ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 288—305 (1953)

FK-Räume in der Funktionentheorie. I*.

Von

KARL ZELLER.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Klärung verschiedener Konvergenz- und Divergenzfragen in der Funktionentheorie mit Hilfe der Funktionalanalysis, insbesondere der Lehre von den *FK*-Räumen (=*F*-Räumen mit koordinatenweiser Konvergenz). Dabei charakterisieren wir einen *FK*-Raum folgendermaßen: Er ist linear, durch abzählbar viele Halbnormen wird in ihm eine separierte gleichmäßige Struktur im Sinne von BOURBAKI erklärt, der Raum ist bezüglich dieser Struktur vollständig, seine Elemente sind komplexe Zahlenfolgen $\mathfrak{a} = \{a_k\}$, die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ sind linear und stetig.

Die Verwendung dieser Räume veranlaßt uns, statt einer analytischen Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ die Folge $\mathfrak{a} = \{a_k\}$ ihrer Koeffizienten, statt Funktionenräumen also Folgenräume zu betrachten und die meisten Ergebnisse als Beziehungen zwischen Mengen von Zahlenfolgen auszudrücken, was auch häufig prägnante Formulierungen gestattet. Die Resultate beruhen letztlich auf einigen wenigen bekannten Sätzen über lineare Räume, jedoch führt ein weiter Weg von diesen Sätzen bis zu unseren Anwendungen.

Nach der Behandlung der funktionalanalytischen Grundlagen in §§ 1 bis 7 (s. unten) beginnt in § 8 der funktionentheoretische Teil mit der Betrachtung des *FK*-Raumes $\mathfrak{R}$ (Reguläre Funktionen), welcher der Menge der in $|z| < 1$ regulären Funktionen entspricht (8.1). Konvergenz und Beschränktheit einer Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$ (diese Begriffe sind durch die Topologie erklärt) bedeutet für

*) Diese Arbeit ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen als Habilitationsschrift angenommen worden. Sie wurde dem Berichterstatter im Mai 1952 überreicht. Der vorliegende erste Teil bringt die funktionalanalytischen Grundlagen, der zweite Teil (im nächsten Heft der Math. Z.) die Anwendungen auf die Funktionentheorie. Herrn Prof. KNOPP, Herrn Prof. WIELANDT und Herrn Dr. STOLL danke ich für zahlreiche Ratschläge.

die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ gleichmäßige Konvergenz bzw. Beschränktheit in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$. Aus verschiedenen Durchschnittsdarstellungen von $\mathfrak{R}$ lesen wir unter anderem ab, daß jede in $\mathfrak{R}$ beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält (8.3), und haben damit auf neue Weise einen bekannten funktionentheoretischen Satz gewonnen.

Dieser ist z.B. von Bedeutung für die Konvergenzsätze der Funktionentheorie, die in § 9 behandelt werden. In einem FK-Raum $\mathfrak{E}$ ist neben der gewöhnlichen (starken) Konvergenz noch eine „schwache" Konvergenz mittels der stetigen Linearformen definiert. Ist $\mathfrak{E} < \mathfrak{R}$ und die Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ schwach konvergent, so konvergieren die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z| < 1$ gleichmäßig. Kriterien für schwache Konvergenz in $\mathfrak{E}$ liefern einen allgemeinen Satz (9.1), aus dem die Konvergenzsätze von VITALI, BLASCHKE, KHINTCHINE-OSTROWSKI folgen. Wir beleuchten dabei den Zusammenhang zwischen Bedingungen, die eine reguläre Funktion eindeutig bestimmen, und Bedingungen, die die Konvergenz einer Funktionenfolge bewirken.

Die nächsten drei Paragraphen behandeln das Verhalten im Einheitskreis regulärer Funktionen $a(z)$ bei radialer Annäherung an $|z| = 1$. Zur Erläuterung unserer Methode beginnen wir in § 10 mit bekannten Ergebnissen: Es gibt Funktionen $a(z)$, so daß $\lim\limits_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für ein, abzählbar viele, über abzählbar viele, alle ζ mit $|\zeta| = 1$ nicht existiert (10.1—4). 10.5 und 10.6 betreffen nichtfortsetzbare Funktionen. In § 11 geht es um die Frage: Zu welchen Teilmengen C von $|\zeta| = 1$ gibt es ein $a(z)$, so daß $\lim\limits_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für $\zeta \notin C$, $|\zeta| = 1$ nicht existiert? § 12 befaßt sich mit der Möglichkeit, daß $a(\varrho\zeta)$ $(\varrho \to 1-)$ auf $|\zeta| = 1$ ungleichmäßig konvergiert.

In §§ 13 und 14 untersuchen wir bei Funktionen $a(z) = \sum a_k z^k$, die in $|z| < 1$ regulär sind und gewisse weitere Eigenschaften haben, das Verhalten der Teilsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ bzw. $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ (unter anderem Sätze von FEJÉR und SZÁSZ).

§ 1 bringt Bezeichnungen, §§ 2 bis 7 die funktionalanalytischen Hilfsmittel, wobei teilweise bekannte Dinge wiederholt werden müssen.

In § 2 geben wir allgemeine Kriterien, wann eine Menge von Zahlenfolgen (mit geeigneten Halbnormen) ein FK-Raum ist. Diese Kriterien umfassen alle bei uns vorkommenden Fälle.

Es folgen in § 3 die Grundtatsachen über die einfachsten Funktionen in FK-Räumen, nämlich die linearen Operationen und die Halbnormen. Weiter führen wir die „Minoranten einer Halbnorm" ein, die wir später bei komplizierten Divergenzproblemen benötigen (10.4, 11.5). Schließlich formulieren wir zwei geläufige Lemmata über Folgen linearer Operationen (3.6 und 3.7).

An diesen Lemmata erläutern wir die in den anschließenden §§ 4 bis 6 untersuchten Beweismethoden, die mit den Stichworten „Gleitender Buckel", „Halbstetige Funktionen", „Abgeschlossene Produkträume" zu kennzeichnen sind und zur Beantwortung der folgenden, eng zusammenhängenden Fragen dienen:

Wann gilt für zwei FK-Räume $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$, wann gilt $\mathfrak{E} \not< \mathfrak{F}$?

Wann ist eine lineare Operation zwischen zwei FK-Räumen stetig?

Wann nimmt eine Funktion $\chi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ in einem FK-Raum den Wert $+\infty$ an?

Auf diese Fragen, hauptsächlich die erste, werden sich nämlich fast alle unsere Probleme zurückführen lassen. Die drei Methoden tragen ungefähr gleich weit. Wir bevorzugen in dieser Arbeit die letzte (Produkträume), weil sie bis jetzt in der Literatur etwas vernachlässigt wurde, außerdem auch für FK-Räume besonders geeignet ist. Jedoch gibt es Fälle, wo nur der „Buckel" oder nur die „halbstetigen Funktionen" zum Ziele führen (vgl. etwa 11.2 und 10.4).

§ 7 stellt die wichtigsten Resultate über FK-Räume zusammen. Diese handeln von Vereinigung und Durchschnitt abzählbar vieler FK-Räume und vor allem von der Beziehung $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ zwischen zwei FK-Räumen.

Ausführliche Inhaltsangaben stehen am Anfang jedes einzelnen Paragraphen.

Wir betonen, daß ein guter Teil unserer Ergebnisse auf der Ausnützung der „koordinatenweisen Konvergenz" in FK-Räumen beruht. Wir könnten eine analoge Eigenschaft auch für Räume formulieren, deren Elemente Funktionen sind, jedoch kürzt die Verwendung der FK-Räume manche Ausführungen ab.

Schon seit langer Zeit versuchte man, mit funktionalanalytischen Methoden in die Funktionentheorie einzudringen. Größere Erfolge hat man jedoch erst in neuerer Zeit erzielen können, nachdem geeignete Raumtypen eingeführt und untersucht worden sind, nämlich die F-Räume, die vollkommenen Räume (s. KÖTHE [1950]) und gewisse Verallgemeinerungen derselben. Ihrer Anwendung in der Funktionentheorie haben vor allem KÖTHE und TOEPLITZ Bahn gebrochen. Verfasser verdankt diesen Autoren zahlreiche Anregungen.

