Über Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben.

Von

A. Hammerstein in Berlin.

Inhalt.

Einleitung.

In der mathematischen Physik spielt die Entwicklung einer gegebenen Funktion in nach Eigenfunktionen eines Randwertproblems fortschreitende Reihen eine Rolle. Ein klassisches Beispiel hierfür bildet die Frage nach Lösungen von Differentialgleichungen vom Typ derer der Wärmeleitung und der schwingenden Membran bei gegebenem Anfangszustand. Dies sei an der ersteren auseinandergesetzt. Sie lautet in zwei oder drei Dimensionen

$$\frac{\partial u(x, y, (z); T)}{\partial T} = A \Delta_{x, y, (z)} u(x, y, (z); T),$$

wo A eine positive Konstante bezeichnet.

Die Aufgabe besteht darin, in einem gegebenen Grundgebiet eine solche Lösung $u = u(x, y, (z); T)$ zu finden, die für alle Zeiten T einer Randbedingung genügt und für $T = 0$ gegen eine vorgegebene Funktion $f(x, y, (z))$ strebt.

Gelingt es, $f(x, y, (z))$ in „Fourierscher Weise" nach den Eigenfunktionen φ_ν von

$$\Delta \varphi_\nu + \lambda_\nu \varphi_\nu = 0$$

bei der gegebenen Randbedingung zu entwickeln, so genügt, wie unmittelbar auf Grund des für Dirichletsche Reihen angewandten Abelschen Grenzwertsatzes ersichtlich ist, der klassische Ansatz

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \varphi_\nu e^{-A \lambda_\nu T} \qquad \left(b_\nu = \int_B f \varphi_\nu \, dx \, dy \, (dz)\right)$$

den Rand- und Anfangsbedingungen.

Daß die Reihe in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, hat unter der Annahme der Existenz einer solchen und der Stetigkeit von f nebst seinen Ableitungen genügend hoher Ordnung Le Roy[1]) gezeigt.

In Abschnitt VI dieser Arbeit wird ein einfaches Verfahren angegeben, welches es gestattet, die in Rede stehende Reihe lediglich unter Voraussetzung der Konvergenz für $T = 0$ als Lösung zu erkennen[2]).

Abschnitt VII enthält, jedoch unter nicht so allgemeinen Voraussetzungen, entsprechende Untersuchungen für die Gleichung der schwingenden Membran.

Es kommt also alles darauf an, festzustellen, wann eine gegebene Funktion nach den Eigenfunktionen von

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$$

entwickelt werden kann.

---

[1]) Sur l'intégration des équations de la chaleur, Ann. éc. norm. (3) **15** (1898), S. 137.

[2]) Über die Eindeutigkeit vergleiche man H. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung II, Math. Zeitschr. **22** (1924), S. 298 ff.

Aus der Theorie der Integralgleichungen weiß man, daß dies dann möglich ist, wenn F im ganzen Grundgebiete stetige Ableitungen erster und stückweise stetige zweiter Ordnung besitzt. Wird nun zugelassen, daß die Funktion F nebst ihren ersten Ableitungen längs gegebener Linien (Flächen) Unstetigkeiten aufweist, so gelangt man zu einem Ergebnis (Abschnitt V), das sich kurz so formulieren läßt:

Ist ε eine beliebig kleine Fehlergrenze, so gibt es stets eine gleichmäßig und absolut konvergierende Entwicklung der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu,$$

die F außerhalb von Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien (-flächen) darstellt (Satz 9 und 10); die Koeffizienten c_ν sind dabei mit Hilfe von universellen, d. h. von F unabhängigen Konstanten in ähnlicher Weise wie die Fourierkoeffizienten $\int F \varphi_\nu \, dx\, dy (dz)$ gebildet und haben diese bei gegen Null strebendem ε zum Grenzwert. Durch Wahl eines genügend kleinen ε kann also erreicht werden, daß eine feste Anzahl von Anfangsgliedern sich um beliebig wenig von denen der Fourierreihe unterscheidet. Im Falle einer nebst den Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktion F ist die Entwicklung mit der Fourierschen identisch. Daß eine Reihe der genannten Art überhaupt existiert, ist trivial; man hat ja nur F durch eine Funktion zu ersetzen, die im ganzen Grundgebiet samt ihren ersten Ableitungen stetig ist und außerhalb der Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien (-flächen) mit F übereinstimmt. Das Wesentliche liegt vielmehr darin, daß die Koeffizienten c_ν in einfacher Weise explizite angegeben werden können.

Schließlich wird, wenn die Funktion F stückweise stetige Ableitungen bis zur $2m$-ten Ordnung besitzt, eine Reihe angegeben, die sie außerhalb der Streifen der Breite ε um die Unstetigkeitslinien und den Rand darstellt, und deren Koeffizienten A_ν die Eigenschaft besitzen, daß $\sum (\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ beschränkt bleibt. Man erkennt daraus, wegen $\lambda_\nu \sim \nu$, daß die Konvergenz mit wachsendem m besser wird.

Einen Zugang zu derartigen Entwicklungsfragen, der von A. Kneser[3]) systematisch verfolgt ist, bietet die Theorie der Integralgleichungen. Er besteht darin, daß man die Konvergenz der Bilinearreihe für die zur Randwertaufgabe gehörige Greensche Funktion nachweist und sich von der gliedweisen Differenzierbarkeit überzeugt.

Diese Arbeit enthält daher in erster Linie Untersuchungen über die Entwickelbarkeit eines symmetrischen Kerns mit Unstetigkeiten nach seinen Eigenfunktionen in einer und mehreren Dimensionen.

---

[3]) Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik, 1922.

Bisher bekannt ist darüber folgendes: Die Bilinearreihe konvergiert, wenn der Kern stetig und definit ist[4]), oder im eindimensionalen Falle, wenn er der Bedingung genügt:

$$\int_a^b \left(\frac{K(x_1, y) - K(x_2, y)}{x_1 - x_2}\right)^2 dy \leqq C, \tag{I}$$

wo $x_1 \neq x_2$ ist und C eine von x_1 und x_2 unabhängige Konstante bedeutet.

Für einen Kern vom Charakter der Greenschen Funktion gilt für alle ξ, η des Grundgebietes außerhalb einer Umgebung des Aufpunktes x, y, die beliebig klein angenommen werden darf,

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\varphi_\nu(x, y)\, \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu},$$

wobei φ_ν und λ_ν die Eigenfunktionen und Eigenwerte, a_ν gewisse in Satz 6 angegebene Konstanten bezeichnen[5]).

