nu u_\nu v_\nu}{\sqrt{\sum_1^n{}_\nu u_\nu^2}\sqrt{\sum_1^n{}_\nu v_\nu^2}} = \frac{(U, V)}{\sqrt{(U, U)}\sqrt{(V, V)}},$$

wobei das Klammersymbol wie üblich das innere Produkt der beiden eingeklammerten Vektoren bedeutet, und den Quadratwurzeln hier wie fortan *allen* Quadratwurzeln das positive Vorzeichen beizulegen ist.

Man definiere nun das innere Produkt der Vektoren U, V in der Maßbestimmung (1), das mit

$$(4) \qquad \overline{(U, V)}$$

bezeichnet werden möge, durch die Gleichung

$$(5) \qquad \overline{(U, V)} = \sum_1^n{}_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu.$$

Dann hat man für den in der Maßbestimmung (1) gemessenen Winkel zwischen den Vektoren U und V, der mit

$$(6) \qquad \overline{\measuredangle \{U, V\}}$$

bezeichnet werden möge, die Formel

$$(7) \qquad \cos \overline{\measuredangle \{U, V\}} = \frac{\overline{(U, V)}}{\sqrt{\overline{(U, U)}}\sqrt{\overline{(V, V)}}}.$$

Durch die Gleichungen (2) wird daher sichergestellt, daß der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung, d. h. der Vektor mit den Komponenten $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 \ldots = u_n = 0$ dann und nur dann zu einem anderen Vektor in der Maßbestimmung (1) senkrecht steht, wenn das auch in der Euklidischen Maßbestimmung der Fall ist, d. h. wenn dessen erste Komponente verschwindet.

3) Es sei nun im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ M_k, $1 \leqq k \leqq n-1$, eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit, in bezug auf welche die x_1-Achsenrichtung nicht singulär ist. Dann gibt es also nur endlich viele Werte von ξ, für welche M_k im oben erklärten Sinn von der Ebene $x_1 = \xi$ berührt wird, und in jeder dieser Ebenen findet die Berührung nur in endlich vielen Punkten statt. Diese Werte von ξ sollen als die „*Ausnahmewerte*" bezeichnet werden.

Dieses vorausgeschickt — gelten die folgenden Sätze:

Satz XI. *Es bezeichne ψ eine stetige Funktion auf M_k. Dann ist das Integral*

$$\int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi \, \overline{d s_k} \tag{8}$$

für alle Werte von ξ, insbesondere also auch einschließlich der endlich vielen sogenannten Ausnahmewerte, bestimmt und als Funktion von ξ stetig. Dabei bedeutet $\overline{d s}_k$ das k-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (1) *und $M_k(x_1 \leqq \xi)$ denjenigen Teil von M_k, für welchen $x_1 \leqq \xi$ ist.*

Satz XII. *Abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmewerten von ξ gilt ferner noch für $2 \leqq k \leqq n-1$*

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi \, \overline{d s_k} = \int\limits_{M_k(x_1 = \xi)} \frac{\sqrt{a_{11}} \, \psi \, \overline{d s_{k-1}}}{\cos \measuredangle \{x_1, \overline{T}\}}, \tag{9}$$

und der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals (8) *ist als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig. Dabei bedeutet $M_k(x_1 = \xi)$ den Schnitt von M_k mit der Ebene $x_1 = \xi$, welcher gemäß l. c.*[1] § 6 III (13) *aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht, die nur Randpunkte miteinander gemein haben können. Ferner bedeutet $\overline{T}$ die in der Maßbestimmung* (1) *senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k.* Da voraussetzungsgemäß in keinem Punkte von M_k die k-dimensionale Tangentialebene in die Ebene $x_1 = \xi$ fällt, so ist der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung in keinem Punkte zur k-dimensionalen Tangentialebene im Euklidischen Sinn orthogonal. Nach der oben gemachten Feststellung steht also auch in keinem Punkte von M_k der Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung zur k-dimensionalen Tangentialebene in der Maßbestimmung (1) senkrecht. Daher verschwindet der Vektor $\overline{T}$ nirgends, und der Winkel

$$\overline{\measuredangle \{x_1, \overline{T}\}} \tag{10}$$

ist mithin überall bestimmt und von einem Rechten verschieden. Da endlich gemäß l. c.[1] § 6 III (11, 12) die k-dimensionale Tangentialebene einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit sich mit dem Berührungspunkte stetig ändert, so gilt das auch für die Projektion $\overline{T}$. Mithin ist auch

$$\cos \overline{\measuredangle \{x_1, \overline{T}\}} \tag{11}$$

auf M_k stetig, von Null verschieden und zwar, wie die Gleichung (43) zeigen wird, positiv.

Dem Beweise der Sätze XI und XII, welche der infinitesimalen Anschauung freilich ohne weiteres einleuchten, seien die folgenden elementaren Ausführungen vorausgeschickt.

4) Es seien $V_1 \ldots V_k$ k linear unabhängige Vektoren im n-dimensionalen Euklidischen Raum. Man bilde die GRAMMschen Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} (V_1, V_1) & \cdots & (V_1, V_k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (V_k, V_1) & \cdots & (V_k, V_k) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} (V_2, V_2) & \cdots & (V_2, V_k) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (V_k, V_2) & \cdots & (V_k, V_k) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Es sei ferner

$$\sum_2^k{}_\mu\, c_\mu V_\mu \tag{14}$$

die senkrechte Projektion von V_1 auf das von den Vektoren $V_2 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde, so daß man also hat

$$V_1 = \sum_2^k{}_\mu\, c_\mu V_\mu + L, \tag{15}$$

$$(L, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k, \tag{16}$$

und mithin

$$(V_1, L) = (L, L). \tag{17}$$

Multipliziert man in der Determinante (12) für $\mu = 2 \ldots k$ die μ-te Zeile mit c_μ und subtrahiert sie von der ersten, so erhält man wegen (15), (16), (17), (13)

$$D = (L, L) D_1. \tag{18}$$

Diese Gleichung läßt leicht erkennen, daß die GRAMMsche Determinante von k linear unabhängigen Vektoren positiv ist, und zwar gleich dem Quadrat des Inhalts des von den Vektoren als Kanten gebildeten k-dimensionalen Parallelotops. Da nämlich L wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $V_1, V_2 \ldots V_k$ nicht verschwinden kann, und (L, L) das Quadrat der Höhe des Parallelotops auf dem von den $k-1$ Vektoren $V_2 \ldots V_k$ als Kanten gebildeten Grundflächenparallelotop darstellt, so zeigt (18), daß die beiden zu beweisenden Behauptungen für k Vektoren zutreffen, wenn sie für $k-1$ gelten. Da sie nun für $k=1$ offenbar gültig sind, so sind sie damit für jeden Wert von k bewiesen.

Besteht aber zwischen $V_1 \ldots V_k$ eine lineare Abhängigkeit, so besteht dieselbe auch zwischen den Zeilen der GRAMMschen Determinante, und diese verschwindet mithin.

Es sei nun E ein weiterer von Null verschiedener Vektor und T seine senkrechte Projektion auf das von den linear unabhängigen Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde. Dann hat man

$$T = \sum_1^k {}_\nu \, \alpha_\nu V_\nu, \tag{19}$$

$$E = T + P, \tag{20}$$

$$(P, V_\nu) = 0, \quad \nu = 1 \ldots k, \tag{21}$$

und mithin

$$(E, T) = (T, T). \tag{22}$$

Es sei ferner

$$T \neq 0. \tag{23}$$

Dann ist entsprechend (3)

$$\cos \sphericalangle \{E, T\} = \frac{(E, T)}{\sqrt{(E, E)}\sqrt{(T, T)}} \tag{24}$$

und wegen (22)

$$\cos \sphericalangle \{E, T\} = \frac{\sqrt{(T, T)}}{\sqrt{(E, E)}} \tag{24'}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\cos \sphericalangle \{E, T\} > 0. \tag{25}$$

Es gelte endlich

$$(E, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k. \tag{26}$$

Dann ist wegen (20), (21) auch

$$(T, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k. \tag{27}$$

Ist jetzt βL die senkrechte Projektion von T auf die den Vektor L tragende Gerade, so hat man

$$T = \beta L + W, \tag{28}$$

$$(W, L) = 0. \tag{29}$$

Aus (16), (27), (28) folgt

(30) $$(W, V_\mu) = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k,$$

und mithin wegen (15), (29)

(31) $$(W, V_1) = 0.$$

Wegen (30), (31), (19) ist auch

(32) $$(W, T) = 0$$

und mithin wegen (28), (29)

$$(W, W) = 0.$$

Also hat man

(33) $$W = 0$$

und wegen (28), (23)

(34) $$T = \beta L, \qquad \beta \neq 0.$$

Die Einführung in (24) ergibt

(35) $$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, L)^2}{(E, E)\,(L, L)}.$$

Nun ist wegen (15) und (26)

(36) $$(E, L) = (E, V_1).$$

Man erhält daher

(37) $$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)^2}{(E, E)\,(L, L)}$$

und bei Einführung von (18)

(38) $$\cos^2 \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)^2 D_1}{(E, E)\, D},$$

wobei gemäß (25)

(39) $$\cos \measuredangle \{E, T\} > 0$$

ist.

Von diesen Formeln zur Bestimmung des Winkels zwischen dem Vektor E und seiner senkrechten Projektion auf das von den Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde, welche unter den Voraussetzungen (23) und (26) gelten, wird in der Folge Gebrauch gemacht werden. Zunächst bedarf es noch einer Verallgemeinerung.

5) Man betrachte in der Maßbestimmung (1) Vektoren, welche Richtungen repräsentieren, die in einem Punkte $x_1 \ldots x_n$ ansetzen, und bediene sich der Bezeichnungsweise (4), (5), (6), (7). Dann gilt, wie gezeigt werden soll, die der Gleichung (18) entsprechende Gleichung

(40) $$\bar{D} = \overline{(\bar{L}, \bar{L})}\, \bar{D}_1.$$

Dabei ist $\overline{L}$ durch die den Gleichungen (15), (16) entsprechenden Gleichungen

$$(41)\qquad V_1 = \sum_{2}^{k}{}_{\mu}\, \bar{c}_\mu V_\mu + \overline{L},\quad \overline{(\overline{L}, V_\mu)} = 0,\quad \mu = 2 \ldots k,$$

bestimmt, und $\overline{D}$ und $\overline{D_1}$ gehen aus D und D_1 hervor, indem man in den definierenden Determinanten (12) und (13) die gewöhnlichen inneren Produkte durch die in der Maßbestimmung (1) definierten, mittels Überstreichung der Klammersymbole bezeichneten inneren Produkte ersetzt.

Es bezeichne ferner $\overline{T}$ die in der Maßbestimmung (1) senkrechte Projektion des Vektors E auf das von den k linear unabhängigen Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde. Es sei

$$(42)\qquad \overline{T} \neq 0.$$

Dann ist, wie ebenfalls gezeigt werden soll,

$$(43)\qquad \cos \overline{\measuredangle \{E, \overline{T}\}} = \frac{\sqrt{\overline{(\overline{T}, \overline{T})}}}{\sqrt{\overline{(E, E)}}} > 0.$$

Gilt endlich

$$(44)\qquad \overline{(E, V_\mu)} = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k,$$

so hat man

$$(45)\qquad \cos^2 \overline{\measuredangle \{E, \overline{T}\}} = \frac{\overline{(E, V_1)}^2}{\overline{(E, E)}\ \overline{(\overline{L}, \overline{L})}},$$

$$(46)\qquad \cos^2 \overline{\measuredangle \{E, \overline{T}\}} = \frac{\overline{(E, V_1)}^2\, \overline{D_1}}{\overline{(E, E)}\, \overline{D}}.$$

Beweis. Man transformiere bei festem $x_1 \ldots x_n$ die u_ν linear so in die u_ν^*, $\nu = 1 \ldots n$, daß

$$\sum_{1}^{n}{}_{\lambda,\mu}\, a_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, u_\nu^{*2}$$

wird. Dann gilt, wenn die v_ν^* aus den v_ν durch dieselbe Transformation hervorgehen, auch

$$(47)\qquad \overline{(U, V)} = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, u_\nu^* v_\nu^*.$$

Das innere Produkt in der Maßbestimmung (1) geht also im transformierten Raum in das gewöhnliche innere Produkt über, wodurch die auf Grund der Voraussetzungen (42), (44) zu beweisenden Gleichungen (40), (43), (45), (46) in die auf Grund der entsprechenden Voraussetzungen (23), (26) schon bewiesenen Gleichungen (18), (24'), (37), (38) übergehen.

6) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweise der Sätze XI und XII.

Im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ können die Richtungen der Achsen $x_2 \ldots x_n$ in bezug auf M_k singulär sein. Da aber, wie oben am Schluß des Abschnitts 1 des laufenden Paragraphen festgestellt, die Gesamtheit der singulären Richtungspunkte auf der Einheitskugel den äußeren Inhalt Null besitzt, so gibt es in beliebiger Nähe jeder der Achsenrichtungen $x_2 \ldots x_n$ eine Richtung, die nicht singulär ist. Legt man nun im Euklidischen Modellraum senkrecht zu jeder dieser Richtungen durch den Koordinatenanfangspunkt eine $(n-1)$-dimensionale Ebene, bezeichnet mit $x_2' \ldots x_n'$ die Abstände des Punktes $(x_1 \ldots x_n)$ von diesen Ebenen und setzt $x_1' = x_1$, so gehen die $x_1' \ldots x_n'$ aus den $x_1 \ldots x_n$ durch eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten hervor. Dabei darf durch Einschränkung der Abweichung der gewählten nichtsingulären Richtungen von den entsprechenden x_ν-Achsenrichtungen als bewirkt vorausgesetzt werden, daß die Determinante der Substitution nicht verschwindet. Mithin sind die $x_1 \ldots x_n$ und die $x_1' \ldots x_n'$ durch eine nicht ausgeartete lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten aufeinander bezogen. Deutet man die $x_1' \ldots x_n'$ als rechtwinklige Koordinaten in einem anderen Raum, so entspricht in diesem der Mannigfaltigkeit M_k eine Mannigfaltigkeit M_k', welche gemäß der am Eingang dieses Paragraphen gemachten Feststellung ebenfalls eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Nun entsprechen den Parallelebenenscharen, welche im (x')-Raum durch die Gleichungen $x_\nu' =$ konst, $\nu = 1 \ldots n$, dargestellt sind, im (x)-Raum Parallelebenenscharen, welche zu den entsprechenden nichtsingulären Richtungen senkrecht stehen, d. h. weder selbst M_k in unendlich vielen Punkten berühren, noch Häufungsscharen solcher Parallelebenenscharen sind, welche M_k in unendlich vielen Punkten berühren. Mithin sind im (x')-Raum die Achsenrichtungen in bezug auf M_k' nichtsingulär. Es gelten daher für M_k' die Sätze l. c.[1] § 8 VI (1), (2) Gl. (114), (116). Es ist also für jede auf M_k' stetige Funktion φ das Integral

$$\int\limits_{M_k'(x_1' \leqq \xi)} \varphi \, d s_k' \tag{48}$$

für *alle* Werte von ξ, d. h. einschließlich der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen, bestimmt und als Funktion von ξ stetig. Dabei bedeutet ds_k' das Euklidische k-dimensionale Flächenelement im (x')-Raum.

Ferner gilt für $k \geqq 2$ abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k'(x_1' \leqq \xi)} \varphi \, d s_k' = \int\limits_{M_k'(x_1' = \xi)} \frac{\varphi \, d s_{k-1}'}{\cos \measuredangle \{x_1', T'\}}, \tag{49}$$

und zwar ist der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals (48) als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig. Dabei besteht der Schnitt

$$M'_k(x'_1 = \xi)$$

aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, welche nur Randpunkte miteinander gemein haben, T' bedeutet die senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x'_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M'_k. Da voraussetzungsgemäß keine der endlich vielen Ausnahmestellen von ξ vorliegt, so fällt das k-dimensionale Tangentialgebilde in keinem Punkte in die Ebene $x'_1 =$ konst, oder mit anderen Worten, die x'_1-Achsenrichtung steht nirgends senkrecht auf der k-dimensionalen Tangentialebene, und T' verschwindet daher in keinem Punkte. Mithin ist der Winkel

$$\measuredangle \{x'_1, T'\}$$

überall bestimmt, stetig, von einem Rechten verschieden und sein Kosinus entsprechend (24′), (25) von Null verschieden, und zwar positiv.

Wir wollen nun zeigen, daß

$$\frac{\overline{d s_k}}{d s'_k} \tag{50}$$

auf M'_k eindeutig, bestimmt und stetig ist, wobei $\overline{d s_k}$ das $d s'_k$ entsprechende Flächenelement des (x)-Raumes in der Maßbestimmung (1) bedeutet. Ist nämlich in der Umgebung des betreffenden Punktes die Mannigfaltigkeit M'_k auf die Parameter $t_1 \ldots t_k$ bezogen durch die Gleichungen

$$x'_\nu = x'_\nu(t_1 \ldots t_k), \qquad \nu = 1 \ldots n, \tag{51}$$

so erhält man für die entsprechenden Punkte von M_k die Werte von x_ν durch die oben festgestellte lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten. Man bezeichne mit V_λ, $\lambda = 1 \ldots k$, den Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_\lambda} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial t_\lambda} \tag{52}$$

im (x)-Raum und mit V'_λ den entsprechenden Vektor im (x')-Raum mit den Komponenten

$$\frac{\partial x'_1}{\partial t_\lambda} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial t_\lambda}. \tag{53}$$

Dann sind zunächst die k Vektoren $V_1 \ldots V_k$ und ebenso auch die k Vektoren $V'_1 \ldots V'_k$ linear unabhängig; denn bei der Darstellung einer k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit in der Umgebung einer Stelle können gemäß l. c.[1] § 5 III b die Parameter stets so gewählt werden, daß die Funktionalmatrix den Rang k besitzt. Es mögen nun D' und D'_1 aus D und D_1 hervorgehen, indem man in den definierenden Determinanten (12) und (13) die inneren Produkte durch die im Euklidischen (x')-Raum gebildeten inneren Produkte (V'_p, V'_q) ersetzt, und $\overline{D}$ und $\overline{D}_1$ wie oben unter (44), indem man die in der Maßbestimmung (1) gebildeten inneren Produkte $\overline{(V_p, V_q)}$ einsetzt. Dann hat man

$$ds'_k = \sqrt{D'}\, dt_1 \dots dt_k, \tag{54}$$

$$\overline{ds_k} = \sqrt{\overline{D}}\, dt_1 \dots dt_k, \tag{55}$$

$$\frac{\overline{ds_k}}{ds'_k} = \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}. \tag{56}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar von der Wahl des Parametersystems unabhängig, da bei einer Parametertransformation $\overline{D}$ und D' sich beide mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante der Transformation multiplizieren. Da die Parameterdarstellung (51) einer regulären k-dimensionalen Mannigfaltigkeit zweimal stetig differenzierbar ist, so wird dadurch a fortiori auch die behauptete Stetigkeit des Quotienten der Flächenelemente durch (56) sichergestellt.

Wegen $x_1 = x'_1$ ergibt sich nun der zu beweisende Satz XI aus dem zitierten, das Integral (48) betreffenden Ergebnis, indem man dort

$$\varphi = \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}} \tag{57}$$

setzt. Denn man hat

$$\int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\overline{ds_k}}{ds'_k}\, ds'_k = \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_k. \tag{58}$$

Es sei jetzt $k \geqq 2$, und es liege keine Ausnahmestelle von ξ vor. Dann folgt aus (58) und (49)

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \frac{d}{d\xi} \int\limits_{M'_k(x'_1 \leqq \xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_k = \int\limits_{M'_k(x'_1 = \xi)} \frac{\psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}}\, ds'_{k-1}}{\cos \measuredangle \{x'_1, T'\}}, \tag{59}$$

wobei der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient als Funktion von ξ an der betrachteten Stelle stetig ist. Ferner wird dann M'_k von der Ebene $x'_1 = \xi$ nirgends berührt. Es kann daher, wie l. c.[1] § 6 III (13) (A) S. 727 gezeigt, in dieser Ebene das Parametersystem in der Umgebung jedes Punktes von M'_k so gewählt werden, daß

$$t_1 = x'_1$$

wird. Mithin gilt auf den endlich vielen $(k-1)$-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Schnitt $M_k'(x_1'=\xi)$ besteht, entsprechend (56)

$$\frac{\overline{ds_{k-1}}}{ds_{k-1}'} = \frac{\sqrt{\overline{D}_1}}{\sqrt{D_1'}}. \tag{60}$$

Daher hat man

$$\int\limits_{M_k(x_1=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}\,D_1'}}{\sqrt{D'\,\overline{D}_1}} \frac{\overline{ds_{k-1}}}{\cos \measuredangle \{x_1', T'\}} = \int\limits_{M_k'(x_1'=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}}}{\sqrt{D'}} \frac{ds_{k-1}'}{\cos \measuredangle \{x_1', T'\}}. \tag{61}$$

Mithin ist wegen (59)

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int\limits_{M_k(x_1=\xi)} \psi \frac{\sqrt{\overline{D}\,D_1'}}{\sqrt{D'\,\overline{D}_1}} \frac{\overline{ds_{k-1}}}{\cos \measuredangle \{x_1', T'\}}. \tag{62}$$

Nun ist wegen

$$x_1' = x_1 = t_1 \tag{63}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t_\mu} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k, \tag{64}$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial t_1} = 1, \quad \frac{\partial x_1'}{\partial t_\mu} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k. \tag{64'}$$

Bei der linearen Transformation mit konstanten Koeffizienten, durch welche der (x)-Raum und der (x')-Raum aufeinander bezogen sind, folgt natürlich aus (63) nicht, daß die x_1-Achse und die x_1'-Achse ineinander übergehen. Man bezeichne im (x)-Raum den Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung mit E und im (x')-Raum den Einheitsvektor der x_1'-Achsenrichtung mit E''. Dann gilt wegen (64'), (53)

$$(E'', V_\mu') = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k, \tag{65}$$

und wegen (64), (52), (2)

$$\overline{(E, V_\mu)} = 0, \qquad \mu = 2 \ldots k. \tag{66}$$

Ferner hat man wegen (64'), (53)

$$(E'', E'') = (E'', V_1') = 1 \tag{67}$$

und wegen (64), (52), (2)

$$\overline{(E, E)} = \overline{(E, V_1)} = a_{11}. \tag{68}$$

Nun ist T' als die senkrechte Projektion von E'' auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k' oder mit anderen Worten auf das von den k Vektoren $V_1' \ldots V_k'$ aufgespannte lineare Vektorgebilde definiert und verschwindet, wie im Anschluß an (49) festgestellt worden ist und übrigens auch aus (67) unmittelbar hervorgeht, in keinem Punkt der Ebene $x_1' = \xi$. In Verbindung mit (65) sind damit die Voraussetzungen (23) und (26) für die Gültigkeit der Gleichungen (38), (39) sichergestellt, und diese ergeben

(69) $\cos^2 \measuredangle \{x_1', T'\} = \cos^2 \measuredangle \{E'', T'\} = \frac{(E'', V_1')^2 D_1'}{(E'', E'') D'}, \quad \cos \measuredangle \{x_1', T'\} > 0.$

Wegen (67) erhält man also

$$\cos \measuredangle \{x_1', T'\} = \frac{\sqrt{D_1'}}{\sqrt{D'}}. \tag{70}$$

Ebenso ist $\overline{T}$ als die in der Maßbestimmung (1) senkrechte Projektion von E auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k oder mit anderen Worten auf das von den k Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde definiert und verschwindet, wie im Anschluß an (9) festgestellt und übrigens auch aus (68) unmittelbar folgt, in keinem Punkte des Schnittes $x_1 = \xi$. In Verbindung mit (66) sind damit die Voraussetzungen (42), (44) für die Gültigkeit der Relationen (43), (45), (46) sichergestellt, und diese ergeben bei Einführung von (68)

$$\cos \measuredangle \overline{\{x_1, \overline{T}\}} = \cos \measuredangle \overline{\{E, \overline{T}\}} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{(\overline{L}, \overline{L})}}, \tag{71}$$

$$\cos \measuredangle \overline{\{x_1, \overline{T}\}} = \frac{\sqrt{a_{11}}\,\sqrt{\overline{D}_1}}{\sqrt{\overline{D}}}. \tag{72}$$

Die Einführung von (70) und (72) in (62) ergibt die zu beweisende Gleichung (9), wobei die Stetigkeit des durch diese Gleichung dargestellten Differentialquotienten als Funktion von ξ schon im Anschluß an (59) festgestellt worden ist.

Damit sind die Sätze XI und XII vollständig bewiesen.