Die Veröffentlichungen auf diesem Gebiet teilen wir in vier Gruppen ein:

1. Die Existenz analytischer Funktionen mit gewissen Eigenschaften wird auf die Lösung eines unendlichen Gleichungssystems zurückgeführt. Arbeiten von BOREL, EIDELHEIT, POLYA, KÖTHE, TOEPLITZ (s. Schrifttumsverzeichnis bei KÖTHE [1947]).

2. Der Zusammenhang analytischer Funktionen mit ihren Randwerten bzw. Randverteilungen (Cauchyscher Integralsatz u. ä.) wird untersucht. Arbeiten von FANTAPPIÉ, TAYLOR, SILVA, KÖTHE, DIAS, GROTHENDIECK (s. Literaturverzeichnis bei KÖTHE [1952]).

3. Man befaßt sich mit der Existenz von Grenzwerten, die im Zusammenhang mit analytischen Funktionen auftreten (Randwerte, Reihenentwicklungen, Funktionsfolgen). Arbeiten von KIERST-SZPILRAJN (s. § 10), TOEPLITZ (s. §§ 8 und 9), TAYLOR (s. § 9).

4. Sonstige: GANAPATHY IYER, DOSS, MARCOUCHEWITSCH (Behandlung allgemeiner topologischer Eigenschaften, Orthogonalentwicklungen, Basen).

Die vorliegende Arbeit gehört zur dritten Gruppe. Von TAYLOR und TOEPLITZ weichen wir in der Art der topologischen Hilfsmittel ab: TAYLOR beschränkt sich auf Banachräume, TOEPLITZ verwendet vollkommene Räume. Dennoch ergeben sich manche Parallelen zu diesen Arbeiten (s. §§ 8 und 9).

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen.

Übersicht. Wir setzen die Kenntnis der Grundlagen der Funktionalanalysis und Topologie voraus. Wir verwenden die Bezeichnungen und Definitionen der französischen Schule (BOURBAKI [1940], [1949], DIEUDONNÉ [1942]), die sich von denen der polnischen Schule (BANACH [1932]) hauptsächlich in folgenden Punkten unterscheiden:

Die Topologie wird nicht auf konvergenten Folgen, sondern auf offenen Mengen aufgebaut. „F-Raum" ist ein weniger umfassender Begriff als bei Banach. Ein linearer Raum hat die komplexen, nicht nur die reellen Zahlen als Skalare. Eine lineare Operation ist nicht notwendig stetig. Das Wort Funktional wird vermieden.

Nicht bei Bourbaki stehen die Begriffe: Fette Teilmenge, Folgenraum, BK-Raum, FK-Raum, Abschnittsdichte, Abschnittskonvergenz. Für das Wort „entourage" schlagen wir die Übersetzung „Band" vor (ein Band längs der Diagonale des Produktraumes, ein Band, das die Umgebungen verschiedener Punkte verbindet).

Begriffe wie Menge, Funktion, Operation, stetig, halbstetig setzen wir als bekannt voraus — vgl. etwa CARATHÉODORY [1927, insbesondere S. 120ff.], BANACH [1932], HILLE [1948].

Ein (komplexer) *linearer Raum* $\mathfrak{E}$ ist eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, in der eine Multiplikation $\lambda\mathfrak{a}$ mit den komplexen Zahlen λ erklärt ist, die folgenden Gesetzen genügt:

$$(\lambda+\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda\,\mathfrak{a}+\mu\,\mathfrak{a},\quad \lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\lambda\,\mathfrak{a}+\lambda\,\mathfrak{b},\quad (\lambda\mu)\,\mathfrak{a}=\lambda(\mu\,\mathfrak{a}),\quad 1.\ \mathfrak{a}=\mathfrak{a}.$$

Eine *lineare Operation* oder lineare Abbildung T (zwischen zwei linearen Räumen) erfüllt die Beziehungen

$$T(\lambda\,\mathfrak{a})=\lambda\,T(\mathfrak{a}),\quad T(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=T(\mathfrak{a})+T(\mathfrak{b}).$$

Eine lineare Operation T, deren Werte komplexe Zahlen sind, wird *Linearform* genannt. Aus Gründen der „Dualität" wird ihr Wert oft mit $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\rangle$ bezeichnet, wo $\mathfrak{a}'$ als Symbol für die betreffende Abbildung steht.

Eine *Halbnorm* (oder Quasinorm) $\varphi(\mathfrak{a})$ ist eine in einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ erklärte Operation, deren Werte positive Zahlen (einschließlich der Null) sind, mit den Eigenschaften

$$\varphi(\lambda\,\mathfrak{a})=|\lambda|\cdot\varphi(\mathfrak{a}),\quad \varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\leq\varphi(\mathfrak{a})+\varphi(\mathfrak{b}).$$

Folgt überdies $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$ (Nullelement) aus $\varphi(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$, so heißt φ eine *Norm*.

Lassen wir bei reellwertigen Funktionen, insbesondere Halbnormen, den Wert $+\infty$ zu, so kennzeichnen wir dies durch $\varphi(\mathfrak{a})\leq\infty$. Wir rechnen dann in üblicher Weise mit dem Wert ∞, wobei die Ausdrücke $0\cdot\infty$ und $\infty-\infty$ undefiniert bleiben.

In einem linearen Raum $\mathfrak{E}$ seien abzählbar viele Halbnormen φ_i erklärt; $\mathfrak{U}(\varepsilon, m)$ ($\varepsilon>0$; $m=0, 1, \ldots$) sei die Menge der Elementpaare $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ (wo $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathfrak{E}$) mit

$$\varphi_0(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon,\ldots,\varphi_m(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})<\varepsilon.$$

Mit den $\mathfrak{U}$ als Grundsystem von Bändern (entourages) ist dann in $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ eine *gleichmäßige Struktur* und damit eine *Topologie* erklärt (BOURBAKI [1940, S. 85—92]). Von dieser Struktur müssen wir uns merken, daß in ihr — gemäß den allgemeinen Definitionen — eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine *Cauchyfolge* bzw. gegen $\mathfrak{a}$ *konvergent* heißt, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein r gibt, so daß

$$(\mathfrak{a}^{(m)}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (m, n > r)$$

bzw.

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n > r)$$

gilt. Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\lim_{m,n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}^{(n)}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

Weiter heißt eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ *beschränkt*, wenn es zu jedem Band $\mathfrak{U}$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß

$$(\mathfrak{o}, \lambda\,\mathfrak{a}^{(n)}) \in \mathfrak{U} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

gilt, was dasselbe bedeutet wie

$$\overline{\mathrm{fin}}_{n=0,1,\ldots}\ \varphi_i(\mathfrak{a}^{(n)}) < \infty \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

$\mathfrak{E}$ ist mit dieser Struktur ein *linearer topologischer Raum* (d.h. ein linearer Raum mit einer Topologie, in der $\lambda\,\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ als Funktionen beider Veränderlichen stetig sind) und sogar ein *lokalkonvexer* Raum (s. DIEUDONNÉ [1942, S. 110]). In $\mathfrak{E}$ sind vermittels der Topologie Begriffe wie stetig, abgeschlossen, dicht, Grundmenge, nirgends dicht erklärt. Eine Untermenge von $\mathfrak{E}$ heißt *mager* (oder Menge von erster Kategorie), wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist, *fett*, wenn sie Komplement einer mageren Menge ist. Der Raum $\mathfrak{E}$ heißt vollständig, wenn jedes *Cauchyfilter* (BOURBAKI [1940, S. 99]) in ihm konvergent ist, was hier — wegen der Metrisierbarkeit von $\mathfrak{E}$, s. unten — bedeutet, daß jede Cauchyfolge gegen ein Grenzelement konvergiert.

Ein F-Raum ist ein Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi_i]$ der eben beschriebenen Art, in dem $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ aus $\varphi_i(\mathfrak{a}) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots)$ folgt *(separierte Struktur)* und der überdies vollständig ist. Ein F-Raum heißt ein B-Raum $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi]$, wenn seine Struktur durch eine einzige Halbnorm $\varphi(\mathfrak{a}) = \|\mathfrak{a}\|$ beschrieben werden kann, was sich so ausdrücken läßt: $\mathfrak{E}$ ist ein F-Raum mit den Halbnormen $\varphi, 0, 0, \ldots$ (oder auch $\varphi, \varphi, \ldots$); φ ist dann natürlich eine Norm.