Diese Ergebnisse sollen im folgenden erweitert werden. Nachdem im ersten Abschnitt eine allgemeingültige Restabschätzung aufgestellt ist, wird im zweiten die Bedingung (I) verallgemeinert. Vor allem kann auf die Beschränktheit des Kerns verzichtet werden (Satz 1). Hieraus ergibt sich mühelos der etwas engere Satz 2, welchem man unmittelbar entnimmt, daß die zu den Besselschen Funktionen und Legendreschen Polynomen gehörigen Kerne entwickelbar sind.

Auf Grund der Konvergenz dieser Bilinearreihen können dann nach dem Verfahren von A. Kneser[6]) Funktionen mit stückweise stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach Besselschen Funktionen bzw. Legendreschen Polynomen entwickelt werden, ohne von deren asymptotischem Verhalten und dem Verteilungsgesetze der Eigenwerte Gebrauch zu machen.

Endlich wird noch eine Voraussetzung angegeben, unter welcher die Bilinearreihe gliedweise differenziert werden kann (Satz 3).

Der III. Abschnitt enthält den Nachweis für die Entwickelbarkeit eines zweimal stetig differenzierbaren Kerns in zwei Dimensionen (Satz 4). Für einen mit der logarithmischen Unstetigkeit der Greenschen Funktion versehenen Kern gelingt es nur zu zeigen, daß die Partialsummen unter einer festen Konstanten verbleiben, solange der variable Punkt vom Auf-

[4]) J. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integralequations, Philosoph. Transactions of the Royal Society of London, Serie A, **209** (1909).

[5]) Vgl. die Arbeiten des Verfassers: Sitzungsberichte der preuß. Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, 1923 u. 1925.

[6]) Vgl. loc. cit. [3]), S. 20.

punkt einen Abstand hat, der nicht unter eine gegebene positive Größe herabsinkt (Satz 5).

Um zu den eingangs erwähnten Resultaten zu gelangen, reichen die genannten Ergebnisse nicht hin. Vielmehr muß hierzu die Bilinearreihe mit konvergenzverbessernden Faktoren versehen werden (Abschnitt IV). Die so modifizierte Entwicklung stellt den Kern dann außerhalb einer Umgebung des Aufpunktes dar, die beliebig klein gewählt werden kann. — Des weiteren wird die gliedweise Differenzierbarkeit dargetan. Ein Teil der Sätze kann auf den Raum übertragen werden.

Die so erzielten Resultate gestatten es, die in Rede stehenden Folgerungen über die Entwickelbarkeit von längs gegebener Linien (Flächen) unstetigen Funktionen zu ziehen. Ein sich nur für diese interessierender Leser kann die Lektüre mit Abschnitt IV beginnen.

I.

Eine Restabschätzung für die Bilinearreihe.

In diesem Abschnitte wird eine Restabschätzung hergeleitet, die in einer und mehreren Dimensionen in gleicher Weise Gültigkeit hat.

Unter dem Grundgebiet B kann sowohl eine Strecke als auch ein beschränkter ebener oder räumlicher von einer stückweise stetig gekrümmten, sich selbst nicht überschneidenden Kurve (Fläche) begrenzter Bereich verstanden werden. Für alle Punktepaare x, ξ bzw. $x, y;\ \xi, \eta$ bzw. $x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta$ in B, allenfalls mit Ausnahme von $x = \xi$ bzw. $x = \xi$, $y = \eta$ bzw. $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ sei die Funktion $K(x, \xi)$, $(K(x, y;\ \xi, \eta)$, $K(x, y, z;\ \xi, \eta, \zeta))$ erklärt und stetig. Der Einfachheit halber werden die Formeln in diesem Abschnitte für *eine* Dimension aufgeschrieben; für mehrere verlaufen die Untersuchungen ganz ebenso. K sei so beschaffen, daß

$$\int_B K(x, s) K(\xi, s)\, ds$$

eine stetige Funktion in den beiden Veränderlichen x, ξ ist. Endlich besitze K die Symmetrieeigenschaft

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Fortan werde eine diesen Voraussetzungen genügende Funktion als „Kern" bezeichnet. Wie aus der Theorie der Integralgleichungen bekannt ist, stellt für jede in B stückweise stetige Funktion $\varphi(s)$

$$\int_B K(x, s) \varphi(s)\, ds$$

eine stetige Funktion der Veränderlichen x dar und die Integrale

$$\int_B\int_B K(x,\xi)\varphi(\xi)\,dx\,d\xi \quad \text{und} \quad \int_B\int_B K(x,s)K(\xi,s)\,ds\,d\xi$$

sind von der Integrationsreihenfolge unabhängig.

Weiter werde angenommen, daß die Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda\int_B K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = 0$$

unendlich viele Eigenwerte λ_ν, welche man sich der absoluten Größe nach geordnet denke, und die zugehörigen orthogonalen normierten Eigenfunktionen φ_ν besitze. Falls deren nur endlich viele existieren, sagen die folgenden Sätze nichts aus.

Schließlich gilt für jedes stückweise stetige Funktionenpaar φ, ψ

$$(1) \qquad \int_B\int_B K(s,\sigma)\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_B \varphi_\nu(s)\varphi(s)\,ds\int_B \varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Dem Punkt x von B werde ein abgeschlossener, ganz zu B nebst Rand gehöriger Bereich $\varkappa_x$ zugeordnet, welcher im linearen Fall aus einer Strecke, im ebenen aus einem Kreis und im räumlichen aus einer Kugel besteht, und der x als inneren oder Randpunkt enthält. In gleicher Weise werde zu ξ der Bereich $\varkappa_\xi$ erklärt. Überdies sollen $\varkappa_x$ und $\varkappa_\xi$ vom selben Inhalt l sein.