7) Wir wollen unsere Formeln in einem Spezialfall etwas näher ausführen, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Maßbestimmung (1) die Gestalt

$$ds^2 = a_1^2\, dx_1^2 + a_2^2 \sum_2^n {}_\mu\, dx_\mu^2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad n \geqq 3 \tag{73}$$

annimmt, wobei a_1 und a_2 stetige Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ bedeuten.

Es bezeichne im Euklidischen (x)-Raum T die senkrechte Projektion des Einheitsvektors E der x_1-Achsenrichtung auf die k-dimensionale Tangentialebene von M_k oder mit anderen Worten auf das lineare Vektorgebilde, welches von den k durch (64) definierten Vektoren $V_1 \ldots V_k$ aufgespannt wird. Dementsprechend bezeichne

$$\measuredangle \{x_1, T\} = \measuredangle \{E, T\}$$

den Euklidischen Winkel zwischen der x_1-Achsenrichtung und ihrer Projektion T. Dann ist T durch die Gleichungen (19), (20), (21) bestimmt. Ferner bleibt, wenn ξ keiner der endlich vielen Ausnahmewerte ist, für $x_1 = \xi$

$$T \neq 0. \tag{74}$$

Endlich gilt wegen (64)

$$(75)\qquad (E, V_\mu) = 0, \quad \mu = 2 \ldots k.$$

Mit den Gleichungen (74), (75) sind die Voraussetzungen (23), (26) für die Gültigkeit der Relationen (37), (39) sichergestellt. Man hat also

$$(76)\qquad \cos \measuredangle \{x_1, T\} = \cos \measuredangle \{E, T\} = \frac{(E, V_1)}{\sqrt{(E, E)}\sqrt{(L, L)}},$$

wobei L durch die Gleichungen (15), (16) bestimmt ist. Nun ist wegen (64)

$$(77)\qquad (E, E) = (E, V_1) = 1.$$

Mithin gilt

$$(78)\qquad \cos \measuredangle \{x_1, T\} = \frac{1}{\sqrt{(L, L)}}.$$

Ferner hat man gemäß (71) bei der Spezialisierung (73) wegen $a_{11} = a_1^2$

$$(79)\qquad \cos \overline{\measuredangle \{x_1, T\}} = \frac{a_1}{\sqrt{\overline{(\overline{L}, \overline{L})}}}.$$

Nun ist, da gemäß (64) die erste Komponente der Vektoren V_μ für $\mu = 2 \ldots k$ verschwindet, für jeden Vektor U

$$(80)\qquad \overline{(U, V_\mu)} = a_2^2 (U, V_\mu).$$

Daher folgt aus (16)

$$(81)\qquad \overline{(L, V_\mu)} = 0, \quad \mu = 2 \ldots k.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (15) sind der definitionsmäßige Ausdruck dafür, daß L auch in der Maßbestimmung (1) derjenige Vektor ist, der die senkrechte Projektion von V_1 auf das von den Vektoren $V_2 \ldots V_k$ aufgespannte lineare Vektorgebilde zu V_1 ergänzt. Mithin gilt bei der Spezialisierung (73)

$$(82)\qquad L = \overline{L}.$$

Nun ist wegen (15) und (64) die erste Komponente von L gleich 1. Die übrigen Komponenten seien $l_2 \ldots l_n$. Dann hat man

$$(83)\qquad (L, L) = 1 + \sum_2^n{}_\mu\, l_\mu^2$$

und wegen (82) und (73)

$$(84)\qquad \overline{(\overline{L}, \overline{L})} = \overline{(L, L)} = a_1^2 + a_2^2 \sum_2^n{}_\mu\, l_\mu^2.$$

Aus (83) und (78) folgt

$$(85)\qquad \sum_2^n{}_\mu\, l_\mu^2 = (L, L) - 1 = \frac{1}{\cos^2 \measuredangle \{x_1, T\}} - 1 = \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}.$$

Bei Einführung von (84) in (79) erhält man

$$\frac{1}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}} = \frac{1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \sum_2^n {}_\mu l_\mu^2} \tag{86}$$

und mithin wegen (85)

$$\frac{1}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}} = \frac{1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}. \tag{87}$$

Hieraus folgt noch wegen (72), (73), da $a_{11} = a_1^2$ wird,

$$\sqrt{\overline{D}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, \tau\}} \sqrt{\overline{D}_1}, \tag{88}$$

und, da wegen (80)

$$\overline{D_1} = a_2^{2k-2} D_1 \tag{89}$$

ist,

$$\sqrt{\overline{D}} = a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}} \sqrt{D_1}. \tag{90}$$

Hieraus folgt für das k-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (73) entsprechend (55) wegen (63)

$$\overline{ds_k} = \sqrt{\overline{D}}\, dt_1 \ldots dt_k = a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}} \sqrt{D_1}\, dx_1 dt_2 \ldots dt_k \tag{91}$$

und bei festem x_1 wegen (89)

$$\overline{ds_{k-1}} = \sqrt{\overline{D_1}}\, dt_2 \ldots dt_k = a_2^{k-1} \sqrt{D_1}\, dt_2 \ldots dt_k = a_2^{k-1}\, ds_{k-1}, \tag{92}$$

wobei ds_{k-1} das Euklidische $(k-1)$-dimensionale Flächenelement bezeichnet.

Gemäß Satz XII gilt endlich, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ bei der Maßbestimmung (73) wegen (87)

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int\limits_{M_k(x_1 = \xi)} \psi \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}\, \overline{ds_{k-1}} \tag{93}$$

und bei Einführung von (92)

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k(x_1 \leqq \xi)} \psi\, \overline{ds_k} = \int\limits_{M_k(x_1 = \xi)} \psi\, a_2^{k-1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{x_1, T\}}\, ds_{k-1}, \tag{94}$$

wobei der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient als Funktion von ξ stetig ist.

Endlich sei noch festgestellt, daß von den für die Maßbestimmung (73) abgeleiteten Formeln nur die letzten beiden Gleichungen (93) und (94) sich auf die Voraussetzung stützen, daß M_k eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Alle übrigen Gleichungen dagegen bedürfen lediglich der

Voraussetzung, daß M_k in der Umgebung des betrachteten Punktes eine einmal stetig differenzierbare, den Gleichungen (64) genügende Darstellung durch k Parameter mit einer Funktionalmatrix vom Range k zuläßt, worin zugleich enthalten ist, daß die x_1-Achsenrichtung nicht senkrecht auf dem k-dimensionalen Tangentialgebilde steht.

8) Zusatz 1 zu den Sätzen XI und XII. Die Sätze XI und XII bleiben unverändert bestehen, wenn die Voraussetzung, daß die Richtung der x_1-Achse nicht singulär ist, dahin eingeschränkt wird, daß sie nicht eigentlich singulär ist.

Bei der oben auseinandergesetzten Zurückführung dieser Sätze auf die im Abschnitt 6) des laufenden Paragraphen unter (48) und (49) reproduzierten l. c.[1] bewiesenen Sätze wird nämlich nur von der letzteren Voraussetzung Gebrauch gemacht. Was nun den in der zitierten Arbeit durchgeführten Beweis anlangt, so wird dort hinsichtlich der ersten Achsenrichtung ebenfalls nur die Voraussetzung eingesetzt, daß die Richtung nicht eigentlich singulär ist. Hinsichtlich der übrigen Achsenrichtungen wird allerdings die volle Voraussetzung der Nichtsingularität herangezogen, welche aber auch in dem eben durchgeführten Beweise durch die Auswahl der Achsen $x'_2 \ldots x'_n$ als erfüllt betrachtet werden kann.

Zusatz 2 zu den Sätzen XI und XII. Selbst wenn die Maßbestimmung (1) die Euklidische ist, und die Behauptungen der Sätze XI und XII daher mit den Behauptungen der hier unter (48) und (49) reproduzierten, l. c.[1] bewiesenen Sätze übereinstimmen, bringen die Sätze XI und XII gegenüber den herangezogenen doch einen Fortschritt in Gestalt einer wesentlichen Einschränkung der Voraussetzungen. Denn die Forderung der vollen Nichtsingularität aller Achsenrichtungen wird auf die nur die erste Achsenrichtung betreffende und zudem noch geringere Voraussetzung reduziert, daß die Richtung nicht eigentlich singulär sei.

9) Es sei im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ K ein regulärer Körper im Sinne der Definition l. c.[1] § 6 IV. Man bezeichne eine Richtung in bezug auf K als eigentlich singulär, wenn sie in bezug auf eine der endlich vielen regulären $(n - 1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Rand von K besteht, eigentlich singulär ist, oder mit anderen Worten, wenn eine dieser Mannigfaltigkeiten in unendlich vielen Punkten von den zu dieser Richtung senkrechten Ebenen in dem im Abschnitt 1) des laufenden Paragraphen erklärten Sinne berührt wird. Man bezeichne eine Richtung in bezug auf K als singulär, wenn sie eigentlich singulär oder Häufungsrichtung eigentlich singulärer Richtungen ist. Aus der am Schluß des Abschnitts 1) des laufenden Paragraphen gemachten Feststellung folgt dann, *daß auf der Einheitskugel die Richtungspunkte der zu einem gegebenen*

regulären Körper singulären Richtungen eine abgeschlossene Punktmenge vom äußeren Inhalt Null bilden.

Wir machen nun die Voraussetzung, daß das Koordinatensystem so gewählt ist, daß die x_1-Achsenrichtung zum gegebenen Körper K nicht eigentlich singulär liegt. Es gibt dann also nur endlich viele Werte von ξ, die sogenannten „Ausnahmestellen", für welche eine der endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Rand von K zusammengesetzt ist, von der Ebene $x_1 = \xi$ im oben bezeichneten Sinn berührt wird, und für jeden dieser endlich vielen Werte von ξ kann die Berührung nur in endlich vielen Punkten stattfinden.

Es bezeichne nun

$$\varphi = \varphi(x_1 \ldots x_n) \tag{95}$$

eine in K definierte stetige Funktion. Man definiere die Funktion $\Phi(\xi)$ durch die Gleichung

$$\Phi(\xi) = \int\limits_{K(x_1=\xi)} \varphi(\xi, x_2 \ldots x_n)\, d x_2 \ldots d x_n, \tag{96}$$

wobei $K(x_1 = \xi)$ den Schnitt des Körpers mit der Ebene $x_1 = \xi$ bedeutet. Dann ist, wie l. c.[1] § 8 III bewiesen, für alle Werte von ξ, also insbesondere auch für die sogenannten Ausnahmestellen, das Integral (96) bestimmt und stellt eine stetige Funktion von ξ dar. Endlich gilt

$$\int\limits_K \varphi\, d x_1 \ldots d x_n = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(\xi)\, d\xi, \tag{97}$$

wobei α und β so gewählt sind, daß für alle Punkte von K

$$\alpha \leqq x_1 \leqq \beta \tag{98}$$

ist.

Dieser Satz ist zitierten Ortes zwar unter der stärkeren Voraussetzung ausgesprochen, daß die Richtung der x_1-Achse in bezug auf K nicht singulär ist. Er gilt aber auch unter der hier angegebenen Voraussetzung, daß die Richtung nicht eigentlich singulär ist. Denn nur von letzterer Annahme wird beim Beweise Gebrauch gemacht.

Ebenso wie (97) hergeleitet wurde, ergibt sich natürlich auch für $\xi' > \alpha$, und zwar für *alle* diese Werte von ξ'

$$\int\limits_{K(x_1 \leqq \xi')} \varphi\, d x_1 \ldots d x_n = \int\limits_\alpha^{\xi'} \Phi(\xi)\, d\xi, \tag{99}$$

wobei $K(x_1 \leqq \xi')$ denjenigen Teil von K bezeichnet, in welchem $x_1 \leqq \xi'$ ist.

10) Es sei nunmehr ξ' keine der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen. Dann besteht gemäß l. c.[1] § 6 IV (14) $K(x_1 \leqq \xi')$ aus endlich vielen regulären Körpern. Die endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen regulären Randmannigfaltigkeiten dieser Körper erfüllen den Schnitt $K(x_1 = \xi')$ und die Punktmenge $R(x_1 \leqq \xi')$, d. h. denjenigen Teil des Randes R von K, für welchen $x_1 \leqq \xi'$ ist. Dabei können je zwei dieser endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten nur Punkte gemein haben, die für beide wiederum auf dem Rande liegen, die also endlich vielen regulären $(n-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten angehören.

Indem man auf jeden dieser Körper das Greensche Lemma[6]) anwendet und dann das Resultat über alle Körper summiert, ergibt sich für eine in K einmal stetig differenzierbare Funktion χ

$$(100)\qquad \int\limits_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-1} + \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi\, d x_2 \ldots d x_n = \int\limits_{K(x_1 \leqq \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, d x_1 \ldots d x_n,$$

wobei N die äußere Normale bezeichnet und $d s_{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement.

Gemäß (99) ist

$$(101)\qquad \int\limits_{K(x_1 \leqq \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, d x_1 \ldots d x_n = \int\limits_{\alpha}^{\xi'} d\xi \int\limits_{K(x_1 = \xi)} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, d x_2 \ldots d x_n.$$

Mithin folgt aus (100)

$$(102)\qquad \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi\, d x_2 \ldots d x_n = - \int\limits_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-1} + \int\limits_{\alpha}^{\xi'} d\xi \int\limits_{K(x_1 = \xi)} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, d x_2 \ldots d x_n,$$

wobei der Faktor von $d\xi$ unter dem zweiten Integral auf der rechten Seite gemäß der Feststellung (96) eine für *alle* Werte von ξ stetige Funktion von ξ darstellt.

Es sei nun R^{ν}_{n-1} eine der endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen R als Rand von K zusammengesetzt ist. In bezug auf R^{ν}_{n-1} ist dann die Richtung der x_1-Achse a fortiori nicht eigentlich singulär und ξ' a fortiori kein Ausnahmewert. Daher können wir auf R^{ν}_{n-1}

[6]) Einen Beweis dieses Lemmas, der den hier geltenden Voraussetzungen angepaßt ist, findet der Leser auch l. c [1] § 9 I.

den Satz XII in seiner Spezialisierung für die Euklidische Maßbestimmung anwenden, wobei für φ die Funktion

$$\chi \cos \measuredangle \{x_1, N\} \tag{103}$$

eingesetzt werde. Man erhält, da hier $k = n - 1$ wird,

$$\frac{d}{d\xi'} \int\limits_{R_{n-1}^{\nu}(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-1} = \int\limits_{R_{n-1}^{\nu}(x_1 = \xi')} \frac{\chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-2}}{\cos \measuredangle \{x_1, T\}}, \tag{104}$$

wobei T wie oben die Euklidische senkrechte Projektion des Einheitsvektors der x_1-Achsenrichtung auf die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene von R_{n-1}^{ν} bedeutet und $d s_{n-2}$ das $(n-2)$-dimensionale Euklidische Flächenelement. Wegen

$$\cos \measuredangle \{x_1, T\} = \sin \measuredangle \{x_1, N\} \tag{105}$$

ergibt sich nach Summation über alle Randmannigfaltigkeiten R_{n-1}^{ν}

$$\frac{d}{d\xi'} \int\limits_{R(x_1 \leqq \xi')} \chi \cos \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-1} = \int\limits_{R(x_1 = \xi')} \chi \operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-2}. \tag{106}$$

Dabei ist wegen (105) und (25)

$$\sin \measuredangle \{x_1, N\} > 0 \tag{107}$$

und mithin

$$\operatorname{sign.}(\operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\}) = \operatorname{sign.}(\cos \measuredangle \{x_1, N\}), \tag{108}$$

oder mit anderen Worten, es ist für den Winkel zwischen dem Einheitsvektor der x_1-Achsenrichtung und der äußeren Normalen der zwischen 0 und π liegende Wert zu wählen.

Durch die Differentiation von (102) nach ξ' gelangt man bei Einführung von (106) zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi'} & \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi\, d x_2 \ldots d x_n \\ & = - \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi \operatorname{cotg} \measuredangle \{x_1, N\}\, d s_{n-2} + \int\limits_{K(x_1 = \xi')} \frac{\partial \chi}{\partial x_1}\, d x_2 \ldots d x_n. \end{aligned} \tag{109}$$

Dabei ist auf der rechten Seite das erste Integral abgesehen von den sogenannten Ausnahmewerten bestimmt und als Funktion von ξ' stetig und das zweite für alle Werte von ξ'. Das Integral

$$\int\limits_{K(x_1 = \xi')} \chi\, d x_2 \ldots d x_n \tag{110}$$

ist also als Funktion von ξ' abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen stetig differenzierbar. Aber auch an diesen bleibt das Integral selbst gemäß der unter (96) gemachten Feststellung stetig.

11) Man setze

(111) $$V_E(\xi) = \int\limits_{K(x_1 = \xi)} d x_2 \ldots d x_n.$$

Dann stellt $V_E(\xi)$ das Euklidische $(n-1)$-dimensionale Volumen des Schnittes des Körpers K mit der Ebene $x_1 = \xi$ dar und ist gemäß der unter (96) gemachten Feststellung für *alle* Werte von ξ stetig.

Bezeichnet α^* das Minimum und β^* das Maximum von x_1 in K, so ist für $\xi < \alpha^*$ und $\xi > \beta^*$

(112) $$V_E(\xi) = 0.$$

Auf Grund der eben festgestellten Stetigkeit von $V_E(\xi)$ ist mithin

(113) $$V_E(\alpha^*) = V_E(\beta^*) = 0.$$

Da nun wegen der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) eines regulären Körpers jeder Randpunkt von K Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so ist α^* die untere Grenze von x_1 für alle inneren Punkte von K und β^* die obere. Ist daher

(114) $$\alpha^* < \xi < \beta^*,$$

so gibt es einen inneren Punkt P'', für welchen $x_1 < \xi$ ist und einen inneren PunktP', für welchen $x_1 > \xi$ ist. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (e) lassen sich nun P'' und P' durch einen ganz im Innern von K verlaufenden Weg verbinden. Also muß es auf der Ebene $x_1 = \xi$ innere Punkte von K geben. Diese sind a fortiori auch relativ zur Ebene $x_1 = \xi$ innere Punkte des Schnittes $K(x_1 = \xi)$. Daher verschwindet im Intervall

(115) $$\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$$

$V_E(\xi)$ nur an den Stellen α^* und β^*, welche übrigens offenbar auch zu den sogenannten Ausnahmestellen gehören.

Aus den unter (109), (110) gemachten Feststellungen ergibt sich ferner für $\chi = 1$, daß abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen

(116) $$\frac{d V_E(\xi)}{d \xi}$$

bestimmt und stetig ist.

Setzt man in (109) und (110) $\chi = x_\mu$, $\mu = 2 \ldots n$, so folgt, daß das Integral

(117) $$\int\limits_{K(x_1 = \xi)} x_\mu d x_2 \ldots d x_n$$

als Funktion von ξ überall stetig und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen auch stetig differenzierbar ist.

Es sei nun

(118) $$\alpha^* < \xi < \beta^*.$$

Man bezeichne die Koordinaten des Euklidischen Schwerpunktes des Schnittes $K(x_1 = \xi)$ mit $m_\mu(\xi)$, $\mu = 2 \ldots n$. Dann hat man

$$m_\mu(\xi) = \frac{1}{V_E(\xi)} \int\limits_{K(x_1 = \xi)} x_\mu \, d x_2 \ldots d x_n, \tag{119}$$

wobei der Nenner, wie eben festgestellt, nicht verschwindet. Die obigen Ausführungen ergeben also:

Die Koordinaten $m_\mu(\xi)$, $\mu = 2 \ldots n$, des Schwerpunktes des Schnittes, welchen der reguläre Körper K mit der Ebene $x_1 = \xi$ bildet, sind für $\alpha^* < \xi < \beta^*$ als Funktionen von ξ überall stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, auch stetig differenzierbar.

§ 5.

Die Abrundung nach dem Vorbilde von Schwarz [7]).

1) Es sei für $n \geqq 3$ dem n-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ die Maßbestimmung

$$\overline{ds}^2 = du^2 + a^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu \, dv_\nu^2, \quad n \geqq 3 \tag{1}$$

aufgeprägt. Wir setzen ferner noch voraus, daß

$$a = GH \tag{2}$$

ist, wobei

$$G = G(u) \tag{3}$$

eine stetige, positive Funktion von u bedeutet, und

$$H = H(v_1 \ldots v_{n-1}) \tag{4}$$

eine stetige, positive Funktion von $v_1 \ldots v_{n-1}$. Es gelten also die Ungleichungen

$$G > 0, \quad H > 0. \tag{5}$$

Es bezeichne im Euklidischen Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ K einen regulären Körper, in bezug auf welchen die Richtung der u-Achse nicht eigentlich singulär ist, und R den Rand von K.

Auf jede der endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, aus welchen R als Rand eines regulären Körpers definitionsgemäß

[1]) Vgl. H. A. Schwarz, „Beweis des Satzes, daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens". Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. II, S. 327–340.

zusammengesetzt ist, wende man jetzt den Satz XI, § 4 für $\psi = 1$ an und summiere über alle Mannigfaltigkeiten. So ergibt sich das Resultat, daß das Integral

$$\int\limits_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} \tag{6}$$

für *alle* Werte von ξ bestimmt und als Funktion von ξ stetig ist. Dabei bedeutet $\overline{ds}_{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Flächenelement in der Maßbestimmung (1).

Man setze jetzt voraus, daß ξ keine der endlich vielen sogenannten Ausnahmestellen ist, für welche eine der Randmannigfaltigkeiten des Körpers K von der Euklidischen Ebene $u = \xi$ in dem im § 4, Abschnitt 1) festgelegten Sinne berührt wird. Dann ergibt der Satz XII, § 4 in der Spezialisierung § 4 (93) für $k = n - 1$ und $\psi = 1$, wenn man ihn wie bei der Herleitung von (6) zunächst auf alle $(n-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von K anwendet und dann summiert,

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} = \int\limits_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{u, T\}}\, \overline{d s}_{n-2}, \tag{7}$$

wobei $\measuredangle \{u, T\}$ den Euklidischen Winkel zwischen dem Einheitsvektor der u-Achsenrichtung und seiner Euklidisch senkrechten Projektion auf die Tangentialebene bedeutet. Bezeichnet nun N die äußere Euklidische Normale und $\measuredangle \{u, N\}$ den zwischen 0 und π gelegenen Euklidischen Winkel zwischen dieser und dem Einheitsvektor der u-Achsenrichtung, so hat man wegen § 4 (25)

$$\cos \measuredangle \{u, T\} = \sin \measuredangle \{u, N\} > 0, \tag{8}$$

$$\text{sign.} (\operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = \text{sign.} (\cos \measuredangle \{u, N\}. \tag{9}$$

Die Einführung von (8) in (7) ergibt

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{R(u \leqq \xi)} \overline{d s}_{n-1} = \int\limits_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d s}_{n-2}. \tag{10}$$

Dabei ist gemäß Satz XII, § 4 der durch diese Gleichung dargestellte Differentialquotient des Integrals auf der linken Seite an der betrachteten Stelle, d. h. also allein unter Ausschluß der endlich vielen Ausnahmestellen, als Funktion von ξ stetig. Da das Integral selbst, wie unter (6) festgestellt, für *alle* Werte von ξ stetig und zwar monoton ist, so folgt

$$\overline{O} = \int\limits_{R} \overline{d s}_{n-1} = \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} d\xi \int\limits_{R(u = \xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{d s}_{n-2}, \tag{11}$$

wobei $\overline{O}$ die Oberfläche des Körpers K in der Maßbestimmung (1) bedeutet, und

$$\alpha^* = \text{Min}\,(u) \text{ in } K, \quad \beta^* = \text{Max}\,(u) \text{ in } K \tag{12}$$

gesetzt ist. Ferner ist dabei das innere Integral auf der rechten Seite abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen von ξ bestimmt und als Funktion von ξ stetig.

Es sei ξ keiner der Ausnahmewerte. Dann hat man, da wegen § 4 (92) $\overline{ds}_{n-2} = a_2^{n-2} ds_{n-2}$ ist, wobei hier für a_2 $a = GH$ einzusetzen ist, gemäß der Ungleichung von SCHWARZ[8])

$$\int\limits_{R(u=\xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{ds}_{n-2} \tag{13}$$

$$= \int\limits_{R(u=\xi)} G(\xi)^{n-2} \sqrt{H^{2n-4} + G(\xi)^2 H^{2n-2} \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, ds_{n-2}$$

$$\geqq G(\xi)^{n-2} \sqrt{\Big[\int\limits_{R(u=\xi)} H^{n-2} ds_{n-2}\Big]^2 + G(\xi)^2 \Big[\int\limits_{R(u=\xi)} H^{n-1} \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\}\, ds_{n-2}\Big]^2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei dann und nur dann, wenn

$$H(v_1 \ldots v_{n-1}) \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} \tag{14}$$

für $u = \xi$ konstant bleibt.