In einem Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ (s. oben) führen wir mittels der stetigen Linearformen $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle$ (kurz mit $\mathfrak{a}'$ bezeichnet) neben der oben genannten (starken) Struktur eine „*schwache*“ *gleichmäßige Struktur* und damit eine „*schwache*“ *Topologie* ein. Als Grundsystem von Bändern nehmen wir die durch

$$|\langle \mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' \rangle| < \varepsilon \qquad (\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}')$$

definierten Mengen $\mathfrak{U}(\varepsilon, \mathfrak{F}')$, wobei ε die Zahlen > 0 und $\mathfrak{F}'$ alle endlichen Teilmengen der Gesamtheit der stetigen Linearformen in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ durchläuft. Die auf dieser Struktur beruhenden Begriffe versehen wir mit dem Zusatz „schwach" (*schwach konvergent* usw.). Die schwache gleichmäßige Struktur ist wegen der Stetigkeit der Linearformen *gröber* als die starke, d. h. enthält weniger Bänder, aber mehr konvergente Filter und Folgen (wobei „mehr" „gleichviel" nicht ausschließen soll).

Die gleichmäßige (starke) Struktur in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ läßt sich mittels einer Metrik definieren, z. B. durch

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{\varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}{1 + \varphi_i(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})}$$

(vgl. BOURBAKI [1949, S. 22—23]), so daß wir in $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ die Betrachtung der Filter durch die der Folgen ersetzen, m. a. W. die Struktur mittels Folgen erklären können. Dies geht jedoch im allgemeinen nicht bei der schwachen Struktur. Die Menge der stetigen Linearformen $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{E}$ bildet den dualen Raum $\mathfrak{E}'$, der sich ersichtlich als linearer Raum auffassen läßt und in dem man in verschiedener Weise gleichmäßige Strukturen und Topologien einführen kann. Uns interessiert nur der Fall, daß $\mathfrak{E}$ ein B-Raum ist: $\mathfrak{E}'$ ist dann mit der Norm

$$\|\mathfrak{a}'\| = \overline{\operatorname{fin}}_{\|\mathfrak{a}\|<1} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle|$$

ebenfalls ein B-Raum.

Ein BK- bzw. FK-*Raum* ist ein B- bzw. F-Raum, dessen Elemente *Stellen* (Folgen komplexer Zahlen) $\mathfrak{a} = \{a_k\}_{k=0,1,\ldots}$ sind, und in dem die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ stetige Linearformen sind. Aus der (starken) Konvegenz im Raumsinne folgt also die „*koordinatenweise Konvergenz*". Da sich ein Stellenraum auf „höchstens eine Weise" als FK-Raum auffassen läßt (die genaue Aussage steht in 7.1), können wir für einen FK-Raum und die Menge seiner Elemente dieselbe Bezeichnung verwenden. So ist für zwei FK-Räume $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ (was $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ nicht ausschließt) im mengentheoretischen Sinn zu verstehen.

Ein FK-Raum (oder BK-Raum) $\mathfrak{E}$ besitzt *Abschnittsdichte*, wenn die *abbrechenden Stellen* (Stellen $\{a_k\}$ mit $a_k = 0$ für fast alle k) zum Raum gehören und in ihm dicht liegen; er besitzt *Abschnittskonvergenz*, wenn darüber hinaus für jedes $\{a_k\} \in \mathfrak{E}$ die Stellen $\{a_0, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots\}$ bei $r \to \infty$ gegen $\{a_k\}$ konvergieren.

Weitere Bezeichnungen findet man in § 8.

§ 2. Kriterien für FK-Räume.

Übersicht. Wir geben einige Kriterien dafür, daß gewisse Folgenräume durch Festsetzung geeigneter Halbnormen als FK-Räume aufgefaßt werden können. Diese Kriterien umfassen fast alle bekannten Fälle von FK-Räumen. Schwierigkeiten bereitet dabei nur der Nachweis der Vollständigkeit. Die betreffenden Räume werden aus schon bekannten Räumen gewonnen durch „Kleiner unendlich" – bzw. Null-Setzen von Halbnormen (2.1, 2.1a, 2.2), mittels Durchschnittsbildung (2.3) und einfacher Transformation (2.4). 2.5 behandelt die Frage verschiedener Systeme von Halbnormen, die dieselbe Topologie ergeben. 2.6 liefert damit ein Normierbarkeitskriterium. Wir schließen mit einer Liste von BK- und FK-Räumen.

Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum). *$[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ sei ein FK-Raum, $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ eine nach unten halbstetige Halbnorm in $\mathfrak{E}$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ einen FK-Raum mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a}), \varphi_0(\mathfrak{a}), \varphi_1(\mathfrak{a}), \ldots$.*

Beweis. Die einzige Schwierigkeit liegt im Nachweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$. Sei $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{F}$. Dann gibt es wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{E}$ ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergiert. Ferner ist $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}^{(n)}) < \varepsilon$ für $m, n > r(\varepsilon)$. Die Halbstetigkeit ergibt $\chi(\mathfrak{a}^{(m)} - \mathfrak{a}) \leqq \varepsilon$ für $m > r(\varepsilon)$, woraus man $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$ und die Konvergenz von $\mathfrak{a}^{(n)}$ gegen $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{F}$ abliest.

Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum). *$\chi_\iota(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in einem FK-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$. Dann bildet die Menge $\mathfrak{F}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\chi_\iota(\mathfrak{a}) = 0$ für alle ι einen linearen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{E}$, also einen FK-Raum mit den Halbnormen φ_i.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen). *Sind $[\mathfrak{E}^{(j)}; \varphi_i^{(j)}]$ $(j = 0, 1, \ldots)$ abzählbar (oder endlich) viele FK-Räume, so ist $\mathfrak{E} = \bigcap \mathfrak{E}^{(j)}$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i^{(j)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$.*

Beweis. Siehe ZELLER [1951_1, S. 472].

Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix). *Sind die Zahlen $\delta_k \neq 0$ gegeben und ist $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ ein FK-Raum, so bildet die Menge $\mathfrak{E}(\delta_k)$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\{a_k \delta_k\} \in \mathfrak{E}$ ist, einen FK-Raum mit den Halbnormen $\varphi_i(\{a_k \delta_k\})$.*

Beweis. Klar.

Kriterium 2.5 (Wechsel der Halbnormen). *$[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ sei ein FK-Raum. Genau dann ist $\mathfrak{E}$ auch mit den Halbnormen χ_j ein FK-Raum, wenn Ungleichungen folgender Art für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i, j = 0, 1, \ldots$ bestehen:*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leqq M_i \cdot \left(\chi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \chi_{j(i)}(\mathfrak{a})\right),$$
$$\chi_j(\mathfrak{a}) \leqq N_j \cdot \left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})\right).$$

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, weil dann die φ_i und die χ_j dieselbe gleichmäßige Struktur definieren. — Ist sowohl $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ als auch $[\mathfrak{E}; \chi_j]$ ein FK-Raum, so ist auf Grund bekannter Sätze über Operationen mit abgeschlossenem Graph die kanonische Abbildung von $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ auf $[\mathfrak{E}; \chi_j]$ in beiden Richtungen stetig, was die Ungleichungen ergibt. Man vgl. Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen).

Kriterium 2.6 (FK- und BK-Raum). *Genau dann läßt sich ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ als BK-Raum (mit einer gewissen Norm χ) auffassen, wenn es ein r und Zahlen M_i gibt, so daß für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ und $i = 0, 1, \ldots$*

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leqq M_i \cdot \left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a})\right)$$

gilt.

