KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 459—484 (1953)

Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen *).

Von
MARTIN KNESER.

Einleitung.

In der additiven Zahlentheorie spielen zwei Begriffe eine große Rolle. Erstens der Begriff der Summe von Zahlenmengen: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen, so versteht man unter der Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Menge aller Zahlen $a+b$ mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$. Zweitens der Begriff der Dichte einer Zahlenmenge $\mathfrak{A}$: Es sei $A(x)$ die Anzahl der positiven Zahlen $a \leq x$ aus $\mathfrak{A}$; dann nennt man den Wert $\underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{A(x)}{x}$ die untere finite (auch SCHNIRELMANNsche) Dichte von $\mathfrak{A}$ und $\underset{x\to\infty}{\underline{\lim}}\ \frac{A(x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$. Die SCHNIRELMANNsche Dichte der Summe zweier Mengen läßt sich nach einem bekannten Satz, den man etwa als zweite unter den „Drei Perlen der Zahlentheorie" von CHINTSCHIN [*1*] findet und den ich der Kürze halber den Dichtesatz nennen will, nach unten abschätzen. Dieser Satz lautet folgendermaßen.

Dichtesatz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen*[1]*, die die Null enthalten, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ ihre Summe und $A(x)$ $(B(x), C(x))$ die Anzahl der zu $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gehörigen positiven Zahlen $\leq x$, so gilt die Ungleichung*

$$(1) \qquad \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{C(x)}{x} \geq \mathrm{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{A(x)+B(x)}{x}\right).$$

Dieser Satz wurde 1930 von LANDAU und SCHNIRELMANN in der schwächeren Form

$$\underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{C(x)}{x} \geq \mathrm{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{A(x)}{x} + \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{B(x)}{x}\right)$$

---

*) Als Habilitationsschrift von der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg angenommen.

[1]) Üblicherweise wird der Satz nur für Mengen nichtnegativer Zahlen ausgesprochen. Für unsere Zwecke ist es aber vorteilhafter, ihn in der allgemeineren Gestalt zur Verfügung zu haben. Sachlich ist das kein großer Unterschied; denn wenn der Satz einmal für Mengen nichtnegativer Zahlen bewiesen ist, so folgt er auch für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$: Man nenne $\mathfrak{A}^+$ bzw. $\mathfrak{B}^+$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und ihre Summe $\mathfrak{C}^+$; dann ist $A^+(x)=A(x)$, $B^+(x)=B(x)$ und $\mathfrak{C}^+ \subseteq \mathfrak{C}$, also

$$\underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{C(x)}{x} \geq \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{C^+(x)}{x} \geq \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{A^+(x)+B^+(x)}{x} = \underset{x=1,2,\ldots}{\underline{\mathrm{fin}}}\ \frac{A(x)+B(x)}{x}.$$

vermutet und 1942 von H. B. MANN [7] bewiesen. Seitdem wurden mehrere Beweise und Verallgemeinerungen gegeben (vgl. [3], [5] und die in [3] angegebene Literatur). Andere Autoren versuchten ein ähnliches Ergebnis für den Fall zu erhalten, daß man die untere Grenze durch den unteren Limes, also die finite Dichte durch die asymptotische ersetzt. Dabei darf man kein ebenso glattes Resultat erwarten, da das genaue Analogon zu (1), die Ungleichung

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} \geq \operatorname{Min}\left(1, \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x}\right), \tag{2}$$

und auch die der zweiten schwächeren Ungleichung entsprechende nicht allgemein richtig ist, wie man an den folgenden Beispielen sieht.

Es seien g, k und l beliebige natürliche Zahlen und $k+l \leq g$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(g)}$ bestehe aus allen Zahlen, die einer der Zahlen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g kongruent sind. Dann besteht die Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k+l-2$ modulo g und es ist daher

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l-1}{g} < \frac{k+l}{g} = \operatorname{Min}\left(1, \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}\right)$$

im Gegensatz zu (2). An die Stelle der Restklassen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g können dabei auch andere k bzw. l Restklassen treten, wenn nur ihre Summe aus genau $k+l-1$ Restklassen besteht.

Weitere Beispiele von Mengen, für die (2) nicht gilt, erhält man, wenn man aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ Teilmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ wegläßt, die nicht zu groß sind, so daß die rechte Seite der letzten Ungleichung nicht zu sehr verkleinert wird. Genauer: Es seien $\overline{\mathfrak{A}} \subseteqq \mathfrak{A}^{(g)}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \subseteqq \mathfrak{B}^{(g)}$ so beschaffen, daß

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} < \frac{1}{g} \tag{3}$$

ist. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Komplementärmengen von $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, so gilt für ihre Summen $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ersichtlich $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(g)}$, also

$$\begin{aligned}\varliminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} &\leq \lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g} < \\ &< \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} = \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x},\end{aligned}$$

und das steht wegen

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l}{g} \leq 1$$

im Gegensatz zu (2).

Als Gegenstück zu der Relation $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(g)}$ läßt sich leicht nachweisen, daß alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ auch in $\mathfrak{C}$ liegen. Aus jeder Darstellung

$c = a^{(g)} + b^{(g)}$ einer Zahl aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ erhält man nämlich eine andere $c = a + b$, wenn man $a \equiv a^{(g)} \bmod g$ beliebig zwischen 0 und c wählt und $b = c - a$ setzt. Die Anzahl dieser Darstellungen ist für $c \to \infty$ asymptotisch gleich c/g; wegen (3) gibt es unter den Paaren (a, b) für genügend großes c sicher einige mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$, so daß c auch in $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ liegt.

Im folgenden werde ich einen Satz beweisen, der im wesentlichen aussagt, daß die Eigenschaften der hier konstruierten Beispiele kennzeichnend sind für die Mengen, die der Ungleichung (2) nicht genügen. Mit den schon oben benutzten Bezeichnungen lautet er folgendermaßen.

Dichtesatz für die asymptotische Dichte. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gilt entweder die Ungleichung*

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} \geq \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x) + B(x)}{x} \tag{4}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g und zwei Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, welche die Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ enthalten und aus vollen Restklassen modulo g bestehen derart, daß alle genügend großen Zahlen aus der Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ schon in $\mathfrak{C}$ liegen und die Formel gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x) + B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g}. \tag{5}$$

Dabei braucht in der Ungleichung (4) die rechte Seite nicht wie in (1) und (2) durch 1 ersetzt zu werden, falls $\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} > 1$ ist. Vielmehr liegt dann — da $\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x}$ als Dichte höchstens 1 ist, die Ungleichung (4) also sicher nicht zutrifft — stets die zweite Möglichkeit vor. Das kann man auch direkt einsehen: Man setze $g = 1$, $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zahlen; dann ist auch $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ und die Gl. (5) trifft zu; wegen $\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} > 1$ gilt für die Komplementärmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ungleichung (3), und daher enthält $\mathfrak{C}$ — nach dem gleichen Schluß wie oben — alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ wie behauptet. Außerdem folgt noch $\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} = 1$ und damit die Ungleichung (2). Die Beispiele von Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die (2) nicht gilt, sind also unter denen zu suchen, die die Eigenschaft $\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} \leq 1$ haben. Aus unserem Satz folgt nun leicht, daß diese Beispiele genau die zu Anfang konstruierten sind. Ist nämlich (2) und daher auch (4) falsch, so haben die Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ des Satzes gerade die Eigenschaften, die bei den Beispielen verlangt waren: Sie bestehen aus (k bzw. l) vollen Restklassen modulo g und ihre Summe $\mathfrak{C}^{(g)}$ enthält $k + l - 1$ Restklassen — das folgt aus (5) — und es ist $k + l \leq g$, denn aus dem Satz folgt $C(x) = C^{(g)}(x) + O(1)$ (für $x \to \infty$) also, wenn man noch das Gegenteil von (4): $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} < \varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x}$ berücksichtigt

$$\begin{aligned}\frac{k+l}{g} &= \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g}\\ &= \varliminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} + \frac{1}{g} < \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} + \frac{1}{g} \leqq 1 + \frac{1}{g},\end{aligned}$$

d.h. $k+l<g+1$ wie behauptet. Für die Komplementärmengen $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ weist man schließlich noch die Ungleichung (3) nach:

$$\begin{aligned}\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} <\\ &< \lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g} - \varliminf_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{g}.\end{aligned}$$

Man könnte den Satz also auch so formulieren, daß die zu Anfang angegebenen Beispiele die einzigen sind, in denen die Ungleichung (2) nicht gilt.

Der Beweis dieses Satzes wird den Hauptteil der vorliegenden Arbeit ausmachen; wir werden ihn gleich so allgemein führen, daß sich ein entsprechender Satz für beliebig viele Summanden an Stelle von zweien ergibt, ähnlich wie dies DYSON [5] für den Satz von MANN getan hat. Der Beweis vollzieht sich in mehreren Schritten, von denen die ersten (§ 1) je eine Reduktion der zu beweisenden Behauptung auf einfachere bringen. Die Aussage VI, auf die der Beweis schließlich zurückgeführt wird, läßt sich mit Hilfe des Satzes VIII beweisen (§ 3); dieser ist eng verwandt mit einem Satz von OSTMANN (s. [8] und die dort zitierten Arbeiten von OSTMANN); für zwei Summanden ist er ein Spezialfall des OSTMANNschen Satzes. Der von OSTMANN gegebene Beweis läßt sich anscheinend nicht auf mehrere Summanden übertragen. So wird hier (§ 2) ein anderer Beweis durchgeführt, der sich auf die der DYSONschen Verallgemeinerung des MANNschen Satzes verwandte Aussage VII stützt. Ihr Beweis entspricht im wesentlichen den in [3] angegebenen Beweisen. Auch sonst wird in den §§ 1 bis 3 ausgiebiger Gebrauch von den bei VAN DER CORPUT sog. e-Transformationen gemacht. Methodisch ist also vieles aus der Arbeit [3] entnommen. Trotzdem wird hier alles vollständig dargestellt, so daß die Kenntnis anderer Literatur nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

Im Anschluß an den Beweis sollen noch einige Folgerungen aus dem Dichtesatz für die asymptotische Dichte gezogen werden. Bedenkt man, daß die Mengen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^{(g)}$ von einer Stelle an dieselben Elemente enthalten, also $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} = \varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x}$ ist, und daß wegen $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B} \subseteqq \mathfrak{B}^{(g)}$ die Ungleichung $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} \leq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}$ gilt, so erhält man aus der Formel (5) die Abschätzung $\varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{C(x)}{x} \geq \varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{A(x)+B(x)}{x} - \frac{1}{g}$. Macht man nun zusätzliche Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kann man über den Wert von g

etwas aussagen und erhält damit Abschätzungen für die Dichte von $\mathfrak{C}$. Auf diese Weise werden sich im letzten Abschnitt (§ 4) unter anderem die schon erwähnten Resultate von ERDÖS [6] und OSTMANN [8], [9] ergeben.