Zwei Funktionen φ und ψ seien im Grundgebiet durch

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & \text{für alle Punkte } s \text{ in } \varkappa_x, \\ 0 & \text{" \quad " \quad " \quad außerhalb } \varkappa_x; \end{cases}$$

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für alle Punkte } \sigma \text{ in } \varkappa_\xi, \\ 0 & \text{" \quad " \quad " \quad außerhalb } \varkappa_\xi \end{cases}$$

erklärt. Aus (1) folgt dann mit diesem φ und ψ für jedes ganze n

$$(2) \qquad \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} K(s,\sigma)\,ds\,d\sigma = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{\varkappa_x}\varphi_\nu(s)\,ds\int_{\varkappa_\xi}\varphi_\nu(\sigma)\,d\sigma + R_n,$$

wo R_n nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung durch

$$(3) \qquad \begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{1}{|\lambda_n|}\left\{\int_B \varphi(s)^2\,ds\cdot\int_B \psi(\sigma)^2\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}, \\ |R_n| &\leq \frac{l}{|\lambda_n|} \end{aligned}$$

abgeschätzt wird. Setzt man

$$K_n(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

so ergibt sich für jedes ganze n und alle Punkte x, ξ, in denen $K(x, \xi)$ erklärt ist, aus (2) und gemäß der oben angegebenen Bedeutung von l:

$$\begin{aligned}
l^2 K_n(x, \xi) & \\
&= \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} \left[K_n(x, \xi) - K(s, \sigma) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma)}{\lambda_\nu}\right] d\sigma\, ds + R_n \\
&= \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x, \xi) - K(s, \sigma))\, d\sigma\, ds \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma))\, d\sigma\, ds + R_n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma) &= (\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s))(\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(\sigma)) \\
&\quad + \varphi_\nu(s)(\varphi_\nu(\xi) - \varphi_\nu(\sigma)) + \varphi_\nu(\sigma)(\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s))
\end{aligned}$$

und

$$\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(s) = \lambda_\nu \int_B [K(x, u) - K(s, u)]\, \varphi_\nu(u)\, du.$$

Einsetzen dieser Werte und der dazu entsprechenden in (4) liefert zusammen mit (3):

$$\begin{aligned}
l^2 K_n(x, \xi) &= \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x, \xi) - K(s, \sigma))\, d\sigma\, ds \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \int_B \left(\int_{\varkappa_x} (K(x, u) - K(s, u))\, ds\right) \varphi_\nu(u)\, du \\
&\qquad \times \int_B \left(\int_{\varkappa_\xi} (K(\xi, u) - K(\sigma, u))\, d\sigma\right) \varphi_\nu(u)\, du \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s)\, ds \cdot \int_B \int_{\varkappa_\xi} \left((K(\xi, u) - K(\sigma, u))\, d\sigma\right) \varphi_\nu(u)\, du \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma)\, d\sigma \cdot \int_B \int_{\varkappa_x} \left((K(x, u) - K(s, u))\, ds\right) \varphi_\nu(u)\, du + R_n \\
&\quad \left(|R_n| \leqq \frac{l}{|\lambda_n|}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Von dieser Darstellung der Partialsumme der Bilinearreihe für $K(x, \xi)$, die auch in zwei und drei Dimensionen Gültigkeit besitzt, wird im folgenden wiederholt Gebrauch gemacht.

II.

Entwickelungssätze in einer Dimension.

§ 1.

Die Bilinearreihe des von zwei Veränderlichen abhängigen Kerns.

Satz 1. *Im Grundgebiet $a \leqq x \leqq b$ sei der Kern $K(x, \xi)$ erklärt. Es mögen zwei Konstante α, β, für welche $a \leqq a + \alpha < b - \beta \leqq b$ gilt,* *derart existieren, daß $K(x,\xi)$ in dem Quadrat $a+\alpha \leqq {x \atop \xi} \leqq b-\beta$ stetig ist. Außerdem gebe es zwei positive Zahlen γ und C, die von α und β abhängen können, so daß für alle der Ungleichung $a+\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b-\beta$ genügende Wertepaare x_1, x_2 die Beziehung*

$$(6) \qquad \int_a^b (K(x_2,u)-K(x_1,u))^2\,du \leqq C(x_2-x_1)^{1+\gamma}$$

statthat. Dann konvergiert die Bilinearreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig in dem Quadrat $a+\alpha \leqq {x \atop \xi} \leqq b-\beta$ und stellt dort $K(x,\xi)$ dar.

Beweis. x, ξ bezeichne einen Punkt des Teilquadrates der Behauptung. Als Bereich $\varkappa_x$ bzw. $\varkappa_\xi$ des Abschnittes I wähle man eine Strecke der Länge l, die x bzw. ξ als inneren oder Endpunkt enthält, und die ganz in das Intervall $a+\alpha \leqq s \leqq b-\beta$ hineinfällt. Gemäß der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung folgt dann aus (5):

$$\left| l^2 K_n(x_1 \xi) - \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right|$$

$$\leqq |\lambda_n| \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} \left\{ \int_a^b (K(x,u)-K(s,u))^2\,du \cdot \int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} d\sigma\,ds$$

$$+ \int_{\varkappa_\xi} \left\{ \int_{\varkappa_x} 1\,ds \cdot \int_a^b (K(\xi,u)-K(\sigma,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} d\sigma$$

$$+ \int_{\varkappa_x} \left\{ \int_{\varkappa_\xi} 1\,ds \cdot \int_a^b (K(x,u)-K(s,u))^2\,du \right\}^{\frac{1}{2}} ds + |R_n|.$$

In Rücksicht auf (6) und (3) erhält man hieraus:

$$\leqq |\lambda_n|\, l^2 C l^{1+\gamma} + 2 l\, l^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} + \frac{l}{|\lambda_n|}.$$

Also wird

$$(7) \qquad |K_n(x,\xi)| \leqq \left| \frac{1}{l^2} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right|$$

$$+ C|\lambda_n|\, l^{1+\gamma} + 2 C^{\frac{1}{2}} l^{\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{l\,|\lambda_n|}.$$

Setzt man nun $l = |\lambda_n|^{\frac{-1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}}$, was für hinreichend große Werte von n zulässig ist, so geht l mit wachsendem n gegen Null. Dies zieht, zufolge der Stetigkeit von $K(x,\xi)$ für $a+\alpha \leqq {x \atop \xi} \leqq b-\beta$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{l^2} \int_{\varkappa_x}\int_{\varkappa_\xi} (K(x,\xi)-K(s,\sigma))\,d\sigma\,ds \right| = 0$$

nach sich und zwar gleichmäßig für alle x, ξ des Quadrates $a-\alpha \leqq {x \atop \xi} \leqq b-\beta$.

Für die übrigen Glieder auf der rechten Seite von (7) ergibt sich

$$C\,|\lambda_n|^{1-(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}} + 2C^{\frac{1}{2}}\,|\lambda_n|^{-\frac{\gamma}{2(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}} + |\lambda_n|^{\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{2}}}-1}.$$

Da vorstehender Ausdruck mit wachsendem n gleichfalls der Null zustrebt, ist Satz 1 bewiesen.