Aus der Gleichung § 4 (109) für $\chi = H^{n-1}$ erhält man jetzt wegen

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{15}$$

bei Berücksichtigung der Übereinstimmung der Vorzeichenbestimmungen § 4 (108) und § 5 (9)

$$\int\limits_{R(u=\xi)} H^{n-1} \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\}\, ds_{n-2} = -\frac{dJ(\xi)}{d\xi}, \tag{16}$$

wobei

$$J(\xi) = \int\limits_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \ldots dv_{n-1} \tag{17}$$

gesetzt ist, und, wie § 4 unter (109), (110) festgestellt, für alle Werte von ξ stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte auch stetig differenzierbar ist. Die Einführung von (16) in (13) ergibt das Resultat:

Es ist, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten,

$$\int\limits_{R(u=\xi)} \sqrt{1 + a^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}}\, \overline{ds}_{n-2} \tag{18}$$

$$\geqq G(\xi)^{n-2} \sqrt{\Big[\int\limits_{R(u=\xi)} H^{n-2}\, ds_{n-2}\Big]^2 + G(\xi)^2 \Big(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\Big)^2},$$

---

[8]) Ein Beweis dieser Ungleichung findet sich auch l. c.[1] § 4 I.

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn der Ausdruck (14) für $u = \xi$ konstant bleibt.

2) Bezeichnet $\overline{V}$ das Volumen des Körpers K in der Maßbestimmung (1), so hat man

$$(19)\quad \overline{V} = \int\limits_K a^{n-1}\, du\, dv_1 \ldots dv_{n-1} = \int\limits_K G(u)^{n-1} H^{n-1}\, du\, dv_1 \ldots dv_{n-1}.$$

Aus § 4 (96), (97) folgt daher, wenn

$$(20)\qquad \varphi = a^{n-1} = G^{n-1} H^{n-1}$$

und mithin

$$(21)\qquad \Phi(\xi) = G(\xi)^{n-1} \int\limits_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \ldots dv_{n-1} = G(\xi)^{n-1} J(\xi)$$

gesetzt wird, das Ergebnis

$$(22)\qquad \overline{V} = \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1} J(\xi)\, d\xi,$$

wobei α^* und β^* durch (12) erklärt sind.

3) Nunmehr spezialisieren wir weiter, indem wir im Hinblick auf § 3 (52)

$$(23)\qquad H(v_1 \ldots v_{n-1}) = \frac{2}{1 + \mathsf{K} \sum\limits_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2}$$

setzen, wobei K eine Konstante bedeutet. Ist dabei $\mathsf{K} < 0$, so wird der Modellraum nur von demjenigen Bereich des (u, v)-Raumes gebildet, der durch die Gleichung

$$1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2 > 0$$

oder gleichbedeutend

$$(23')\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2 < \frac{1}{|\mathsf{K}|}$$

bestimmt ist. Da K als regulärer Körper abgeschlossen ist, so besitzt die Funktion

$$1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2$$

in K ein Minimum, das mit $d(K)$ bezeichnet werden möge. Es gilt also für alle Punkte von K die Ungleichung

$$(23'')\qquad 1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2 \geqq d(K) > 0.$$

Ist ferner $\mathsf{K} \neq 0$, so erhält die Maßbestimmung (1) durch die Substitution

$$v_\nu = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{K}|}} v'_\nu$$

die Gestalt

$$d\bar{s}^2 = du^2 + \frac{G(u)^2}{|\mathsf{K}|} H'^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu\, dv'^2_\nu,$$

wobei

$$H' = \frac{2}{1 + \frac{\mathsf{K}}{|\mathsf{K}|} \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v'^2_\nu}$$

ist. Wir können uns daher darauf beschränken, K die Werte $0, -1, +1$ zu erteilen.

Die Maßbestimmung

$$d\bar{s}^2 = H^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu\, dv_\nu^2 \tag{24}$$

besitzt das konstante Krümmungsmaß K und definiert daher je nachdem, ob K verschwindet, negativ oder positiv ist, im $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raum eine Euklidische, hyperbolische oder sphärische Geometrie. Jeder Bewegung des (v)-Raumes in dieser Geometrie entspricht im (u, v)-Raum bei festgehaltenem u, da die beiden Maßbestimmungen sich bei festem u nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, in der Maßbestimmung (1) ebenfalls eine Bewegung, d. h. eine ein-eindeutige Transformation des Raumes, welche die Maßbestimmung invariant läßt. Jeder Drehung des (v)-Raumes um einen festen Punkt mit den Koordinaten $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$, entspricht daher im (u, v)-Raum bei festgehaltenem u in der Maßbestimmung (1) eine Bewegung, bei welcher jeder Punkt der durch die Gleichungen $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$ gegebenen geodätischen Linie festbleibt, und die mithin als eine Rotationsbewegung um diese geodätische Linie als Achse zu bezeichnen ist. Als Rotationskörper um diese Achse ist dementsprechend ein solcher Körper zu bezeichnen, der bei allen Rotationsbewegungen um die Achse in sich selbst übergeht. Das ist offenbar damit gleichbedeutend, daß jeder Schnitt des Körpers mit einer Euklidischen Ebene $u =$ konst in der durch die Maßbestimmung (24) definierten Geometrie von konzentrischen Kugeln begrenzt wird, deren Mittelpunkt die Koordinaten $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$, besitzt.

Wir nehmen jetzt als bewiesen an, daß in der $(n-1)$-dimensionalen, durch die Maßbestimmung (24) definierten Geometrie die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere reguläre Körper gleichen Volumens. Mit anderen Worten, wir setzen die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in dieser Formulierung im $(n-1)$-dimensionalen Raum — und zwar für $\mathsf{K} = 0$

im Euklidischen, für $\mathsf{K} = -1$ im hyperbolischen und für $\mathsf{K} = 1$ im sphärischen — voraus.

Man bezeichne im $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum die Oberfläche und das Volumen einer Kugel vom Radius r mit

$$O^* = O^*(r) \quad \text{und} \quad V^* = V^*(r), \tag{25}$$

wobei diese Funktionen natürlich noch von der Dimensionenzahl und vom Krümmungsmaß abhängen, welches auf die Werte $0, -1, +1$ beschränkt sein möge. Die Funktionen $O^*(r)$ und $V^*(r)$ sind dann im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $r \geqq 0$ definiert und verschwinden für $r = 0$. Im sphärischen Fall dagegen sind sie nur für $0 \leqq r \leqq \pi$ definiert, für $r = 0$ verschwinden $O^*(r)$ und $V^*(r)$, während für $r = \pi$ $O^*(r)$ verschwindet und $V^*(r)$ gleich dem Volumen des Gesamtraumes, d. h. also gleich der Gesamtoberfläche der Einheitskugel im Euklidischen n-dimensionalen Raum wird, so daß man also hat

$$V^*(\pi) = n E_n, \tag{25'}$$

wobei E_n das Volumen der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel bedeutet. Man betrachte jetzt die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens und setze

$$O^* = O^*[V^*], \tag{25''}$$

wobei auch diese Funktion von der Dimensionenzahl und von dem auf die Werte $0, -1, +1$ beschränkten Krümmungsmaß abhängt. Die Funktion $O^*[V^*]$ ist im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $V^* \geqq 0$ definiert und verschwindet für $V^* = 0$. Im sphärischen Fall ist sie nur für $0 \leqq V^* \leqq n E_n$ definiert und verschwindet für $V^* = 0$ und $V^* = n E_n$. Bei Einführung dieser Funktion läßt sich unsere oben gemachte isoperimetrische Voraussetzung dahin formulieren, daß in dem $(n-1)$-dimensionalen, durch die Maßbestimmung (24) definierten, je nach dem Betrage des Krümmungsmaßes K Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum für jeden regulären Körper die Ungleichung

$$O \geqq O^*[V] \tag{26}$$

gilt, wobei O und V Oberfläche und Volumen des Körpers bedeuten, und das Gleichheitszeichen allein der Kugel vorbehalten bleibt.

Zunächst besteht durchweg die triviale Gleichung

$$\frac{dV^*}{dr} = O^* \text{ [9]}, \tag{27}$$

[9]) Siehe l. c.[2] S. 221, Gl. (75) und l. c.[3] S. 770, Gl. (83), (84).

und man hat mithin im Euklidischen und hyperbolischen Fall für $r > 0$ und im sphärischen für $0 < r < \pi$

$$\frac{dO^*}{dV^*} = \frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}, \tag{28}$$

$$\frac{d^2O^*}{dV^{*2}} = \frac{1}{O^*}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right). \tag{29}$$

Bezeichnet ferner E_{n-1} das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel, so gelten im $(n-1)$-dimensionalen Raum die Formeln[10])

(30) für $\mathsf{K} = 0$, $r > 0$, $O^* = (n-1)E_{n-1}r^{n-2}$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = \frac{n-2}{r}, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{r^2},$$

(31) für $\mathsf{K} = -1$, $r > 0$, $O^* = (n-1)E_{n-1}\sinh^{n-2} r$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = (n-2)\operatorname{cotgh} r, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{\sinh^2 r},$$

(32) für $\mathsf{K} = 1$, $0 < r < \pi$, $O^* = (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2} r$,

$$\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr} = (n-2)\operatorname{cotg} r, \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{O^*}\frac{dO^*}{dr}\right) = -\frac{n-2}{\sin^2 r}.$$

Die Einführung dieser Formeln in (29) zeigt, daß in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie für $V^* > 0$ und in der sphärischen für $0 < V^* < nE_n$

$$\frac{d^2O^*}{dV^{*2}} < 0 \tag{33}$$

bleibt. Bezeichnet nun $F(x)$ eine für $x > 0$ zweimal stetig differenzierbare, an der Stelle $x = 0$ noch stetig verschwindende Funktion, deren zweite Ableitung $F''(x)$ für $x > 0$ negativ bleibt, so hat man für $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$F(c_1 + c_2) - F(c_1) - F(c_2) = \int_0^{c_1} dx \int_0^{c_2} F''(x+y)\,dy < 0. \tag{34}$$

Hieraus folgt für $V_1^* > 0$, $V_2^* > 0$

$$O^*[V_1^* + V_2^*] < O^*[V_1^*] + O^*[V_2^*] \tag{35}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung

(36) für $V_\mu^* > 0$, $\mu = 1 \ldots m$, $m \geqq 2$, $O^*[\sum_1^m{}_\mu V_\mu^*] < \sum_1^m{}_\mu O^*[V_\mu^*]$,

wobei im sphärischen Fall natürlich noch die Voraussetzung

$$\sum_1^m{}_\mu V_\mu^* \leqq nE_n$$

erfüllt sein muß.

[10]) Siehe Anmerkung [9]).

Schreibt man in dieser Funktionalungleichung statt der willkürlichen V_μ^* V_μ, so ergibt sich

$$(37)\qquad \text{für } m \geqq 2,\ V_\mu > 0,\ \mu = 1 \ldots m,\quad O^*[\sum_1^m{}_\mu V_\mu] < \sum_1^m{}_\mu O^*[V_\mu],$$

wobei in der sphärischen Geometrie die Summe der V_μ nE_n nicht überschreiten darf.

Es seien nun in dem durch die Maßbestimmung (24) definierten $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum m reguläre Körper mit den Volumina V_μ und den Oberflächen O_μ, $\mu = 1 \ldots m$, gegeben, von denen je zwei nur Punkte gemein haben sollen, die für keinen von beiden innere Punkte oder Randpunkte sind, die im Innern einer seiner regulären $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen. Bezeichnet dann V das Volumen der Vereinigungsmenge dieser Körper und O die Oberfläche, so hat man zunächst

$$(38)\qquad V_\mu > 0,\ \mu = 1 \ldots m,\quad V = \sum_1^m{}_\mu V_\mu,\quad O = \sum_1^m{}_\mu O_\mu.$$

Auf Grund von (26) erhält man

$$(39)\qquad O_\mu \geqq O^*[V_\mu] \quad \text{und mithin} \quad O \geqq \sum_1^\mu{}_\mu O^*[V_\mu].$$

Die Einführung von (37) ergibt für $m \geqq 2$

$$(40)\qquad O > O^*[\sum_1^m{}_\mu V_\mu] = O^*[V].$$

Es gilt also auch in diesem Falle

$$(41)\qquad O \geqq O^*[V],$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann besteht, wenn es sich um einen einzigen Körper handelt, und dieser eine Kugel ist.

Mit diesem Ergebnis kehren wir nun zu unserer Ungleichung (18) zurück. Wir schicken voraus, daß im folgenden durchweg $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ vorausgesetzt wird. Ist dann ξ keine der endlich vielen Ausnahmestellen, zu welchen auch α^* und β^* zu zählen sind, so enthält der Schnitt $K(u = \xi)$, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, innere Punkte von K und besteht gemäß l. c.[1] § 6 IV (13) aus endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Körpern, welche den Voraussetzungen der Ungleichung (41) genügen. Bezeichnet daher in der Maßbestimmung (24) $\widetilde{O}$ die Oberfläche und $\widetilde{V}$ das Volumen des Schnittes $K(u = \xi)$, so hat man

$$(42)\qquad \widetilde{O} = \int\limits_{K(u=\xi)} H^{n-2}\, ds_{n-2},\quad \widetilde{V} = \int\limits_{K(u=\xi)} H^{n-1}\, dv_1 \ldots dv_{n-1}$$

und mithin wegen (17)

$$(43)\qquad \widetilde{V} = J(\xi).$$

Die Einführung dieser Gleichungen in (41) ergibt

$$(44)\qquad \int\limits_{K(u=\xi)} H^{n-2} d s_{n-2} \geqq O^*[J(\xi)].$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn der Schnitt $K(u=\xi)$ aus einer einzigen Vollkugel des $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raumes besteht, und die Funktion O^* ist, wie wiederholt werden darf, noch von der Dimensionenzahl und dem Krümmungsmaß abhängig.

Die Einführung von (44) in (18) und (10) ergibt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ,

$$(45)\qquad \frac{d}{d\xi}\int\limits_{R(u\leqq\xi)} \overline{d s}_{n-1} \geqq G(\xi)^{n-2}\sqrt{O^*[J(\xi)]^2+G(\xi)^2\left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\,d\xi,$$

wobei beide Seiten als Funktionen von ξ, abgesehen von den Ausnahmestellen, stetig sind. Ebenso folgt aus (11)

$$(45')\qquad \overline{O} \geqq \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2}\sqrt{O^*[J(\xi)]^2+G(\xi)^2\left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\,d\xi,$$

wobei der Integrand, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, bestimmt und stetig ist. Das Gleichheitszeichen in (45) für alle Werte von ξ bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte oder, was damit gleichbedeutend ist, das Gleichheitszeichen in (45′) gilt dann und nur dann, wenn, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, der Schnitt $K(u=\xi)$ in der Maßbestimmung (24) durch eine $(n-1)$-dimensionale Vollkugel dargestellt wird, während ferner noch auf dem Schnitt der Ausdruck (14) konstant bleibt.

4) Wir wollen jetzt zeigen, daß die im letzten Absatz festgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (45′) dann und nur dann erfüllt sind, wenn es sich um einen Rotationskörper in der Maßbestimmung (1) handelt, dessen Achse durch Gleichungen von der Gestalt

$$(46)\qquad v_\nu = c_\nu,\quad \nu = 1\ldots n-1$$

bestimmt ist, wobei die c_ν Konstanten bedeuten, und dessen Schnitte mit den Modellraumebenen $u=$ konst in der Maßbestimmung (24) $(n-1)$-dimensionale Vollkugeln sind.

Voraussetzungsgemäß bildet, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, der Schnitt $K(u=\xi)$ im (v)-Raum bei der Maßbestimmung (24) eine Vollkugel. Diese wird im (v)-Raum als Euklidischem Modellraum ebenfalls durch eine Vollkugel oder durch einen von einer Ebene begrenzten Halbraum dargestellt. Da aber der Körper K voraussetzungsgemäß im Euklidischen (u, v)-Raum regulär und mithin auch beschränkt ist, so ist auch jeder Schnitt $K(u = \xi)$ im Euklidischen (v)-Raum beschränkt. Daher wird, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, jeder Schnitt $K(u = \xi)$ in dem das Euklidische Modell bildenden (v)-Raum durch eine Vollkugel dargestellt.

Man bezeichne nun für *alle* Werte von ξ das Euklidische Volumen des Schnittes $K(u = \xi)$ mit $V_E(\xi)$. Dann ist also

$$V_E(\xi) = \int\limits_{K(u=\xi)} dv_1 \ldots dv_{n-1}. \tag{47}$$

Wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, ist die Funktion $V_E(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten auch stetig differenzierbar und verschwindet im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^*, die ebenfalls zu den Ausnahmewerten zählen.

Man definiere jetzt die Funktion $\varrho(\xi)$ durch die Gleichung

$$E_{n-1}\,\varrho(\xi)^{n-1} = V_E(\xi), \tag{48}$$

wobei E_{n-1} wie oben das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel bedeutet. Dann folgt aus den über $V_E(\xi)$ gemachten Feststellungen, daß auch $\varrho(\xi)$ im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^* verschwindet, für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, stetig differenzierbar ist.

Endlich definiere man im offenen Intervall $\alpha^* < \xi < \beta^*$ die Funktionen $m_\nu(\xi)$, $\nu = 1 \ldots n-1$, durch die Gleichung

$$m_\nu(\xi) = \frac{1}{V_E(\xi)} \int\limits_{K(u=\xi)} v_\nu \, dv_1 \ldots dv_{n-1}. \tag{49}$$

Dann stellen die Funktionen $m_\nu(\xi)$ die Koordinaten des Schwerpunktes des Schnittes $K(u = \xi)$ in dem das Euklische Modell bildenden (v)-Raum dar und sind, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, in ihrem offenen Definitionsintervall $\alpha^* < \xi < \beta^*$ ebenfalls für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, auch stetig differenzierbar. Da nun, abgesehen von diesen Ausnahmewerten, der Schnitt in dem das Euklidische Modell bildenden (v)-Raum durch eine Vollkugel dargestellt wird, so wird ihr Radius durch die Funktion $\varrho(\xi)$ gegeben, während die Koordinaten ihres Mittelpunktes, weil dieser mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, durch die Funktionen $m_\nu(\xi)$ bestimmt sind.

Ist also ξ keiner der endlich vielen Ausnahmewerte, so hat die Oberfläche der Vollkugel, aus welcher der Schnitt $K(u = \xi)$ besteht, die Gleichung

$$\sum_{1}^{n-1}{}_\nu \, (v_\nu - m_\nu(\xi))^2 - \varrho(\xi)^2 = 0. \tag{50}$$

Die Oberfläche des Körpers K hat daher, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u, die Gleichung

$$F = F(u, v_1 \dots v_{n-1}) = \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))^2 - \varrho(u)^2 = 0. \tag{51}$$

Es sei nun ξ' einer der endlich vielen Ausnahmewerte im offenen Intervall $\alpha^* < \xi' < \beta^*$. Liegt dann der Punkt $v_1^* \dots v_{n-1}^*$ im Innern der Kugel

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(\xi'))^2 - \varrho(\xi')^2 = 0, \tag{52}$$

so liegt wegen der Stetigkeit der Funktionen $m_\nu(\xi)$ und $\varrho(\xi)$ bei genügend kleinem $|u - \xi'|$ der Punkt auch im Innern der bei festem u durch (51) bestimmten Kugel. Da bei genügend kleinem von Null verschiedenem $|u - \xi'|$ u kein Ausnahmewert ist, so gehört daher bei genügend kleinem von Null verschiedenem $|u - \xi'|$ der Punkt $(u, v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ zum Körper K, und da dieser abgeschlossen ist, so gehört auch der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ zu K. Also gehören alle Punkte im Innern der Kugel (52) zu K und mithin wegen der Abgeschlossenheit von K auch ihre Oberfläche. Ebenso schließt man, daß, wenn der Punkt $v_1^* \dots v_{n-1}^*$ im Äußern der Kugel (52) liegt, alle nicht auf der Ebene $u = \xi'$ gelegenen Punkte des (u, v)-Raumes in einer gewissen Umgebung des Punktes $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ dem Körper K nicht angehören. Der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ kann daher nicht Häufungspunkt von inneren Punkten von K sein. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) muß aber jeder Punkt eines regulären Körpers Häufungspunkt von inneren Punkten sein. Also gehört der Punkt $(\xi', v_1^* \dots v_{n-1}^*)$ nicht zu K. Damit ist gezeigt, daß die Gleichung (51) auch an den endlich vielen Ausnahmestellen von u zwischen α^* und β^* die Oberfläche des Körpers K darstellt. An den Stellen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ ist die Gleichung (51) dagegen zunächst überhaupt nicht definiert.

Es sei nun u keiner der endlich vielen Ausnahmewerte. Da die Funktion $F(u, v_1 \dots v_{n-1})$ im Äußern der Schnittkugel (51) positiv und im Innern negativ wird, so erhält man

$$\tag{53} \begin{aligned} \cos \sphericalangle\{u, N\} &= \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \sum\limits_1^{n-1}{}_\nu \left(\dfrac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}}, \\ \cos \sphericalangle\{v_\nu, N\} &= \frac{\dfrac{\partial F}{\partial v_\nu}}{+\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \sum\limits_1^{n-1}{}_\nu \left(\dfrac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}}, \end{aligned}$$

und entsprechend der Vorzeichenbestimmung (9)

$$\text{(54)}\qquad \operatorname{cotg} \sphericalangle \{u, N\} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{+\sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\dfrac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2}}.$$

Nun ist

$$\text{(55)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\partial F}{\partial v_\nu}\right)^2 = 4 \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))^2 = 4\,\varrho(u)^2,$$

$$\text{(56)}\qquad \frac{\partial F}{\partial u} = -2 \sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu - m_\nu(u))\, m_\nu'(u) - 2\,\varrho(u)\,\varrho'(u).$$

Mithin ist

$$\text{(57)}\qquad \operatorname{cotg} \sphericalangle \{u, N\} = -\sum_1^{n-1}{}_\nu \frac{(v_\nu - m_\nu(u))\, m_\nu'(u) + \varrho(u)\,\varrho'(u)}{\varrho(u)}.$$

Da der Ausdruck (14) voraussetzungsgemäß eine Funktion von u darstellen soll, so hat man, wenn diese mit $q(u)$ bezeichnet wird,

$$\text{(58)}\qquad H \operatorname{cotg} \sphericalangle \{u, N\} = q(u).$$

Die Einführung von (23) und (57) ergibt

$$\text{(59)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu\, 2\, m_\nu'(u)\,(v_\nu - m_\nu(u)) + 2\,\varrho(u)\,\varrho'(u) + q(u)\,\varrho(u)\left(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2\right) = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $m_\nu = m_\nu(u)$, $m_\nu' = m_\nu'(u)$, $\varrho = \varrho(u)$, $\varrho' = \varrho'(u)$, $q = q(u)$, und subtrahiert die mit $\mathsf{K} q\varrho$ multiplizierte Gleichung (51) von der Gleichung (59), so ergibt sich

$$\text{(60)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu\, 2\,(m_\nu' + \mathsf{K} q\varrho\, m_\nu)\, v_\nu + \left(2\,\varrho\varrho' - \sum_1^{n-1}{}_\nu\, 2\, m_\nu m_\nu'\right) + \mathsf{K}\, q\varrho\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu\, m_\nu^2\right) + q\varrho = 0.$$

Es sei jetzt

$$\text{(61)}\qquad \mathsf{K} \neq 0.$$

Man definiere die Funktion $m_0 = m_0(u)$ durch die Gleichung

$$\text{(62)}\qquad m_0 = \frac{1 + \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu\, m_\nu^2\right)}{2}.$$

Dann erhält die Gleichung (60) die Gestalt

$$\text{(63)}\qquad \sum_1^{n-1}{}_\nu\, 2\,(m_\nu' + \mathsf{K} q\varrho\, m_\nu)\, v_\nu + \frac{2}{\mathsf{K}}\,(m_0' + \mathsf{K} q\varrho\, m_0) = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei festem u, wenn sie nicht identisch verschwindet, im (v)-Raum eine Ebene dar, was unmöglich ist, da auf ihr alle Punkte der Kugeloberfläche (51) liegen müßten. Also hat man die Gleichungen

$$(64) \qquad m_0' + \mathsf{K} q \varrho m_0 = 0, \quad m_\nu' + \mathsf{K} q \varrho m_\nu = 0, \quad \nu = 1 \ldots n-1.$$

Man definiere jetzt die Funktion $m = m(u)$ durch die Gleichung

$$(65) \qquad m^2 = m_0^2 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2, \quad m \geqq 0.$$

Man erhält

$$(66) \qquad m m' = m_0 m_0' + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu m_\nu'.$$

Addiert man zu (66) die mit $\mathsf{K} q \varrho$ multiplizierte Gleichung (65), so ergibt sich wegen (64)

$$(67) \qquad m\,(m' + \mathsf{K} q \varrho m) = 0.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß m nirgends verschwindet.