Beweis. I. Gelten solche Ungleichungen, so ist nach Kriterium 2.5 $\mathfrak{E}$ ein *BK*-Raum mit der Norm $\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a})$. II. Ist $\mathfrak{E}$ mit einer Norm $\chi(\mathfrak{a})$ ein *BK*-Raum, so folgt aus Kriterium 2.5

$$\varphi_i(\mathfrak{a}) \leq M_i \chi(\mathfrak{a}) \leq M_i \cdot N \cdot (\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_r(\mathfrak{a}))$$

mit einem gewissen $r = i(0)$. — Wir hätten uns beim Beweis auch auf das Normierbarkeitskriterium von Kolmogoroff [1934] stützen können.

Wir bezeichnen spezielle Folgenräume durch einen großen deutschen Buchstaben mit anhängendem lateinischen Buchstaben (etwa $\mathfrak{S}_B$). Wir verwenden die Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$, je nachdem es bei den Elementen $\{a_k\}$ des Raumes auf das Verhalten der a_k selber ankommt ($\mathfrak{S}$: Sequenz-Folge), oder auf die Teilsummen $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ ($\mathfrak{T}$: Teilsummen), oder auf die Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ in einem gewissen Gebiet ($\mathfrak{R}$: Reguläre Funktion), oder auf diese Funktion auf einem Strahl ($\mathfrak{Q}$: wegen der Nachbarschaft im Alphabete gewählt), oder auf die Konvergenzeigenschaften der Potenzreihe $\sum a_k z^k$ ($\mathfrak{P}$: Potenzreihe). Der lateinische Buchstabe kennzeichnet das Verhalten der a_k bzw. der Teilsummen usw. näher, etwa $\mathfrak{S}_B$ = Raum der beschränkten Folgen $\{a_k\}$. Aus dem Rahmen fällt die historisch begründete Bezeichnung $\mathfrak{L}_p$ (s. unten).

Als erstes stellen wir fest, daß der Raum $\mathfrak{S}$ aller Folgen komplexer Zahlen ein *FK*-Raum mit den Halbnormen $\varrho_i(\mathfrak{a}) = |a_i|$ ist, was unmittelbar aus der Vollständigkeit des Raumes der komplexen Zahlen folgt. Konvergenz $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{a}$ im Raum $\mathfrak{S}$ ist gleichbedeutend mit gliedweiser Konvergenz ($a_k^{(n)} \to a_k$ für jedes k). Wir spezialisieren Kriterium 2.1.

Kriterium 2.1a (Unterräume von $\mathfrak{S}$). *$\chi_\iota(\mathfrak{a})$ sei irgendeine Menge stetiger Halbnormen in $\mathfrak{S}$, $\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\text{fin}}_{\iota}\, \chi_\iota(\mathfrak{a})$ gesetzt. Die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ bildet dann einen FK-Raum $\mathfrak{F}$ mit den Halbnormen $\chi(\mathfrak{a})$, $|a_0|$, $|a_1|$, ... Gelten überdies Ungleichungen der Form $|a_k| \leq M_k \cdot \chi(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$, $k = 0, 1, \ldots$), so ist $\mathfrak{F}$ sogar ein BK-Raum mit der Norm $\chi(\mathfrak{a})$.*

Beweis. $\chi(\mathfrak{a})$ ist als obere Grenze stetiger Halbnormen eine nach unten halbstetige Halbnorm. 2.1 (mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}$) liefert die erste Behauptung, die zweite folgt anschließend mit 2.5.

Mit 2.1a erhalten wir die unten verzeichneten *BK*-Räume. Hinter der Bezeichnung des Raumes und ihrer Erläuterung steht das jeweilige $\chi(\mathfrak{a})$. Zum Raum gehören also genau die $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$, die Norm ist $\chi(\mathfrak{a})$.

$\mathfrak{S}_B$ (beschränkte Folgen): $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\ldots} |a_k|$;

$\mathfrak{T}_B$ (beschränkte Reihen): $\overline{\text{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right|$;

$\mathfrak{L}_p$ (p-te Potenz konvergiert): $\overline{\text{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}$ ($p \geq 1$);

$\mathfrak{P}_B$ (Potenzreihen mit beschränkten Teilsummen): $\overline{\text{fin}}_{n=0,1,\ldots}\ \overline{\text{fin}}_{|z|<1} \left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k\right|$.

Kriterium 2.2 liefert weitere BK-Räume. In der nachstehenden Liste ist neben der Bezeichnung des Raumes (in 2.2 also $\mathfrak{F}$) der jeweilige Oberraum aufgeführt (in 2.2 also $\mathfrak{E}$), sodann die in 2.2 mit χ bezeichnete Halbnorm. (Wir betrachten den Fall, daß die Menge χ_ι aus einer Halbnorm besteht.) Zum Unterraum gehören alle $\mathfrak{a}$ des Oberraumes mit $\chi(\mathfrak{a})=0$, während die Norm von $\mathfrak{a}$ im Unterraum gleich der Norm von $\mathfrak{a}$ im Oberraum ist.

$\mathfrak{S}_C$ (konvergente Folgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim\limits_{k,l\to\infty}}\,|a_k-a_l|$;

$\mathfrak{S}_N$ (Nullfolgen): $\mathfrak{S}_B$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,|a_k|$;

$\mathfrak{T}_C$ (konvergente Reihen): $\mathfrak{T}_B$, $\overline{\lim\limits_{m,n\to\infty}}\,\left|\sum\limits_{k=m}^{n}a_k\right|$;

$\mathfrak{P}_G$ (gleichmäßig konvergente Potenzreihen): $\mathfrak{P}_B$, $\overline{\lim\limits_{m,n\to\infty}}\ \overline{\operatorname{fin}\limits_{|z|<1}}\left|\sum\limits_{k=m}^{n}a_k z^k\right|$.

§ 3. Lineare Operationen, Halbnormen und Minoranten.

Übersicht. Wir führen die Minoranten einer Halbnorm ein; das sind reellwertige Funktionen, die sich z.B. durch $\overline{\text{fin}}$-Bildung von Halbnormen ergeben (3.3). Die obere Grenze von Halbnormen bzw. Minoranten ist wieder eine Halbnorm bzw. Minorante (3.4). Die Hilfssätze 3.1, 3.2 und 3.5 befassen sich mit der Stetigkeit von Halbnormen, Minoranten und linearen Operationen. Schließlich formulieren wir zwei bekannte Lemmata (3.6 und 3.7) über Folgen von Linearformen. An diesen Lemmata werden wir in den §§ 4 bis 6 drei Beweismethoden veranschaulichen.

Wir sagen, daß eine Funktion $\omega(\mathfrak{a})\leqq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$ erfüllt, wenn es Zahlen m und M gibt, so daß

$$(\mathcal{M})\qquad \omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot\left(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a})\right)\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

gilt. Sind die φ_i monoton, d.h. gilt $\varphi_i(\mathfrak{a})\leqq\varphi_{i+1}(\mathfrak{a})$, oder ist $\mathfrak{E}$ ein B-Raum $[\mathfrak{E};\varphi]$, so vereinfacht sich diese Bedingung zu

$$\omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot\varphi_m(\mathfrak{a})\quad\text{bzw.}\quad\omega(\mathfrak{a})\leqq M\cdot\varphi(\mathfrak{a}).$$

Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm). *Erfüllt eine Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leqq\infty$ in einem F-Raum $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ die Bedingung $(\mathcal{M})$, so ist $\chi(\mathfrak{a})<\infty$ und stetig. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so ist $\chi(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Menge des Raumes beschränkt, insbesondere nirgends stetig.*

Beweis. Ist $(\mathcal{M})$ erfüllt, so ist χ jedenfalls im Punkte $\mathfrak{o}$ stetig. Mittels der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$. Ist $(\mathcal{M})$ nicht erfüllt, so konstruiert man Elemente $\mathfrak{a}^{(n)}$, die im F-Raum $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren, so daß $\chi(\mathfrak{a}^{(n)})\to\infty$ geht (vgl. etwa ZELLER [1951$_1$, S. 467]). χ ist also in keiner Umgebung des Nullpunktes beschränkt. Mit der Dreiecksungleichung überträgt sich dies auf jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{a}$.