Der die zu den Besselschen Funktionen und Legendreschen Polynomen gehörigen Kerne enthaltende Satz 2 kann jetzt leicht gefolgert werden:

Satz 2. *$K(x, \xi)$ sei höchstens in den Eckpunkten des Quadrates $a \leqq {x \atop \xi} \leqq b$ unstetig; ferner sei $\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$ im Innern der beiden Dreiecke, in welches jenes Quadrat durch die die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ verbindende Diagonale zerlegt wird, stetig und bleibe bei beliebigem hinreichend kleinem α dem Betrage nach für $a+\alpha \leqq x \leqq b-\alpha$, $a \leqq \xi \leqq b$ unterhalb einer allenfalls von α abhängigen Konstanten. Dann konvergiert die Bilinearreihe in jedem im Innern des Definitionsbereiches enthaltenen Teilbereiche gleichmäßig und stellt den Kern dar.*

Zum Beweise hat man gemäß Satz 1 nur zu zeigen, daß für $a+\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b-\alpha$

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2\,du \leqq C(x_2 - x_1)^2 \qquad (C = C(\alpha))$$

gilt. In der Tat ist nach dem Rolleschen Theorem

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2\,du = \int_a^{x_1} \left((x_2 - x_1)\frac{\partial K(\bar{x}(u), u)}{\partial x}\right)^2 du$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left(K(x_2, x_1) + (u - x_1)\frac{\partial K(x_2, \bar{u})}{\partial u} - K(x_1, x_2) - (u - x_2)\frac{\partial K(x_1, \bar{\bar{u}})}{\partial u}\right)^2 du$$

$$+ \int_{x_2}^{b} \left((x_2 - x_1)\frac{\partial K(\bar{\bar{x}}(u), u)}{\partial x}\right)^2 du,$$

wo die überstrichenen Größen Mittelwerte bezeichnen. Ist nun für $a+\alpha \leqq x \leqq b-\alpha$ und $a \leqq \xi \leqq b$, wie angenommen $\left|\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\right| \leqq M = M(\alpha)$, so folgt auf Grund der Symmetrieeigenschaft von K, wenn $x \neq \xi$ ist,

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = \frac{\partial K(\xi, x)}{\partial x},$$

und insbesondere für $x_1 < u < x_2$

$$\left|\frac{\partial K(x_1, u)}{\partial u}\right| \leqq M, \qquad \left|\frac{\partial K(x_2, u)}{\partial u}\right| \leqq M.$$

Somit ergibt sich

$$\int_a^b (K(x_2, u) - K(x_1, u))^2\, du$$

$$\leqq (b-a)(x_2 - x_1)^2 M^2 + 4(x_2 - x_1)^3 M^2 + (b-a)(x_2 - x_1)^2 M^2$$

$$\leqq C(\alpha)(x_2 - x_1)^2,$$

wie behauptet.

§ 2.

Ein Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit der Bilinearreihe.

Satz 3. *Der Kern* $K(x, \xi)$ *sei im Innern des Quadrates* $a \leqq {x \atop \xi} \leqq b$ *mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen. Ist* $a \leqq a + \alpha < b - \beta \leqq b$, *so bleibe* $\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}$ *in dem Rechteck* $a + \alpha \leqq x \leqq b - \beta$, $a \leqq \xi \leqq b$ *beschränkt, und es gelte für* $a + \alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b - \beta$

$$(8) \qquad \int_a^b \left(\frac{\partial K(x_2, u)}{\partial x_2} - \frac{\partial K(x_1, u)}{\partial x_1}\right)^2 du \leqq C \cdot (x_2 - x_1)^2 \qquad (C = C(\alpha, \beta)).$$

Dann ist in dem durch $a + \alpha < {x \atop \xi} < b - \beta$ *erklärten Quadrate* Q_1

$$\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \frac{d\varphi_\nu(x)}{dx}.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jedem inneren Teilbereiche von Q_1.

Beweis. Offenbar genügt es, den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz für das Teilquadrat $a + \alpha_1 \leqq {x \atop \xi} \leqq b - \beta_1$ zu erbringen, wo α_1 und β_1 beliebige den Ungleichungen $a + \alpha < a + \alpha_1 < b - \beta_1 < b - \beta$ unterworfene Zahlen sind. l und k mögen den Bedingungen $0 < {l \atop k} < \frac{1}{2} \operatorname{Min}((\alpha_1 - \alpha), (\beta_1 - \beta))$ genügende Größen bedeuten. Es sei $a + \alpha_1 \leqq {x \atop \xi} \leqq b - \beta_1$. Man setze

$$\varphi(s; x, l) = \begin{cases} s - (x - l) & \text{für } x - l \leqq s < x, \\ -s + (x + l) & \text{für } \quad x \leqq x + l, \\ 0 & \text{für die übrigen Werte von } s; \end{cases}$$

$$\psi(\sigma; \xi, k) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi - k \leqq \sigma \leqq \xi + k, \\ 0 & \text{für die übrigen Werte von } \sigma, \end{cases}$$

und wende (1) mit $\psi(\sigma)$ und $\varphi'(s)=\frac{d\varphi(s)}{ds}$ an. Dies ergibt

$$\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l} K(s,\sigma)\varphi'(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu(s)\varphi'(s)\,ds\int_{\xi-l}^{\xi+l}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma+R_n,$$

wobei

$$|R_n|\leqq\frac{1}{|\lambda_n|}\left\{\int_{x-l}^{x+l}\varphi'(s)^2\,ds\int_{\xi-k}^{x+k}\psi(\sigma)^2\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq\frac{2}{|\lambda_n|}\sqrt{lk}$$

wird. Anwendung der Integration nach Teilen liefert

$$(9)\qquad -\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}\frac{\partial K(s,\sigma)}{\partial s}\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma$$
$$=-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\lambda_\nu}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu'(s)\varphi(s)\,ds\int_{\xi-k}^{\xi+k}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma+R_n$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$\frac{\partial K(x,\xi)}{\partial x}=K'(x,\xi)\quad\text{und}\quad K_n'(x,\xi)=\frac{\partial K}{\partial x}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\varphi_\nu'(x)\varphi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

findet sich in Rücksicht auf $\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\,ds=l^2$ und (9)

$$2kl^2K_n'(x,\xi)=\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K_n'(x,\xi)-K_n'(s,\sigma))\varphi(s)\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma-R_n.$$