Man hat bei Einführung von (62)

$$(68) \quad 4 m^2 = \left(1 + \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right)\right)^2 + 4\,\mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2$$
$$= 1 + 2\,\mathsf{K}\left(\varrho^2 + \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right) + \mathsf{K}^2\left(\varrho^2 - \sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2\right)^2$$
$$= \left(1 + \mathsf{K}\left(\varrho + \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\right)^2\right)\left(1 + \mathsf{K}\left(\varrho - \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\right)^2\right).$$

Bezeichnen nun $\bar{v}_\nu = \bar{v}_\nu(u)$ und $\underline{v}_\nu = \underline{v}_\nu(u)$, $\nu = 1 \ldots n-1$ bei festem u die Koordinaten des vom Punkte $v_\nu = 0$, $\nu = 1 \ldots n-1$, Euklidisch weitesten und nächsten Punktes der Kugeloberfläche (51), so ist

$$(69) \qquad \left(\varrho + \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\right)^2 = \sum_1^{n-1}{}_\nu \bar{v}_\nu^2, \qquad \left(\varrho - \sqrt{\sum_1^{n-1}{}_\nu m_\nu^2}\right)^2 = \sum_1^{n-1}{}_\nu \underline{v}_\nu^2.$$

Mithin ist

$$(70) \qquad m^2 = \tfrac{1}{4}\left(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu \bar{v}_\nu^2\right)\left(1 + \mathsf{K} \sum_1^{n-1}{}_\nu \underline{v}_\nu^2\right).$$

Hieraus folgt für

$$(71) \qquad \mathsf{K} > 0 \qquad m \geqq \tfrac{1}{2}$$

und wegen (23″) für

$$(72) \qquad \mathsf{K} < 0 \qquad m \geqq \frac{d(K)}{2} > 0.$$

Diese Ungleichungen sind zunächst nur bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte von u bewiesen. Da aber die Funktionen $m_\nu(u)$ und $\varrho(u)$ für *alle* Werte von u im offenen Intervall zwischen α^* und β^* definiert und stetig sind, so gilt dasselbe auch von den durch (62) und (65) definierten Funktionen $m_0(u)$ und $m(u)$. Es gelten daher auch die Ungleichungen (71), (72) für alle diese Werte von u. Daher sind auch die Funktionen

$$\frac{m_0}{m}, \ \frac{m_\nu}{m}, \ \nu = 1 \ldots n-1 \tag{73}$$

im offenen Intervall zwischen α^* und β^* für alle Werte von u definiert und stetig. Abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten folgt aus (67) wegen (71), (72)

$$m' + \mathsf{K} q \varrho m = 0. \tag{74}$$

Diese Gleichung ergibt in Verbindung mit den Gleichungen (64)

$$\frac{d}{du}\left(\frac{m_0}{m}\right) = 0, \ \frac{d}{du}\left(\frac{m_\nu}{m}\right) = 0, \ \nu = 1 \ldots n-1. \tag{75}$$

Da die letzten Gleichungen, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen gesichert sind, während die Funktionen $\frac{m_0}{m}$, $\frac{m_\nu}{m}$ auch in diesen Punkten stetig bleiben, so bleiben die Funktionen im gesamten offenen Intervall zwischen α^* und β^* konstant. Man kann also setzen

$$\frac{m_0}{m} = \eta_0, \ \frac{m_\nu}{m} = -\eta_\nu, \tag{76}$$

wobei $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ Konstanten bezeichnen.

Ist endlich

$$\mathsf{K} = 0,$$

so stellt schon die Gleichung (59), bei festem u, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine Ebene dar. Man erhält daher durch dieselbe Schlußweise wie oben die Gleichungen

$$m_\nu' = 0, \qquad \nu = 1 \ldots n-1, \tag{77}$$

und kann mithin setzen

$$m_\nu = -\eta_\nu, \qquad \nu = 1 \ldots n-1, \tag{78}$$

wobei die η_ν Konstanten bedeuten.

Die Gleichung (51) gewinnt also für $\mathsf{K} = 0$ die Gestalt

$$\sum_1^{n-1}{}_\nu (v_\nu + \eta_\nu)^2 - \varrho(u)^2 = 0, \tag{79}$$

wobei $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ Konstanten bezeichnen.

Für $\mathsf{K} \neq 0$ gilt die identische Umformung

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} (v_\nu - m_\nu)^2 - \varrho^2 = m_0\left(\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} v_\nu^2 - \frac{1}{\mathsf{K}}\right) - \\ - 2\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} m_\nu v_\nu + \frac{1 - \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} m_\nu^2\right)}{2}\left(\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} v_\nu^2 + \frac{1}{\mathsf{K}}\right).$$

Dadurch erhält die Gleichung (51) nach Division durch m die Gestalt

$$\eta_0\left(\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} v_\nu^2 - \frac{1}{\mathsf{K}}\right) + 2\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} \eta_\nu v_\nu + \lambda(u)\left(\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} v_\nu^2 + \frac{1}{\mathsf{K}}\right) = 0, \tag{80}$$

wobei $\lambda(u)$ durch die Gleichung

$$\lambda(u) = \frac{1 - \mathsf{K}\left(\varrho^2 - \sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} m_\nu^2\right)}{2m} \tag{81}$$

im offenen Intervall zwischen α^* und β^* als stetige Funktion von u definiert ist, und die Konstanten $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ wegen (65) durch die Gleichung

$$\eta_0^2 + \mathsf{K}\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} \eta_\nu^2 = 1 \tag{82}$$

normiert sind.

Für $\mathsf{K} = -1$ nimmt die Gleichung (80) die Gestalt der Gleichung § 2 (18) an, wobei durch (82) die Ungleichung § 2 (24) sichergestellt ist. Wie am Schluß von § 2, Abschnitt 4) festgestellt, sind daher die durch die Gleichung (51) des laufenden Paragraphen bei festem u bestimmten Kugeln im hyperbolischen (v)-Raum vom Krümmungsmaß -1 *konzentrisch*. Bezeichnen $c_1 \ldots c_{n-1}$ die Koordinaten des gemeinsamen Mittelpunktes der Kugeln, so erhält man aus § 2 (33), da die dort figurierende Größe λ_0 wegen § 2 (25) und der Gleichung (82) des laufenden Paragraphen gleich 1 wird,

$$c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{\eta_0 + \operatorname{sign}(\eta_0)}, \quad \nu = 1 \ldots n-1.$$

Aus (62) und (76) folgt wegen $\mathsf{K} = -1$

$$\eta_0 \geqq \frac{1 - \varrho(u)^2}{2\,m(u)},$$

und hieraus ergibt sich, da $\varrho(u)$, wie im Anschluß an (48) festgestellt, mit $(u - \alpha^*)$ gegen Null konvergiert, während η_0 eine Konstante darstellt,

$$\eta_0 > 0. \tag{83}$$

Man hat also die Gleichungen

$$c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{1 + \eta_0}, \quad \nu = 1 \ldots n-1, \quad \eta_0 > 0. \tag{84}$$

Für $\mathsf{K} = +1$ nimmt die Gleichung (80) die Gestalt der Gleichung § 2 (74) an, wobei das gleichzeitige Verschwinden sämtlicher $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_{n-1}$ durch (82) ausgeschlossen ist. Mithin sind die durch die Gleichung (51) bei festem u bestimmten Kugeln in dem mit der nunmehr sphärischen Maßbestimmung (24) versehenen (v)-Raum ebenfalls *konzentrisch.* Für die Koordinaten $c_1 \dots c_{n-1}$ desjenigen der beiden Mittelpunkte dieser konzentrischen Kugeln, der im Innern der durch (51) bestimmten Euklidischen Kugeln des (v)-Raumes liegt und mithin für $\alpha^* < u < \beta^*$ dem Körper K angehört, erhält man gemäß § 2 (75) und der Gleichung (82) des laufenden Paragraphen

$$(85) \qquad c_\nu = \frac{-\eta_\nu}{1+\eta_0};$$

denn es gilt für diesen Mittelpunkt das erste der beiden Formelsysteme § 2 (75), da wegen (62), (71), (72), (76), (81)

$$(86) \qquad \eta_0 + \lambda = \frac{1}{m} > 0$$

bleibt.

Für $\mathsf{K} = 0$ zeigt endlich die Gleichung (79) unmittelbar, daß es sich um konzentrische Kugeln handelt. Für die Koordinaten $c_1 \dots c_{n-1}$ des gemeinsamen Mittelpunktes im (v)-Raum erhält man in diesem Fall

$$(87) \qquad c_\nu = -\eta_\nu.$$

Da in allen drei Fällen der Punkt $(u, c_1, \dots c_{n-1})$ für $\alpha^* < u < \beta^*$ dem Körper K angehört, so gehören die Punkte $(\alpha^*, c_1 \dots c_{n-1})$, $(\beta^*, c_1 \dots c_{n-1})$, da K abgeschlossen ist, ebenfalls zu K. Da ferner, wie im Anschluß an (48) festgestellt, der Euklidische Radius $\varrho(u)$ der „Breitenkugeln" mit $(u - \alpha^*)$ und $(\beta^* - u)$ gegen Null konvergiert, so kann kein anderer Punkt der beiden Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ Häufungspunkt von inneren Punkten von K sein. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) eines regulären Körpers kann daher kein anderer Punkt dieser beiden Ebenen K angehören. Also schneiden die Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ den Körper K nur in den Punkten $(\alpha^*, c_1 \dots c_{n-1})$ und $(\beta^*, c_1 \dots c_{n-1})$.

Damit ist der am Eingang dieses Abschnitts angekündigte Beweis vollständig durchgeführt, und wir haben also festgestellt, daß in der Ungleichung (45') *das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn der Körper K in der Maßbestimmung* (1) *einen Rotationskörper darstellt, dessen Achse durch die Gleichungen $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \dots n = 1$, gegeben ist.*

Bringt man im (v)-Raum mit der Maßbestimmung (24) durch eine Bewegung, der ja bei festgehaltenem u auch eine Bewegung im (u, v)-Raum in der Maßbestimmung (1) entspricht, den Punkt $(c_1 \dots c_{n-1})$ mit dem Koordinatenanfangspunkt zur Deckung, so folgt aus der Symmetrie der Maßbestimmung (1) in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt, daß ein solcher Rotationskörper der Maßbestimmung (1) nunmehr auch im Euklidischen (u, v)-Raum einen Rotationskörper bildet.

5) Wir konstruieren nun zu dem gegebenen Körper K einen Euklidischen Rotationskörper K' nach der folgenden Vorschrift:

Die Rotationsachse sei die u-Achse. Die Schnitte mit den Ebenen $u =$ konst seien Vollkugeln, welche in der Maßbestimmung (24) das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen besitzen wie der Querschnitt mit K. Dann stimmen die beiden Volumina auch in der Maßbestimmung (1) miteinander überein, da die beiden Maßbestimmungen bei festem u sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, und der Körper K' ist wegen der Rotationssymmetrie der Maßbestimmung (1) auch in dieser ein Rotationskörper. Bezeichnet $r = r(\xi)$ den in der Maßbestimmung (24) gemessenen Radius der auf der Ebene $u = \xi$ liegenden Vollkugel, die auch als Breitenkugel bezeichnet werden kann, so ist die Funktion $r(\xi)$ bestimmt durch die Gleichung

$$V^*(r) = J(\xi), \tag{88}$$

wobei die Funktion $V^*(r)$ wie in der Gleichung (25) das Volumen der Kugel vom Radius r in der Maßbestimmung (24) ausdrückt, und die das Volumen des Querschnitts $K(u = \xi)$ darstellende Funktion $J(\xi)$ durch die Gleichung (17) gegeben ist. Wie im Anschluß an diese Gleichung festgestellt, ist $J(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, zu denen, wie wiederholt werden darf, auch α^* und β^* zählen, stetig differenzierbar. Da die Funktion $J(\xi)$ für $\xi < \alpha^*$ und $\xi > \beta^*$ verschwindet, so folgt aus ihrer Stetigkeit, daß sie auch an den Stellen α^* und β^* verschwindet. Da ferner, wie § 4, Abschnitt 11) festgestellt, für $\alpha^* < \xi < \beta^*$ der Querschnitt $K(u = \xi)$ innere Punkte von K enthält, so verschwindet $J(\xi)$ an keiner dieser Stellen. Die Funktion $J(\xi)$ verschwindet also im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ nur an den Stellen α^* und β^*. Aus diesen Feststellungen folgt wegen (88), daß auch die Funktion $r(\xi)$ im Intervall $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ für alle Werte von ξ stetig bleibt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten stetig differenzierbar ist und nur an den Stellen α^* und β^* verschwindet. Da die Euklidischen Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt des (v)-Raumes auch in der Maßbestimmung (24) Geraden darstellen, so hat man für die vom Koordinatenanfangspunkt in der Maßbestimmung (24) gemessene Entfernung t und für die Euklidische Entfernung t_E die Gleichung

$$\frac{dt}{dt_E} = \frac{2}{1 + \mathsf{K} t_E^2}. \tag{89}$$

Es ist daher

$$r(\xi) = \int_0^{r_E(\xi)} \frac{2\,dt}{1 + \mathsf{K} t^2}, \quad \frac{dr}{dr_E} = \frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E^2}, \tag{90}$$

wobei $r_E = r_E(\xi)$ den Euklidischen Radius der auf der Ebene $u = \xi$ liegenden Breitenkugel bedeutet. Die Oberfläche der Breitenkugel wird gemäß (25), (25′) und (88) gegeben durch die Funktionen

$$O^*(r) = O^*[V^*(r)] = O^*[J(\xi)]. \tag{91}$$

Da nun der Quotient des $(n-2)$-dimensionalen Oberflächenelements in der Maßbestimmung (24) durch das entsprechende Euklidische Oberflächenelement gleich H^{n-2} ist, und auf der Breitenkugel

$$H = \frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E^2} \tag{92}$$

bleibt, so hat man

$$O^*(r) = (n-1) E_{n-1} r_E^{n-2} \left(\frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E^2}\right)^{n-2}, \tag{93}$$

wobei E_{n-1} wie früher das Volumen der Euklidischen Einheitskugel im $(n-1)$-dimensionalen Raum bezeichnet.

Die Gleichung der Oberfläche des Rotationskörpers K' ist

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} v_\nu^2 - r_E(u)^2 = 0. \tag{94}$$

Man hat daher auf der Oberfläche abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u gemäß (54), (55), (56)

$$\operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = - r_E'(u), \tag{95}$$

und wegen (92)

$$H \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = \frac{-2 r_E'(u)}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}. \tag{96}$$

Mithin erhält man bei Einführung von (90) abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von u

$$H \operatorname{cotg} \measuredangle \{u, N\} = - \frac{dr}{dr_E} r_E'(u) = - r'(u). \tag{97}$$

$$\sqrt{1 + G(u)^2 H^2 \operatorname{cotg}^2 \measuredangle \{u, N\}} = \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}. \tag{98}$$

Wir dürfen nun nicht etwa ohne weiteres schließen, daß für den Rotationskörper K' die Gleichung (22) und die Ungleichung (45) bei ausgeschlossenem Ungleichheitszeichen, d. h. also als Gleichung, Geltung besitzen. Denn diese Relationen sind für einen regulären Körper hergeleitet worden. Der Körper K' braucht aber nicht regulär zu sein, da die zweimalige Differenzierbarkeit von $r(u)$ und mithin auch von $r_E(u)$ nach u nicht gesichert ist. Es ist aber leicht, diese Gleichungen direkt nachzuweisen.

Es bezeichnen R' die Oberfläche von K' als Punktmenge und $\overline{O}'$ ihren Flächeninhalt in der Maßbestimmung (1). Dann hat man zunächst

$$(99)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{R'} \overline{d s}_{n-1}.$$

Führt man hier die Gleichungen § 4, Abschnitt 7) (91), (92) für $k = n - 1$ bei Berücksichtigung der Schlußbemerkung dieses Abschnitts ein, so ergibt sich

$$(100)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{R'} G(u)^{n-2} H^{n-2} \sqrt{1 + G^2 H^2 \operatorname{tg}^2 \measuredangle \{u, T\}}\, du\, d s_{n-2},$$

wobei $d s_{n-2}$ das Euklidische Oberflächenelement der Breitenkugel bedeutet. Wegen (8), (9), (92), (98) erhält man

$$(101)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{R'} G(u)^{n-2} \left(\frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}\right)^{n-2} \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}\, du\, d s_{n-2},$$

wobei die Funktionen $G(u)$ und $r_E(u)$ überall stetig sind und $r'(u)$ bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte, in welchen diese Ableitung nicht zu existieren braucht.

Integriert man jetzt zuerst bei festem u über die Breitenkugel, so erhält man

$$(102)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(u)^{n-2} (n-1) E_{n-1} r_E(u)^{n-2} \left(\frac{2}{1 + \mathsf{K} r_E(u)^2}\right)^{n-2} \sqrt{1 + G(u)^2 r'(u)^2}\, du.$$

Schreibt man hier ξ statt u und führt (93) ein, so ergibt sich

$$(103)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2} O^*(r(\xi)) \sqrt{1 + G(\xi)^2 r'(\xi)^2}\, d\xi.$$

Nun ist gemäß (27)

$$(104)\qquad O^*(r(\xi)) = \frac{d V^*(r(\xi))}{d r(\xi)}$$

und mithin wegen (88)

$$(105)\qquad O^*(r(\xi)) = \frac{d J(\xi)}{d r(\xi)},$$

$$(106)\qquad O^*(r(\xi))\, r'(\xi) = \frac{d J(\xi)}{d \xi}.$$

Andererseits ist gemäß (25') und (88)

$$(107)\qquad O^*(r(\xi)) = O^*[V^*(r(\xi))] = O^*[J(\xi)].$$

Die Einführung der beiden letzten Gleichungen in (103) ergibt

$$(108)\qquad \overline{O}' = \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + G(\xi)^2 \left(\frac{d J(\xi)}{d \xi}\right)^2}\, d\xi.$$

Bezeichnet endlich $\overline{V}'$ das Volumen von K' in der Maßbestimmung (1), so hat man

$$\overline{V}' = \int_{K'} G(u)^{n-1} H(v_1 \ldots v_{n-1})^{n-1} \, du \, dv_1 \ldots dv_{n-1}. \tag{109}$$

Integriert man zuerst bei festem u über die Breitenkugel, so erhält man, da das Volumenelement des (v)-Raumes in der Maßbestimmung (24) durch

$$H(v_1 \ldots v_{n-1})^{n-1} \, dv_1 \ldots dv_{n-1} \tag{110}$$

gegeben wird,

$$\overline{V}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(u)^{n-1} V^*(r(u)) \, du. \tag{111}$$

Führt man hier (88) ein und schreibt ξ statt u, so ergibt sich

$$\overline{V}' = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1} J(\xi) \, d\xi. \tag{112}$$

Die Zusammenstellung der Gleichung (112) mit der Gleichung (22) und der Gleichung (108) mit der Ungleichung (45′) und der am Schluß des Abschnitts 4) festgestellten notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung ergibt, daß in der Maßbestimmung (1) der konstruierte Körper K' im Vergleich mit dem gegebenen Körper K bei gleichem Volumen eine, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, kleinere Oberfläche aufweist.

6) Wir können diese Feststellungen zu dem folgenden Hauptsatz zusammenfassen:

Das erste Abrundungstheorem.

Es sei $n \geqq 3$. Man setze voraus, daß in dem durch die Maßbestimmung (24) *definierten $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere Körper gleichen Volumens.*

Es sei im Modellraum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ K ein regulärer Körper, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Ebene $u =$ konst *im Sinne von § 4 Abschnitt* 1) *stattfindet.*

Es sei K' derjenige Euklidische Rotationskörper um die u-Achse, dessen Schnitte mit jeder Ebene $u =$ konst *Vollkugeln sind, welche in der Maßbestimmung* (1), (23) *das gleiche $(n-1)$-dimensionale Volumen besitzen wie der Querschnitt mit K.*

Dann besitzt der Körper K', welcher auch in der Maßbestimmung (1), (23) *einen Rotationskörper um die u-Achse darstellt, bei dieser Maßbestimmung im Vergleich mit K bei gleichem Volumen eine, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, kleinere Oberfläche.*

Zusatz zum ersten Abrundungstheorem. Wie aus dem Beweise unmittelbar hervorgeht, gestattet das Abrundungstheorem die folgende Verallgemeinerung:

Es bestehen für jedes Paar positiver stetiger Funktionen $\sigma(u)$, $\tau(u)$ die Relationen

$$(113)\qquad \int\limits_K \tau(u)\left(G(u)H(v_1\ldots v_{n-1})\right)^{n-1} du\, dv_1\ldots dv_{n-1}$$
$$= \int\limits_{K'} \tau(u)\left(G(u)H(v_1\ldots v_{n-1})\right)^{n-1} du\, dv_1\ldots dv_{n-1}.$$

$$(114)\qquad \int\limits_R \sigma(u)\,\overline{d s}_{n-1} \geqq \int\limits_{R'} \sigma(u)\,\overline{d s}_{n-1}.$$

Dabei ist der Rotationskörper K' durch die oben gegebene Vorschrift bestimmt und also von der Wahl der Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ unabhängig, R und R' bezeichnen die Berandungen von K und K', und das Gleichheitszeichen gilt in der zweiten Relation nur dann, wenn die beiden Körper in der Maßbestimmung (1), (23) kongruent sind.

7) Zum Schluß wollen wir noch über die Länge der Meridiankurve unseres Rotationskörpers K' Klarheit gewinnen.

Zunächst folgt aus (11) und (18)

$$\int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} G(\xi)^{n-1}\left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \bar{O}$$

und mithin

$$(115)\qquad \int\limits_{\alpha^*}^{\beta^*} \left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \frac{1}{\mu^{n-1}}\,\bar{O},$$

wobei μ das wegen (5) positive Minimum von $G(\xi)$ für $\alpha^* \leqq \xi \leqq \beta^*$ bedeutet.

Für das Euklidische Bogenelement der Meridiankurve erhält man gemäß (94) und (90)

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dr_E(u)}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K} r_E(u)^2}{2}\right)^2 \left(\frac{dr(u)}{du}\right)^2$$

und bei Einführung von (106), (107)

$$(116)\qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K} r_E(u)^2}{2}\right)^2 \frac{1}{O^*[J(u)]^2}\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2,$$

$$(117)\qquad \left(\frac{ds}{du}\right) \leqq 1 + \left(\frac{1+\mathsf{K} r_E(u)^2}{2}\right) \frac{1}{O^*[J(u)]}\left|\frac{dJ(u)}{du}\right|.$$

Nun sind, wie im Abschnitt 5) mehrfach hervorgehoben, die Funktionen $J(u)$ und mithin auch $r(u)$, $r_E(u)$, $O^*[J(u)]$ im Intervall $\alpha^* \leqq u \leqq \beta^*$ stetig, bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbar und verschwinden nur an den Stellen α^* und β^*. Daher gewährleistet die Ungleichung (117) in Verbindung mit (115) die Endlichkeit der Euklidischen Länge der Meridiankurve auf jedem Bogen, der von keinem ihrer beiden Endpunkte begrenzt wird, welche durch ihre beiden auf den Ebenen $u = \alpha^*$ und $u = \beta^*$ liegenden Schnittpunkte mit der Rotationsachse gegeben sind. Dagegen muß zugelassen werden, daß die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich wird. Da ferner das Verhältnis des Euklidischen Linienelements und des Linienelements in der Maßbestimmung (1) in jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge des Modellraumes wegen (23′) zwischen zwei positiven endlichen Größen bleibt, so gelten dieselben Feststellungen auch für die Bogenlänge der Meridiankurve in der Maßbestimmung (1).

§ 6.

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen und hyperbolischen Raum.

1) *Unter der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel soll in der Folge stets die Eigenschaft der Kugel verstanden werden, eine kleinere Oberfläche zu besitzen als jeder andere reguläre Körper gleichen Volumens.*

Es bezeichne wie § 5 (25″) im Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Raum das Symbol

$$O^*[V] \tag{1}$$

die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens, wobei die Funktion natürlich noch von der Dimensionszahl und dem Krümmungsmaß abhängt. Dann läßt sich die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel auch in Gestalt der Ungleichung

$$O \geqq O^*[V] \tag{2}$$

schreiben, wobei O und V Oberfläche und Volumen eines regulären Körpers bedeuten, und die Gleichheit nur von der Kugel erreicht wird.