Schließlich sei noch auf einen Zusammenhang mit Ergebnissen von I. CHOWLA [2] und H. DAVENPORT [4] über die Addition von Restklassen hingewiesen. Diese Resultate kann man erhalten, wenn man unseren Hauptsatz auf solche Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ anwendet, die aus vollen Restklassen nach einem Modul m bestehen. Man erhält so Verallgemeinerungen der genannten Ergebnisse. In diesem Fall vereinfacht sich übrigens der Beweis ganz wesentlich, da die Aussage I. dann trivial ist, während V. leicht direkt zu beweisen ist; die §§ 2 und 3 sowie ein Teil von § 1 wird dazu also gar nicht gebraucht.

§ 1. Der Dichtesatz für die asymptotische Dichte.

Einige Bezeichnungen, die dauernd gebraucht werden, seien zu Anfang kurz zusammengestellt. Es bezeichnen

kleine lateinische Buchstaben ganze rationale Zahlen;

große deutsche Buchstaben Mengen von ganzen Zahlen, insbesondere $\mathfrak{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen;

$\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_n=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\mathfrak{A}_\nu$ die Menge aller Summen $\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu$ mit $a_\nu\in\mathfrak{A}_\nu$, insbesondere $\mathfrak{A}+c$ für festes c die Menge aller Zahlen $a+c$ mit $a\in\mathfrak{A}$;

$\mathfrak{A}^{(g)}$ für eine Menge $\mathfrak{A}$ und eine natürliche Zahl g die Menge aller Zahlen, die modulo g zu irgendeiner Zahl aus $\mathfrak{A}$ kongruent sind: $\mathfrak{A}^{(g)}=\{a+xg;\ a\in\mathfrak{A},\ x \text{ ganz}\}$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ besteht also aus vollen Restklassen modulo g und ist die kleinste Menge dieser Art, die $\mathfrak{A}$ umfaßt;

$\mathfrak{A}(x, y)$ die Menge der Zahlen $a\in\mathfrak{A}$, für die $x\leq a\leq y$ ist, entsprechend $\mathfrak{B}(x, y)$ für $\mathfrak{B}$ usw.; dabei sei auch $y=\infty$ zugelassen;

$A(x, y)$ die Anzahl der Zahlen aus $\mathfrak{A}(x, y)$, entsprechend $B(x, y)$ für $\mathfrak{B}(x, y)$; insbesondere $A(x, y)=0$ falls $x>y$ ist;

$\delta(\mathfrak{A})=\varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{A(1, x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte der Menge $\mathfrak{A}$, allgemeiner für $n+1$ Mengen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $\delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)=\varliminf\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum\limits_{\nu=0}^{n}A_\nu(1, x)$; existiert für die Quotienten $\frac{A_\nu(1, x)}{x}$ nicht nur der limes inferior sondern der Grenzwert schlechthin, so gilt $\delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Stimmen zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von einer Stelle ab überein, gibt es also ein x, für das $\mathfrak{A}(x, \infty)=\mathfrak{B}(x, \infty)$ ist, so nennen wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ äquivalent und schreiben $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$; daraus folgt $\delta(\mathfrak{A})=\delta(\mathfrak{B})$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Dichtesatz für die asymptotische Dichte: *Sind* $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $n+1$ *Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe* $\mathfrak{A}=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\mathfrak{A}_\nu$, *so ist entweder*

$$\delta(\mathfrak{A})\geq\delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g mit den beiden Eigenschaften

$$\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A} \tag{7}$$

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}. \tag{8}$$

In der Ungleichung (8) stehen auf beiden Seiten rationale Zahlen mit dem Nenner g; wir können also statt dessen genauer

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g}$$

schreiben mit einer ganzen Zahl $\nu \leq n$; diese ist positiv, da andernfalls

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g} \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

wäre, so daß schon die Ungleichung (6) gälte. Für $n = 1$ ergibt das $\nu = 1$ und damit den in der Einleitung genannten Satz für zwei Summanden. Man überlegt sich leicht an Hand von Beispielen, daß für $n > 1$ die Werte $\nu = 1, \ldots, n$ tatsächlich alle auftreten können.

Zum Beweis des Dichtesatzes zeigen wir zunächst, daß er eine Folge der beiden schwächeren Aussagen I. und II. ist.

I. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft* (7).

II. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$, *so ist entweder* $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ *oder es gibt zu jeder endlichen Menge* $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathfrak{A}$ *eine die Zahlen* $a_1, \ldots, a_k$ *enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl h so, daß* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *ist und die Ungleichung* $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ *gilt.*

Diesem Nachweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Aus* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *folgt* $\mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)}$ [2].

Beweis. Aus $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^{(h)}$ folgt $\mathfrak{C}^{(g)} \subseteq \mathfrak{C}^{(h)(g)}$, so daß es genügt $\mathfrak{C}^{(h)(g)} \subseteq \mathfrak{C}^{(g)}$ nachzuweisen. Nun enthält die Menge $\mathfrak{C}^{(h)}$ aus jeder Restklasse modulo g, aus der sie überhaupt eine Zahl c enthält, die sämtlichen Zahlen $c + x\,g\,h$ und diese liegen wegen $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ für genügend großes x in $\mathfrak{C}$; die in $\mathfrak{C}^{(h)}$ vertretenen Restklassen modulo g sind also dieselben, die auch in $\mathfrak{C}$ vorkommen und das ist die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Aus* $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ *folgt* $(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Beweis. $\mathfrak{B}$ enthält nach Voraussetzung mit einer Zahl b auch die Zahlen $b + x\,h$ für genügend große x; also enthält $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ mit einer Zahl $b + c$ für genügend große x auch die Zahlen $b + c + x\,h$ wie behauptet.

Wir behandeln zuerst den Fall $n = 1$ des Dichtesatzes. Wenn die Ungleichung (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls gibt es nach I. eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft (7); wir wählen die kleinste Zahl dieser Art aus

[2] Aus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ folgt für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht etwa schon $\mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)}$ (oder auch nur $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$) wie man sich an endlichen Mengen klarmachen kann.

und zeigen, daß für sie die Ungleichung (8) gilt. Dazu wenden wir II. auf die Mengen $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0^{(g)}$ und $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(g)}$ an und wählen für $a_1, \ldots, a_k$ ein Vertretersystem für die Restklassen modulo g, die in $\mathfrak{B}$ überhaupt vorkommen. Das liefert entweder die Ungleichung $\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ und damit wegen (7) auch

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g}\,,$$

wie behauptet, oder eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine natürliche Zahl h mit

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteqq \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$$

und

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h}\,.$$

Wegen der Auswahl der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt dann $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)}$. Es sei jetzt d der größte gemeinsame Teiler von g und h; beachtet man, daß $\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)}$ ist, so erhält man nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}\,.$$

Wegen der Minimaleigenschaft von g folgt daraus $d \geq g$, also $h \geq g$ und damit

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{C}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h} \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g}$$

wie behauptet.

Für beliebiges n beweisen wir den Dichtesatz durch Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist eben gemacht. Nehmen wir also an, der Satz sei schon für n Summanden bewiesen, und zeigen, daß er auch für $n+1$ Summanden $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mit der Summe $\mathfrak{A}$ richtig ist. Wenn (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls sei wieder g die kleinste der nach I. sicher vorhandenen Zahlen mit der Eigenschaft (7). Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die Mengen $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ mit der Summe $\mathfrak{B}$ an; das ergibt entweder $\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1})$, also erst recht

$$\delta(\mathfrak{B}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)} \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{g}\,, \tag{9}$$

oder $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ und

$$\delta(\mathfrak{B}) = \delta(\mathfrak{B}^{(h)}) \geq \delta(\mathfrak{B}_0^{(h)}, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}^{(h)}) - \frac{n-1}{h} \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{h}$$

für ein gewisses h; wir behaupten, daß auch hier $h \geq g$ ist, und daher die Ungleichung (9) gilt. Zum Beweis sei wieder d der größte gemeinsame Teiler von g und h; nach Hilfssatz 2 gilt dann

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}\,,$$

also $d \geq g$ wegen der Minimaleigenschaft von g und damit $h \geq g$ wie behauptet. Nun wenden wir den Dichtesatz auf die beiden Summanden $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ und

$\mathfrak{A}_n^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{A}^{(g)}$ an. Das ergibt unter Benutzung von (9) entweder

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_n^{(g)}) = \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n-1}{g},$$

also erst recht die Ungleichung (8), oder $\mathfrak{A}^{(g)(h)} \sim \mathfrak{A}^{(g)}$ für ein gewisses h und

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)(h)}) \geq \delta(\mathfrak{B}^{(h)}, \mathfrak{A}_n^{(g)(h)}) - \frac{1}{h} \geq \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{1}{h};$$

auch hier folgt wie oben $h \geq g$ und damit auf Grund von (9) die Ungleichung (8).