Ganz wie in Abschnitt I folgt hieraus

$$2kl^2K_n'(x,\xi)=\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi)-K'(s,\sigma))\varphi(s)\,ds$$
$$-\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}\Big[\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\int_a^b(K'(x,u)-K'(s,u))\varphi_\nu(u)\,du$$
$$\times\int_a^b(K(\xi,u)-K(\sigma,u))\varphi_\nu(u)\,du\Big]\varphi(s)\cdot\psi(\sigma)\,ds\,d\sigma$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\int_{x-l}^{x+l}\varphi_\nu'(s)\varphi(s)\,ds\int_{\xi-k}^{\xi+k}\psi(\sigma)\int_a^b(K(\xi,u)-K(\sigma,u))\varphi_\nu(u)\,du\,d\sigma$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\xi-l}^{\xi+l}\varphi_\nu(\sigma)\psi(\sigma)\,d\sigma\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\int_a^b(K'(x,u)-K'(s,u))\varphi_\nu(u)\,du\,ds-R_n.$$

Bei Beachtung von

$$\int_{x-l}^{x+l} \varphi_\nu'(s)\,\varphi(s)\,ds = -\int_{x-l}^{x+l} \varphi_\nu(s)\,\varphi'(s)\,ds = -\int_a^b \varphi_\nu(s)\,\varphi'(s)\,ds$$

ergibt die Anwendung der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung

$$(10) \qquad \left|2kl^2K_n'(x,\xi) - \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi) - K'(s,\sigma))\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma\right|$$

$$\leqq \int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}|\lambda_n|\left\{\int_a^b (K'(x,u) - K'(s,u))^2\,du\right.$$

$$\left.\times\int_a^b (K(\xi,u) - K(\sigma,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)\,ds\,d\sigma$$

$$+\int_{\xi-k}^{\xi+k}\left\{\int_a^b \varphi'(s)^2\,ds\cdot\int_a^b (K(\xi,u) - K(\sigma,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}d\sigma$$

$$+\int_{x-l}^{x+l}\varphi(s)\cdot\left\{\int_a^b \psi(\sigma)^2\,d\sigma\cdot\int_a^b (K\,(x,u) - K'(s,u))^2\,du\right\}^{\frac{1}{2}}ds + |R_n|.$$

Zufolge der Stetigkeit und Beschränktheit von $K'(x,u)$ für $a+\alpha \leqq x \leqq b-\beta$, $a < u < b$ ist nun

$$(11) \qquad \int_a^b (K(x_2,u) - K(x_1,u))^2\,du \leqq C_1(x_2 - x_1)^2$$
$$(a+\alpha \leqq x_1 < x_2 \leqq b-\beta),$$

wo $C_1 = C_1(\alpha,\beta)$ eine Konstante bedeutet. Gemäß der Wahl von l und k kann (8) und (11) zur Abschätzung der rechten Seite von (10) angewandt werden, und man erhält als obere Schranke hierfür

$$|\lambda_n|\sqrt{CC_1}\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}|(x-s)(\xi-\sigma)|\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma + \sqrt{2lC_1}\int_{\xi-k}^{\xi+k}|\xi-\sigma|\,d\sigma$$

$$+\sqrt{2kC}\int_{x-l}^{x+l}|x-s|\,\varphi(s)\,ds + \frac{2}{|\lambda_n|}\sqrt{l\cdot k}$$

$$\leqq 4\sqrt{CC_1}\,|\lambda_n|\,k^2l^3 + 2\sqrt{2C_1}\,l^{\frac{1}{2}}k^2 + 2\sqrt{2C}\,k^{\frac{1}{2}}l^3 + \frac{2}{|\lambda_n|}l^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man jetzt, was für hinreichend große Werte von n statthaft ist, $l = |\lambda_n|^{-\frac{4}{10}}$, $k = |\lambda_n|^{-\frac{7}{10}}$, so folgt, wenn C_2 eine Konstante bezeichnet,

$$|K_n'(x,\xi)| \leqq \frac{1}{2kl^2}\left|\int_{\xi-k}^{\xi+k}\int_{x-l}^{x+l}(K'(x,\xi) - K'(s,\sigma))\,\varphi(s)\,ds\,d\sigma\right| + C_2|\lambda_n|^{-\frac{1}{20}}.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung, da $K'(x,\xi)$ in dem abgeschlossenen Quadrat $a+\alpha \leqq {x \atop \xi} \leqq b-\beta$ stetig ist.

III.

Die Bilinearreihe des Kerns in mehreren Dimensionen.

§ 3.

Die Funktion $H(r)$.

In den folgenden Paragraphen werden auf ebene Probleme bezügliche Fragen behandelt. Im Raume verlaufen die Untersuchungen im wesentlichen analog; die nötigen Modifikationen werden in § 8 angegeben.

Für das nicht zusammenfallende Punktepaar ξ, η und s, t und beliebiges $\varrho > 0$ sei eine Funktion $H_\varrho(\xi, \eta; s, t)$ wie folgt erklärt:

$$H_\varrho(\xi, \eta; s, t) = H(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{\varrho} + \frac{r^2}{4\pi\varrho^2} - \frac{1}{4\pi} & \text{für } r \leqq \varrho, \\ 0 & \text{für } r \geqq \varrho \end{cases}$$

$$\left(r = \sqrt{(s-\xi)^2 + (t-\eta)^2}\right).$$

Dann ist, wie leicht zu sehen, $H(\varrho) = 0$, $\frac{dH(\varrho)}{dr} = 0$ und

$$\Delta_{s,t} H(r) = \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \begin{cases} \frac{1}{\pi\varrho^2} & \text{für } r < \varrho, \\ 0 & \text{für } r > \varrho. \end{cases} \tag{12}$$

Für $0 < r \leqq \varrho$ gilt die Abschätzung

$$0 \leqq H(r) \leqq -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{\varrho}.$$

Bezeichnet $\varkappa_1$ den Kreis mit dem Radius ϱ um ξ, η als Mittelpunkt, so wird

$$\iint\limits_{\varkappa_1} H(r)^2\, ds\, dt = 2\pi\int_0^\varrho H(r)^2 r\, dr \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^\varrho \left(\log\frac{r}{\varrho}\right)^2 r\, dr = \frac{1}{8\pi}\varrho^2, \tag{13}$$

wie sich durch Integration nach Teilen ergibt.

§ 4.

Die Bilinearreihe für den zweimal differenzierbaren Kern.