Die Funktion $\psi(\mathfrak{a})\leqq\infty$ heißt Minorante oder Unternorm der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a})\leqq\infty$, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

$$0\leqq\psi(\mathfrak{a})\leqq\chi(\mathfrak{a}),\qquad\psi(\lambda\,\mathfrak{a})=|\lambda|\cdot\psi(\mathfrak{a}),$$

$$(\Delta')\qquad\psi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\leqq\psi(\mathfrak{a})+\chi(\mathfrak{b}).$$

Die Dreiecksungleichung ist also durch die kompliziertere Bedingung Δ' ersetzt. 3.1 läßt sich in gewissem Umfang auf Minoranten übertragen.

Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante). $\psi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ *sei Minorante der Halbnorm* $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ *im F-Raum* $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$. *I. Ist* χ *stetig, so auch* ψ. *II. Erfüllt* ψ *nicht* $(\mathcal{M})$ *und liegen die Punkte* $\mathfrak{b}$ *mit* $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ *dicht im Raum* $\mathfrak{E}$, *so ist* ψ *in keiner offenen Menge beschränkt.*

Beweis. Δ' liefert nach Umrechnung

$$(\Delta'') \qquad \psi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \geqq \psi(\mathfrak{a}) - \chi(-\mathfrak{b}).$$

I. Dies folgt aus Δ' und Δ''. II. Wir konstruieren eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{o}$ mit $\psi(\mathfrak{a}^{(n)}) \to \infty$ (vgl. 3.1). Ist $\mathfrak{D}$ irgendeine offene Menge im F-Raum $\mathfrak{E}$, so wählen wir ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{D}$ mit $\chi(-\mathfrak{b}) < \infty$. Setzt man in Δ'' $\mathfrak{a}^{(n)}$ statt $\mathfrak{a}$ ein, so ergibt sich die Behauptung.

Minoranten von Halbnormen werden bei uns für gewisse Divergenzfragen von Bedeutung sein (10.4, 11.5). Mit Rücksicht auf diese Anwendungen sind die übrigens nicht unabhängigen Axiome der Minorante gewählt. Die meisten Folgerungen über Minoranten lassen sich jedoch auf schwächeren Forderungen aufbauen. Die beiden nächsten Hilfssätze zeigen, in welchem Zusammenhang man auf Minoranten stößt.

Hilfssatz 3.3 ($\underline{\text{fin}}$ von Halbnormen). *Für jedes* z *einer Menge* Z *sei* $\chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty$ *eine Halbnorm ein und desselben linearen Raumes. Dann ist die Funktion*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \underline{\operatorname{fin}}_{z \in Z} \chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{z \in Z} \chi(\mathfrak{a}; z) \leqq \infty .$$

Beweis. Einfache Rechnung.

Hilfssatz 3.4 ($\overline{\text{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). *Ist für jedes* r *einer Menge* R *die Funktion* $\psi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$ *Minorante der Halbnorm* $\chi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$ *(*$\mathfrak{a}$ *variiere in einem linearen Raum), so ist*

$$\psi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{r \in R} \psi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty$$

Minorante der Halbnorm

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{r \in R} \chi(\mathfrak{a}; r) \leqq \infty .$$

Sind die $\psi(\mathfrak{a}; r)$ *bzw.* $\chi(\mathfrak{a}; r)$ *stetig, so ist* ψ *bzw.* χ *nach unten halbstetig.*

Beweis. Klar.

Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operationen). *Eine lineare Operation* T, *die einen F-Raum* $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ *in einen ebensolchen* $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ *abbildet, ist genau dann stetig, wenn die Halbnormen* $\chi_j(T\mathfrak{a})$ $(j = 0, 1, \ldots)$ *in* $\mathfrak{E}$ *stetig sind, also die Bedingung* $(\mathcal{M})$ *(s. oben) erfüllen.*

Beweis. Klar.

Die bekannten Lemmata 3.6 und 3.7 dienen uns zur Erläuterung der in den folgenden Paragraphen besprochenen Beweismethoden (vgl. Einleitung).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum, die $\langle\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle$ $(n=0, 1, \ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gilt $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}'_n\| = \infty$, so gibt es ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle| = \infty$.* (Für die Definition von $\|\mathfrak{a}'_n\|$ vgl. § 1.)

Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). *$[\mathfrak{E};\varphi]$ sei ein B-Raum, die $\langle\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle$ $(n, p=0, 1, \ldots)$ stetige Linearformen in $\mathfrak{E}$. Gibt es zu jedem p ein $\mathfrak{a}_p$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle\mathfrak{a}_p, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| = \infty$, so auch ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{E}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| = \infty$ für alle $p=0, 1, \ldots$.*

§ 4. Der gleitende Buckel.

Übersicht. Die Methode des gleitenden Buckels besteht darin, daß man ein Element $\mathfrak{a}$ mit den Eigenschaften $E_0, E_1, \ldots$ aus Elementen $\mathfrak{a}_k$ mit der Eigenschaft E_k in Form einer Reihe $\sum\alpha_k\mathfrak{a}_k$ zusammensetzt, wobei man darauf achtet, daß sich die $\mathfrak{a}_k$ gegenseitig nicht stören, daß also bezüglich E_k das Element $\mathfrak{a}_k$ in der Summe den Haupteinfluß (Buckel!) ausübt. Wie man diese Störungsfreiheit erzielt, ist aus den unten gezeigten, verhältnismäßig einfachen Beweisanordnungen für die Lemmata 3.6 und 3.7 zu sehen. Wir weisen auch auf einen prinzipiellen Vorteil des „Buckels" gegenüber den Methoden aus §§ 5 und 6 hin, der unter anderem in 11.2 zur Geltung kommt. Der Grundgedanke der Methode stammt von LEBESGUE [1909] und TOEPLITZ [1911].

Beweis zu Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen). Wir können $\mathfrak{a}'_n \neq \mathfrak{o}$ voraussetzen. Zu jedem $n=0, 1, \ldots$ gibt es ein $\mathfrak{a}_n\in\mathfrak{E}$ mit

$$|\langle\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_n\rangle| > \tfrac{3}{4}\|\mathfrak{a}'_n\|, \quad \|\mathfrak{a}_n\| < 1.$$

Wir dürfen annehmen, daß

$$M_n = \overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\ldots} |\langle\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}'_k\rangle| < \infty \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

gilt, sonst wäre ja nichts mehr zu beweisen. Wir wählen eine Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < \ldots$ nach der induktiven Vorschrift: $n_0 = 0$; sind $n_0, \ldots, n_{r-1}$ bestimmt, so wird n_r so gewählt, daß

$$\tfrac{1}{4}5^{-r}\|\mathfrak{a}'_{n_r}\| > r \quad \text{und} \quad > \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k}$$

gilt (dies ist möglich wegen $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}'_n\| = \infty$). Das Element $\mathfrak{a} = \sum 5^{-k}\mathfrak{a}_{n_k}$ gehört wegen der Vollständigkeit zum Raum $\mathfrak{E}$. Es ist

$$\left\langle\sum_{k=0}^{\infty} 5^{-k}\mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\right\rangle = \left\langle\left(\sum_{k=0}^{r-1} + \sum_{k=r}^{r} + \sum_{k=r+1}^{\infty}\right) 5^{-k}\mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\right\rangle = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III};$$

$$|\mathrm{I}| = \left|\sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k}\langle\mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle\right| \leq \sum_{k=0}^{r-1} 5^{-k} M_{n_k} < \tfrac{1}{4}5^{-r}\|\mathfrak{a}'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{II}| = 5^{-r}|\langle\mathfrak{a}_{n_r}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle| > 5^{-r}\tfrac{3}{4}\|\mathfrak{a}'_{n_r}\|,$$

$$|\mathrm{III}| = \left|\left\langle\sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k}\mathfrak{a}_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\right\rangle\right| < \left(\sum_{k=r+1}^{\infty} 5^{-k}\cdot 1\right)\|\mathfrak{a}'_{n_r}\| = \frac{5^{-r}}{4}\|\mathfrak{a}'_{n_r}\|.$$

Die Abschätzungen lehren

$$|\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle| > \tfrac{1}{4}\, 5^{-r}\, ||\mathfrak{a}'_{n_r}|| > r,$$

also

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle| = \infty,$$

w. z. b. w.