Als nächstes führen wir den Beweis von I. und II. zurück auf die Aussage

III. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt zu jeder Zahl* $a \in \mathfrak{A}$ *eine* a *enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* $g = g(a)$ *so, daß* $\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C}$ *und*

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$$

ist.

Beweis von I. Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder gibt es unter den Zahlen $g(a)$ beliebig große, dann folgt aus

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g(a)}$$

die Ungleichung (6); oder die Zahlen $g(a)$ sind beschränkt; dann sei h ein gemeinsames Vielfaches aller Zahlen $g(a)$. Nach III. enthält $\mathfrak{A}$ mit einer Zahl a auch alle Zahlen $a + x\,g(a)$, falls nur x genügend groß ist, also erst recht für großes x die Zahlen $a + x\,h$; das bedeutet aber gerade $\mathfrak{A}^{(h)} \sim \mathfrak{A}$ wie behauptet.

Beweis von II. durch Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k = 1$ folgt unmittelbar aus III. Es sei der Beweis also schon für $k - 1$ Zahlen $a_1, \ldots, a_{k-1}$ geführt. Ist nun $\delta(\mathfrak{A}) < \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ und sind k Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathfrak{A}$ gegeben, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Menge $\mathfrak{D}$ und eine Zahl l mit den Eigenschaften

$$\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \subseteqq \mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{D}^{(l)} \sim \mathfrak{D}, \qquad \delta(\mathfrak{D}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l},$$

und nach III. eine Menge $\mathfrak{E}$ und eine Zahl m mit

$$a_k \in \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E}, \qquad \delta(\mathfrak{E}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m}.$$

Wir setzen jetzt $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}$; dann gilt jedenfalls $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteqq \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{A}$. Ist nun $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{E}^{(m)}$, so setzen wir $h = m$ und haben dann $\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(m)} = \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{C}$, also wegen $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(h)}$ auch $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$, und $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{E}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ wie behauptet; entsprechend setzen wir $h = l$, wenn $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{D}^{(l)}$ gilt. Ist keines von beiden der Fall, so sei h das kleinste gemeinsame Vielfache von l und m; dann gilt ersichtlich

$$\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(h)} \subseteqq \mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E} = \mathfrak{C}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C};$$

es bleibt zu zeigen, daß $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ ist. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{D}^{(l)}$ bzw. $\mathfrak{E}^{(m)}$ und haben dann

$$\delta(\mathfrak{C}) = \delta(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}) = \delta(\mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)})$$
$$= \begin{cases} \delta(\mathfrak{D}^{(l)}) + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l} + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \\ \delta(\mathfrak{E}^{(m)}) + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m} + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \end{cases}.$$

Mit $l' = \frac{h}{l}$ und $m' = \frac{h}{m}$ genügt es also zu zeigen, daß mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geq \frac{1}{l} - \frac{1}{h} = \frac{l'-1}{h}$$
$$\delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{h} = \frac{m'-1}{h}$$

gilt, daß also entweder in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l'-1$ oder in $\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m'-1$ Restklassen modulo h liegen. Wir setzen jetzt voraus, daß $l' \leq m'$ ist — der Fall $m' < l'$ läßt sich durch Vertauschung von $\mathfrak{D}$ und l mit $\mathfrak{E}$ und m auf diesen zurückführen. Da wir angenommen hatten, daß $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{D}^{(l)}$ liegt, gibt es in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ eine Restklasse modulo h; es sei $\mathfrak{R}$ die zugehörige Restklasse modulo d, dem größten gemeinsamen Teiler von l und m; wir werden zeigen, daß schon $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l'-1$ oder $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m'-1$ Restklassen modulo h enthält. $\mathfrak{R}$ zerfällt modulo l in $\frac{l}{d} = \frac{h}{m} = m'$ und modulo m in $\frac{m}{d} = \frac{h}{l} = l'$ Restklassen und jede dieser Restklassen zerfällt wieder in l' bzw. m' Restklassen modulo h. Es bestehe jetzt $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)}$ aus u Restklassen modulo l und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}$ aus v Restklassen modulo m; dann besteht $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}) \cap (\mathfrak{R} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}})$ aus $v(m'-u)$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ aus $u(l'-v)$ Restklassen modulo h, und wir haben daher zu zeigen, daß entweder

$$v(m'-u) \geq l'-1$$

oder

$$u(l'-v) \geq m'-1$$

gilt. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ nicht leer, also

$$v \geq 1 \quad \text{und} \quad m'-u \geq 1.$$

Ist auch noch

$$u \geq 1 \quad \text{und} \quad l'-v \geq 1,$$

so schreiben wir die fraglichen Ungleichungen um zu

$$(v-1)(m'-u-1) + v + m' - u - 1 \geq l' - 1$$
$$(u-1)(l'-v-1) + u + l' - v - 1 \geq m' - 1;$$

eine von beiden ist sicher erfüllt, wenn eine der beiden Ungleichungen

$$v + m' - u \geq l'$$
$$u + l' - v \geq m'$$

zutrifft, und das ist ersichtlich immer der Fall. Ist schließlich $u = 0$, so folgt aus der Annahme $l' \leq m'$ die Ungleichung $v(m' - u) \geq m' \geq l' - 1$; ist aber $l' - v = 0$, so folgt $v(m' - u) \geq l' \geq l' - 1$ und das beweist die Behauptung.

Die Aussage III. formen wir noch etwas um. Die Zahl $a \in \mathfrak{A}$ habe die Darstellung $a = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ mit $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$. Wir betrachten die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu = \mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ mit der Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} (\mathfrak{A}_\nu - a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \mathfrak{A} - a$. Die Anzahl der Elemente aus $\overline{\mathfrak{A}}_\nu(1, x)$ ist gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{A}_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu) : \overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu)$ und daher für $x \to \infty$ $\overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1, x) + O(1)$ und entsprechend $\overline{A}(1, x) = A(1, x) + O(1)$. Daraus folgt $\delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ und $\delta(\overline{\mathfrak{A}}) = \delta(\mathfrak{A})$. Die Formel (6) ist also gleichwertig mit der entsprechenden Formel für $\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n$ und $\overline{\mathfrak{A}}$. Der zweite Teil der Aussage III. ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Zahl g und einer Teilmenge $\overline{\mathfrak{C}}[= \mathfrak{C} - a]$ von $\overline{\mathfrak{A}}$, welche die Null enthält, mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{C}}^{(g)}[\sim \mathfrak{C}^{(g)} - a \sim \mathfrak{C} - a] \sim \overline{\mathfrak{C}}$ und $\delta(\overline{\mathfrak{C}})\left[\geq \delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}\right] \geq \delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) - \frac{n}{g}$. Wir haben also zu zeigen (die Querstriche lassen wir der Einfachheit halber wieder weg):

IV. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine die Null enthaltende Teilmenge $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* g *so, daß die Formeln*

$$\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C} \tag{10}$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g} \tag{11}$$

gelten.

Zum Beweis dieser Behauptung müssen wir etwas weiter ausholen. Es seien — unabhängig von dem bisherigen — $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Zahlenmengen und e eine ganze Zahl. Dann definieren wir zwei neue Mengen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ durch

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{B} + e), \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} - e).$$

Diese haben folgende Eigenschaften:

a) Die Summe von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ist in der von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten:

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \subseteqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Beweis. Ist $a' \in \mathfrak{A}'$ und $b' \in \mathfrak{B}'$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist $a' \in \mathfrak{A}$, dann benutzen wir die Tatsache, daß $b' \in \mathfrak{B}$ ist, und erhalten

$a'+b' \in \mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; oder es ist $a' \in \mathfrak{B}+e$, dann nutzen wir aus, daß $b' \in \mathfrak{A}-e$ ist, und erhalten $a'+b' \in (\mathfrak{B}+e)+(\mathfrak{A}-e)=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ wie behauptet.

b) Es ist

$$A'(x, y)+B'(x-e, y-e)=A(x, y)+B(x-e, y-e) \tag{12}$$

und daher für beliebige Mengen $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$

$$\delta(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n)=\delta(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n).$$

Beweis. Wegen $A(x, y)+B(x-e, y-e)=\sum_{z=x}^{y} A(z, z)+B(z-e, z-e)$ und der entsprechenden Gleichung für $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ genügt es zu zeigen, daß $A'(z, z)+B'(z-e, z-e)=A(z, z)+B(z-e, z-e)$ gilt, und das trifft zu, da beide Seiten gleich 2 sind wenn $z \in \mathfrak{A}$ und $z-e \in \mathfrak{B}$ ist, gleich 1 wenn eine dieser Relationen gilt, und gleich 0 wenn keine zutrifft. Aus (12) folgt $A'(1, y)+B'(1, y)=A(1, y)+B(1, y)+O(1)$ für $y \rightarrow \infty$; also gilt auch die zweite Formel.

c) Ist $e \in \mathfrak{A}$ und $0 \in \mathfrak{B}$, so ist auch $0 \in \mathfrak{B}'$.

d) $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}' \leqq \mathfrak{B}$.

e) $\mathfrak{B}'+e \leqq \mathfrak{B}+e \leqq \mathfrak{A}'$.