Satz 4. *Im Grundgebiete B besitze der Kern $K(x, y; \xi, \eta)$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Dann ist*

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x, y)\cdot\varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu},$$

wo die Reihe für alle auf einen beliebigen im Innern von B enthaltenen Teilbereich B_1 beschränkten Punkte x, y und ξ, η gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Unter ϱ werde eine positive Zahl verstanden, die kleiner ist als der Minimalabstand zwischen dem Rande von B einerseits und B_1 andererseits. Die Punkte x, y und ξ, η mögen dem Bereiche B_1 angehören. Um jeden derselben als Mittelpunkt schlage man einen Kreis $\varkappa_x$ bzw. $\varkappa_\xi$ mit dem Radius ϱ. Diese Kreise gehören B ganz an. Anwendung der Greenschen Formel auf K und die Funktion H des vorigen Paragraphen liefert bei Berücksichtigung der logarithmischen Unstetigkeit von H für beliebiges u, v in B

$$\iint_B (K(s,t;\, u,v)\, \Delta_{s,t} H_\varrho(x,y;\, s,t) - H_\varrho(x,y;\, s,t)\, \Delta_{s,t} K(s,t;\, u,v))\, ds\, dt = K(x,y;\, u,v).$$

Daraus folgt gemäß (12)

$$\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_x} (K(x,y;\, u,v) - K(s,t;\, u,v))\, ds\, dt = -\iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x,y;\, s,t)\, \Delta_{s,t} K(s,t;\, u,v)\, ds\, dt,$$

und des weiteren, wenn die stetige Funktion $\Delta_{s,t} K(s,t;\, u,v) = L(s,t;\, u,v)$ gesetzt wird,

$$\iint_B \iint_{\varkappa_x} (K(x,y;\, u,v) - K(s,t;\, u,v))\, \varphi_\nu(u,v)\, ds\, dt\, du\, dv = -\pi\varrho^2 \iint_B \iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x,y;\, s,t)\, L(s,t;\, u,v)\, \varphi_\nu(u,v)\, ds\, dt\, du\, dv.$$

Eine analoge Formel entsteht durch Vertauschung des Punktes x, y mit ξ, η und des Integrationsgebietes $\varkappa_x$ mit $\varkappa_\xi$.

Mit diesen Werten ergibt die Restabschätzung (5) des Abschnittes I:

$$\begin{aligned} K_n(x,y;\, \xi,\eta) &= \frac{1}{\pi^2\varrho^4}\iint_{\varkappa_x}\iint_{\varkappa_\xi} (K(x,y;\, \xi,\eta) - K(s,t;\, \sigma,\tau))\, d\sigma\, d\tau\, ds\, dt \\ &- \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_x} HL\, ds\, dt\Big)\varphi_\nu(u,v)\, du\, dv \cdot \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_\xi} HL\, d\sigma\, d\tau\Big)\varphi_\nu(u,v)\, du\, dv \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s,t)\, ds\, dt \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_\xi} HL\, d\sigma\, d\tau\Big)\varphi_\nu(u,v)\, du\, dv \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\pi\varrho^2}\iint_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma,\tau)\, d\sigma\, d\tau \iint_B \Big(\iint_{\varkappa_x} HL\, ds\, dt\Big)\varphi_\nu(u,v)\, du\, dv + \frac{R_n}{\pi^2\varrho^4}, \end{aligned}$$

$$|R_n| \leq \frac{\pi\varrho^2}{|\lambda_n|}.$$

Hieraus folgt nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung

$$|K_n(x,y;\xi,\eta)| \leqq \frac{1}{\pi^2\varrho^4}\left|\iint\limits_{\varkappa_x}\iint\limits_{\varkappa_\xi}(K(x,y;\xi,\eta)-K(s,t;\sigma,\tau))\,d\sigma\,d\tau\,ds\,dt\right|$$

$$+|\lambda_n|\left\{\iint\limits_B\Big(\iint\limits_{\varkappa_x} H\,L\,ds\,dt\Big)^2 du\,dv\iint\limits_B\Big(\iint\limits_{\varkappa_\xi} H\,L\,d\sigma\,d\tau\Big)^2 du\,dv\right\}^{\frac12}$$

$$+\frac{1}{\pi\varrho^2}\left\{\pi\varrho^2\iint\limits_B\Big(\iint\limits_{\varkappa_\xi} H\,L\,d\sigma\,d\tau\Big)^2 du\,dv\right\}^{\frac12}$$

$$+\frac{1}{\pi\varrho^2}\left\{\pi\varrho^2\iint\limits_B\Big(\iint\limits_{\varkappa_x} H\,L\,ds\,dt\Big)^2 du\,dv\right\}^{\frac12}+\frac{1}{|\lambda_n|\,\pi\varrho^2}\,.$$

Nun ist aber gemäß (13), wenn $8M$ das Maximum von L^2 in B bezeichnet,

$$\Big(\iint\limits_{\varkappa_x} H\,L\,ds\,dt\Big)^2 \leqq \iint\limits_{\varkappa_x} H^2\,ds\,dt\iint\limits_{\varkappa_x} L^2\,ds\,dt \leqq \frac{1}{8\pi}\varrho^2\cdot 8M\pi\varrho^2 = M\varrho^4\,.$$

Wird noch unter B^* der Flächeninhalt von B verstanden, so ergibt sich

$$|K_n(x,y;\xi,\eta)| \leqq \frac{1}{\pi^2\varrho^4}\left|\iint\limits_{\varkappa_x}\iint\limits_{\varkappa_\xi}(K(x,y;\xi,\eta)-K(s,t;\sigma,\tau))\,d\sigma\,d\tau\,ds\,dt\right|$$

$$+|\lambda_n|\,B^*M\varrho^4+2\left(\frac{B^*M}{\pi}\right)^{\frac12}\varrho+\frac{1}{|\lambda_n|\,\pi\varrho^2}\cdot$$

Setzt man endlich $\varrho=|\lambda_n|^{-\frac15}$, was für hinreichend große Werte von n zulässig ist, so verbleiben die letzten drei Glieder auf der rechten Seite der vorigen Ungleichung unter konst. $\cdot|\lambda_n|^{-\frac15}$. Hieraus und aus der Stetigkeit von $K(x,y;\xi,\eta)$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearreihe in dem behaupteten Sinne.

§ 5.

Die Beschränktheit der Partialsummen der Bilinearreihe einer Greenschen Funktion.

Satz 5. $K(x,y;\xi,\eta)$ *besitze folgende drei Eigenschaften einer Greenschen Funktion: Erstens habe* K *für jedes im Innern des Grundgebietes* B *gelegene Paar verschiedener Punkte* x,y *und* ξ,η *die Gestalt*

$$\frac{-1}{2\pi}\log r+\gamma(x,y;\xi,\eta)\qquad\left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right),$$

wobei γ *mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen ist. Zweitens gelte in* B

$$\varDelta_{\xi,\eta}K(x,y;\xi,\eta)=0\,.$$

Drittens sei K symmetrisch. — Randbedingungen sind für K nicht gefordert.