Nun ist im Euklidischen und hyperbolischen Raum die Funktion (1) für alle nicht negativen Werte von V stetig definiert und wächst mit V eigentlich monoton von Null über alle Grenzen. In der sphärischen Geometrie dagegen ist die Funktion, wenn wir etwa den auf der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel ausgebreiteten n-dimensionalen sphärischen Raum zugrunde legen, nur für

$$0 \leqq V \leqq (n+1)E_{n+1} \tag{3}$$

definiert, wächst für

$$0 \leqq V \leqq \frac{n+1}{2} E_{n+1} \tag{4}$$

mit V stetig und eigentlich monoton von 0 bis nE_n und nimmt für

(5) $$\frac{n+1}{2} E_{n+1} \leqq V \leqq (n+1)E_{n+1}$$

mit wachsendem V stetig und eigentlich monoton von nE_n bis 0 ab. Dabei bedeutet wie schon früheren Ortes E_m das Volumen der m-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel.

In der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie läßt daher die Gleichung

(6) $$O^*[V] = \Omega$$

die eindeutige Umkehrung

(7) $$V = V^*\{\Omega\}$$

zu, wobei die Umkehrungsfunktion ebenfalls für alle nicht negativen Werte von Ω stetig definiert ist, mit Ω eigentlich monoton über alle Grenzen wächst und das Volumen einer Kugel als Funktion ihrer Oberfläche ausdrückt. Aus der isoperimetrischen Ungleichung (2) folgt daher

(8) $$V^*\{O\} \geqq V^*\{O^*[V]\} = V$$

— und umgekehrt. Die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel läßt sich mithin auch dahin definieren, daß die Kugel größeres Volumen besitzt als jeder andere Körper gleicher Oberfläche.

Im sphärischen Raum ist diese Umkehrung der isoperimetrischen Aussage offenbar nicht zulässig. Sie gilt nur dann, wenn lediglich solche Körper und Kugeln in Betracht gezogen werden, deren Volumen die Schranke $\frac{n+1}{2} E_{n+1}$, d. h. die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Bei dieser Einschränkung ist nämlich die Umkehrungsfunktion (7) eindeutig und wächst für

$$0 \leqq \Omega \leqq nE_n$$

eigentlich monoton mit Ω von 0 bis $\frac{n+1}{2} E_{n+1}$ Es folgt daher unter dieser Einschränkung aus (2) (8) und aus (8) (2).

Ferner läßt im Euklidischen und hyperbolischen Raum die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel noch die folgenden beiden Formulierungen zu:

Erstens: Zu jedem von einer Kugel verschiedenen regulären Körper gibt es eine Kugel von kleinerer Oberfläche und nicht kleinerem Volumen.

Denn es besitzt dann wegen der Monotonie der Funktion (1) die Kugel gleichen Volumens a fortiori kleinere Oberfläche.

Zweitens: Zu jedem von einer Kugel verschiedenen regulären Körper gibt es eine Kugel von nicht größerer Oberfläche und größerem Volumen.

Denn es besitzt wegen der Monotonie der Funktion (7) die Kugel gleicher Oberfläche a fortiori größeres Volumen.

In der sphärischen, etwa auf der Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel veranschaulichten Geometrie dagegen besitzt die Kugel vom Radius π die Oberfläche Null und das Volumen des Gesamtraumes, und es sind daher die Aussagen der beiden letzten Formulierungen trivial und für die Einsicht in die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel belanglos. Die beiden Formulierungen bleiben wiederum nur insoweit ein äquivalenter Ausdruck für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, als man nur solche Körper in Betracht zieht, deren Volumen die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Diese Bedingung, an welche die Schlüsse a fortiori, die durch die letzten beiden Formulierungen an die Hand gegeben werden, geknüpft sind, kompliziert die isoperimetrischen Betrachtungen in der sphärischen Geometrie, in welcher die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel daher erst im § 8 zum Beweis gelangen wird.

2) Man verstehe in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie unter einer „*einfachen*“ *Rotationsfläche* eine solche, deren Meridiankurve aus einem einfachen Jordanbogen besteht, welcher die Rotationsachse nur in seinen beiden Endpunkten trifft. Dementsprechend bezeichne man als einen „*einfachen*“ *Rotationskörper* einen solchen, dessen Oberfläche von einer einfachen Rotationsfläche gebildet wird.

Unter der Voraussetzung, daß die Koordinaten des laufenden Punktes der Meridiankurve sich als stetige und bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge darstellen lassen, habe ich an früherer Stelle[11]) die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern im n-dimensionalen Euklidischen hyperbolischen und sphärischen Raum bewiesen.

Dabei habe ich in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie die Fassung gewählt:

Die Kugel besitzt größeres Volumen als jeder andere einfache Rotationskörper gleicher Oberfläche.

Das ist die der Ungleichung (8) entsprechende Fassung, welche, wie oben festgestellt, in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie mit der ersten der Ungleichung (2) entsprechenden Formulierung gleichbedeutend ist.

---

[11]) l. c.[1] § 3 I, II; l. c.[2] § 3; l. c.[3] § 4. In dem unter l. c.[1] § 3 I, II zitierten Beweise findet sich noch die Voraussetzung, daß die Gesamtlänge der Meridiankurve endlich ist. Jedoch bleibt der Beweis unverändert bestehen, wenn die Voraussetzung dahin erweitert wird, daß zwar jeder Teilbogen, der nicht von einem der beiden Endpunkte der Meridiankurve begrenzt wird, endliche Länge besitzt, während die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich werden kann. Einfache Beweise für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit Rotationskörpern gab auch A. DINGHAS, „Zum isoperimetrischen Problem in Räumen konstanter Krümmung“, Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 677—737.

In der sphärischen Geometrie, in welcher jede einfache Rotationsfläche die Oberfläche zweier einfacher Rotationskörper bildet, die sich zum Gesamtraum ergänzen, habe ich zitierten Ortes die folgende Fassung gewählt:

Die nicht größere der beiden Vollkugeln, in welche der Gesamtraum durch eine Kugelfläche zerlegt wird, besitzt größeres Volumen als der nicht größere der beiden Rotationskörper, in welche der Gesamtraum durch jede andere oberflächengleiche einfache Rotationsfläche zerlegt wird.

Das ist wiederum die der Ungleichung (8) entsprechende Fassung, aber unter der, wie oben besprochen, bei dieser Fassung notwendigen Einschränkung auf Körper, deren Volumen die Hälfte des Gesamtraumes nicht überschreitet. Unter dieser Einschränkung ist, wie oben festgestellt, die gewählte Fassung ebenfalls mit der ersten, der Ungleichung (2) entsprechenden Formulierung gleichbedeutend. In dieser letzteren Formulierung folgt aber aus der Gültigkeit der Aussage für Volumina, welche die Hälfte des Gesamtraumes nicht übersteigen, ihre Geltung auch ohne diese Einschränkung. Denn liegen eine Vollkugel und ein einfacher Rotationskörper gleichen Volumens vor, welches die Hälfte des Gesamtraumes überschreitet, so besitzen die von denselben Flächen begrenzten Komplementärkörper ebenfalls gleiches Volumen. Dieses ist aber jetzt kleiner als die Hälfte des Gesamtraumes, und daher ist, wenn sie nicht kongruent sind, die Oberfläche der Vollkugel kleiner.

Damit ist gezeigt, daß in der Euklidischen, hyperbolischen und sphärischen Geometrie von beliebig viel Dimensionen die Kugel eine kleinere Oberfläche besitzt als jeder andere einfache Rotationskörper gleichen Volumens, dessen Meridiankurve eine bis auf endlich viele Punkte stetig differenzierbare Darstellung der Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge erlaubt.

Diese Voraussetzung involviert also insbesondere nicht die Endlichkeit der Gesamtlänge der Meridiankurve. Denn für die Darstellbarkeit ihrer Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge genügt es, wenn jeder Teilbogen, der nicht von einem der beiden Endpunkte der Meridiankurve begrenzt wird, endliche Länge besitzt, während die Länge bis zu einem oder beiden Endpunkten unendlich werden kann.

3) *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum.*

Es sei $n \geqq 3$. Wir setzen im $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Raum die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der am Eingang dieses Paragraphen formulierten Fassung, *welche fortan durchweg festgehalten werden soll,* als bewiesen voraus.

Es sei im n-dimensionalen Euklidischen Raum der reguläre Körper K gegeben.

Man wähle das rechtwinklige Koordinatensystem $u, v_1 \ldots v_n$ dergestalt, daß die Richtung der u-Achse in bezug auf den Körper nicht eigentlich singulär ist. Das ist stets möglich, da die Richtungspunkte der singulären Richtungen auf der Einheitskugel, wie am Eingang von § 4 Abschnitt 9) ausgeführt, den äußeren Inhalt Null besitzen. Da

$$ds^2 = du^2 + \sum_1^{n-1}{}_\nu \, dv_\nu^2$$

wird, so ist in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23)

$$\mathsf{K} = 0, \quad H = 2, \quad G = \tfrac{1}{2}$$

zu setzen. Laut dem ersten Abrundungstheorem läßt sich nun zu K ein Rotationskörper K' konstruieren, der, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist. Dabei wird die Rotationsachse von der u-Achse gebildet, und die Entfernung des laufenden Punktes der Meridiankurve von ihr ist eine für $\alpha^* \leqq u \leqq \beta^*$ definierte stetige, bis auf endliche viele Punkte stetig differenzierbare Funktion von u, welche nur an den beiden Endpunkten α^* und β^* verschwindet. Da endlich gemäß § 5 Abschnitt 7) auf der Meridiankurve jeder nicht von einem ihrer beiden Endpunkte begrenzte Bogen endliche Länge besitzt, so ist K' ein einfacher Rotationskörper, der den Voraussetzungen des Satzes genügt, welcher am Schlusse des vorigen Abschnitts über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern formuliert worden ist. Diesem Satz zufolge besitzt der Rotationskörper K', wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche als die ihm volumengleiche Kugel. Faßt man die Ergebnisse des Vergleichs zwischen dem gegebenen regulären Körper K und dem konstruierten volumengleichen einfachen Rotationskörper K' und zwischen letzterem und der ihm volumengleichen Kugel zusammen, so folgt, daß ein regulärer Körper, wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt, als die volumengleiche Kugel. Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der Euklidischen Geometrie für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n-1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

4) *Erster Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum.*

Es sei dem Innern der Einheitskugel

$$\sum_1^n{}_\nu \, y_\nu^2 < 1 \tag{9}$$

die Maßbestimmung

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1 - \sum_1^n{}_\nu y_\nu^2}\right) \sum_1^n{}_\nu \, dy_\nu^2 \tag{10}$$

aufgeprägt. Dadurch wird ein hyperbolischer Raum mit dem Krümmungsmaß -1 definiert. Es sei K in diesem ein gegebener regulärer Körper.

Nun läßt sich, wie § 4 Abschnitt 1) ausgeführt, jede der endlich vielen regulären Randmannigfaltigkeiten aller Dimensionenzahlen von K durch endlich viele beschränkte zweifach glatte Mannigfaltigkeiten überdecken. Aus dem Satze VII'' § 2 Abschnitt 6) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX § 2 Abschnitt 8) folgt daher, daß die Gesamtheit der absoluten Punkte derjenigen äquidistanten Orizykelflächenscharen, von welchen die Randmannigfaltigkeiten von K in unendlich vielen Punkten berührt werden, auf der Oberfläche der Euklidischen Einheitskugel (9) den äußeren Inhalt Null besitzt. Man kann daher die Orizykelflächenschar so wählen, daß die Gesamtheit aller Randmannigfaltigkeiten aller Dimensionenzahlen von K von ihr nur in endlich vielen Punkten berührt wird. Führt man jetzt wie § 3 Abschnitt 4) das dieser Schar entsprechende Koordinatensystem ein, so erhält man gemäß § 3 (35), indem man statt x_1 u und statt $x_2 \ldots x_n$ $v_1 \ldots v_{n-1}$ schreibt,

$$ds^2 = du^2 + e^{-2u} \sum_1^{n-1}{}_\nu \, d v_\nu^2, \tag{11}$$

wobei sichergestellt ist, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der die Orizykelflächen darstellenden Ebenen $u =$ konst stattfindet. Setzt man in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23) $\mathsf{K} = 0$, $H = 2$, $G = \frac{1}{2} e^{-u}$, so nimmt das Linienelement § 5 (1) die Gestalt unseres Linienelementes (11) an. Da ferner für $\mathsf{K} = 0$, also im Euklidischen Fall, die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel für alle Dimensionenzahlen im vorigen Abschnitt bewiesen worden ist, so ist die vom Abrundungstheorem als Voraussetzung geforderte Gültigkeit der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im $(n-1)$-dimensionalen (v)-Raum gewährleistet. Damit sind alle Voraussetzungen des ersten Abrundungstheorems sichergestellt. Laut diesem läßt sich in der Maßbestimmung (11) zu K ein einfacher Rotationskörper K' konstruieren, welcher, wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist, und über dessen Meridiankurve alle die Feststellungen sich wiederholen lassen, welche im vorigen Abschnitt hinsichtlich der Meridiankurve des dort konstruierten Rotationskörpers gemacht worden sind.

Da nun kraft des am Schlusse des Abschnitts 2) formulierten Satzes in der Maßbestimmung (10), (11) des hyperbolischen Raumes ein solcher Rotationskörper K', wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt als die volumengleiche Kugel, so gilt dasselbe a fortiori für den gegebenen regulären Körper K. *Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im* *hyperbolischen Raum von n Dimensionen für $n \geqq 3$ vollständig bewiesen.* Für $n = 2$ ist sie an früherer Stelle[12]) von mir bewiesen worden.

5) *Zweiter Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum.*

Der im vorigen Abschnitt auseinandergesetzte Beweis macht den Induktionsschluß entbehrlich, indem er die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Euklidischen Raum heranzieht. Wir wollen jetzt einen Beweis geben, der ohne Anleihe bei der Euklidischen Geometrie sich auf den Induktionsschluß stützt.

Durch dieselbe Schlußweise wie im vorigen Abschnitt folgt aus dem Satz V § 2 Abschnitt 5) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX § 2 Abschnitt 8):

Im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum der hyperbolischen Ebenenkoordinaten besitzt die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche hyperbolischen Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar die Randmannigfaltigkeiten eines gegebenen regulären Körpers K in unendlich vielen Punkten berührt, den äußeren Inhalt Null. Man kann daher eine hyperbolische Ebene so wählen, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Abstandsfläche dieser Ebene stattfindet. Führt man jetzt gemäß § 3 Abschnitt 5) ein dieser Schar entsprechendes Koordinatensystem ein, so erhält man gemäß § 3 (51), wenn statt x_1 u und statt $x_2 \ldots x_n$ $v_1 \ldots v_{n-1}$ geschrieben wird,

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 u \left(\frac{2}{1 - \sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2} \right)^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu dv_\nu^2, \tag{12}$$

wobei sichergestellt ist, daß auf den Randmannigfaltigkeiten von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der die Abstandsflächen darstellenden Ebenen $u = \text{konst}$ stattfindet. Setzt man in den Gleichungen § 5 (1), (2), (3), (23)

$$\mathsf{K} = -1, \quad H = \frac{2}{1 - \sum_1^{n-1}{}_\nu v_\nu^2}, \quad G = \cosh u,$$

so nimmt das Linienelement § 5 (1) die Gestalt unseres Linienelements (12) an.

Es sei nun $n \geqq 3$. Man mache die Voraussetzung, daß die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im $(n-1)$-dimensionalen hyperbolischen Raum bewiesen sei. Dann sind für unser Linienelement (12) alle Voraussetzungen des ersten Abrundungstheorems sichergestellt. Laut diesem läßt sich in der Maßbestimmung (12) zu K ein einfacher Rotationskörper K' bestimmen, welcher,

[12]) l. c.[2] S. 204—218.

wenn die beiden Körper nicht kongruent sind, bei gleichem Volumen eine kleinere Oberfläche aufweist, und über dessen Meridiankurve alle die Feststellungen sich wiederholen lassen, die im Abschnitt 3) hinsichtlich der Meridiankurve des dort konstruierten Rotationskörpers gemacht worden sind.

Hieraus ergibt sich jetzt genau so wie im Abschnitt 4), daß der gegebene reguläre Körper K, wenn er keine Kugel ist, eine größere Oberfläche besitzt als die volumengleiche Kugel. Damit ist in der hyperbolischen Geometrie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n-1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich, wie an früherer Stelle[12]) von mir bewiesen, für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

§ 7.

Das zweite Abrundungstheorem.

1) Es sei M_k eine reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $1 \leqq k \leqq n-1$, im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$. Wir sagen, die Mannigfaltigkeit werde in einem ihrer Punkte von einer Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu (x_\nu - c_\nu)^2 = r^2$$

berührt, wenn deren $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene die k-dimensionale Tangentialebene von M_k enthält, oder wenn der Berührungspunkt einer k'-dimensionalen Randmannigfaltigkeit, $1 \leqq k' < k$, angehört, deren k'-dimensionale Tangentialebene in die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene der Kugel fällt, oder endlich, wenn der Punkt einer nulldimensionalen Randmannigfaltigkeit angehört, d. h. ein Eckpunkt ist.

Es werde nun M_k von einer Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = u^2 \tag{1}$$

dergestalt geschnitten, daß eine Berührung nirgends stattfindet.

Dann besteht, wie wir alsbald beweisen wollen, der Schnitt aus endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Mannigfaltigkeiten Randpunkte sein — und zwar Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer $(k-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit liegen und mithin einer $(k-3)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören. Ferner geht jeder innere Punkt von M_k in einen inneren

---

[12]) l. c.[2], S. 204—218.

Punkt einer der endlich vielen regulären $(k-1)$-dimensionalen Schnittmannigfaltigkeiten über, während jeder Randpunkt von M_k zu einem Randpunkt der gesamten Schnittmannigfaltigkeit im Sinne der Definition l. c.[1] § 5 III (b) wird.

Endlich wird die Mannigfaltigkeit M_k selbst durch die Kugel in endlich viele reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeiten zerlegt, von denen das Innere mindestens einer ganz im Äußeren der Vollkugel liegt und das Innere mindestens einer ganz im Innern.

Beweis. Man betrachte M_k als eine reguläre k-dimensionale auf der Ebene $x_0 = 0$ gelegene Mannigfaltigkeit im $(n+1)$-dimensionalen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_0, x_1 \ldots x_n$. Man spiegele den Raum an der Kugel mit dem Mittelpunkt $x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ \ldots x_n = 0$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Dabei gehe der Punkt $x_0, x_1 \ldots x_n$ in den Punkt $x_0', x_1' \ldots x_n'$ über. Man erhält

$$x_0' - 1 = \frac{2(x_0-1)}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}, \quad x_\nu' = \frac{2x_\nu}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}, \quad \nu = 1, \ldots n. \tag{2}$$

$$dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2 = \left(\frac{2}{(x_0-1)^2 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}\right)^2 \left(dx_0^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2\right). \tag{3}$$

Die Ebene $x_0 = 0$ wird dabei stereographisch auf die Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt projiziert, und die Formeln (2), (3) gewinnen die Gestalt

$$x_0 = 0,$$

$$x_0' = \frac{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 - 1}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1}, \quad x_\nu' = \frac{2x_\nu}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1}, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2 = \left(\frac{2}{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1}\right)^2 \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2, \\ \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = \left(\frac{1}{1-x_0'}\right)^2 \left(dx_0'^2 + \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu'^2\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Da die Transformation, abgesehen vom Transformationszentrum, eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar ist, so entspricht, wie § 4 Abschnitt 1) festgestellt, jeder regulären k-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf der Ebene $x_0 = 0$ eine nicht durch das Transformationszentrum gehende reguläre k-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche auf der Einheitskugel ausgebreitet ist — und umgekehrt. Das mithin reguläre k-dimensionale auf der Einheitskugel gelegene Spiegelbild von M_k werde mit M'_k bezeichnet. Einer auf der n-dimensionalen Ebene $x_0 = 0$ gelegenen Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = u^2 \tag{6}$$

entspricht jetzt gemäß (4) der Schnitt der Einheitskugel mit der Ebene

$$x'_0 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}. \tag{7}$$

Dabei geht eine im obigen Sinn erklärte Berührung von M_k mit der Kugel (6) in eine im gleichen Sinn erklärte Berührung, d. h. also eine gemäß § 4 Abschnitt 1) definierte Berührung von M'_k mit der Ebene (7) über — und umgekehrt. Machen wir also die Voraussetzung, daß M_k die Kugel nicht berührt, so findet zwischen M'_k und der Ebene (7) ebenfalls keine Berührung statt. Es gelten daher für M'_k die Sätze l. c.[1] § 6 III (13) und (14), aus deren Übertragung auf M_k die zu beweisenden Behauptungen sich ablesen lassen.

2) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß es auf M_k nicht unendlich viele Punkte gibt, in welchen M_k von einer Kugel der konzentrischen Kugelschar (6) berührt wird. Man bezeichne denjenigen Teil von M_k, für welchen

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2, \quad \xi \geqq 0$$

ist, mit dem Symbol

$$M_k\Big(\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2\Big).$$

Dann ist, wie wir alsbald beweisen wollen, das Integral

$$\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, d s_k\,, \tag{8}$$

wobei φ eine auf M_k stetige Funktion bedeutet und ds_k das k-dimensionale Flächenelement, für alle Werte von ξ bestimmt, als Funktion von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen sogenannten Ausnahmewerten, für welche M_k von der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Man hat daher für alle Werte von ξ

$$\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, d s_k = \int_0^\xi \frac{d}{du}\left(\int\limits_{M_k\left(\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 \leqq u^2\right)} \varphi\, d s_k\right) du, \tag{9}$$

wobei auf der rechten Seite der Integrand unter dem äußeren Integral bis auf die höchstens endlich vielen Ausnahmewerte definiert und als Funktion von u stetig ist.

Beweis. Es habe M'_k dieselbe Bedeutung wie bei dem im vorigen Abschnitt durchgeführten Beweise. Dann folgt aus den dort gemachten Feststellungen, daß M'_k nicht in unendlich vielen Punkten von der Ebenenschar (7) berührt wird. Aus den Sätzen XI, XII § 4 in ihrer Spezialisierung auf die Euklidische Maßbestimmung folgt daher zunächst:

Das Integral

$$\int\limits_{M'_k(x'_0 \leqq \eta)} \psi\, ds'_k, \tag{10}$$

wobei ψ eine auf M'_k stetige Funktion bedeutet und ds'_k das k-dimensionale Euklidische Flächenelement, ist für alle Werte von η bestimmt, als Funktion von η stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte, für welche M'_k von der Ebene $x'_0 = \eta$ berührt wird, auch stetig differenzierbar.

Nun ist gemäß (4)

$$x'_0 = \frac{\sum\limits_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 - 1}{\sum\limits_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \sum\limits_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}$$

Wegen

$$\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \xi^2}$$

sind mithin die Ungleichungen

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2 \quad \text{und} \quad x'_0 \leqq \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}$$

miteinander gleichbedeutend. Man hat daher wegen (5)

$$\int\limits_{M_k\left(\sum\limits_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_k = \int\limits_{M'_k\left(x'_0 \leqq \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}\right)} \frac{\varphi}{(1 - x'_0)^k}\, ds'_k = \int\limits_{M'_k(x'_0 \leqq \eta)} \psi\, ds'_k, \tag{11}$$

wobei

$$\eta = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}, \quad \psi = \frac{\varphi}{(1 - x'_0)^k}$$

gesetzt ist, und ds_k und ds'_k die einander entsprechenden Flächenelemente bedeuten. Also gilt, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten von ξ

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{M_k\left(\sum\limits_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_k = \frac{4\,\xi}{(\xi^2 + 1)^2}\, \frac{d}{d\eta} \int\limits_{M'_k(x'_0 \leqq \eta)} \psi\, ds'_k. \tag{12}$$

Die über das Integral (10) gemachten Feststellungen in Verbindung mit (11) und (12) ergeben die zu beweisenden, das Integral (8) betreffenden Behauptungen.

3) Da bei der gewählten Transformation (2), (3), (4), (5) ein im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ gelegener regulärer Körper in eine auf der Einheitskugel ausgebreitete, das Transformationszentrum nicht enthaltende reguläre n-dimensionale Mannigfaltigkeit übergeht, so erhält man durch dieselbe Übertragung wie oben unter 1) aus dem Satz l. c.[1] § 6 III (13) das folgende Ergebnis:

Es werde im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ der reguläre Körper K von einer Kugel dergestalt geschnitten, daß sie nirgends eine der Randmannigfaltigkeiten im oben erklärten Sinn berührt. Dann besteht der Schnitt aus endlich vielen regulären $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Wenn zwei derselben Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Randpunkte sein — und zwar für beide Randpunkte höherer Ordnung, d. h. solche Randpunkte, welche nicht im Innern einer ihrer regulären $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten liegen und mithin einer $(n-3)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören. Ferner geht jeder Randpunkt von K in einen Randpunkt des Schnittes im Sinne der Definition l. c.[1] § 5 III (b) über und jeder innere Punkt von K in einen inneren Punkt einer der endlich vielen regulären Mannigfaltigkeiten, aus welchen der Schnitt besteht.