In manchen Spezialfällen lassen sich die Abschätzungen vereinfachen, nämlich dann, wenn die Linearformen $\mathfrak{a}'_n$ in gewissem Sinn unabhängig sind, wofür wir als krassen Fall das Beispiel $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_N$ (vgl. § 2), $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_k\rangle = k \cdot a_k$ anführen. Der Name gleitender Buckel erklärt sich so, daß in $\langle \sum 5^{-k} \mathfrak{a}'_{n_k}, \mathfrak{a}'_{n_r}\rangle$ für jedes r ein anderes Glied der Reihe für das Großwerden der Summe (Buckel!) verantwortlich ist, während die restlichen Glieder nur geringen Einfluß ausüben. Die Voraussetzungen wurden nur zum Teil ausgenützt. So können wir statt Linearformen auch Halbnormen und Minoranten betrachten. Ein prinzipieller Vorteil des „Buckels" im Vergleich zu den Methoden aus §§ 5 und 6 liegt weiter darin, daß man unter Umständen $\mathfrak{a}$ in Gestalt einer divergenten (d.h. nicht im Sinne der Norm des Raumes konvergenten) Reihe darstellen kann — s. Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen) und Hilfssatz 12.2 (Randwerte bei beschränkten unstetigen Funktionen).

Beweis von Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen). Wir dürfen $\sum ||\mathfrak{a}_p|| < \infty$ annehmen. Wir bestimmen mittels induktiver Vorschrift Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots$ mit $0 < \xi_k \leq 1$ und natürliche Zahlen $n = n(p, m)$ $(0 \leq p \leq m;$ $m = 0, 1, \ldots)$ so, daß

$$\left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l,\ l = 0, 1, \ldots$$

gilt. Denn dann ist $\mathfrak{a} = \sum \xi_k \mathfrak{a}_k$ konvergent und

$$|\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| \geq m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m,\ m = 0, 1, \ldots,$$

d.h.

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| = \infty \qquad (p = 0, 1, \ldots).$$

Die Bestimmung erfolgt so: Sind $\xi_0, \ldots, \xi_l$ und $n(p, m)$ für $0 \leq p \leq m \leq l$ schon derart definiert, daß

$$(1) \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l),$$

$$(2) \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt, so wählen wir ξ_{l+1} so, daß

$$(1') \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| = \infty \qquad (p = 0, \ldots, l+1),$$

$$(2') \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > m \quad \text{für} \quad n = n(p, m),\ 0 \leq p \leq m \leq l$$

gilt. Dies ist möglich, weil Bedingung (1′) nur endlich viele Werte für ξ_{l+1} ausschließt und (2′) zu erfüllen ist, indem man ξ_{l+1} so klein wählt, daß das im Vergleich zu (2) neu hinzukommende Glied $\xi_{l+1}\,\mathfrak{a}_{l+1}$ keinen wesentlichen Einfluß in den betreffenden endlich vielen Ungleichungen ausübt. Sodann legen wir vermöge (1′) $n(p, l+1)$ $(0 \leq p \leq l+1)$ so fest, daß

$$(2'') \qquad \left|\left\langle \sum_{k=0}^{l+1} \xi_k\,\mathfrak{a}_k,\, \mathfrak{a}'_{np}\right\rangle\right| > l+1 \quad \text{für} \quad n = n(p, l+1), \quad 0 \leq p \leq l+1$$

ist. (2′) und (2″) zusammen ergeben Bedingung (2) mit $l+1$ an Stelle von l. Entsprechendes gilt für (1′) und (1). Mit den Anfangswerten $\xi_0 = 1$, $n(0, 0)$ geeignet gewählt, haben wir die gesuchte induktive Vorschrift.

Wir erkennen hier als Nachteil des „Buckels", daß umfangreiche Rechnungen nötig sind. Der Beweis vereinfacht sich jedoch wesentlich, wenn man

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| < \infty \quad \text{für} \quad p \neq r$$

annehmen darf.

§ 5. Unterhalb stetige Funktionen.

Übersicht. Aufbauend auf einem bekannten Magerkeitssatz von BAIRE (5.1) erhält man Bedingungen, unter denen eine nach unten halbstetige Funktion bzw. Halbnorm bzw. Minorante $\omega(\mathfrak{a}) \leq \infty$ den Wert ∞ annimmt (5.2 bis 5.4). Mit 5.3 ergeben sich sofort die Lemmata 3.6 und 3.7. Der Grundgedanke dieser Methode stammt von SAKS (siehe BANACH-STEINHAUS [1927]). In etwas abgeänderter Formulierung findet man 5.3 bei BANACH [1932, S. 19], und bei GELFAND [1936]. Satz 5.4 ist mit einem Ergebnis von BANACH [1931] verwandt.

Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire). *Ist $\mathfrak{M}$ eine magere Menge in einem vollständigen metrischen Raum $\mathfrak{E}$, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{a} \notin \mathfrak{M}$.*

Bemerkung. Für die Anwendung beachte man, daß die Vereinigung abzählbar vieler magerer Mengen wieder eine magere Menge ist, wie direkt aus der Definition zu ersehen ist.

Lemma 5.2 (Unbeschränkte halbstetige Funktion). *$\mathfrak{E}$ sei ein vollständiger metrischer Raum, $\omega(\mathfrak{a}) \leq \infty$ eine nach unten halbstetige Funktion in $\mathfrak{E}$. Ist $\omega(\mathfrak{a})$ in keiner offenen Teilmenge von $\mathfrak{E}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$. Genauer: Die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\omega(\mathfrak{a}) = \infty$ ist fett.*

Lemma 5.3 (Halbstetige Halbnorm). *Eine nach unten halbstetige Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leq \infty$ in einem F-Raum $\mathfrak{E}$ ist genau dann stetig, wenn $\chi(\mathfrak{a}) < \infty$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ gilt. Ist letzteres nicht der Fall, so ist die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) = \infty$ fett.*

Beweise. Der einfache Beweis von 5.1 ist bekannt (vgl. BANACH [1932, S. 14]). Aus 5.1 folgt leicht 5.2 (für die Beweismethode vgl. man BANACH [1932, S. 19]). 5.3 erhält man nun mit Hilfssatz 3.1 (Stetige Halbnorm).

Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearfolgen) gewinnt man durch Anwendung von 5.3 auf die Halbnormen

$$\chi(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_n\rangle| \leq \infty \quad \text{bzw.} \quad \chi_p(\mathfrak{a}) = \overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np}\rangle| \leq \infty$$

(vgl. Hilfssatz 3.4 über die obere Grenze von Halbnormen). Mit Hilfssatz 3.2 (Stetige Minorante) an Stelle von 3.1 erhalten wir eine Variante von 5.3:

Satz 5.4 (Halbstetige Minorante). *$\psi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ sei eine nach unten halbstetige Minorante der Halbnorm $\chi(\mathfrak{a}) \leqq \infty$ im F-Raum $\mathfrak{E}$. Die Stellen $\mathfrak{b}$ mit $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ mögen in $\mathfrak{E}$ dicht liegen, ψ erfülle nicht die Bedingung $(\mathcal{M})$ aus § 3 (d.h. sei in keiner Umgebung von $\mathfrak{o}$ beschränkt). Dann gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$. Genauer: Die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$ ist fett.*

Wir bemerken noch, daß man ein $\mathfrak{a}$ mit $\chi(\mathfrak{a}) = \infty$ in 5.3 bzw. mit $\psi(\mathfrak{a}) = \infty$ in 5.4 durch eine Konstruktion erhält, die große Ähnlichkeit mit der Konstruktion beim „gleitenden Buckel" (§ 4) aufweist (betrachte den bekannten Beweis von 5.1 mit der „Kugelschachtelung").

§ 6. Produkträume.

Übersicht. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ zweier F-Räume ist wieder ein F-Raum. Lemma 6.1 bringt eine Magerkeitsaussage über lineare abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{G}$, die auf Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) beruht. Eine Abbildung T mit Erklärungsbereich $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{E}$ und Wertbereich in $\mathfrak{F}$ heißt Operation mit abgeschlossenem Graph, wenn die Menge der Elemente $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$ in $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist. Für solche Operationen erhält man aus 6.1 bekannte Aussagen über Stetigkeit, Bild- und Erklärungsbereich (6.2 bis 6.4). Es ergeben sich wieder Beweise für 3.6 (Folgen von Linearformen) und 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen), wobei man allgemeiner Folgen linearer Operationen in F-Räumen betrachten kann. — Die grundlegende Beweisidee stammt von SCHAUDER [1930]; vgl. auch BANACH [1932, S. 38] und HILLE [1948, S. 29].