Ist d eine hinreichend kleine positive Größe, so gibt es eine von $x, y; \xi, \eta$ unabhängige ganze Zahl $m = m(d)$, so daß für $n \geqq m$

$$\left| K(x, y; \xi, \eta) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x, y)\, \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\lambda_\nu} \right| \leqq 1$$

ausfällt, und zwar für alle Punkte x, y und ξ, η, die voneinander und vom Rande des Grundgebietes B keinen kleineren Abstand als d haben.

Beweis. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorangehenden Paragraphen ergibt die Anwendung der Greenschen Formel für zwei verschiedene innere Punkte x, y und ξ, η, deren Abstand vom Rande höchstens d beträgt, mit $\varrho \leqq d$

$$(14) \quad \iint_B \left(K(x, y; \sigma, \tau)\, \Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi, \eta; \sigma, \tau) - H_\varrho(\xi, \eta; \sigma, \tau) \Delta_{\sigma,\tau} K(x, y; \sigma, \tau)\right) d\sigma\, d\tau$$
$$= K(x, y; \xi, \eta) - H_\varrho(\xi, \eta; x, y).$$

Hieraus und aus (12) erhält man zufolge $\Delta K = 0$

$$\frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_{\varkappa_x} (K(x, y; \xi, \eta) - K(x, y; \sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau = H_\varrho(\xi, \eta; x, y),$$

$$\frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_B \iint_{\varkappa_\xi} (K(\xi, \eta; u, v) - K(\sigma, \tau; u, v))\, \varphi_\nu(u, v)\, d\sigma\, d\tau\, du\, dv$$
$$= \iint_{\varkappa_\xi} H_\varrho(\xi, \eta; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv.$$

Somit kann die Gleichung (5) des Abschnittes I folgendermaßen geschrieben werden:

$$K_n(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\pi^2 \varrho^4} \iint_{\varkappa_x} \iint_{\varkappa_\xi} (K(x, y; \xi, \eta) - K(s, t; \sigma, \tau))\, d\sigma\, d\tau\, ds\, dt$$
$$- \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \iint_{\varkappa_x} H_\varrho(x, y; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv \cdot \iint_{\varkappa_\xi} H_\varrho(\xi, \eta; u, v)\, \varphi_\nu(u, v)\, du\, dv$$
$$- \frac{1}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=1}^{n} \iint_{\varkappa_x} \varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt \cdot \iint_{\varkappa_\xi} H \varphi_\nu\, du\, dv$$
$$- \frac{1}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=1}^{n} \iint_{\varkappa_\xi} \varphi_\nu(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau \iint_{\varkappa_x} H \varphi_\nu\, du\, dv + \frac{R_n}{\pi^2 \varrho^4} \qquad \left(|R_n| \leqq \frac{\pi \varrho^2}{|\lambda_n|}\right).$$

Haben nun die Punkte x, y und ξ, η vom Rande und voneinander keiner kleineren Abstand als d, so kann ein $\varrho_0 = \varrho_0(d) \leqq \frac{d}{2}$ derart bestimmt werden, daß, falls $\varrho \leqq \varrho_0$ gewählt wird, für alle s, t im Kreise $\varkappa_x$ und σ, τ im Kreise $\varkappa_\xi$

$$|K(x, y; \xi, \eta) - K(s, t; \sigma, \tau)| \leqq \frac{1}{\pi}$$

ausfällt, da ja die Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ in dem fraglichen Bereich stetig ist. Infolgedessen ergibt sich, wenn wieder die Schwarzsche und Besselsche Ungleichung herangezogen wird,

$$\begin{aligned}|K_n(x, y; \xi, \eta)| &\leqq \frac{1}{\pi} + |\lambda_n| \left\{\iint\limits_{\varkappa_x} H^2\, du\, dv \cdot \iint\limits_{\varkappa_\xi} H^2\, du\, dv\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{\pi \varrho^2}\left\{\pi \varrho^2 \iint\limits_{\varkappa_\xi} H^2\, du\, dv\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi \varrho^2}\left\{\pi \varrho^2 \iint\limits_{\varkappa_x} H^2\, du\, dv\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{|\lambda_n|\, \pi \varrho^2}\end{aligned}$$

und nach (13)

$$|K_n(x, y; \xi, \eta)| \leqq \frac{1}{\pi} + |\lambda_n| \frac{1}{8\pi} \varrho^2 + \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} + \frac{1}{\pi |\lambda_n| \varrho^2}.$$

Schließlich werde $m = m(d)$ so groß gewählt, daß $|\lambda_m|^{-\frac{1}{2}} \leqq \frac{d}{2}$ ausfällt. Dann kann für $n \geqq m$ in der vorstehenden Ungleichung $\varrho = |\lambda_n|^{-\frac{1}{2}}$ gesetzt werden, woraus, wie behauptet,

$$|K_n(x, y; \xi, \eta)| \leqq \frac{1}{\pi} + \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} + \frac{1}{\pi} < 1$$

folgt.

IV.

Die mit konvergenzverbessernden Faktoren versehene Bilinearreihe.

§ 6.

Die Entwickelung der Greenschen Funktion.

Die in den folgenden Abschnitten zur Verwendung kommenden Beweismethoden sind von den bisherigen verschieden. Auch wird von den gewonnenen Ergebnissen kein Gebrauch gemacht. Nur die Definitionen und Bezeichnungen sind aus dem Vorangehenden übernommen.

Satz 6. *$K(x, y; \xi, \eta)$ sei ein Kern von der in Satz 5 geforderten Art, welcher überdies nur positive Eigenwerte besitze. Der Punkt ξ, η sei auf einen inneren abgeschlossenen Teilbereich B_1 von B beschränkt; g bedeute eine positive ganze Zahl. Unter ϱ werde eine den Ungleichungen $0 < \varrho < 1$ genügende Größe verstanden, die so klein gewählt sei, daß* *der Kreis* $\varkappa_g$ *mit dem Radius* $g\cdot\varrho$ *um* ξ,η *als Mittelpunkt dem Bereich* B *für jedes* ξ,η *in* B_1 *ganz angehört. Setzt man*

$$a_\nu = \frac{2}{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}} J_1(\varrho\sqrt{\lambda_\nu}),$$

unter J_1 *die Besselsche Funktion 1. Art verstanden, so ist für*

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2$$

$$K(x,y;\xi,\eta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)\,\varphi_\nu(\xi,\eta)}{\lambda_\nu},$$

wobei die Reihe für alle x,y *in* B *und alle* ξ,η *in* B_1 *gleichmäßig und absolut konvergiert. Zufolge der Symmetrie können die Punkte* x,y *und* ξ,η *ihre Rollen vertauschen.*

Beweis. Der Satz soll zunächst mit $g=1$ bewiesen werden[7]).