Wir wollen jetzt zeigen, daß ein Randpunkt des Schnittes in der Definition l. c.[1] § 5 III b auch im gewöhnlichen Sinn ein Randpunkt der den Schnitt bildenden Punktmenge relativ zur Kugeloberfläche (6) sein muß. Gemäß der Definition l. c.[1] § 5 III b gilt ein Punkt dann als ein Randpunkt des Schnittes, wenn es kein $(n-1)$-dimensionales Grundgebilde gibt, das diesen Punkt nebst den Punkten des Schnittes in einer gewissen Umgebung im Innern enthält und ganz aus Punkten des Schnittes besteht. Wäre nun der betrachtete Randpunkt P des Schnittes kein Randpunkt im gewöhnlichen Sinn relativ zur Kugeloberfläche, so bestände eine gewisse Umgebung von P auf dieser ganz aus Punkten des Schnittes, und innerhalb einer solchen ließe sich ein P noch im Innern enthaltendes $(n-1)$-dimensionales Grundgebilde abgrenzen — im Widerspruch zur Voraussetzung. Wir sehen also, daß, wenn auf einer den Rand von K nicht berührenden Kugel (6) Randpunkte von K liegen, auf ihr auch Punkte liegen müssen, die nicht zu K gehören.

Ebenso folgt aus l. c.[1] § 6 III (14), daß der Körper K durch eine ihn schneidende, aber den Rand im obigen Sinne nirgends berührende Kugel (6) in endlich viele reguläre Körper zerlegt wird, so daß jedes der beiden offenen Raumgebiete, in welche der Gesamtraum durch die Kugel zerlegt wird, das Innere mindestens eines der Teilkörper enthält. Durch Wiederholung folgt hieraus, daß der reguläre Körper K durch zwei ihn schneidende, aber den

Rand nirgends berührende konzentrische Kugeln (6) in endlich viele reguläre Körper zerlegt wird, so daß jedes der drei offenen Gebiete, in welche der Gesamtraum durch die beiden Kugelflächen zerlegt wird, das Innere mindestens eines der Teilkörper enthält. Dabei bleibt jeder Randpunkt ein Randpunkt, und die inneren Punkte auf den beiden konzentrischen Kugeloberflächen werden ebenfalls Randpunkte. Abgesehen von diesen geht jeder innere Punkt in einen inneren Punkt eines der Teilkörper über. Wenn endlich zwei Teilkörper, welche beide in demselben der drei von den beiden Kugeloberflächen abgegrenzten Gebiete liegen, also etwa beide sich zwischen den beiden Kugeloberflächen befinden, Punkte gemein haben, so müssen diese für beide Randpunkte höherer Ordnung sein, d. h. einer $(n-2)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeit angehören.

4) Wir machen jetzt wieder die Voraussetzung, daß es auf den Randmannigfaltigkeiten des regulären Körpers K nicht unendlich viele Punkte gibt, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Kugelschar (6) stattfindet. Man bezeichne mit R den Rand von K, mit R^λ_{n-1}, $\lambda = 1, 2, \ldots$ die endlich vielen regulären Randmannigfaltigkeiten, aus welchen R besteht, und mit φ eine stetige Funktion auf R. Gemäß den unter 2), (8) (9) gemachten Feststellungen ist dann das Integral

$$\int\limits_{R^\lambda_{n-1}\left(\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_{n-1}$$

bestimmt, für alle Werte von ξ stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche die Mannigfaltigkeit von der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Nun ist

$$\int\limits_{R\left(\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_{n-1} = \sum\nolimits_\lambda \int\limits_{R^\lambda_{n-1}\left(\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_{n-1},$$

wobei auf der rechten Seite über alle Randmannigfaltigkeiten zu summieren ist. Denn da wegen l. c.[1] § 6 III (f) zwei Randmannigfaltigkeiten nur Punkte gemein haben können, die für beide wiederum Randpunkte sind, d. h. also einer $(n-2)$-dimensionalen regulären Randmannigfaltigkeit angehören, so liefern die in der Summe auf der rechten Seite mehrfach in Anschlag kommenden Teile von R keinen endlichen Beitrag zu den Integralen. Daher ist auch das Integral

$$\int\limits_{R\left(\sum\limits_1^n{}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi\, ds_{n-1} \tag{13}$$

für alle Werte von ξ bestimmt, als Funktion von ξ stetig, und abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche eine der Randmannigfaltigkeiten von K von der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \xi^2$$

berührt wird, auch stetig differenzierbar. Man hat folglich

$$\int\limits_{R\left(\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 \leqq \xi^2\right)} \varphi \, d s_{n-1} = \int_0^\xi \frac{d}{d t}\left(\int\limits_{R\left(\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 \leqq t^2\right)} \varphi \, d s_{n-1}\right) d t, \tag{14}$$

wobei auf der rechten Seite der Integrand unter dem äußeren Integral bis auf die höchstens endlich vielen Ausnahmewerte definiert und als Funktion von t stetig ist.

5) Wir bleiben bei der Voraussetzung, daß auf den Randmannigfaltigkeiten des regulären Körpers K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Schar (6) stattfindet, und bezeichnen die endlich vielen Radien der berührenden Kugeln als die Ausnahmewerte von u.

Ferner setzen wir voraus, daß der Koordinatenanfangspunkt nicht auf dem Rande von K liegt.

Es bezeichne α^* den kleinsten und β^* den größten Abstand des regulären und mithin abgeschlossenen Körpers K vom Koordinatenanfangspunkt. Dann liegt der Koordinatenanfangspunkt, da er voraussetzungsgemäß nicht Randpunkt ist, für $\alpha^* = 0$ im Innern des Körpers, für $\alpha^* > 0$ im Äußern. Da ferner wegen der Definitionseigenschaft l. c.[1] §6 III (d) eines regulären Körpers jeder Randpunkt von K Häufungspunkt von inneren Punkten ist, so ist α^* auch die untere Grenze des Abstandes der inneren Punkte von K vom Koordinatenanfangspunkt und β^* die obere Grenze. Ist daher

$$\alpha^* < u < \beta^*,$$

so gibt es einen inneren Punkt P', dessen Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt größer als u ist, und einen inneren Punkt P'', dessen Entfernung kleiner als u ist. Gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (e) lassen sich nun P' und P'' durch einen ganz im Innern von K verlaufenden Weg verbinden. Also muß es auf der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = u^2 \tag{15}$$

innere Punkte von K geben. Diese sind a fortiori auch relativ zur Kugeloberfläche innere Punkte des Schnittes, welchen diese mit dem Körper bildet, und welcher mit dem Symbol

$$K\left(\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = u^2\right) \tag{16}$$

bezeichnet werden möge.

Liegt also u im offenen Intervall zwischen α^* und β^*, so sind nur die folgenden drei Fälle möglich:

I. Die Kugeloberfläche (6) besteht nur aus inneren Punkten von K.

II. Die Kugeloberfläche enthält innere und Randpunkte, aber keinen äußeren Punkt von K.

Da, wie im vorletzten Absatz des Abschnitts 3) festgestellt, auf eine die Randmannigfaltigkeiten von K nirgends berührenden Kugel, auf welche Randpunkte von K liegen, auch äußere Punkte von K vorhanden sein müssen so kann der Fall II nur eintreten, wenn die Kugel eine der Randmannigfaltigkeiten von K berührt, d. h. wenn u einen der endlich vielen Ausnahmewerte annimmt.

III. Die Kugeloberfläche enthält sowohl innere als äußere und mithin auch Randpunkte von K.

Für die Kugeloberfläche

$$\Sigma x_\nu^2 = \beta^{*2} \tag{17}$$

gilt auf Grund der Definition von β^* das folgende: Die Kugeloberfläche kann keinen inneren Punkt von K enthalten, und da sie Punkte von K enthalten muß, so liegen auf ihr Randpunkte von K. In jedem dieser Randpunkte muß sie eine Randmannigfaltigkeit berühren. Es sei nämlich P ein auf der Kugel gelegener Randpunkt von K, k die niedrigste Dimensionenzahl der ihn enthaltenden Randmannigfaltigkeiten, und R_k^ν eine solche. Ist dann $k = 0$, so ist P ein Eckpunkt, und in einem solchen berührt definitionsmäßig jede durch ihn gehende Kugel den Rand. Ist aber $k > 0$, so muß P ein innerer Punkt von $R_k^{(\nu)}$ sein, denn sonst müßte P einer der $(k-1)$-dimensionalen Randmannigfaltigkeiten von $R_k^{(\nu)}$ angehören — im Widerspruch zur Definition von k. Fände nun in P keine Berührung statt, so könnte dort die k-dimensionale Tangentialebene von $R_k^{(\nu)}$ nicht in die $(n-1)$-dimensionale Tangentialebene der Kugel fallen. Es gäbe also auf $R_k^{(\nu)}$ eine P im Innern enthaltende Kurve, welche die Tangentialebene der Kugel (17) nicht berührt. Auf dieser müßte es aber Punkte geben, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt β^* übersteigt — im Widerspruch zur Definition von β^*. Da voraussetzungsgemäß auf dem Rande von K nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der Schar (6) stattfindet, so liegen auf der Kugel (17) nur endlich viele Randpunkte von K. Sie besteht also, abgesehen von diesen, nur aus äußeren Punkten von K. Dasselbe gilt für $\alpha^* > 0$ auch von der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \alpha^{*2}, \quad \alpha^* > 0. \tag{18}$$

Für die Kugel mit dem Radius β^* und im Falle $\alpha^* > 0$ auch noch für die Kugel mit dem Radius α^* und nur für diese beiden Kugeln gilt also der Fall IV:

IV. Die Kugel enthält keine inneren und nur endlich viele, aber mindestens einen Randpunkt von K.

Auf der Halbgeraden $u > 0$ bilden diejenigen Punkte, für welche der Fall I eintritt, eine offene Punktmenge. Ebenso diejenigen Punkte, für welche der Fall III Platz greift. Es sei nun l die, wie oben festgestellt, endliche Anzahl derjenigen Punkte, welche zum Fall II gehören, wobei l natürlich auch verschwinden kann. Die Werte von u in diesen Punkten der Größe nach geordnet seien

$$\gamma_1 < \gamma_2 \ldots < \gamma_l. \tag{19}$$

Dann können die Randpunkte relativ zur Halbgeraden $u \geqq 0$ sowohl derjenigen Punktmenge, für welche der Fall I Platz greift, als auch derjenigen, welche zum Fall III gehören, nur von den Punkten

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 \ldots < \gamma_l < \gamma_{l+1}, \quad \gamma_0 = \alpha^*, \quad \gamma_{l+1} = \beta^*, \tag{20}$$

gestellt werden. Jede der beiden Punktmengen besteht also aus endlich vielen offenen Intervallen, deren jedes von zwei aufeinanderfolgenden Punkten der $l + 2$ Punkte (20) begrenzt wird. Dabei können für $1 \leqq \lambda \leqq l$ in keinem Punkte γ_λ zwei der offenen Intervalle aneinanderstoßen, in welchen der Fall I stattfindet. Dann müßte nämlich das gesamte von den beiden konzentrischen Kugeloberflächen

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \gamma_{\lambda-1}^2, \quad \sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \gamma_{\lambda+1}^2$$

begrenzte Gebiet des n-dimensionalen Raumes zu K gehören, und es könnten daher auf der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \gamma_\lambda^2$$

keine Randpunkte von K liegen — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß für $u = \gamma_\lambda$ der Fall II eintritt. Für $1 \leqq \lambda \leqq l$ ist also jeder Punkt γ_λ Randpunkt von einem oder zwei der offenen Intervalle, welche zum Fall III gehören. Der Punkt γ_{l+1} ist wegen $\gamma_{l+1} = \beta^*$ Endpunkt eines zum Fall III gehörigen Intervalls. Ebenso ist der Punkt γ_0 wegen $\gamma_0 = \alpha^*$ für $\alpha^* > 0$ Anfangspunkt eines solchen, während er für $\alpha^* = 0$ Anfangspunkt eines zum Fall I gehörigen Intervalls ist.

Es sei nun m die Anzahl der offenen zum Fall III gehörigen Intervalle, und es mögen γ'_μ und γ''_μ, $\mu = 1 \ldots m$, ihre Anfangs- und Endpunkte sein. Dann hat man

$$\gamma'_\mu < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m, \quad \gamma''_\mu \leqq \gamma'_{\mu+1}, \quad \mu = 1 \ldots m-1, \tag{21}$$

$$\gamma''_m = \beta^*, \quad \gamma'_1 = \alpha^* \text{ für } \alpha^* > 0, \quad \gamma'_1 > \alpha^* \text{ für } \alpha^* = 0. \tag{22}$$

Dabei gehören sämtliche Punkte, für welche der Fall II eintritt, zu den Anfangs- und Endpunkten dieser Intervalle, und es tritt in diesen Anfangs- und Endpunkten auch der Fall II ein mit Ausnahme des Punktes $\gamma''_m = \beta^*$ und für $\alpha^* > 0$ noch des Punktes $\gamma'_1 = \alpha^*$, in welchen der Fall IV Platz greift.

6) Unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnitts projizieren wir vom Koordinatenanfangspunkt M aus den Schnitt

$$K\left(\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = u^2\right) \tag{23}$$

auf die Einheitskugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = 1 \tag{24}$$

und bezeichnen den Flächeninhalt der Projektion mit $J(u)$. Dann ist, wie wir zunächst beweisen wollen, die Funktion $J(u)$ für alle Werte von u bestimmt und stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, auch stetig differenzierbar.

Für $u > \beta^*$ ist $J(u)$ konstant gleich Null, ebenso im Falle $\alpha^* > 0$ für $u < \alpha^*$. Ist $\alpha^* = 0$, so läßt sich ein $\alpha' > 0$ so bestimmen, daß für $0 < u < \alpha'$ $J(u)$ konstant gleich der Gesamtoberfläche der Einheitskugel bleibt, so daß also

$$J(u) = nE_n \tag{25}$$

gilt, wobei wie schon früheren Ortes E_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Ebenso gilt die letzte Gleichung in allen Punkten, für welche der Fall I eintritt, und welche, wie wiederholt werden darf, eine offene Punktmenge bilden. In allen den genannten Gebieten ist also $J(u)$ konstant und mithin, da sie offen sind, auch stetig. Definiert man $J(0)$ im Falle $\alpha^* = 0$ durch nE_n und im Falle $\alpha^* > 0$ durch 0, so bleibt die Funktion auch an der Stelle $u = 0$ stetig.

7) Es liege nun an der Stelle $u = \xi'$ der Fall III vor. Dann gehört ξ' einem der m offenen Intervalle (21), (22) an. Es sei also

$$\gamma'_\mu < \xi' < \gamma''_\mu. \tag{26}$$

Da im Falle III auf der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu\, x_\nu^2 = \xi'^2$$

sowohl innere als auch äußere Punkte von K liegen, so gilt zunächst

$$(27) \qquad nE_n > J(\xi') > 0.$$

Es sei ferner N ein auf dieser Kugel gelegener Punkt, der nicht zu K gehört, und N' seine Projektion auf die Einheitskugel (24). Dann kann man $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß

$$(28) \qquad \gamma'_\mu < \underline{\xi} < \xi' < \bar{\xi} < \gamma''_\mu$$

ist, daß weder $\underline{\xi}$ noch $\bar{\xi}$ in eine der endlich vielen Ausnahmestellen fallen, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl die Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Äußeren von K liegen. Man projiziere jetzt die Einheitskugel stereographisch vom Nordpol N' aus auf die durch M gehende, zum Halbstrahl MN' senkrechte Ebene. Es sei P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $x_1 \ldots x_n$, P' seine Projektion von M aus auf die Einheitskugel. Es sei

$$(29) \qquad u = \overline{MP} = \sqrt{\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}\,,$$

und es seien auf der Ebene der stereographischen Projektion $v_1 \ldots v_{n-1}$ die rechtwinkligen Koordinaten der stereographischen Projektion von P'. Man erhält entsprechend der Formel § 3 (9)

$$(30) \qquad ds^2 = \sum_1^n{}_\nu\, dx_\nu^2 = du^2 + u^2 \left(\frac{2}{1+\sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu^2}\right)^2 \sum_1^{n-1}{}_\nu\, dv_\nu^2.$$

Es bezeichne K^* das Bild von K im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$. Da die Transformation bei Ausschluß des von M über N' hinausweisenden Halbstrahls eindeutig, eindeutig umkehrbar und zweimal stetig differenzierbar ist, so ist sie berührungserhaltend und führt, wie § 4 1) festgestellt, reguläre Mannigfaltigkeiten und Körper in ebensolche über. Der zwischen den beiden konzentrischen Kugeln mit den Radien $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ gelegene Teil von K, der in unserer Schreibweise mit dem Symbol

$$K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$$

zu bezeichnen ist, besteht nun, wie im laufenden Paragraphen unter 3) festgestellt, aus endlich vielen regulären Körpern, welche nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Da dieser abgeschlossene Teil von K keinen Punkt des von M nach N' gerichteten Halbstrahls enthält, so folgt, daß im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ auch der zwischen den beiden Ebenen $u = \underline{\xi}$ und $u = \bar{\xi}$ liegende Teil von K^*

$$K^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$$

aus endlich vielen regulären Körpern besteht, welche nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Ebenso entspricht jeder Berührung einer Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = u_1^2, \quad \underline{\xi} \leqq u_1 \leqq \bar{\xi}$$

mit einer der Randmannigfaltigkeiten von K bei der Transformation in dem Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$ eine Berührung der Ebene $u = u_1$ mit der entsprechenden Randmannigfaltigkeit von K^* und umgekehrt. Es gibt daher im Bereich $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ auf den Randmannigfaltigkeiten von K^* nur endlich viele Punkte, in welchen eine Berührung mit einer Ebene der Ebenenschar $u =$ konst stattfindet. Man bezeichne mit $K^{*\lambda}$, $\lambda = 1, 2 \ldots$, die endlich vielen regulären Teilkörper, aus welchen K^* $(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ besteht. Dann folgt aus den obigen Feststellungen gemäß (30) für

(31) $$\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$$

(32) $$J(\xi) = \sum\nolimits_\lambda \int\limits_{K^{*\lambda}(u=\xi)} \left(\frac{2}{1 + \sum_1^{n-1}{}_\nu\, v_\nu}\right)^{n-1} d v_1 \ldots d v_{n-1}.$$

Dabei ist, wie den Feststellungen im Anschluß an § 5 (17) entspricht, auf der rechten Seite jedes einzelne der Integrale und mithin auch ihre Summe $J(\xi)$ als Funktion von ξ für alle Werte des Intervalls stetig und, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmewerten, für welche eine Berührung der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2$$

mit dem Rande von K stattfindet, auch stetig differenzierbar.

Damit sind unsere hinsichtlich des Verhaltens der Funktion $J(u)$ unter 6) ausgesprochenen Behauptungen für alle Werte von u bis auf die Anfangs- und Endpunkte $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$ der m Intervalle (21), (22) bewiesen. In diesen Punkten haben wir, da sie zu den endlich vielen Ausnahmestellen zu zählen sind, lediglich die Stetigkeit der Funktion nachzuweisen, was jetzt geschehen soll.

8) Im Punkte $\gamma''_m = \beta^*$ verschwindet $J(u)$; denn auf der Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \beta^{*2}$$

liegen, wie oben festgestellt, nur endlich viele Punkte von K. Dasselbe gilt im Falle $\alpha^* > 0$ für den Punkt $\gamma'_1 = \alpha^*$. Die übrigen Punkte $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu$ gehören alle zum Fall II, und es gilt daher in diesen Punkten

$$J(u) = n E_n.$$

Es sei nun N ein auf der Kugel

$$\sum_{1}^{n} {}_\nu\, x_\nu^2 = \beta^{*2}$$

gelegener Punkt, der nicht zu K gehört, und N' seine Projektion auf die Einheitskugel. Dann kann man $\underline{\xi}$ und $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß

$$\gamma_m' < \underline{\xi} < \beta^* < \bar{\xi}$$

ist, daß $\underline{\xi}$ in keine der endlich vielen Ausnahmestellen fällt, was bei $\bar{\xi}$ durch $\bar{\xi} > \beta^*$ gesichert ist, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl alle Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Äußeren von K liegen. Dann ergibt genau dieselbe Koordinatentransformation wie oben auf dem Wege über die Gleichung (32) die Stetigkeit der Funktion $J(\xi)$ im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, und mithin auch an der Stelle

$$u = \beta^* = \gamma_m''.$$

Ebenso beweist man im Falle $\alpha^* > 0$ die Stetigkeit von $J(u)$ an der Stelle

$$u = \alpha^* = \gamma_1'.$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweise der Stetigkeit der Funktion $J(u)$ in denjenigen Anfangs- und Endpunkten der m Intervalle (21), (22), welche nicht mit β^* oder α^* zusammenfallen, d. h. also nach den unter 5) gemachten Feststellungen in allen etwa vorhandenen Punkten, in welchen der Fall II eintritt. Es sei nun γ eine solche Stelle. Dann ist zunächst, wie oben festgestellt, $J(\gamma) = nE_n$. Es sei ferner N ein innerer Punkt von K auf der Kugel

$$\sum_{1}^{n} {}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma^2$$

und N' die Projektion von N auf die Einheitskugel. Dann kann man ein $\underline{\xi}$ und ein $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß $0 < \underline{\xi} < \gamma < \bar{\xi}$ ist, daß keiner der beiden Werte in eine der Ausnahmestellen fällt, und daß auf dem von M nach N' gerichteten Halbstrahl die Punkte in der Entfernung u von M für $\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi}$ noch im Innern von K liegen. Zunächst besteht dann wie oben $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ aus endlich vielen regulären Körpern K', die nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben können. Ferner läßt sich ein Winkel $\eta > 0$ so bestimmen, daß jeder Punkt P, für welchen

$$(33) \qquad \measuredangle PMN' \leqq \eta, \quad \underline{\xi} \leqq \overline{MP} \leqq \bar{\xi}$$

gilt, noch im Innern von K liegt. Alle diese Punkte gehören offenbar ein und demselben der endlich vielen Teilkörper an, aus welchen $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$

besteht. Dieser Teilkörper möge mit K^1 bezeichnet werden. Man schneide nun aus K^1 denjenigen Teil heraus, für dessen Punkte P

$$\measuredangle PMN' < \eta \tag{34}$$

gilt. Der übrigbleibende Teil bildet dann offenbar wieder einen regulären Körper, der mit $\widetilde{K}^1$ bezeichnet werden möge. Bezeichnet also $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ denjenigen Teil von $K(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$, der nach dem Herausschneiden des Teiles (34) übrigbleibt, so besteht auch $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ aus endlich vielen regulären Körpern, die nur Randpunkte höherer Ordnung miteinander gemein haben. Bezeichnet $\widetilde{J}(\xi)$ den $(n-1)$-dimensionalen Flächeninhalt der Projektion von $\widetilde{K}(u = \xi)$ auf die Einheitskugel, so hat man

$$J(\xi) = \widetilde{J}(\xi) + J_\eta, \tag{35}$$

wobei J_η den $(n-1)$-dimensionalen Flächeninhalt der Projektion des herausgeschnittenen Teiles auf die Einheitskugel bedeutet und mithin gleich dem Volumen der Kugel mit dem sphärischen Radius η im $(n-1)$-dimensionalen auf der Einheitskugel ausgebreiteten sphärischen Raum ist. Da nunmehr $\widetilde{K}(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})$ keinen Punkt des von M nach N' weisenden Halbstrahles enthält, so ergibt dieselbe Schlußweise wie oben, daß im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ die Funktion $\widetilde{J}(\xi)$ für alle Werte von ξ stetig ist. Da endlich J_η in dem Intervall eine Konstante darstellt, so ist auch die Funktion $J(\xi)$ in dem Intervall und mithin auch an der Stelle γ stetig, was zu beweisen war.

9) Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß im $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der am Eingang des § 6 präzisierten Formulierung bewiesen sei.

Es liege an der Stelle $u = \xi'$ der Fall III vor. Dann gehört ξ' einem der m offenen Intervalle (21), (22) an. Es sei also wie im Abschnitt 7) (26)

$$\gamma_\mu' < \xi' < \gamma_\mu''. \tag{36}$$

Wir kehren zu der im Abschnitt 7) eingeführten Koordinatentransformation unter Beibehaltung sämtlicher in diesem Abschnitt benutzten Bezeichnungen zurück.