Von jetzt ab nehmen wir an, es sei $e \in \mathfrak{A}$ und $0 \in \mathfrak{B}$, und sagen dann mit van der Corput [3], $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ entstehen aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch eine e-Transformation. Nach c) liegt dann auch $0 \in \mathfrak{B}'$; ist nun e' eine Zahl aus $\mathfrak{A}'$, so können wir auf $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ und e' das gleiche Verfahren anwenden wie eben auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und e und erhalten zwei Mengen $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$; mit diesen können wir ebenso verfahren und kommen so zu weiteren Mengenpaaren. Von allen diesen Paaren, die sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch mehrmalige Anwendung von e-Transformationen ergeben, sagen wir, sie seien von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitet. Für solche abgeleitete Mengen wollen wir noch ein weiteres Ergebnis herleiten. Dazu betrachten wir die e) entsprechende Relation $\mathfrak{B}''+e' \leqq \mathfrak{A}''$ und die aus d) und e) folgende $\mathfrak{B}''+e \leqq \mathfrak{B}'+e \leqq \mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}''$. Zusammen ergibt das $\mathfrak{B}''+\{e, e'\} \leqq \mathfrak{A}''$. Entsprechend zeigt man $\mathfrak{B}'''+\{e, e', e''\} \leqq \mathfrak{A}'''$ usw. Nun können wir wegen $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}'' \leqq \ldots$ für $e, e', e'', \ldots$ beliebige Zahlen aus $\mathfrak{A}$ wählen; ist uns eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ vorgegeben, so können wir z.B. gerade die Elemente von $\mathfrak{E}$ nehmen und erhalten so das Ergebnis:

f) Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so gibt es zwei von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{B}^*+\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}^*.$$

Wir kehren jetzt zu den Mengen $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ aus IV. zurück. Die Menge $\mathfrak{A}_0$ wird im folgenden eine durch den Beweis bedingte Sonderstellung einnehmen, obwohl das Ergebnis völlig symmetrisch in den $\mathfrak{A}_\nu$ ist. Außer $\mathfrak{A}_0$ wählen wir noch eine andere Menge $\mathfrak{A}_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ und eine Zahl $e \in \mathfrak{A}_0$ aus; auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_k$ wenden wir die e-Transformation an und erhalten so zwei Mengen $\mathfrak{A}_0'$ und $\mathfrak{A}_k'$; setzen wir noch $\mathfrak{A}_\nu'=\mathfrak{A}_\nu$ für $\nu \neq 0, k$ und $\mathfrak{A}'=\sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu'$, so gilt auf Grund der

Eigenschaften a) bis d) der e-Transformation und der Voraussetzung $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ aus IV.

$$\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}, \tag{13}$$

$$\delta(\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n') = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n), \tag{14}$$

$$0 \in \mathfrak{A}_\nu' \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_0 \leqq \mathfrak{A}_0', \quad \mathfrak{A}_\nu' \leqq \mathfrak{A}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Auf die Mengen $\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n'$ können wir wieder das gleiche Verfahren (mit anderen $e' \in \mathfrak{A}_0'$ und k' zwischen 1 und n) anwenden usw. Alle Mengensysteme, die wir so erhalten, nennen wir von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitet. Für sie gelten wieder die Eigenschaften (13) bis (16). Ist nun $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es nach f) zwei von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}_0^*$ und $\mathfrak{A}_1^*$, also indem man $\mathfrak{A}_\nu^* = \mathfrak{A}_\nu$ setzt für $\nu \neq 0, 1$, ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}_\nu^*\}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}_1^* + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0^*$. Hieraus erhalten wir — wieder nach f) angewandt auf $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0^*$ und $\mathfrak{A}_2^*$ — ein abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}_\nu^{**}\}$ mit $\mathfrak{A}_2^{**} + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0^{**}$; außerdem gilt wegen (16) noch $\mathfrak{A}_1^{**} + \mathfrak{E} = \mathfrak{A}_1^* + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0^* \leqq \mathfrak{A}_0^{**}$, also zusammen $(\mathfrak{A}_1^{**} \cup \mathfrak{A}_2^{**}) + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0^{**}$. So fortfahrend erhält man das Ergebnis:

Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}_\nu'\}$ mit der Eigenschaft

$$\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'\right) + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0'. \tag{17}$$

Wir werden im folgenden den Beweis von IV. nicht für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n'$ führen. Das genügt, denn wenn IV. für $\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n'$ richtig ist, so gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n')$ und damit wegen (13) und (14) $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n') = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, das ist die Ungleichung (6); oder es gibt eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine Zahl g mit den Eigenschaften

$$0 \in \mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C},$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n') - \frac{n}{g}.$$

Wegen (13) gilt dann auch $0 \in \mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}$ und wegen (14) auch $\delta(\mathfrak{C}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$, so daß also IV. auch für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gilt.

Es kommt nun darauf an, unter den abgeleiteten Mengensystemen eines herauszufinden, für das der Beweis von IV. möglichst einfach wird. Dazu ordnen wir jeder Menge $\mathfrak{C}$ zwei Zahlen $f(\mathfrak{C})$ und $g(\mathfrak{C})$ zu, und zwar sei $f(\mathfrak{C})$ das Minimum aller Differenzen von Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$f(\mathfrak{C}) = \min_{\substack{c, c' \in \mathfrak{C} \\ c < c'}} (c' - c)$$

und $g(\mathfrak{C})$ der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$g(\mathfrak{C}) = \underset{c \in \mathfrak{C}}{\mathrm{g.g.T.}} (c).$$

$g(\mathfrak{C})$ teilt sicher auch alle Differenzen $c'-c$, so daß $g(\mathfrak{C}) \leq f(\mathfrak{C})$ folgt. Uns interessieren besonders die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ (die Menge $\mathfrak{A}'_0$ bleibt dabei, ihrer Sonderstellung entsprechend, unberücksichtigt). Setzen wir abkürzend $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = f$, so erhalten wir aus der Definition von f für die k-te positive Zahl a_k aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ die Abschätzung $a_k \geq k f$ und damit für $\nu = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $A'_\nu(1, x) \leq \frac{x}{f}$. Wegen $\mathfrak{A}'_0 \subseteq \mathfrak{A}'$ gibt das

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}'_0) \geq \varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left[A'_0(1,x) + A'_1(1,x) + \cdots + A'_n(1,x) - \frac{n\,x}{f}\right] \\ &\qquad = \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - \frac{n}{f} = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - n\, f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}. \end{aligned}\right.$$

Wegen $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) \leq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ folgt hieraus erst recht die Ungleichung

$$(19)\qquad \delta(\mathfrak{A}') \geq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - n\, g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}.$$

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für alle abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$. Ist sie unbeschränkt, so folgt aus (18) sofort die Ungleichung (6) und wir sind fertig. Anderenfalls sind die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und damit auch $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt. Wir können daher unter den abgeleiteten Systemen eines aussuchen, für das $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ maximal ist. Für alle von diesen $\mathfrak{A}'_\nu$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ gilt dann auf Grund der Wahl von $\mathfrak{A}'_\nu$ die Ungleichung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) \leq g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Andererseits ist nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; es gilt also auch die umgekehrte Ungleichung und daher $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Für diese Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ kann man nun die Zahl g und die Menge $\mathfrak{C}$ aus IV. direkt angeben: Wir setzen $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; die Ungleichung (11) folgt dann aus (19), und es bleibt daher nur die Aussage V. zu beweisen:

V. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und gilt* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es ist* $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$[3]).

Enthält hier $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g mindestens eine Zahl, liegen z.B. g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$, so ist $\mathfrak{A}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller ganzen Zahlen und die zweite Behauptung aus V. lautet dann $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Auf

[3]) Die Voraussetzung, daß die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt sind, die wir nach dem eben bewiesenen noch machen könnten, ist hier noch nicht nötig; wir werden die Zahlen f erst später brauchen.

diesen Fall, daß g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$ liegen, wollen wir die Aussage V. zurückführen. Dazu beachten wir, daß nach Definition von g alle Zahlen aus $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch g teilbar sind; jedes $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$ läßt sich also in die Gestalt $a_\nu = d_\nu g$ setzen. Die Zahlen d_ν bilden eine Menge $\mathfrak{D}_\nu$ und wir schreiben $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g$ [4]). Die Menge $\mathfrak{A}_0$ zerlegen wir in Restklassen modulo g: $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{R}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_g$. Dabei kann ein Teil der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ auch leer sein; wir denken uns die Numerierung so gewählt, daß $\mathfrak{R}_1$ bis $\mathfrak{R}_h$ je mindestens eine Zahl enthalten, während $\mathfrak{R}_{h+1}$ bis $\mathfrak{R}_g$ leer sind. Aus jeder der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, h)$ wählen wir eine Zahl r_μ aus und können dann schreiben $\mathfrak{R}_\mu - r_\mu = \mathfrak{C}_\mu g$. Zusammengefaßt haben wir also

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{C}_1 g + r_1) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h g + r_h) \\ \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{20}$$

Nach Konstruktion ist die Null sowohl in den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ als auch in den $\mathfrak{D}_\nu$ enthalten. Aus diesen Mengen bauen wir jetzt neue auf, indem wir setzen

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{C}_1 h + 1) \cup (\mathfrak{C}_2 h + 2) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h h + h) \\ \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{D}_\nu h \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{array}\right. \tag{21}$$

Dann enthält $\mathfrak{B}_0$ die h aufeinanderfolgenden Zahlen $1, \ldots, h$, während die Null in $\mathfrak{B}_1$ bis $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist. Aus den Formeln (20) und (21) folgt für $x \to \infty$

$$\begin{aligned} B_0(1, x h) &= \sum_{\mu=1}^{h} C_\mu(1, x) + O(1) = A_0(1, x g) + O(1) \\ B_\nu(1, x h) &= D_\nu(1, x) = A_\nu(1, x g) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x h} \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu(1, x h) \\ &= \frac{g}{h} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x g} \left[\sum_{\nu=0}^{n} A(1, x g) + O(1)\right] = \frac{g}{h}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n). \end{aligned}$$

Zwischen den Summen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{B}_\nu$ besteht folgender Zusammenhang

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu g = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu\right) g + r_\mu\right] \\ \mathfrak{B} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu h + \mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu h = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu\right) h + \mu\right]. \end{array}\right. \tag{22}$$

Das ist ein zu (20) und (21) analoges Formelpaar; daher folgt auch hier $\delta(\mathfrak{B}) = \frac{g}{h}\, \delta(\mathfrak{A})$. Die Ungleichung (6) ist also mit der entsprechenden für $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}$ gleichbedeutend.