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume. Der Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ aller Paare $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$ läßt sich dann in naheliegender Weise als F-Raum auffassen (lineare Verknüpfung in natürlicher Weise erklären, Halbnormen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ übernehmen! Vgl. auch BOURBAKI [1940, S. 42]).

Lemma 6.1 (Komponenten in Produkträumen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, $\mathfrak{H}$ ein linearer abgeschlossener Unterraum in $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$. Die Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{H})$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, die in einem Element $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{H}$ vorkommen, sei nichtmager. Dann ist sogar $\mathfrak{E}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{E}$; und zu jeder Umgebung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{F}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{E}$, so daß jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ in einem Element $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{V}$ vorkommt.*

Wir unterdrücken den Beweis, weil sich fast wörtlich das Beweisschema von SCHAUDER [1930] anwenden läßt, das sich z.B. wieder bei BANACH [1932, S. 38] und HILLE [1948, S. 29] findet.

Ist T eine Operation von $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$, so wird die Menge der Elemente $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$ als der Graph von T bezeichnet. Hier interessiert der Fall, daß der Graph im Produktraum $\mathfrak{G} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen ist, was sich bei Verwendung von Elementfolgen so ausdrückt:

Aus $\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{a}$, $T\mathfrak{a}^{(n)} \to \mathfrak{b}$ folgt $T\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Ein solches T wird deshalb auch „fehlkonvergenzfrei" genannt. Diese Eigenschaft verlangt etwas weniger als Stetigkeit, so daß der folgende Satz ein (wichtiges) Stetigkeitskriterium liefert:

Lemma 6.2 (Operation mit abgeschlossenem Graph). *Eine lineare Operation T mit abgeschlossenem Graph, die einen F-Raum $\mathfrak{E}$ in einen ebensolchen $\mathfrak{F}$ abbildet, ist stetig.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare der Gestalt $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$, also der Graph von T. Lemma 6.1 ergibt mit der $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{U}$-Bedingung, daß T im Nullpunkt, also überall stetig ist.

Bemerkung. Eine „additive" Operation T mit abgeschlossenem Graph ist linear. Denn für rationales λ ist jedenfalls $T(\lambda\,\mathfrak{a}) = \lambda\,T(\mathfrak{a})$. Grenzübergang ergibt die Behauptung. Daher gilt 6.2 auch schon unter der engeren Voraussetzung der Additivität (s. BANACH [1932, S. 41]; beim Beweis fehlt dort die obige Bemerkung).

Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$. Dann ist die Menge der in der Form $\mathfrak{b} = T\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$ darstellbaren $\mathfrak{b} \in \mathfrak{F}$ entweder mager in $\mathfrak{F}$ oder $= \mathfrak{F}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der Elementpaare $(T\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E})$. Als stetige Operation besitzt T einen abgeschlossenen Graph, also läßt sich 6.1 anwenden.

Lemma 6.4 (Erklärungsbereich von Operationen mit abgeschlossenem Graph). *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien F-Räume, T eine lineare Operation, die in einem linearen Unterraum $\mathfrak{E}_0$ von $\mathfrak{E}$ erklärt ist und diesen in $\mathfrak{F}$ abbildet. Der Graph von T sei in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ abgeschlossen. Dann ist entweder $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{E}_0$ mager in $\mathfrak{E}$.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei wieder die Menge der Paare $(\mathfrak{a}, T\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}_0)$. Lemma 6.1 liefert den Beweis.

Wir kommen auf Lemma 3.6 (Folgen von Linearformen) und Lemma 3.7 (Doppelfolgen von Linearformen) zurück.

Zu 3.6. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{E}_0$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit $T\mathfrak{a} = \{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_k \rangle\} \in \mathfrak{S}_B$. Die Abbildung $\mathfrak{a} \to T\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}_0$ in $\mathfrak{S}_B$ hat wegen der Stetigkeit der Linearformen und der koordinatenweisen Konvergenz in $\mathfrak{S}_B$ einen abgeschlossenen Graph in $(\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_B)$. Natürlich ist auch sie linear. Gäbe es kein $\mathfrak{a}$ der in 3.6 genannten Art, so wäre $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}$ und T nach Lemma 6.2 stetig, was aber im Widerspruch zu $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \|\mathfrak{a}'_n\| = \infty$ steht.

Zu 3.7. Nach Lemma 6.4 ist für jedes $p = 0, 1, \ldots$ die Menge der $\mathfrak{a}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} |\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}'_{np} \rangle| < \infty$ mager in $\mathfrak{E}$ (man überlegt sich wie oben, daß 6.4 anwendbar ist). Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) vollendet den Beweis.

Einige Bemerkungen am Rande: Diese Sätze und Methoden lassen sich auf Folgen von Operationen (in F-Räumen) übertragen. Der Raum $\mathfrak{F}_B$ der in einem F-Raum $[\mathfrak{F}; \chi_j]$ beschränkten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ bildet einen F-Raum mit den Halbnormen $\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \chi_j(\mathfrak{a}^{(n)})$ $(j = 0, 1, \ldots)$; Beweis ähnlich wie bei $\mathfrak{S}_B$ in § 2. Sind die T_n lineare stetige Operationen, die den F-Raum $[\mathfrak{E}; \varphi_i]$ in $\mathfrak{F}$ abbilden, so ist genau dann $T_n\mathfrak{a}$ für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge, wenn $\mathfrak{a} \to \{T_n\mathfrak{a}\}$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}_B$ ist (Beweis wie oben für 3.6), was sich durch Ungleichungen der Form

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots} \chi_j(T_n\mathfrak{a}) \leq M_j\left(\varphi_0(\mathfrak{a}) + \cdots + \varphi_{i(j)}(\mathfrak{a})\right) \qquad (j = 0, 1, \ldots)$$

ausdrückt. Da die Menge $\mathfrak{F}_C$ der in $\mathfrak{F}$ konvergenten Folgen $\mathfrak{a}^{(n)}$ einen abgeschlossenen Unterraum in $\mathfrak{F}_B$ bildet, so existiert genau dann $\lim_{n\to\infty} T_n \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, wenn $T_n \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ eine beschränkte Folge bildet und $\lim_{n\to\infty} T_n \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{a}$ einer Grundmenge in $\mathfrak{E}$ existiert. Entsprechendes gilt für Konvergenz gegen Null, schwache Konvergenz usw. Schließlich zeigt Lemma 6.4, daß die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ mit beschränkter Folge $T_n \mathfrak{a}$ entweder mager ist oder ganz $\mathfrak{E}$ umfaßt. Analoges gilt natürlich für „konvergente Folge" usw. Man vgl. dazu MAZUR-ORLICZ [1933].

Auf der Methode der Produkträume, die bis jetzt im Schrifttum etwas vernachlässigt wurde, beruhen die Sätze des § 7 und damit die meisten Ergebnisse dieser Arbeit. Jedoch erhält man viele der funktionentheoretischen Resultate auch mit dem „Buckel" (§ 4) oder den „Halbstetigen Funktionen" (§ 5). Bei *FK*-Räumen, die nach Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) mittels halbstetiger Halbnormen definiert werden, läuft die Anwendung der Methoden aus § 5 und § 6 auf dasselbe hinaus.

§ 7. Sätze über *FK*-Räume.