Es bezeichne $\sigma(u)$ eine in K definierte positive stetige Funktion der Entfernung u vom Koordinatenanfangspunkt, R den Rand von K und R^* den Rand von K^*. Dann hat man für

$$\underline{\xi} \leqq \xi \leqq \bar{\xi} \tag{37}$$

$$\int\limits_{R(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})} \sigma(u)\, ds_{n-1} = \int\limits_{R^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \bar{\xi})} \sigma(u)\, \overline{ds^*_{n-1}}, \tag{38}$$

wobei ds_{n-1} das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ bedeutet, und $\overline{ds}^*_{n-1}$ das in der Maßbestimmung (30) gemessene entsprechende Flächenelement im Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $u, v_1 \ldots v_{n-1}$.

Genau so, wie im § 5 die Ungleichung (45) hergeleitet und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung festgestellt wurden, gelangt man zu den folgenden Ergebnissen:

Es gilt im Intervall

$$\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi},$$

abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen,

$$(39) \qquad \frac{d}{d\xi} \int\limits_{R^*(\underline{\xi} \leqq u \leqq \xi)} \sigma(u)\, \overline{ds}^*_{n-1} \geqq \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2},$$

wobei wie § 5 (25″) die Funktion $O^*[V]$ in dem auf der Oberfläche der Einheitskugel ausgebreiteten $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum die Oberfläche einer Kugel als Funktion ihres Volumens ausdrückt. Beide Seiten der Ungleichung sind, abgesehen von den Ausnahmestellen, als Funktionen von ξ stetig, und das Gleichheitszeichen greift, abgesehen von den Ausnahmestellen, dann und nur dann im gesamten Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ Platz, wenn $K^*(\underline{\xi} < u < \bar{\xi})$ in der Maßbestimmung (30) einen Rotationskörper darstellt — und zwar dergestalt, daß die Schnitte mit den Ebenen $u =$ konst für alle Werte von u im Intervall $\underline{\xi} < u < \bar{\xi}$ in der Maßbestimmung (30) $(n-1)$-dimensionale Vollkugeln sind, deren Radius wegen (27) nirgends verschwindet, und deren innerer Mittelpunkt durch die Gleichungen

$$(40) \qquad v_\nu = c_\nu, \quad \nu = 1 \ldots n-1,$$

bestimmt ist, wobei die c_ν Konstanten bedeuten. Die Rotationsachse wird also durch die Gleichungen (40) gegeben.

Durch Übertragung auf den (x)-Raum erhält dies Ergebnis die folgende Gestalt:

Das Gleichheitszeichen für das gesamte Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, abgesehen von den Ausnahmestellen, gilt dann und nur dann, wenn im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ $K(\underline{\xi} < u < \bar{\xi})$ einen Rotationskörper um die Achse MC bildet, wobei der Punkt C als stereographisches Bild des Punktes $v_\nu = c_\nu$, $\nu = 1 \ldots n-1$ auf der Einheitskugel liegt. Dabei müssen noch die Schnitte $K(u = \xi)$ des Körpers K mit den Kugeloberflächen

$$(41) \qquad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2$$

für alle Werte von ξ des Intervalls $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$ $(n-1)$-dimensionale sphärische Vollkugeln sein, deren Radius nirgends verschwindet, und deren innerer Mittelpunkt durch den Schnittpunkt der Kugeloberfläche (41) mit dem Halbstrahl MC gegeben ist.

Die Ungleichung (39) ist wegen (38) und der selbstverständlichen Identität

$$\frac{d}{d\xi} \int\limits_{R(u \leqq \xi)} \sigma(u)\, d s_{n-1} = \frac{d}{d\xi} \int\limits_{R(\underline{\xi} \leqq u \leqq \xi)} \sigma(u)\, d s_{n-1}$$

gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$(42) \qquad \frac{d}{d\xi} \int\limits_{R(u \leqq \xi)} \sigma(u)\, d s_{n-1} \geqq \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\zeta)}{d\xi}\right)^2}.$$

Diese Ungleichung gilt also, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, im Intervall $\underline{\xi} < \xi < \bar{\xi}$, wobei beide Seiten, abgesehen von diesen Ausnahmestellen, stetig sind, und die für das gesamte Intervall, abgesehen von den Ausnahmestellen, bestehende Gültigkeit des Gleichheitszeichens an die eben formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen geknüpft ist.

Nun läßt sich zu jedem Punkt ξ' des offenen Intervalls

$$\gamma'_\mu < \xi' < \gamma''_\mu$$

ein solches ihn im Innern enthaltendes Teilintervall mit dem Anfangspunkt $\underline{\xi}$ und dem Endpunkt $\bar{\xi}$ bestimmen, daß für dieses die eben gemachten Feststellungen gelten. Daraus folgt, daß, abgesehen von den endlich vielen Ausnahmestellen, die Ungleichung (42) für alle Punkte ξ des offenen Intervalls

$$(43) \qquad \gamma'_\mu < \xi < \gamma''_\mu$$

Gültigkeit besitzt, und daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann im gesamten Intervall (43), abgesehen von den Ausnahmestellen, Platz greift, wenn der Schnitt $K(u = \xi)$ des Körpers K mit der Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2$$

für alle Werte von ξ, welche dem offenen Intervall (43) angehören, eine $(n-1)$-dimensionale sphärische Vollkugel bildet. Dabei muß die Projektion des inneren Mittelpunktes dieser sphärischen Vollkugeln auf die Einheitskugel, da sie für jeden Wert ξ' nach den obigen Feststellungen in einer gewissen von einem $\underline{\xi} < \xi'$ und einem $\bar{\xi} > \xi'$ begrenzten Umgebung konstant bleibt, im gesamten offenen Intervall (43) fest bleiben. Man bezeichne sie mit C_μ.

10) Setzt man in der Gleichung (14)

$$\varphi = \sigma(u), \quad u = \sqrt{\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2}, \quad \xi = \beta^* \tag{44}$$

und berücksichtigt, daß außerhalb der m Intervalle $\gamma'_\mu \leqq u \leqq \gamma''_\mu$ Randpunkte des Körpers K nicht vorhanden sind, so ergibt sich

$$\int_R \sigma(u)\, d s_{n-1} = \sum_1^m {}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \frac{d}{dt}\Big(\int_{R(u \leqq t)} \sigma(u)\, d s_{n-1}\Big) dt, \tag{45}$$

und mithin wegen (42)

$$\int_R \sigma(u)\, d s_{n-1} \geqq \sum_1^m {}_\mu \int_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi. \tag{46}$$

Dabei sind auf der rechten Seite die Integranden bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte bestimmt und stetig. Das Gleichheitszeichen gilt nach den im vorigen Abschnitt gemachten Feststellungen dann und nur dann, wenn für alle Punkte ξ, welche einem der m offenen Intervalle zwischen γ'_μ und γ''_μ, $\mu = 1 \ldots m$, angehören, der Schnitt $K(u = \xi)$ des Körpers K mit der Kugel

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 = \xi^2 \tag{47}$$

aus einer $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Vollkugel besteht, deren innerer Mittelpunkt, durch den Schnittpunkt der Kugel (47) mit dem Halbstrahl MC_μ, $\mu = 1 \ldots m$, gegeben wird. Hierbei bedeutet C_μ einen Punkt auf der Einheitskugel, der für jedes der m Intervalle $\gamma'_\mu < \xi < \gamma''_\mu$ fest bleibt. Die Projektion des Schnittes $K(u = \xi)$ auf die Einheitskugel besitzt voraussetzungsgemäß den $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Flächeninhalt $J(\xi)$, oder mit anderen Worten — in dem auf der Einheitskugel ausgebreiteten sphärischen Raum das sphärische Volumen $J(\xi)$. Bezeichnet also $r(\xi)$ den sphärischen Radius der sphärischen Vollkugel, aus welcher im Falle der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (46) die Projektion besteht, so ist $r(\xi)$ bestimmt durch die Gleichung

$$V^*(r(\xi)) = J(\xi), \tag{48}$$

wobei die Funktion $V^*(r)$ wie § 5 (25) in dem auf der Euklidischen Einheitskugel ausgebreiteten $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum das Volumen einer Kugel als Funktion ihres sphärischen Radius ausdrückt. Da gemäß (27) für alle Punkte ξ der offenen Intervalle $\gamma'_\mu < \xi < \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$,

$$nE_n > J(\xi) > 0 \tag{49}$$

gilt, so ist in allen diesen Punkten auch

$$\pi > r(\xi) > 0. \tag{50}$$

In denjenigen Punkten zwischen α^* und β^*, welche weder als innere Punkte noch als Anfangs- und Endpunkte einem der Intervalle γ'_μ, γ''_μ, $\mu = 1 \ldots m$ angehören, tritt der Fall I ein, und besteht mithin der Schnitt $K(u = \xi)$ aus der gesamten Kugeloberfläche

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \xi^2.$$

Scheiden wir zunächst den Punkt $\gamma''_m = \beta^*$, und im Falle $\alpha^* > 0$ noch den Punkt $\gamma'_1 = \alpha^*$ aus, so gehören die übrigen Punkte γ'_μ, γ''_μ zum Falle II, und es erfüllen daher auch die Schnitte $K(u = \gamma'_\mu)$, $K(u = \gamma''_\mu)$ die gesamten Kugeloberflächen

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma'^2_\mu, \quad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma''^2_\mu. \tag{51}$$

Im Falle $\alpha^* = 0$ besteht der Schnitt $K(u = \alpha^*)$ nur aus dem Koordinatenanfangspunkt M, der dann ein innerer Punkt von K ist. Es erübrigt also nur noch die Klarstellung des Schnittes $K(u = \beta^*)$, und im Falle $\alpha^* > 0$ noch des Schnittes $K(u = \alpha^*)$.

Im offenen Intervall

$$\gamma'_m < \xi < \gamma''_m = \beta^* \tag{52}$$

liegt der innere Mittelpunkt der $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Vollkugel, aus welcher der Schnitt $K(u = \xi)$ im Falle der Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (46) besteht, auf dem festen Halbstrahl MC_m, während ihr Radius wegen (50) nicht verschwindet. Daraus folgt, daß der Schnittpunkt des Halbstrahls mit der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \beta^{*2} \tag{53}$$

als Häufungspunkt von Punkten des abgeschlossenen Körpers K dem Körper angehört. Andererseits verschwindet, wie unter 8) festgestellt, $J(\xi)$ an der Stelle $\xi = \beta^*$ und bleibt dort stetig. Man hat mithin wegen (48) für $\xi \to \beta^*$

$$r(\xi) \to 0. \tag{54}$$

Daher konvergieren im offenen Intervall (52) sämtliche Punkte des Schnittes $K(u = \xi)$ für $\xi \to \beta^*$ gegen den Schnittpunkt des Halbstrahls MC_m mit der Kugel (53). Daraus folgt, daß ein von diesem Schnittpunkt verschiedener Punkt auf der Kugel (53), der mit P bezeichnet werden möge, nicht Häufungspunkt von Punkten des Körpers K sein kann, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt $< \beta^*$ ist. Da auf Grund der Definition von β^* der Körper Punkte, deren Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt β^* übersteigt, überhaupt nicht enthält, so kann P nicht Häufungspunkt von Punkten des Körpers sein, welche nicht auf der Kugel (53) liegen.

Mithin kann P weder innerer Punkt von K sein, noch Häufungspunkt von inneren Punkten. Da gemäß der Definitionseigenschaft l. c.[1] § 6 IV (d) jeder Randpunkt eines regulären Körpers Häufungspunkt von inneren Punkten sein muß, so kann P auch kein Randpunkt von K sein und mithin überhaupt nicht zu K gehören. Also besteht der Schnitt $K(u = \beta^*)$ nur aus dem Schnittpunkt des Halbstrahls MC_m mit der Kugel (53). Ebenso beweist man, daß im Fall $\alpha^* > 0$ der Schnitt $K(u = \alpha^*)$ nur aus dem Schnittpunkt des Halbstrahls MC_1 mit der Kugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \alpha^{*2}$$

besteht.

Damit haben wir vollständig festgestellt, an welche Gestalt sämtlicher Schnitte $K(u = \xi)$ die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung (46) als notwendige und hinreichende Bedingung geknüpft ist. Nunmehr wollen wir uns die dadurch festgelegte Gestalt des Körpers näher veranschaulichen: Randpunkte besitzt er überhaupt nur in einer Entfernung u vom Koordinatenanfangspunkt, welche einem der m abgeschlossenen Intervalle $\gamma'_\mu, \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$, angehört. Der Rand wird durch Rotation von m Meridiankurven erzeugt, welche den Intervallen $\gamma'_\mu \leqq u \leqq \gamma''_\mu$, $\mu = 1 \ldots m$, angehören, oder mit anderen Worten in den abgeschlossenen Bereichen zwischen den beiden Kugeln

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma'^2_\mu, \quad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma''^2_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m,$$

verlaufen, und deren jede um eine zugehörige Achse MC_μ rotiert. Es bezeichne $x(u)$ die von O aus in der Richtung MC_μ gemessene senkrechte Projektion des in der Entfernung u von O befindlichen laufenden Punktes der Meridiankurve auf die Rotationsachse MC_μ und $\varrho(u)$ seine Entfernung von der Achse. Dann erhält man

$$x(u) = u \cos r(u), \quad \varrho(u) = u \sin r(u). \tag{55}$$

Dabei ist die Funktion $r(u)$ wegen (48) auf Grund der im Abschnitt 6) betreffs der Funktion $J(u)$ gemachten Feststellungen für alle Werte von u stetig und bis auf die endlich vielen Ausnahmewerte stetig differenzierbar. Ferner gilt wegen (50) für

$$\gamma'_\mu < u < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m, \tag{56}$$

$$\varrho(u) > 0. \tag{57}$$

Wie eingangs des Abschnitts 8) festgestellt, gilt wegen $\gamma''_m = \beta^*$

$$J(\gamma''_m) = J(\beta^*) = 0 \tag{58}$$

und mithin

$$r(\gamma_m'') = r(\beta^*) = 0. \tag{59}$$

Im Falle $\alpha^* > 0$ gilt wegen $\gamma_1' = \alpha^*$ auch noch

$$J(\gamma_1') = J(\alpha^*) = 0 \tag{60}$$

und mithin

$$r(\gamma_1') = r(\alpha^*) = 0. \tag{61}$$

In allen übrigen Punkten $\gamma_\mu', \gamma_\mu''$ ist dagegen

$$J(\gamma_\mu') = nE_n, \quad J(\gamma_\mu'') = nE_n \tag{62}$$

und mithin

$$r(\gamma_\mu') = \pi, \quad r(\gamma_u'') = \pi. \tag{63}$$

In jedem der Intervalle $\gamma_\mu' \leqq u \leqq \gamma_\mu''$ verläuft also die zugehörige Meridiankurve dergestalt, daß sie die Rotationsachse MC_u nur in denjenigen beiden Punkten trifft, welche die Entfernungen $u = \gamma_\mu'$ und $u = \gamma_\mu''$ von M besitzen — und zwar gilt in diesen beiden Schnittpunkten wegen (55), (59), (61)

$$x(\gamma_m'') = x(\beta^*) = \beta^*, \tag{64}$$

und im Falle $\alpha^* > 0$ noch

$$x(\gamma_1') = x(\alpha^*) = \alpha^*, \tag{65}$$

während in allen übrigen Punkten $\gamma_\mu', \gamma_\mu''$ wegen (63)

$$x(\gamma_\mu') = -\gamma'; \quad x(\gamma_\mu'') = -\gamma_\mu'' \tag{66}$$

ist.

Es bezeichne nun F_μ, $\mu = 1 \dots m$, die einfache Rotationsfläche, welche durch Rotation der im Intervall $\gamma_\mu' \leqq u \leqq \gamma_\mu''$ verlaufenden Meridiankurve erzeugt wird, und K_μ den von ihr umschlossenen einfachen Rotationskörper. Sind P_1 und P_2 zwei von M um weniger als γ_μ' entfernte Punkte, so trifft die Strecke P_1P_2, da F_μ in dem von den beiden konzentrischen Kugeloberflächen

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma_\mu'^2, \quad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma_\mu''^2 \tag{67}$$

begrenzten Bereich verläuft, keinen Punkt von F_μ. Daher liegen entweder alle Punkte der offenen Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 < \gamma_\mu'^2 \tag{68}$$

im Innern oder alle im Äußern von K_μ. Im ersteren Fall gehört mithin auch die abgeschlossene Vollkugel zu K_μ. Der erstere Fall tritt offenbar dann ein, wenn der Koordinatenanfangspunkt M im Innern des von den beiden Schnittpunkten der Meridiankurve mit der Rotationsachse MC_μ auf dieser gebildeten Intervalls liegt, der letztere — wenn M im Äußern dieses Intervalls sich befindet. Es liegt mithin die offene Vollkugel (68) ganz im Innern oder ganz im Äußern von K_μ, je nachdem ob $x(\gamma'_\mu)$ und $x(\gamma''_\mu)$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben. In letzterem Fall liegt also der Körper K_μ ganz in dem von den beiden Kugelflächen

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma'^2_\mu \quad \text{und} \quad \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 = \gamma''^2_\mu$$

begrenzten Bereich, in beiden Fällen — ganz in dem von der zweiten Kugelfläche umschlossenen Raum.

Da wegen (66) für $\mu = 2, 3 \ldots m-1$ die Vorzeichen von $x(\gamma'_\mu)$ und $x(\gamma''_\mu)$ übereinstimmend negativ sind, so folgt, daß unter den Körpern $K_2, K_3 \ldots K_{m-1}$ keine zwei einen inneren Punkt gemein haben. Ebenso folgt, daß keiner von ihnen mit dem Körper K_1 einen inneren Punkt gemein hat.

Unter den Oberflächen $F_1, F_2 \ldots F_{m-1}$ dieser Körper können nur zwei unmittelbar aufeinander folgende F_λ und $F_{\lambda+1}$ einen Punkt gemein haben — und zwar nur einen einzigen. Das tritt nämlich dann und nur dann ein, wenn $\gamma''_\lambda = \gamma'_{\lambda+1}$ ist und C_λ mit $C_{\lambda+1}$ zusammenfällt, indem in diesem Falle der auf der Kugel $u = \gamma''_\lambda$ gelegene Punkt von F_λ mit dem auf der Kugel $u = \gamma'_{\lambda+1}$ befindlichen Punkt von $F_{\lambda+1}$ koinzidiert. Im Falle $m \geqq 2$ ist endlich wegen (66) $x(\gamma'_m)$ negativ und wegen (64) $x(\gamma''_m) = x(\beta^*) = \beta^*$ und mithin positiv. Daher überdeckt der Körper K_m die gesamte Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma'^2_m \tag{69}$$

und mithin auch die in dieser enthaltenen Körper $K_1, K_2 \ldots K_{m-1}$. Die Oberfläche F_m kann wiederum nur einen einzigen Punkt mit einer der Flächen $F_1 \ldots F_{m-1}$ gemein haben, und zwar nur mit der Fläche F_{m-1}, wo das dann und nur dann eintritt, wenn $\gamma''_{m-1} = \gamma'_m$ ist und der Punkt C_{m-1} mit dem Punkt C_m zusammenfällt.

Da die Berandung des Körpers K aus den Flächen $F_1, F_2 \ldots F_m$ besteht, so tritt uns seine Gestalt in der folgenden Erzeugung vor Augen:

Der Körper K entsteht, indem man aus dem einfachen Rotationskörper K_m die in ihm enthaltenen einfachen Rotationskörper $K_1, K_2 \ldots K_{m-1}$ herausschneidet. Dabei verstehen wir laut § 6, Abschnitt 2) unter einem „einfachen" Rotationskörper einen solchen, dessen Oberfläche durch Rotation einer Meridiankurve erzeugt wird, welche aus einem einfachen Jordanbogen besteht, der die Rotationsachse nur in seinen beiden Endpunkten trifft. Die Körper K_μ, $\mu = 2 \ldots m - 1$, liegen in den konzentrischen Schichten

$$\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \tag{70}$$

während der Körper K_m die alle diese Schichten enthaltende Vollkugel

$$\sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_m'^2 \tag{71}$$

überdeckt. Der Körper K_1 liegt wegen (65), (66) im Falle $\alpha^* = 0$ in der Schicht

$$0 < \gamma_1'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_1''^2, \tag{72}$$

während er im Falle $\alpha^* > 0$ in der Vollkugel mit dem Radius γ_1'' enthalten ist und die Vollkugel mit dem Radius $\gamma_1' = \alpha^*$ überdeckt. Die Körper K_μ, $\mu = 2 \ldots m - 1$, haben mit den beiden Kugeloberflächen mit den Radien γ_μ' und γ_μ'' je einen Punkt gemein, ebenso der Körper K_m mit der Kugeloberfläche mit dem Radius β^* und der Körper K_1 mit der Kugeloberfläche mit dem Radius γ_1'' und im Falle $\alpha^* = 0$ auch noch mit der Kugeloberfläche mit dem Radius γ_1'.

Der Körper K, der im allgemeinen kein Rotationskörper ist, gestattet eine beliebige Verdrehung der m konzentrischen Schichten $\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2$ gegeneinander, ohne dabei der Eigenschaft verlustig zu gehen, in der Ungleichung (46) die Gleichheit zu erreichen. Das leuchtet auch unmittelbar ein, da bei jeder Drehung einer der Schichten um O sowohl die Funktion $J(u)$ als auch das Oberflächenintegral auf der linken Seite von (46) invariant bleiben.

11) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Formulierung des folgenden Satzes:

Das zweite Abrundungstheorem.

Man mache die Voraussetzung, daß die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im $(n - 1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Kugel bewiesen sei.

Es sei im Euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1 \ldots x_n$ K ein regulärer Körper, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nur endlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer der Kugeln um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt stattfindet.

Der Koordinatenanfangspunkt M liege nicht auf dem Rande von K. Es bezeichne K' denjenigen abgeschlossenen Euklidischen Rotationskörper um die x_1-Achse, dessen Durchschnitt mit jeder Kugeloberfläche

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, x_\nu^2 = u^2 \tag{73}$$

eine sphärische Vollkugel bildet, welche dasselbe sphärische Volumen, d. h. also denselben $(n-1)$-dimensionalen Euklidischen Flächeninhalt besitzt wie der Durchschnitt von K mit der Kugeloberfläche. Dabei ist der innere Mittelpunkt der sphärischen Vollkugel im Schnittpunkt der Kugeloberfläche mit dem positiven Halbstrahl der x_1-Achse zu fixieren. Dann gilt für jedes Paar positiver stetiger Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$

$$\int_K \tau(u)\, d x_1 \ldots d x_n = \int_{K'} \tau(u)\, d x_1 \ldots d x_n, \tag{74}$$

$$\int_R \sigma(u)\, d s_{n-1} \geqq \int_{R'} \sigma(u)\, d s_{n-1}. \tag{75}$$

Dabei bedeuten R und R' die Berandungen von K und K', $d s_{n-1}$ das $(n-1)$-dimensionale Euklidische Flächenelement und u die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn der Körper die am Schlusse des vorigen Abschnitts festgestellte Gestalt besitzt, oder mit anderen Worten, wenn er mit K' zur Deckung gebracht werden kann, indem man jeder einzelnen der m konzentrischen Kugelschichten

$$\gamma_\mu'^2 \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \quad \mu = 1 \ldots m, \tag{76}$$

eine passende Drehung um M erteilt.

Beweis. Da die Funktion $J(u)$, wie eingangs des Abschnitts 6) festgestellt, für alle Werte von u stetig ist, und der Durchschnitt von K mit der Kugeloberfläche

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, x_\nu^2 = u^2 \tag{77}$$

den Flächeninhalt

$$u^{n-1} J(u) \tag{78}$$

besitzt, so erhält man

$$\int_K \tau(u)\, d x_1 \ldots d x_n = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \tau(u) u^{n-1} J(u) du. \tag{79}$$

Ebenso ergibt sich aus der Konstruktionsvorschrift von K'

$$\int_{K'} \tau(u)\, d x_1 \ldots d x_n = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \tau(u) u^{n-1} J(u) du. \tag{80}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt die zu beweisende Gleichung (74).