[4]) Davon zu unterscheiden ist das Symbol $g\mathfrak{D}_\nu$, mit dem man die g-fache Summe $\mathfrak{D}_\nu + \cdots + \mathfrak{D}_\nu$ bezeichnet.

Die durch (20) und (21) gegebene Zuordnung der Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ zu den $\mathfrak{A}_\nu$ dehnen wir auf die von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus, indem wir in (20) und (21) einfach $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\mu, \mathfrak{D}_\nu$ durch $\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{B}'_\nu, \mathfrak{C}'_\mu, \mathfrak{D}'_\nu$ ersetzen; daß die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ tatsächlich eine Darstellung nach Art der Formeln (20) zulassen, sieht man so: Zunächst sei $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}_\nu$ für $\nu = 2, \ldots, n$ während $\mathfrak{A}'_0$ und $\mathfrak{A}'_1$ aus $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ durch eine e-Transformation hervorgehen:

$$\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cup (\mathfrak{A}_1 + e), \qquad \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}_1 \cap (\mathfrak{A}_0 - e).$$

Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß e in $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C}_1 g + r_1$ liegt: $e = c_1 g + r_1$. Dann ist

$$\mathfrak{A}'_0 = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu) \cup (\mathfrak{D}_1 g + c_1 g + r_1) = [(\mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1))\, g + r_1] \cup \bigcup_{\mu=2}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu)$$

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{D}_1 g \cap \bigcup_{\mu=1}^{h} [(\mathfrak{C}_\mu - c_1)\, g + r_\mu - r_1] = [\mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1)]\, g,$$

letzteres, da die Zahlen $r_\mu - r_1$ für $\mu \neq 1$ nicht durch g teilbar sind, und

$$\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Dies sind gerade Darstellungen von der Art der Formeln (20). Durch Vergleich erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'_1 &= \mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1) & \qquad \mathfrak{D}'_1 &= \mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1) \\ \mathfrak{C}'_\mu &= \mathfrak{C}_\mu \quad (\mu = 2, \ldots, h) & \qquad \mathfrak{D}'_\nu &= \mathfrak{D}_\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

$\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{D}'_1$ entstehen aus $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ also wieder durch eine e-Transformation. Da hierbei $e = c_1 g + r_1$ beliebig aus $\mathfrak{R}_1$, also c_1 beliebig aus $\mathfrak{C}_1$, gewählt werden kann und wir außerdem das Indexpaar $\mu = 1$, $\nu = 1$ durch ein beliebiges anderes $\mu = k$, $\nu = l$ ersetzen können, ergibt sich das Resultat: Einer e-Transformation, angewandt auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht bei den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ wieder eine e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{C}_k$ und $\mathfrak{D}_l$ und umgekehrt. Da nun die Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ mit den $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ in ganz ähnlicher Weise zusammenhängen wie die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$, so hat man: Einer e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht eine e-Transformation von $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_l$ und umgekehrt. Durch mehrmalige Anwendung dieses Schlusses erhält man endlich das Ergebnis: Bei der durch (20) und (21) gegebenen Zuordnung entsprechen den von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen die von $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ abgeleiteten Mengen und umgekehrt. Als letztes müssen wir untersuchen, wie sich die Voraussetzung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ und die Behauptung $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$ übertragen. Die erste ist nach (20) gleichwertig mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu\right) = 1$ und dies nach (21) mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}_\nu\right) = h$; die zweite ist nach (22) gleichbedeutend mit $\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ für $\mu = 1, \ldots, h$, also nach der zweiten Formel (22) mit $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ oder, da $\mathfrak{B}$ aus jeder Restklasse modulo h eine Zahl enthält, mit $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$. Wir haben also an Stelle von V. nur noch den Satz VI zu beweisen (statt $\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}, h$ schreiben wir wieder $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}, g$):

VI. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, *liegen g aufeinanderfolgende Zahlen in* $\mathfrak{A}_0$ *und ist* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt für die Summe* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einen Hilfssatz, der als Satz VIII im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

§ 2. Zwei Hilfssätze.

Wir beweisen jetzt zunächst einen Satz, der die Theoreme 3 und 9 aus [3] in sich vereinigt und wie diese bewiesen werden kann. Da ein Beweis sich hier ohne Schwierigkeiten anschließen läßt, ist er der Vollständigkeit halber ausgeführt; er entspricht in seinen Grundzügen den von VAN DER CORPUT in [3] gegebenen Beweisen.

VII. $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *seien Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; ferner sei* $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und*

$$A_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(1, x) \geqq \alpha(x+1) \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots.$$

Dann ist

$$A(0, x) \geqq \alpha(x+1) \quad \text{für} \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{23}$$

Den Beweis führen wir mittels des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen von VII. gibt es zu irgend zwei Zahlen k und l* ($k \geqq 0$, $0 \leqq l \leqq n$) *ein von* $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ *abgeleitetes System von Mengen* $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ *mit den Eigenschaften*

$$A'_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{l} A'_\nu(1, x-k-1) + \sum_{\nu=l+1}^{n} A'_\nu(1, x-k) \geqq \alpha(x+1) \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k) \subseteqq \mathfrak{A}'_0 & \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l, \\ \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k-1) \subseteqq \mathfrak{A}'_0 & \text{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{25}$$

Beweis von VII. Wir setzen in (24) $x = k$ und erhalten wegen $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu \geqq \mathfrak{A}'_0$ die Ungleichung

$$A(0, k) \geqq A'_0(0, k) \geqq \alpha(k+1).$$

Das ist gerade die behauptete Ungleichung (23) für $x = k$; da $k \geqq 0$ beliebig war, sind wir fertig.

Beweis des Hilfssatzes. Für $k=l=0$ können wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}_\nu$ setzen; (24) ist dann eine der Voraussetzungen von VII. und (25) ist trivialerweise erfüllt, da $\mathfrak{A}'_0(0, k-1)=\mathfrak{A}_0(0, -1)$ leer ist. Wir beweisen den Hilfssatz jetzt für festes k durch Induktion nach l. Von $k=l=0$ ausgehend kommen wir so bis $k=0$, $l=n$. In diesem letzten Fall sind die Behauptungen gleichwertig mit denen für $k=1$, $l=0$. Durch nochmalige Anwendung des Induktionsschlusses kommen wir dann bis $k=1$; $l=n$ und das ist wieder gleichwertig mit dem Fall $k=2$, $l=0$ usw. Zum Beweis können wir also annehmen, daß $l>0$ ist und der Hilfssatz schon für k und $l-1$ an Stelle von k und l gilt. Dann gibt es also von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit

$$A''_0(0, x)+\sum_{\nu=1}^{l-1} A''_\nu(1, x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n} A''_\nu(1, x-k) \geqq \alpha(x+1),$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0, k) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \quad \text{für} \quad \nu=1, \ldots, l-1,$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0, k-1) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \quad \text{für} \quad \nu=l, \ldots, n.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) Liegt k nicht in $\mathfrak{A}''_0$, so setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$. Wegen $\mathfrak{A}'_0(0, k)=\mathfrak{A}''_0(0, k)= \mathfrak{A}''_0(0, k-1)$ gilt dann (25); außerdem ist

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} & A'_0(0, x)+\sum_{\nu=1}^{l-1} A'_\nu(1, x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n} A'_\nu(1, x-k) \\ & =A''_0(0, x)+\sum_{\nu=1}^{l-1} A''_\nu(1, x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n} A''_\nu(1, x-k) \geqq \alpha(x+1). \end{aligned}\right.$$

Aus (25) und (26) folgt nun auch (24). Liegt nämlich $x-k$ nicht in $\mathfrak{A}'_l$, so ist $A'_l(1, x-k-1)=A'_l(1, x-k)$ und die linken Seiten von (24) und (26) stimmen überein. Ist aber $x-k \in \mathfrak{A}'_l$, so gilt wegen (25) $\mathfrak{A}'_0(0, k)+(x-k) \subseteqq \mathfrak{A}'_0(0, k)+\mathfrak{A}'_l \subseteqq \mathfrak{A}'_0$. Also enthält $\mathfrak{A}'_0$ mindestens so viele Zahlen zwischen $x-k$ und x wie zwischen 0 und k: $A'_0(x-k, x) \geqq A'_0(0, k)$. Nach (26) ist weiter $A'_0(0, k) \geqq \alpha(k+1)$ und daher wieder nach (26) mit $x-k-1$ statt x

$$\begin{aligned} & A'_0(0, x)+\sum_{\nu=1}^{l} A'_\nu(1, x-k-1)+\sum_{\nu=l+1}^{n} A'_\nu(1, x-k) \\ & \geqq A'_0(x-k, x)+A'_0(0, x-k-1)+\sum_{\nu=1}^{l-1} A'_\nu(1, x-2k-2)+\sum_{\nu=l}^{n} A'_\nu(1, x-2k-1) \\ & \geqq \alpha(k+1)+\alpha(x-k)=\alpha(x+1) \end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Liegt k in $\mathfrak{A}''_0$, so wenden wir auf $\mathfrak{A}''_0$ und $\mathfrak{A}''_l$ die e-Transformation mit $e=k$ an und erhalten $\mathfrak{A}'_0=\mathfrak{A}''_0 \cup (\mathfrak{A}''_l+k)$ und $\mathfrak{A}'_l=\mathfrak{A}''_l \cap (\mathfrak{A}''_0-k)$; außerdem setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$ für $\nu \neq 0, e$. Da $\mathfrak{A}_l$ und daher auch $\mathfrak{A}''_l$ aus nichtnegativen Zahlen besteht, sind alle Zahlen, die in $\mathfrak{A}''_l+k$ liegen $\geqq k$. Aus der Definition von $\mathfrak{A}'_0$ liest man daher die Gleichung $\mathfrak{A}'_0(0, k)=\mathfrak{A}''_0(0, k) \cup \{k\}=\mathfrak{A}''_0(0, k)$ ab.