Übersicht. Wir stellen einige Sätze über *FK*-Räume zusammen, die wir bei den folgenden Anwendungen gebrauchen werden. Diese Sätze beruhen auf den beiden Grundsäulen der Funktionalanalysis, dem HAHN-BANACHschen Erweiterungssatz und dem Baireschen Magerkeitssatz, und lassen sich großenteils mit den in §§ 4 bis 6 beschriebenen Methoden gewinnen. Zuerst beschäftigen wir uns mit *FK*-Räumen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, die der Beziehung $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ genügen. Dabei vergleichen wir die Topologien (7.1) und die Halbnormen (7.2) dieser Räume. 7.2 ist wichtig für den Nachweis $\mathfrak{E} \not\subset \mathfrak{F}$, während man mit 7.3 mittels einer Grundmengenbedingung häufig $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$ zeigen kann. In 7.4 betrachten wir die Vereinigung von *FK*-Räumen $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Gilt für einen *FK*-Raum $\mathfrak{F}$ die Beziehung $\mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{E}^{(j)}$ für jedes j, so auch $\mathfrak{F} \not\subset \bigcup \mathfrak{E}^{(j)}$. 7.6 bringt eine ähnliche Aussage für den Durchschnitt von *FK*-Räumen, während in 7.5 die Konvergenz in einem *FK*-Raum $\bigcap \mathfrak{E}^{(j)}$ mit der Konvergenz in jedem einzelnen $\mathfrak{E}^{(j)}$ in Verbindung gebracht werden. 7.6 ist neu, die übrigen Lemmata stammen im wesentlichen aus früheren Arbeiten des Verfassers.

Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien von *FK*-Räumen). *Sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ FK-Räume mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}$, so ist die von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{E}$ induzierte gleichmäßige Struktur gröber als die von $\mathfrak{E}$. Entsprechendes gilt für die schwache gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$, so haben beide Räume dieselbe gleichmäßige Struktur. Ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$, so bildet $\mathfrak{E}$ eine magere Menge im FK-Raum $\mathfrak{F}$.*

Bemerkung. Es ist also die kanonische Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ gleichmäßig stetig; und eine in $\mathfrak{E}$ beschränkte, konvergente, schwach konvergente, Cauchysche, schwach Cauchysche Folge hat bzw. dieselben Eigenschaften in $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach ZELLER [1951, S. 471] ist die eben genannte Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ stetig, daher als lineare Abbildung sogar gleichmäßig stetig. Dies ergibt die Behauptung über die „starke" Struktur und damit auch über die „schwache" Struktur. Die Magerkeitsaussage folgt mit Lemma 6.3 (Bildraum stetiger Operationen).

Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen). *Sind* $[\mathfrak{E};\varphi_i]$ *und* $[\mathfrak{F};\chi_j]$ *FK-Räume mit* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$, *so genügt jede Halbnorm* χ_j *in* $\mathfrak{E}$ *der Bedingung* $(\mathcal{M})$ *aus* § 3 [die mit $M=M(j)$ und $m=m(j)$

$$\chi_j(\mathfrak{a})\leq M\cdot(\varphi_0(\mathfrak{a})+\cdots+\varphi_m(\mathfrak{a}))\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{E})$$

lautet und sich in Spezialfällen noch vereinfachen läßt — s. § 3].

Beweis. Nach 7.1 ist die Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ stetig. Hilfssatz 3.5 (Lineare stetige Operation) ergibt die Behauptung.

Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung). $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{F}$ *seien FK-Räume,* $\mathfrak{E}_0$ *eine Grundmenge in* $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_0$ *ein linearer abgeschlossener Unterraum in* $\mathfrak{F}$. *Aus* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{E}_0<\mathfrak{F}_0$ *folgt dann* $\mathfrak{E}<\mathfrak{F}_0$.

Beweis. Dies ergibt sich wieder aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ (vgl. 7.1).

Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen). *Sind die* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *und* $\mathfrak{F}$ *FK-Räume und gilt* $\mathfrak{F}\not\subset\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so auch* $\mathfrak{F}\not\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$. *Genauer ist* $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ *eine magere Menge im FK-Raum* $\mathfrak{F}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$ ist ein FK-Raum — s. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen). Nach 7.1 ist $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)}$, also auch $\bigcup(\mathfrak{F}\cap\mathfrak{E}^{(j)})=\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$ mager in $\mathfrak{F}$. Nach Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) gilt $\mathfrak{F}\cap\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}\neq\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}\not\subset\bigcup\mathfrak{E}^{(j)}$.

Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von FK-Räumen). *Der FK-Raum* $[\mathfrak{E};\varphi_i^{(j)}]$ *sei der Durchschnitt der FK-Räume* $[\mathfrak{E}^{(j)},\varphi_i^{(j)}]$ — *vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen). Eine Folge* $\mathfrak{a}^{(n)}$ *in* $\mathfrak{E}$ *ist genau dann eine Cauchysche, konvergente, schwach Cauchysche, schwach konvergente, beschränkte Folge, wenn sie die betreffende Eigenschaft in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ *hat.*

Beweis. Dies folgt aus der Gestalt der Halbnormen in $\mathfrak{E}$ — vgl. Kriterium 2.3 — und der Darstellung der stetigen Linearformen in $\mathfrak{E}$ — s. ZELLER [1951, S. 472].

Lemma 7.6 (Abschnittsdichte im Durchschnitt von FK-Räumen). *Die* $[\mathfrak{E}^{(j)};\varphi_i^{(j)}]$ *seien FK-Räume, die die Menge* $\mathfrak{A}$ *der abbrechenden Folgen enthalten; es gelte* $\mathfrak{E}^{(j)}>\mathfrak{E}^{(j+1)}$, $\mathfrak{A}$ *liege dicht in jedem* $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(j=0,1,\ldots)$. *I. Dann liegt* $\mathfrak{A}$ *auch dicht im FK-Raum* $\mathfrak{E}=\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}$ *[vgl. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von FK-Räumen)]. II. Ist* $[\mathfrak{F};\chi]$ *ein BK-Raum mit* $\mathfrak{E}^{(j)}\not\subset\mathfrak{F}$ $(j=0,1,\ldots)$, *so gilt auch* $\bigcap\mathfrak{E}^{(j)}\not\subset\mathfrak{F}$.

Bemerkung. 7.6 II ist also ein Seitenstück zu 7.4.

Beweis. I. Sei l fest gewählt, $\mathfrak{a}$ irgendein Element aus $\mathfrak{E}$. Es gibt Stellen $\mathfrak{b}^{(n)}\in\mathfrak{A}$, die im FK-Raum $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren, also wegen 7.1 auch in den FK-Räumen $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(0\leq j\leq l)$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren. Daher erfüllt eines der $\mathfrak{b}^{(n)}$, das wir mit $\mathfrak{a}^{(l)}$ bezeichnen wollen, die Beziehung

$$\varphi_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}-\mathfrak{a})<\frac{1}{l+1}\qquad(0\leq i,j\leq l).$$

Wir erhalten so Stellen $\mathfrak{a}^{(l)}\in\mathfrak{A}$ $(l=0,1,\ldots)$, die in $\mathfrak{E}$ gegen $\mathfrak{a}$ konvergieren.

II. Wir dürfen $\mathfrak{F} > \mathfrak{A}$ annehmen. Wieder sei l fest und $\mathfrak{b}$ sei eine Stelle mit $\mathfrak{b} \in \mathfrak{E}^{(l)}$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$. Wir bestimmen Stellen $\mathfrak{b}^{(n)} \in \mathfrak{A}$, die in $\mathfrak{E}^{(l)}$ gegen $\mathfrak{b}$ konvergieren. $\mathfrak{b}^{(n)}$ ist in $\mathfrak{E}^{(l)}$, also nach 7.4 in jedem $\mathfrak{E}^{(j)}$ $(0 \leq j \leq l)$ eine Cauchysche Folge, aber wegen $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{F}$ keine Cauchysche Folge in $\mathfrak{F}$. Unter den Stellen der Form $\beta\, (\mathfrak{b}^{(m)} - \mathfrak{b}^{(n)})$ (β beliebig komplex) können wir daher ein $\mathfrak{a}^{(l)}$ finden, das

$$\varphi_i^{(j)}(\mathfrak{a}^{(l)}) < \frac{1}{l+1} \; (0 \leq i, j \leq l), \quad \chi(\mathfrak{a}^{(l)}) > 1$$

genügt. Die so gewonnene Folge $\mathfrak{a}^{(l)}$ konvergiert in $\mathfrak{E}$, aber nicht in $\mathfrak{F}$ gegen Null, was $\mathfrak{E} < \mathfrak{F}$ ausschließt (s. 7.1).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)