Wir können nun nicht ohne weiteres behaupten, daß für den Körper K' in der Ungleichung (46) das Gleichheitszeichen gilt, d. h. also, daß die Gleichung

$$\int\limits_{R'} \sigma(u)\, d s_{n-1} = \sum_{1}^{m} {}_{\mu} \int\limits_{\gamma'_{\mu}}^{\gamma''_{\mu}} \sigma(\xi)\, \xi^{n-2} \sqrt{O^*\,[J(\xi)]^2 + \xi^2 \left(\frac{d J(\xi)}{d\xi}\right)^2}\, d\xi \tag{81}$$

besteht. Denn der Körper K' erfüllt zwar die in den vorigen Abschnitten an die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser Ungleichung geknüpften notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Diese wurden jedoch unter der Voraussetzung hergeleitet, daß der Körper ein regulärer ist, was für K' nicht zuzutreffen braucht, da die zweimalige Differenzierbarkeit auf den Randmannigfaltigkeiten von K' nicht gesichert ist. Es ist jedoch leicht, die Gleichung (81) direkt zu beweisen. Man bezeichne wie im vorigen Abschnitt mit K'_{μ}, $\mu = 1 \ldots m$, diejenigen einfachen Rotationskörper um die x_1-Achse, deren Oberfläche F'_{μ} durch Rotation der in der Schicht

$$\gamma'^2_{\mu} \leqq \sum_{1}^{n} {}_{\nu}\, x_{\nu}^2 \leqq \gamma''^2_{\mu} \tag{82}$$

verlaufenden Meridiankurve erzeugt wird. Dann entsteht also der Körper K', indem aus dem Körper K'_m die in ihm enthaltenen Körper $K'_1 \ldots K'_{m-1}$ herausgeschnitten werden. Die x_1-Koordinate des in der Entfernung u von M befindlichen laufenden Punktes der erzeugenden Meridiankurve von F'_{μ} werde mit $x_1(u)$ bezeichnet, die Entfernung des laufenden Punktes von der x_1-Achse mit $\varrho(u)$. Dann wird entsprechend (48), (55) die Meridiankurve durch die Gleichungen

$$x_1(u) = u \cos r(u), \quad \varrho(u) = u \sin r(u), \quad \gamma'_{\mu} \leqq u \leqq \gamma''_{\mu}, \tag{83}$$

dargestellt, wobei die Funktion $r(u)$ wie unter (48) durch die Gleichung

$$V^*(r(u)) = J(u) \tag{84}$$

gegeben ist. Entsprechend l. c.[1] § 3 IV (7″) ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \int\limits_{F'_{\mu}} \sigma(u)\, d s_{n-1} &= (n-1) E_{n-1} \int\limits_{\gamma'_{\mu}}^{\gamma''_{\mu}} \sigma(u) u^{n-2} \sin^{n-2} r(u) \sqrt{x_1'(u)^2 + \varrho'(u)^2}\, du \\ &= \int\limits_{\gamma'_{\mu}}^{\gamma''_{\mu}} \sigma(u) u^{n-2} (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u) \sqrt{1 + u^2 r'(u)^2}\, du. \end{aligned} \tag{85}$$

Nun ist wegen § 5 (25), (27), (32)

$$\frac{d V^*(r(u))}{d r(u)} = O^*(r(u)) = (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u) \tag{86}$$

und mithin wegen (84)

$$\frac{d J(u)}{d u} = O^*(r(u)) r'(u) = (n-1) E_{n-1} \sin^{n-2} r(u) r'(u). \tag{87}$$

Man erhält also

$$(88)\qquad (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2} r(u)\sqrt{1+u^2\,r'(u)^2} = \sqrt{O^*(r(u))^2 + u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2},$$

und da wegen § 5 (25), (25″)

$$(89)\qquad O^*(r(u)) = O^*[V^*(r(u))]$$

ist bei Einführung von (84)

$$(90)\qquad O^*(r(u)) = O^*[J(u)].$$

Mithin ergibt sich

$$(91)\qquad (n-1)E_{n-1}\sin^{n-2} r(u)\sqrt{1+u^2\,r'(u)^2} = \sqrt{O^*[J(u)]^2 + u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2}$$

und bei Einführung in (85)

$$(92)\qquad \int\limits_{F'_\mu} \sigma(u)\,ds_{n-1} = \int\limits_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(u)\,u^{n-2}\sqrt{O^*[J(u)]^2 + u^2\left(\frac{dJ(u)}{du}\right)^2}\,du.$$

Summiert man über $\mu = 1 \ldots m$ und bezeichnet auf der rechten Seite die Integrationsvariable mit ξ, so erhält man in der Tat die erwartete Gleichung

$$(93)\qquad \int\limits_{R'} \sigma(u)\,ds_{n-1} = \sum_1^m{}_\mu \int\limits_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \sigma(\xi)\,\xi^{n-2}\sqrt{O^*[J(\xi)]^2 + \xi^2\left(\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right)^2}\,d\xi.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Ungleichung (46) und den im Abschnitt 10) über den Eintritt des Gleichheitszeichens in letzterer gemachten Feststellungen ergeben die zu beweisende Ungleichung (75) und die im Abrundungstheorem über die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in dieser formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

12) Wir wollen uns jetzt noch über das Verhalten der Bogenlänge auf den m Meridiankurven des konstruierten Hilfskörpers K' orientieren.

Zunächst folgt aus (46) für $\sigma(u) = 1$

$$(94)\qquad \sum_1^m{}_\mu \int\limits_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \xi^{n-1}\left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \int\limits_R ds_{n-1}$$

und mithin

$$(95)\qquad \sum_1^m{}_\mu \int\limits_{\gamma'_\mu}^{\gamma''_\mu} \left|\frac{dJ(\xi)}{d\xi}\right| d\xi \leqq \frac{1}{\gamma_1'^{\,n-1}}\,O, \qquad \gamma'_1 > 0,$$

wobei O die Oberfläche von K bezeichnet.

Für das Bogenelement der Meridiankurve erhält man gemäß (83)

$$\left|\frac{ds}{du}\right| = \sqrt{1 + u^2\, r'(u)^2} \leqq 1 + u\,|r'(u)| \tag{96}$$

und wegen (87)

$$\left|\frac{ds}{du}\right| \leqq 1 + \frac{u}{(n-1)\,E_{n-1}\sin^{n-2} r(u)}\left|\frac{dJ(u)}{du}\right|. \tag{97}$$

Nun ist wegen (84) $r(u)$ stetig, ferner gilt entsprechend (49), (50) für

$$\gamma'_\mu < u < \gamma''_\mu, \quad \mu = 1 \ldots m$$

$$0 < J(u) < nE_n \quad \text{und mithin} \quad 0 < r(u) < \pi. \tag{98}$$

Daher sichern die Ungleichungen (97) und (95), daß auf jeder der m Meridiankurven jeder Bogen, der von keinem der beiden Endpunkte $u = \gamma'_\mu$ und $u = \gamma''_\mu$ begrenzt wird, endliche Länge besitzt.

13) Das zweite Abrundungstheorem bleibt unverändert gültig, wenn die Voraussetzung, daß der Koordinatenanfangspunkt nicht auf der Berandung des Körpers liegt, fallengelassen wird. Befindet er sich nämlich auf dem Rande, so schalte man zunächst eine Kugel um ihn als Mittelpunkt aus, deren Radius kleiner gewählt ist, als der kleinste Radius der voraussetzungsgemäß nicht unendlich vielen konzentrischen Kugeln, welche die Berandung von K berühren. Läßt man dann den Radius der ausgeschalteten Kugel gegen Null konvergieren, so ergibt sich der Beweis. Da derselbe keine Abänderung des Verfahrens erfordert, so kann hier auf die Ausführung verzichtet werden, zumal da von dieser Erweiterung in der Folge kein Gebrauch gemacht werden soll.

§ 8.

Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum.

1) Es sei $n \geqq 3$. Man mache die Voraussetzung, daß im $(n-1)$-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. also auf der Oberfläche der n-dimensionalen Euklidischen Kugel, die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel bewiesen sei.

Es sei im n-dimensionalen sphärischen Raum, d. h. auf der Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel K ein gegebener regulärer Körper.

Durch dieselbe Schlußweise wie § 6 Abschnitt 4) folgt aus dem Satz VIII, § 2 Abschnitt 7) in seiner Verallgemeinerung durch den Satz IX, § 2 Abschnitt 8), daß in unserem n-dimensionalen sphärischen Raum die Gesamtheit der Mittelpunkte der konzentrischen Kugelscharen, welche die Randmannigfaltigkeiten von K in unendlich vielen Punkten berühren, den äußeren Inhalt Null besitzt. Ebenso besitzt die Berandung von K den äußeren Inhalt Null, während der äußere Inhalt der Gesamtheit der äußeren Punkte von K und mithin auch der Gesamtheit ihrer diametralen Gegenpunkte nicht verschwindet. Daher gibt es einen Punkt S, dessen Gegenpunkt N im Äußern von K liegt, während S nicht dem Rande von K angehört, und die konzentrische Kugelschar mit dem Mittelpunkt S die Berandung von K nicht in unendlich vielen Punkten berührt. Man projiziere nun die Oberfläche der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel stereographisch von N aus auf die durch den Mittelpunkt der Einheitskugel gehende zur Achse SN senkrechte Ebene. Es seien $x_1 \ldots x_n$ die rechtwinkligen Koordinaten der stereographischen Projektion, ihr Anfangspunkt M sei der Mittelpunkt der $(n+1)$-dimensionalen Einheitskugel. Dann geht S in M und die sphärische konzentrische Kugelschar mit dem Mittelpunkt S in die konzentrische Kugelschar

$$(1) \qquad \sum_1^n {}_\nu \, x_\nu^2 = u^2$$

über. Da die Transformation, abgesehen von dem nicht zu K gehörigen Punkte N, eindeutig, eindeutig umkehrbar, zweimal stetig differenzierbar und mithin auch berührungserhaltend ist, so geht K dabei in einen ebenfalls regulären Körper K^* über, auf dessen Randmannigfaltigkeiten nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Kugel der konzentrischen Schar (1) stattfindet.

Damit sind alle Voraussetzungen des zweiten Abrundungstheorems gegeben. Man setze in diesem

$$(2) \qquad \tau(u) = \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n, \quad \sigma(u) = \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1},$$

bezeichne mit R^* den Rand von K^*, mit $K^{*\prime}$ den nach der Vorschrift des Abrundungstheorems konstruierten Euklidischen Rotationskörper um die x_1-Achse und mit $R^{*\prime}$ seinen Rand. Dann hat man laut dem Abrundungstheorem

$$(3) \qquad \int\limits_{K^*} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n d x_1 \ldots d x_n = \int\limits_{K^{*\prime}} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^n d x_1 \ldots d x_n;$$

$$(4) \qquad \int\limits_{R^*} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1} d s_{n-1} \geqq \int\limits_{R^{*\prime}} \left(\frac{2}{1+u^2}\right)^{n-1} d s_{n-1}.$$

Dabei besteht $K^{*\prime}$ aus dem einfachen Rotationskörper $K_m^{*\prime}$, aus welchem die einfachen Rotationskörper $K_1^{*\prime} \ldots K_{m-1}^{*\prime}$ herausgeschnitten sind, und das Gleichheitszeichen gilt in der letzten Ungleichung dann und nur dann, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ zur Deckung gebracht werden können, indem man jeder der m konzentrischen Schichten

$$(5) \qquad \gamma_\mu'^2 \leqq \sum_1^n {}_\nu \, x_\nu^2 \leqq \gamma_\mu''^2, \quad \mu = 1 \ldots m,$$

eine passende Drehung um den Koordinatenanfangspunkt M erteilt. Im Falle $m = 1$ wird aus dem Körper $K_m^{*\prime} = K_1^{*\prime}$ nichts herausgeschnitten. Er ist also mit $K^{*\prime}$ identisch und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ durch eine Drehung um den Koordinatenanfangspunkt M zur Deckung gebracht werden können.

Es mögen nun $\overline{ds}$ und ds die einander vermöge der stereographischen Projektion entsprechenden Linienelemente im sphärischen Raum und im Euklidischen (x)-Raum bezeichnen. Dann hat man

$$\overline{ds} = \frac{2}{1 + \sum_1^n{}_\nu\, x_\nu^2}\, ds = \frac{2}{1 + u^2}\, ds. \tag{6}$$

Den Bewegungen des (x)-Raumes, welche den Punkt M fest lassen, entsprechen die Bewegungen des sphärischen Raumes, welche das diametrale Punktepaar S, N fest lassen. Denjenigen Bewegungen des (x)-Raumes, welche jeden Punkt einer durch M gehenden Geraden fest lassen, also den Rotationen um diese, entsprechen diejenigen Bewegungen des sphärischen Raumes, welche jeden Punkt der das stereographische Bild der Geraden darstellenden, durch S und N gehenden sphärischen Geraden fest lassen, also die Rotationen um diese. Daher ist das stereographische Bild eines Rotationskörpers des (x)-Raumes mit einer durch M gehenden Achse im sphärischen Raum ein Rotationskörper mit einer durch S und N gehenden Achse. Die den Rotationskörpern $K^{*\prime}$, $K_1^{*\prime} \ldots K_m^{*\prime}$ entsprechenden Rotationskörper im sphärischen Raum mögen mit K', $K_1' \ldots K_m'$ bezeichnet werden, ihre Volumina und Oberflächen mit V', $V_1' \ldots V_m'$, O', $O_1' \ldots O_m'$. Dann haben diese Körper ebenfalls eine gemeinsame Rotationsachse, und K' entsteht, indem man aus dem einfachen Rotationskörper K_m' die einfachen Rotationskörper $K_1' \ldots K_{m-1}'$ herausschneidet. Man hat also

$$O' = \sum_1^m{}_\mu\, O_\mu', \quad V' = V_m' - \sum_1^{m-1}{}_\mu\, V_\mu'. \tag{7}$$

Wie nun aus den Gleichungen § 7 (83), (84) und den Feststellungen § 7 Abschnitt 12) hervorgeht, genügen die Meridiankurven der einfachen Rotationskörper $K_1' \ldots K_m'$ den Voraussetzungen des Satzes, der am Schlusse von § 6 Abschnitt 2) über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im Vergleich mit einfachen Rotationskörpern formuliert worden ist. Man hat daher

$$O_\mu' \geqq O^*[V_\mu'], \quad \mu = 1 \ldots m-1, \quad O_m' \geqq O^*[V_m'], \tag{8}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die betreffenden Rotationskörper Kugeln sind. Da zwei Kugeln, deren Volumina sich zum

Volumen des Gesamtraumes, d. h. zu $(n+1)E_{n+1}$ ergänzen, gleiche Oberfläche besitzen, so läßt sich die letzte Gleichung auch in der Gestalt

$$O'_m \geqq O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \tag{9}$$

schreiben. Wegen (7) ist jetzt

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu V'_\mu + (n+1)E_{n+1} - V'_m = (n+1)E_{n+1} - V'. \tag{10}$$

Auf Grund der für jede Dimensionenzahl gültigen Funktionalungleichung § 5 (36) ist daher

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu O^*[V'_\mu] + O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \geqq O^*[(n+1)E_{n+1} - V'] \tag{11}$$

und wegen

$$O^*[(n+1)E_{n+1} - V'] = O^*[V'] \tag{12}$$

$$\sum_1^{m-1}{}_\mu O^*[V'_\mu] + O^*[(n+1)E_{n+1} - V'_m] \geqq O^*[V'], \tag{13}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur in dem trivialen Falle gilt, daß $m = 1$ ist. Die Zusammenstellung dieser Ungleichung mit (8) und (9) ergibt wegen (7)

$$O' \geqq O^*[V'], \tag{14}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $m = 1$ und K' eine Kugel ist.

Andererseits werden wegen (6) das Volumen V und Oberfläche O des gegebenen regulären Körpers K durch die linken Seiten der Gleichung (3) und der Ungleichung (4) dargestellt und Volumen und Oberfläche von K' durch die rechten. Es ist daher

$$V = V'; \tag{15}$$

$$O \geqq O'. \tag{16}$$

Aus (14) und (15) folgt

$$O' \geqq O^*[V] \tag{17}$$

und aus (16) und (17)

$$O \geqq O^*[V]. \tag{18}$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn es in (16) und (17) und mithin auch (14) gilt. Letzteres findet dann und nur dann statt, wenn $m = 1$ und K' eine Kugel ist. Das Gleichheitszeichen in (16) gilt dann und nur dann, wenn es in (4) gilt, und das findet, wie oben ausgeführt, im Falle $m = 1$ dann und nur dann statt, wenn die beiden Körper K^* und $K^{*\prime}$ durch eine Drehung um M miteinander zur Deckung gebracht werden können. Da einer Drehung um M im (x)-Raum im sphärischen Raum ebenfalls eine Drehung entspricht, so müssen K und K' kongruent sein, und es muß, da K' eine Kugel ist, auch K eine solche sein. Also gilt in der Ungleichung (18) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn K eine Kugel ist.

Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der sphärischen Geometrie für n Dimensionen bewiesen unter der Voraussetzung, daß sie für $n-1$ Dimensionen gilt. Da sie endlich für zwei Dimensionen gilt, d. h. dem Kreise auf der Kugel zukommt, *so ist auf Grund des Induktionsschlusses der Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum für jede Dimensionenzahl erbracht.*

2) Der auseinandergesetzte Beweis für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im sphärischen Raum stützt sich nicht auf ihre Gültigkeit in der Euklidischen und hyperbolischen Geometrie. Es läßt sich vielmehr auf Grund der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel in der sphärischen Geometrie ein weiterer Beweis für diese Eigenschaft der Kugel im Euklidischen und hyperbolischen Raum aufbauen, welcher vom Induktionsschluß keinen Gebrauch macht. Man zieht zu diesem Zwecke das zweite Abrundungstheorem heran und schließt genau so, wie oben durchgeführt. Dabei bietet sich jetzt die wesentliche Vereinfachung, daß der Mittelpunkt der konzentrischen Kugelschar vom Körper K so weit entfernt gewählt werden kann, daß es einen von ihm ausgehenden Halbstrahl gibt, der den Körper nicht trifft. Dann besteht keine der konzentrischen Kugeloberflächen nur aus Punkten des Körpers, und die Anzahl m wird daher gleich eins. Im Euklidischen Fall sind ferner die Funktionen $\sigma(u)$ und $\tau(u)$ gleich eins zu setzen; im hyperbolischen Fall ist der Mittelpunkt der konzentrischen Kugelschar zum Mittelpunkt der das Modell umschließenden Einheitskugel § 6 (9), (10), der sogenannten absoluten Kugel, zu wählen, und es ist entsprechend der dem Innern derselben aufgeprägten Maßbestimmung bei der Heranziehung des zweiten Abrundungstheorems

$$\sigma(u) = \left(\frac{2}{1-u^2}\right)^{n-1}, \quad \tau(u) = \left(\frac{2}{1-u^2}\right)^{n}$$

zu setzen.

§ 9.

Weitere Anwendungen der Abrundung.

Diejenige Voraussetzung der Abrundungstheoreme, welche die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in einem Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum mit einer um eins geringeren Dimensionenzahl postuliert, entfällt, da nunmehr diese Eigenschaft in allen drei Geometrien für jede Dimensionenzahl bewiesen ist, als überflüssig, und die beiden Abrundungstheoreme bieten sich als eine unbedingte und fruchtbare Einsicht dar. Als unmittelbare Anwendung ergibt sich durch Wiederholung der Schlußweise der Paragraphen 6 und 8 der folgende in allen drei Geometrien bei jeder Dimensionenzahl geltende Satz:

Man schneide im Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum von n Dimensionen einen regulären Körper K mit einer Schar von Abstandsflächen einer Ebene, von konzentrischen Kugeln, oder im hyperbolischen Fall auch noch mit einer Schar von äquidistanten Orizykelflächen. Dabei sei die Schar so gewählt, daß auf den Randmannigfaltigkeiten des Körpers nicht unendlich viele Punkte vorhanden sind, in welchen eine Berührung mit einer Fläche der Schar stattfindet. Auf jeder der Flächen besteht eine $(n-1)$-dimensionale Maßbestimmung von ebenfalls konstantem Krümmungsmaße, und zwar ist sie auf den Abstandsflächen Euklidisch, hyperbolisch oder sphärisch je nachdem, ob das für den n-dimensionalen Raum gilt, auf den konzentrischen Kugeln sphärisch und auf den Orizykelflächen Euklidisch. Man konstruiere nun einen Körper K' nach der folgenden Vorschrift. Der Durchschnitt von K' mit jeder Fläche der Schar bestehe aus einer $(n-1)$-dimensionalen Vollkugel, deren Volumen gleich dem $(n-1)$-dimensionalen Volumen des Durchschnitts der Fläche mit dem Körper K ist, und deren Mittelpunkt im Schnittpunkt der Fläche mit einer der zu allen Flächen der Schar senkrechten Geraden fixiert sei.

Dann ist K' ein Rotationskörper, der im Vergleich mit K bei gleichem Volumen eine nicht größere Oberfläche aufweist — und zwar sind die Oberflächen im Falle des Schnitts mit Abstandsflächen im Euklidischen und hyperbolischen Raum oder mit Orizykelflächen in der hyperbolischen Geometrie dann und nur dann gleich, wenn die beiden Körper kongruent sind. Im Falle des Schnittes mit konzentrischen Kugeln besteht dagegen die Gleichheit dann und nur dann, wenn die beiden Körper dadurch zur Deckung gebracht werden können, daß den bei der Formulierung des zweiten Abrundungstheorems angegebenen m konzentrischen nicht ineinandergreifenden Kugelschichten um den gemeinsamen Mittelpunkt passende Drehungen erteilt werden. Dasselbe gilt natürlich in der sphärischen Geometrie auch für den Schnitt mit den Abstandsflächen einer Ebene, indem diese Flächen mit den konzentrischen Kugeln um die beiden Pole der Ebene identisch sind.

Dabei sind die durch die Voraussetzung hinsichtlich der Berührung mit den Randmannigfaltigkeiten von K ausgeschlossenen Flächenscharen als Ausnahmen zu betrachten — und zwar in der folgenden quantitativen Präzisierung: Die Gesamtheit der Mittelpunkte der ausgeschlossenen Scharen konzentrischer Kugeln besitzt den äußeren Inhalt Null. Dasselbe gilt von dem auf der absoluten Einheitskugel gemessenen äußeren Inhalt der Gesamtheit der absoluten Punkte der ausgeschlossenen Scharen äquidistanter Orizykelflächen und im Raum der Ebenenkoordinaten von dem äußeren Inhalt der Gesamtheit derjenigen Punkte, welche Ebenen entsprechen, deren Abstandsflächenschar ausgeschlossen ist.

Der eben auseinandergesetzte Abrundungssatz in Verbindung mit den von mir für Rotationskörper aufgestellten Verschärfungen der isoperimetrischen Abschätzung, insbesondere mit der sogenannten linearen isoperimetrischen Ungleichung[13]) führt zu den entsprechenden isoperimetrischen Verschärfungen und linearen Ungleichungen für beliebige reguläre Körper, auf die an dieser Stelle näher einzugehen der Rahmen verbietet, welcher der vorliegenden Arbeit gesteckt ist.

Es ist mir nicht gelungen, in der hyperbolischen und sphärischen Geometrie das Abrundungsverfahren auf die Schar der zu einer Geraden senkrechten Ebenen auszudehnen. Das liegt daran, daß diese Schar nicht äquidistant ist. Der Erfolg des Abrundungsverfahrens stützt sich eben wesentlich darauf, daß einerseits die auf jeder einzelnen Fläche herrschende Maßbestimmung konstantes Krümmungsmaß besitzt, während andererseits die Schar äquidistant ist. Dieser Umstand bringt in die Übertragung der feineren Struktur des isoperimetrischen Sachverhalts, also insbesondere auch der linearen Ungleichung von Rotationskörpern auf beliebige reguläre Körper, eine gewisse Friktion. Denn bei der Betrachtung von Rotationskörpern bietet der Schnitt mit der Ebenenschar senkrecht zur Rotationsachse die einfachsten Verhältnisse, indem dieser Schar vor den anderen der Vorzug innewohnt, bei einer Verschiebung längs der Rotationsachse in sich selbst überzugehen. In der Sprache der Variationsrechnung läßt sich das auch so ausdrücken: Das durch die Ebenenschar senkrecht zur Rotationsachse an die Hand gegebene Koordinatensystem ist der infinitesimalen Transformation angepaßt, welche von dem zweidimensionalen Variationsproblem zugelassen wird, auf das die isoperimetrische Aufgabe für Rotationskörper führt.

Wie in der Folge zur Ausführung gelangen wird, reichen die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Ergebnisse aus, um in einfacher Weise auch den Brunn-Minkowskischen Satz auf die nichteuklidische Geometrie zu übertragen — und zwar in der folgenden Gestalt:

Es sei im n-dimensionalen Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen Raum K eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge und K_h die sie umhüllende Menge derjenigen Punkte, deren Entfernung von K h nicht übersteigt. Das Maß von K sei $m(K)$ und das von K_h $m(K_h)$. Wie oben bezeichne ferner in der betrachteten Geometrie $V^*(r)$ das Volumen der Kugel mit dem Radius r. Es sei endlich ϱ der Radius der mit K maßgleichen Kugel, d. h. also definiert durch die Gleichung

$$V^*(\varrho) = m(K). \tag{1}$$

Dann gilt

$$m(K_h) \geqq V^*(\varrho + h), \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen der Kugel vorbehalten bleibt.

[13]) l. c.[1] § 11; l. c.[3] § 1.

(Eingegangen am 22. Juli 1942.)