Also gilt nach (16)

$$\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k) = \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \subseteqq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l-1,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'_l + \mathfrak{A}'_0(0,k) &\subseteqq \mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k) = \mathfrak{A}''_l + \big(\mathfrak{A}''_0(0,k-1) \cup \{k\}\big) \\ &= \big(\mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k-1)\big) \cup (\mathfrak{A}''_l + k) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \cup (\mathfrak{A}''_l + k) = \mathfrak{A}'_0 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k-1) = \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k-1) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \subseteqq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n;$$

das sind gerade die Formeln (25).

Schließlich folgt aus (12) die Gleichung

$$\begin{aligned} A'_0(0,x) + A'_l(1, x-k) &= A'_0(0,x) + A'_l(-k, x-k) - 1 \\ &= A''_0(0,x) + A''_l(-k, x-k) - 1 = A''_0(0,x) + A''_l(1, x-k) \end{aligned}$$

und daher, da $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}''_\nu$ ist für $\nu \neq 0, l$, auch die Formel (26). Aus (25) und (26) folgt aber, wie unter a) gezeigt, die Ungleichung (24), womit der Beweis beendet ist.

Der zweite Satz, der jetzt bewiesen werden soll, ist eng verwandt mit einer Abschätzung von OSTMANN [8]. Für $n = 1$ ist VIII. ein Spezialfall der Formel (10) aus [8]. Der Beweis für die volle Aussage (10) aus [8] könnte ohne große Mühe ähnlich wie der Beweis von VIII. geführt werden. Wir wollen das aber nicht tun, da sich am Schluß als Anwendung unseres Hauptsatzes ein umfassenderes Ergebnis (Satz 3) erreichen läßt.

VIII. Es sei $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$; *enthält* $\mathfrak{A}_0$ k *aufeinanderfolgende Zahlen, so gilt entweder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{k}{k+n}\,\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}.$$

Beweis. Es seien die Zahlen $a_0, a_0+1, \ldots, a_0+k-1$ in $\mathfrak{A}_0$ enthalten. Indem wir $\mathfrak{A}_0$ durch $\mathfrak{A}_0 - a_0$ (und damit $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A} - a_0$) ersetzen, können wir uns auf den Fall $a_0 = 0$, d.h. $0, 1, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}_0$ beschränken. Auf Grund der Formeln (13) bis (16) genügt es weiter — ähnlich wie beim Beweis von IV. — den Beweis nicht für $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen zu führen. Nach (17) können wir daher zusätzlich voraussetzen, daß $\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$ ist. Es sei jetzt γ eine Konstante, die kleiner als $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ ist; im übrigen sei γ beliebig, falls $\frac{k}{k+n}\,\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leq 1$ ist und $\gamma = \frac{k+n}{k}$ sonst, so daß also in jedem Falle $\frac{k}{k+n}\gamma \leq 1$ ist. Unter diesen Bedingungen ist für ein genügend großes x_0 sicher

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x) \geq \gamma x \quad \text{für} \quad x \geq x_0.$$

Wir wählen x_0 möglichst klein, so daß jedenfalls

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x_0 - 1) \leq \gamma(x_0 - 1)$$

ist; trifft die erste Ungleichung für alle x zu, so setze man $x_0 = 1$. Durch Subtraktion folgt dann

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x) \geqq \gamma(x - x_0 + 1) \quad \text{für} \quad x \geqq x_0. \tag{27}$$

Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei x_ν die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu(x_0, \infty)$, also die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu$, die nicht kleiner als x_0 ist; dabei denken wir uns die Numerierung so gewählt, daß $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ ist. Wir bezeichnen für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ mit $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}_\nu - x_\nu$. Dann ist $0 \in \overline{\mathfrak{A}}_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$ wegen $x_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$, und es gilt

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(0, x) &= A_0(x_0, x_0 + x) \\ \bar{A}_\nu(1, x) &= A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \\ &= A_\nu(x_0, x_\nu + x) - 1 \geqq A_\nu(x_0, x_0 + x) - 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

letzteres da x_ν die einzige Zahl zwischen x_0 und x_ν ist, die in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt. Wir wollen jetzt auf die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ den Satz VII. anwenden. Dazu müssen wir die Summe

$$\begin{aligned} S(x) &= \bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \\ &= A_0(x_0, x_0 + x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \end{aligned}$$

nach unten abschätzen. Wir unterscheiden drei Fälle.

a) Ist $0 \leqq x < x_1 - x_0$, also $x_0 + x < x_1$, so ist $A_\nu(x_0, x_0 + x) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und daher nach (27)

$$S(x) \geqq A_0(x_0, x_0 + x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) \geqq \gamma(x + 1).$$

b) Ist $x_1 - x_0 \leqq x < x_1 - x_0 + k$, so benutzen wir, daß

$$x_1 + \{0, 1, \ldots, k - 1\} \subseteqq \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu \right) + \{0, 1, \ldots, k - 1\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$$

ist. Wegen $x_1 \leqq x_0 + x < x_1 + k$ folgt daraus $\{x_1, x_1 + 1, \ldots, x_0 + x\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$, also $A_0(x_1, x_0 + x) = x_0 + x - x_1 + 1$ und daher

$$S(x) \geqq A_0(x_0, x_0 + x) = A_0(x_0, x_1 - 1) + A_0(x_1, x_0 + x).$$

Daraus folgt wie unter a) und wegen $\frac{k}{k+n}\gamma \leqq 1$

$$S(x) \geqq \gamma(x_1 - x_0) + (x_0 + x - x_1 + 1) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x + 1).$$

c) Ist $x \geqq x_1 - x_0 + k$, so ist einerseits nach b)

$$S(x) \geqq S(x_1 - x_0 + k - 1) \geqq \gamma(x_1 - x_0) + k \geqq k,$$

andererseits nach (27)

$$S(x) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \geqq \gamma(x + 1) - n.$$

Beides zusammen ergibt $S(x) \geqq \alpha(x+1)$ mit $\alpha = \min_x \max\left\{\frac{k}{x+1}, \gamma - \frac{n}{x+1}\right\}$. Die beiden Ausdrücke in der Klammer sind monotone Funktionen von x, der erste abnehmend, der zweite zunehmend. Ihr Maximum ist also dort am kleinsten, wo beide übereinstimmen, d.h. für $\frac{k+n}{x+1} = \gamma$; das liefert $\alpha = \frac{k}{k+n}\gamma$.

In allen drei Fällen a), b) und c) gilt demnach die Abschätzung

$$\bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1).$$

Für die Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\mathfrak{A}}_\nu$ folgt nach VII. also $\bar{A}(0, x) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1)$. War nun $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) > 1$, so hatten wir $\frac{k}{k+n}\gamma = 1$ gesetzt. Wir erhalten also $\bar{A}(0, x) \geqq x+1$; das bedeutet, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ alle nichtnegativen Zahlen enthält, insbesondere also $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{Z}$. Wegen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \geqq \sum_{\nu=0}^{n} (\overline{\mathfrak{A}}_\nu + x_\nu) = \overline{\mathfrak{A}} + \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ folgt daraus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. War aber $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leqq 1$, so erhalten wir $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\overline{\mathfrak{A}}) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma$ und, da γ nur der Einschränkung $\gamma < \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ unterlag, auch $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

§ 3. Schluß des Beweises.

Am Ende des § 1 blieb uns die Aufgabe, den Satz VI zu beweisen. Das soll jetzt geschehen. Die Behauptung lautete, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ für ihre Summe $\mathfrak{A}$ entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ oder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ gilt. Schon in § 1 hatten wir an Hand der Formel (18) gesehen, daß die erste Formel sicher richtig ist, falls die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ unbeschränkt sind, wenn $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ die sämtlichen von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleiteten Mengensysteme durchläuft. Wir können daher die zusätzliche Voraussetzung machen:

IX. Die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ seien für alle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ beschränkt.

Die Aussage VI. ist jetzt, nachdem wir den Satz VIII bewiesen haben, eine leichte Folge aus dem

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von VI. und IX. gibt es zu jeder natürlichen Zahl k ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ derart, daß $\mathfrak{A}'_0$ mindestens kg aufeinanderfolgende Zahlen enthält.*

Beweis von VI. Wir wenden auf die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus Hilfssatz 4 die Aussage VIII. an und erhalten für die Summe $\mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geqq \frac{kg}{kg+n}\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n)$ oder $\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{Z}$. Trifft für irgendein k einmal die zweite Möglichkeit zu, so sind wir fertig, denn wegen (13) $\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}$ folgt dann auch

$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Anderenfalls haben wir nach (13) und (14) für alle k

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}') \geqq \frac{k g}{k g + n} \delta(\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n') = \frac{k g}{k g + n} \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

und daher $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

Den Beweis für den Hilfssatz 4 führen wir durch Induktion nach k. Für $k = 1$ setzen wir $\mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu$; die Behauptung ist dann eine der Voraussetzungen von VI. Für den Induktionsschluß brauchen wir einen weiteren Hilfssatz, dessen Beweis wir am Schluß nachtragen.

Hilfssatz 5. *Ist unter den Voraussetzungen von VI. und IX. $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}_\nu'$ und eine Zahl z derart, daß $\mathfrak{E} + z$ und $\mathfrak{E} + z + g$ in $\mathfrak{A}_0'$ liegen.*

Wir nehmen an, der Hilfssatz 4 sei schon für $k = l$ bewiesen. Dann gibt es also abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}_\nu'$, von denen $\mathfrak{A}_0'$ mindestens $l g$ aufeinanderfolgende Zahlen, etwa $x, x + 1, \ldots, x + l g - 1$ enthält. Diese Mengen erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, ebenfalls die Voraussetzungen von VI. und IX. Wir können daher auf sie und die endliche Menge $\mathfrak{E} = \{x, x + 1, \ldots, x + l g - 1\}$ den Hilfssatz 5 anwenden. So erhalten wir von $\mathfrak{A}_0', \ldots, \mathfrak{A}_n'$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}_\nu''$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{E} + z) \cup (\mathfrak{E} + z + g) \subseteqq \mathfrak{A}_0''$. Nun ist

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{E} + z) \cup (\mathfrak{E} + z + g) \\
&\quad = \{x + z, \ldots, x + z + l g - 1\} \cup \{x + z + g, \ldots, x + z + (l + 1) g - 1\} \\
&\quad = \{x + z, x + z + 1, \ldots, x + z + (l + 1) g - 1\};
\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_0''$ enthält also die $(l + 1) g$ aufeinanderfolgenden Zahlen von $x + z$ bis $x + z + (l + 1) g - 1$. Der Hilfssatz 4 ist daher auch für $k = l + 1$ und damit allgemein bewiesen.

Wir haben jetzt noch den Hilfssatz 5 zu beweisen. Dazu suchen wir unter den abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}_\nu'$ solche aus, für die $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'\right)$ möglichst groß ist. Für alle von $\mathfrak{A}_\nu'$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}_\nu''$ gilt dann nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'' \subseteqq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'$ und daher auf Grund der Definition von $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''\right)$ als kleinster positiver Differenz von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''$ die Ungleichung $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''\right) \geq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'\right) = f$. Wegen der Auswahl der Mengen $\mathfrak{A}_\nu'$ muß hier das Gleichheitszeichen gelten. Die Menge $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''$ enthält also stets zwei Zahlen mit der Differenz f. Außerdem seien die Mengen $\mathfrak{A}_\nu'$ so gewählt, daß sich die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu'$ auf möglichst wenig Restklassen modulo f verteilen; es seien dies etwa die Restklassen $b_1, \ldots, b_r$. Die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''$ liegen dann auch in diesen Restklassen und wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{A}_\nu'$ gibt es zu jedem b_ϱ ein $x_\varrho \in \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu''$ mit $x_\varrho \equiv b_\varrho \bmod f$.

Wir erinnern uns jetzt noch einmal an die Definition der Zahl $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$; sie war der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$. g läßt sich also als ganzzahlige Linearkombination von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ darstellen. Gehen wir in dieser Darstellung zur Kongruenz modulo f über, so erhalten wir $g \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho b_\varrho \bmod f$ mit gewissen ganzen Zahlen n_ϱ; diese können wir modulo f abändern und daher ohne Einschränkung annehmen, daß sie nicht negativ sind. Die Kongruenz schreiben wir noch etwas um: $g \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \bmod f$, wobei jedes c_σ gleich einer der Restklassen b_ϱ ist und b_ϱ gerade n_ϱ-mal vorkommt.

Es sei jetzt $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, also nach (16) auch von $\mathfrak{A}'_0$. Nach (17) gibt es abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}''_0$. Nun wissen wir, daß in $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ eine Zahl $x_1 \equiv c_1 (\equiv b_\varrho) \bmod f$ liegt. Also haben wir speziell $\mathfrak{E} + x_1 \leqq \mathfrak{A}''_0$. Wenden wir den gleichen Schluß auf $\mathfrak{E} + x_1$, $\mathfrak{A}''_\nu$, c_2 an Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}'_\nu$, c_1 an, so erhalten wir abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'''_\nu$ mit $\mathfrak{E} + x_1 + x_2 \leqq \mathfrak{A}'''_0$ und $x_2 \equiv c_2 \bmod f$. So fahren wir fort und erhalten schließlich gewisse Mengen $\mathfrak{A}^*_\nu$ mit $\mathfrak{E} + \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \leqq \mathfrak{A}^*_0$ und $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \equiv g \bmod f$. Außerdem ist $\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{A}_0 \leqq \mathfrak{A}^*_0$. Setzen wir $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma = g + k f$, so haben wir also

$$\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f) \leqq \mathfrak{A}^*_0. \tag{28}$$

Wir wenden nun nochmal die Formel (17) an und erhalten Mengen $\mathfrak{A}^{**}_\nu$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu + [\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f)] \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$. In $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu$ gibt es, wie wir oben gesehen hatten, zwei Zahlen mit der Differenz f, etwa y und $y + f$. Also haben wir $(\mathfrak{E} + y) \cup (\mathfrak{E} + y + g + k f) \leqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$ und $(\mathfrak{E} + y + f) \cup (\mathfrak{E} + y + g + (k+1) f) \leqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$. Ist k positiv, so setzen wir $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y + f$ und haben dann $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k-1) f) \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Ist aber k negativ, so sei $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y$; dann gilt $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k+1) f) \leqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Diese Formeln sind genau so gebaut wie (28), nur daß $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y_1$ ($y_1 = y + f$ oder $y_1 = y$) und k durch eine Zahl ersetzt ist, deren Betrag um 1 kleiner ist. Wenden wir dies Verfahren $|k|$-mal an, so erhalten wir schließlich abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ derart, daß $\mathfrak{E}' \cup (\mathfrak{E}' + g) \leqq \mathfrak{A}'_0$ gilt mit $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{|k|} = \mathfrak{E} + z$. Das ist aber gerade die Behauptung.

§ 4. Anwendungen.

In diesem Abschnitt sollen einige Folgerungen aus dem Hauptsatz gezogen werden. Als erstes legen wir uns die Frage vor, was man über die Dichte $\delta(\mathfrak{A})$ der Summenmenge $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ aussagen kann, wenn man nur die Dichte $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ kennt. Ist einer der Summanden $\mathfrak{A}_\nu$ leer, so gilt das gleiche von der Summe $\mathfrak{A}$; diesen trivialen Fall schließen wir aus. Dann ist es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir annehmen, daß die Null in allen Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ liegt: Wir können ja anderenfalls $\mathfrak{A}_\nu$ durch $\mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ ersetzen. Dann gilt also $\mathfrak{A}_\nu \subseteqq \mathfrak{A}$ und daher $A(1, x) \geq \operatorname{Max}_\nu A_\nu(1, x) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x)$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{1}{n+1} \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. Diese Abschätzung läßt sich auch ohne weitere Voraussetzungen nicht mehr viel verbessern, wie die folgenden Beispiele zeigen. Es seien σ eine reelle Zahl zwischen 0 und $n+1$, g und m zwei natürliche Zahlen so, daß $\sigma \leq \frac{n+m}{g} \leq n+1$; dann gibt es natürliche Zahlen $k_0, \ldots, k_n$ mit $k_\nu \leq g$ und $\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu = n+m$. Es bestehe jetzt die Menge $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k_\nu - 1$ modulo g. Dann besteht $\mathfrak{A}^{(g)} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, m-1$ modulo g. Sind $\mathfrak{A}_\nu$ Teilmengen von $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ derart, daß $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ ist — wegen $\sigma \leq \frac{n+m}{g} = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)})$ gibt es das —, so haben wir für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \leq \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \frac{m}{g}$. Wählen wir insbesondere $m = 1$ und g so, daß $\frac{n+1}{g+1} < \sigma \leq \frac{n+1}{g}$ ist, also $g = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]$, so gilt $\delta(\mathfrak{A}) \leq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$. Aus der Gleichung $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ läßt sich also über die Abschätzung $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{\sigma}{n+1}$ hinaus sicher nicht mehr als $\delta(\mathfrak{A}) \geq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ schließen. Diese Ungleichung ist aber auch allgemeingültig:

Satz 1. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m, g = 1, 2, \ldots \\ n+m \geq \sigma g}} \frac{m}{g} = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}. \tag{29}$$

Beweis. Auf Grund des Dichtesatzes gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sigma$, dann ist die Ungleichung in (29) sicher richtig, da die rechte Seite kleiner als σ ist; oder es gibt eine Zahl g, so daß $\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}$ ist. Besteht $\mathfrak{A}^{(g)}$ aus m Restklassen modulo g, so ist $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g}$ und daher $\sigma \leq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) \leq \frac{n+m}{g}$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g} \geq \operatorname{Min} \frac{m}{g}$ wie behauptet. Es bleibt zu zeigen, daß die rechte Seite gleich $\left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ ist. Anders ausgedrückt: $\operatorname{Min} \frac{m}{g} = \frac{1}{h}$ falls $\frac{n+1}{h+1} < \sigma \leq \frac{n+1}{h}$ ist. Nun gilt sicher $\operatorname{Min} \frac{m}{g} \leq \frac{1}{h}$, da ja $m = 1$, $g = h$ bei der Bildung des Minimums zugelassen ist. Wir haben also nur zu zeigen: Aus $\frac{n+m}{g} \geq \sigma > \frac{n+1}{h+1}$ folgt $\frac{m}{g} \geq \frac{1}{h}$. Oder umgekehrt: Aus $\frac{m}{g} < \frac{1}{h}$ folgt $\frac{n+m}{g} \leq \frac{n+1}{h+1}$. Oder auch, da g, h und m ganze Zahlen sind: Aus $g \geq mh + 1$

folgt $g(n+1) \geqq (h+1)(n+m)$ und das sieht man so.

$$g(n+1)-(h+1)(n+m) \geqq (mh+1)(n+1)-(h+1)(n+m) = (m-1)(hn-1) \geqq 0.$$

Als zweites fragen wir uns, wie sich die eben erhaltene Ungleichung verschärfen läßt, wenn wir nicht nur $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, sondern die einzelnen Dichten $\delta(\mathfrak{A}_\nu)$ kennen. Entsprechend wie im Beweis von Satz 1 erkennt man, daß der Satz 2 richtig ist, und an Hand der gleichen Beispiele wie oben sieht man auch, daß sich die Ungleichung (30) nicht verbessern läßt; das gleiche gilt auch von den weiter unten stehenden Ungleichungen (31), (32) und (33).

Satz 2. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \operatorname*{Min}_{\substack{m_\nu, g = 1, 2, \ldots \\ m_\nu \geqq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g}. \tag{30}$$

Aus diesem Satz kann man entnehmen, daß für gewisse Werte von n und α_ν ohne weitere Voraussetzungen die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$ folgt. Ist nämlich $n=1$, α_0 und α_1 irrational und $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, so folgt aus $m_\nu \geqq \alpha_\nu g$ sogar $m_\nu > \alpha_\nu g$ und daher $m_0 + m_1 > (\alpha_0 + \alpha_1) g = g$, d.h. $m_0 + m_1 \geqq g + 1$ also $\frac{m_0 + m_1 - 1}{g} \geqq 1$. Daraus folgt $\operatorname{Min} \frac{m_0 + m_1 - 1}{g} = 1 = \alpha_0 + \alpha_1$ wie behauptet. Es gilt also die

Folgerung: Ist $\delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}) = 1$, $\delta(\mathfrak{A})$ und $\delta(\mathfrak{B})$ irrational, so gilt

$$\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1 = \delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}).$$

Man kann sich überlegen, daß dies der einzige Fall ist [außer dem trivialen, daß $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = 0$ ist für alle $\mathfrak{A}_\nu$ außer einem], in dem ohne weiteres folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Wir wollen jetzt, um schärfere Abschätzungen zu erhalten, zusätzliche Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{A}$ machen. Zunächst nehmen wir einmal an, daß k aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}$ liegen. Liegt dann der zweite Fall des Hauptsatzes vor, so kann entweder $g \leqq k$ sein, dann enthält $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g eine Zahl und wir haben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{Z}$; oder es ist $g \geqq k$, dann enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ mindestens k Restklassen modulo g; es liegt daher, wenn wir $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ kennen, die gleiche Situation wie beim Beweis von Satz 1 vor, nur daß für g und m die zusätzlichen Bedingungen $g, m \geqq k$ hinzukommen. Also gilt der

Satz 3: *Ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ und enthält die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ mindestens k aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \operatorname*{Min}_{\substack{m, g = k, k+1, \ldots \\ n + m \geqq \sigma g}} \frac{m}{g}. \tag{31}$$

Wenn wir die Formel (31) etwas abschwächen erhalten wir eine handlichere Abschätzung. Es ist ja für jedes Paar (m, g), das den Bedingungen aus (31) genügt, $\frac{m}{g} = \frac{m}{n+m} \frac{n+m}{g} \geq \frac{k}{k+n}\sigma$. Also gilt die

Folgerung: Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$.

Die Abschätzung (10) aus [*8*] von Ostmann ist hierin enthalten, wenn man $n = 1$ setzt. Aus der Definition der dort vorkommenden Zahl j folgt nämlich leicht, daß die Zahlen $0, 1, \ldots, j-1$ in der Summenmenge liegen.

Wie der zweite Satz zum ersten verhält sich zum dritten der

Satz 4: *Ist $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$ und enthält $\mathfrak{A}_\nu$ mindestens k_ν aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \min_{\substack{m_\nu = k_\nu, k_\nu+1, \ldots \\ m_\nu \geq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g} \tag{32}$$

Folgerung: Ist $0 \leq \varkappa_\nu \leq k_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{n} \varkappa_\nu = n$, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4 entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Der Beweis für den Satz 4 entspricht genau den vorangehenden. Den Beweis für die Folgerung liest man aus der Ungleichung

$$\frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{m_\nu - \varkappa_\nu}{m_\nu} \cdot \frac{m_\nu}{g} \geq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\alpha_\nu$$

ab.

Setzt man in der Folgerung $n = 1$, $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_1 = 1$, so erhält man eine Verallgemeinerung einer Abschätzung von Erdös [*6*], die Ostmann [*8*], [*9*] angegeben hat.

Zum Schluß wollen wir noch die Ordnung einer Menge $\mathfrak{A}$ von positiver Dichte α abschätzen. Haben die Zahlen von $\mathfrak{A}$ einen gemeinsamen Teiler, ist also $g(\mathfrak{A}) > 1$, so haben auch die Zahlen aus $n\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ diesen Teiler. In diesem Fall ist $\mathfrak{A}$ also keine Basis der Menge aller Zahlen. Ist aber $g(\mathfrak{A}) = 1$ und enthält $\mathfrak{A}$ die Null, so ist für genügend großes n sicher $n\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ ([*10*] S. 205). Die kleinste Zahl n, für die dies gilt, nennt man die (asymptotische) Ordnung von $\mathfrak{A}$. Sie ist also durch die Eigenschaften $n\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ und $(n-1)\mathfrak{A} \not\sim \mathfrak{Z}$ bestimmt. Aus der zweiten Eigenschaft leiten wir eine Abschätzung für n her. Wir wenden den Hauptsatz auf die Summe $\mathfrak{B} = (n-1)\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ an. Das liefert entweder $1 \geq \delta(\mathfrak{B}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A})$, also $n \leq \frac{1}{\alpha} + 1$ und das hat, da n ganz ist, die Ungleichung (33) zur Folge; oder es ist $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$ und $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g}$ mit einer gewissen Zahl g. Wegen $\mathfrak{B} \not\sim \mathfrak{Z}$ ist auch $\mathfrak{B}^{(g)} \not\sim \mathfrak{Z}$ und daher $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \leq \frac{g-1}{g}$. Enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ etwa k Restklassen modulo g, so gilt $k \geq 2$ wegen $g(\mathfrak{A}) = 1$ und $\frac{k}{g} = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geq \delta(\mathfrak{A}) = \alpha$; zusammengenommen gibt das $\frac{g-1}{g} \geq \delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g} = (n-1)\frac{k}{g} - \frac{n-2}{g}$ und daher $n-1 \leq \frac{g-2}{k-1}$. Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so folgt $n-1 \leq \frac{k\alpha^{-1}-2}{k-1} < \frac{2k-2}{k-1} = 2$, also $n \leq 2$. Ist aber $\alpha \leq \frac{1}{2}$, so sei $\frac{2}{h+1} < \alpha \leq \frac{2}{h}$ mit $h = \left[\frac{2}{\alpha}\right] \geq 4$; wir behaupten, daß dann $n \leq h-1$ ist. Dazu genügt es zu zeigen: Aus $\frac{k}{g} \geq \alpha > \frac{2}{h+1}$ und $n-1 \leq \frac{g-2}{k-1}$ folgt $n \leq h-1$; oder: Aus $k(h+1) > 2g$ folgt $\frac{g-2}{k-1} < h-1$, da dann $n-1 \leq \frac{g-2}{k-1} < h-1$ und daher $n \leq h-1$ ist. Oder umgekehrt: Aus $g-2 \geq (k-1)(h-1)$ folgt $2g \geq k(h+1)$, und das sieht man so:

$$2g - k(h+1) \geq 2(k-1)(h-1) + 4 - k(h+1) = (k-2)(h-3) \geq 0,$$

da ja $k \geq 2$ und $h \geq 4$ war. Damit haben wir den Satz 5 bewiesen.

Satz 5. *Ist* $0 \in \mathfrak{A}$, $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha > 0$ *und* $g(\mathfrak{A}) = 1$, *so gilt für die asymptotische Ordnung* n *von* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung*

$$n \leq \begin{Bmatrix} 2 & & \alpha > \frac{1}{2} \\ & \textit{für} & \\ \left[\frac{2}{\alpha}\right] - 1 & & \alpha \leq \frac{1}{2} \end{Bmatrix}. \tag{33}$$

Literatur.

[1] CHINTSCHIN, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1951. — [2] CHOWLA, I.: A theorem on the addition of residue classes: Application to the number $\Gamma(k)$ in Warings problem. Proc. Ind. Acad. **2**, 242—243 (1935). — [3] CORPUT, J. G. VAN DER: On sets of integers I, II, III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261, 340—350, 429—435 (1947). — [4] DAVENPORT, H.: On the addition of residue classes. J. London Math. Soc. **10**, 30—32 (1935). — [5] DYSON, F. J.: A theorem on the densities of sets of integers. J. London Math. Soc. **20**, 8—14 (1945). — [6] ERDÖS, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences. Ann. of Math. **43**, 65—68 (1942). — [7] MANN, H. B.: A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. Ann. of Math. **43**, 523—527 (1942). — [8] OSTMANN, H. H.: Über die Dichte additiv komponierter Zahlenmengen. Arch. Math. **1**, 393—401 (1948). — [9] OSTMANN, H. H.: Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe. J. reine angew. Math. **187**, 183—188 (1950). — [10] ROHRBACH, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jb. DMV **48**, 199—236 (1938)

Heidelberg, Mathematisches Institut, Hauptstr. 47—51.

(Eingegangen am 10. April 1953.)