Aus (14) erhält man[8]) wegen $\Delta K = 0$ für alle von ξ,η verschiedenen x,y in B nach dem bekannten Entwickelungssatz aus der Theorie der Integralgleichungen

$$(15)\quad \begin{aligned} K(x,y;\xi,\eta) - H_\varrho(\xi,\eta;x,y) &= \iint_B K(x,y;\sigma,\tau)\,\Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi,\eta;\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta_{\sigma,\tau} H_\varrho(\xi,\eta;\sigma,\tau)\,\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau. \end{aligned}$$

Der Rest der Reihe wird nach der Schwarzschen und Besselschen Ungleichung durch

$$\sum_{\nu=n}^{n+p} \left|\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right| \cdot \left|\iint_B \Delta_{\sigma,\tau} H\cdot\varphi_\nu\,d\sigma\,d\tau\right| \leqq \left\{\sum_{\nu=n}^{n+p}\left(\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right)^2 \cdot \iint_B (\Delta_{\sigma,\tau} H)^2\,d\sigma\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}$$

---

[7]) In der Arbeit des Verfassers „Über die Entwickelung eines logarithmisch unstetigen Kerns nach seinen Eigenfunktionen" (Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Klasse vom 10. Dez. 1925) findet sich ein Beweis dieses Spezialfalles, welcher der Vollständigkeit halber hier nochmals wiedergegeben sei.

[8]) Für einen Leser, der sich nur für den Beweis des Satzes 6 interessiert, sei bemerkt, daß hierzu die Einführung der Funktion H unnötig ist. Die Beziehung (16), aus der alles weitere folgt, kann nämlich bereits aus dem Umstand gewonnen werden, daß $K(x,y;\sigma,\tau)$ in jedem den Punkt x,y nicht enthaltenden Teilbereiche von B reguläre Potentialfunktion von σ,τ ist, und also für $(x-\xi)^2-(y-\eta)^2>\varrho^2$ die Darstellung $K(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(x,y;\sigma(r,\vartheta),\tau(r,\vartheta))\,d\vartheta$ gilt, wobei das Integral über die Berandung eines Kreises mit dem Radius $r\leqq\varrho$ um ξ,η als Mittelpunkt zu erstrecken ist. Durch Multiplikation mit r und Integration nach r zwischen den Grenzen 0 und ϱ ergibt sich dann (16). Aus Stetigkeitsgründen gilt diese Relation auch noch auf dem Rande von $\varkappa_1$. Die Darstellung des Textes zeigt darüber hinaus, welchen Wert die Reihe der Behauptung im Kreise $\varkappa_1$ annimmt.

abgeschätzt. Da gemäß (12) $\iint\limits_{B} (\Delta_{\sigma,\tau} H)^2 \, d\sigma \, d\tau = \frac{1}{\pi \varrho^2}$ ist, zieht die gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\right)^2$ in x, y die der ursprünglichen Reihe in dem behaupteten Sinne nach sich.

Es ist also nach (12) und (15)

$$K(x,y;\xi,\eta) - H(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint\limits_{\varkappa_1} K(x,y;\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint\limits_{\varkappa_1} \varphi_\nu(\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau .$$

Insbesondere für $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \geqq \varrho^2$ folgt hieraus

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint\limits_{\varkappa_1} K(x,y;\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau \tag{16}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint\limits_{\varkappa_1} \varphi_\nu(\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau .$$

Setzt man nun $K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \gamma(x,y;\xi,\eta)$, so ist $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Gleichung $\Delta\gamma = 0$ genügt, und die Integralgleichung für φ_ν lautet sodann

$$\varphi_\nu(\xi,\eta) = -\frac{\lambda_\nu}{2\pi} \iint\limits_{B} \log r \, \varphi_\nu(\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau + \lambda_\nu \iint\limits_{B} \gamma(\xi,\eta;\sigma,\tau) \varphi_\nu(\sigma,\tau) \, d\sigma \, d\tau .$$

Bildet man auf beiden Seiten die Δ-Ableitung, so findet sich in bekannter Weise

$$\Delta \varphi_\nu(\xi,\eta) + \lambda_\nu \varphi_\nu(\xi,\eta) = 0 .$$

Zufolge $\lambda_\nu > 0$ kann mit beliebigem positivem $R < \varrho$ der Webersche Mittelwertsatz angewandt werden[9]); dieser ergibt, wenn $\tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta)$ die aus φ_ν durch Einführung von Polarkoordinaten R, ϑ um ξ, η als Anfangspunkt entstehende Funktion bezeichnet und unter J_0 die Besselsche Funktion verstanden wird:

$$\varphi_\nu(\xi,\eta) J_0(\sqrt{\lambda_\nu} \cdot R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta) \, d\vartheta .$$

Hieraus folgt

$$\varphi_\nu(\xi,\eta) \int\limits_0^{\varrho} J_0(\sqrt{\lambda_\nu} \cdot R) R \, dR = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\varrho} \int\limits_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_\nu(R,\vartheta) R \, d\vartheta \, dR .$$

[9]) Über die Integration der partiellen Differentialgleichungen, Math. Annalen 1, S. 1.

Geht man auf der rechten Seite wieder zu rechtwinkligen Koordinaten über, und macht in dem Integral auf der linken die Substitution $\sqrt{\lambda}\cdot R = z$, so liefert dies

$$\varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2\pi}{\lambda_\nu}\int\limits_0^{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}} J_0(z)\,z\,dz = \iint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Gemäß der Relation[10]) $z J_0(z) = \frac{d}{dz}(z J_1(z))$ folgt:

$$\iint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau = \varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2\pi\varrho}{\sqrt{\lambda_\nu}}J_1(\varrho\cdot\sqrt{\lambda_\nu}),$$

$$(17)\qquad \frac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau = \varphi_\nu(\xi,\eta)\frac{2}{\varrho\sqrt{\lambda_\nu}}J_1(\varrho\cdot\sqrt{\lambda_\nu}),$$
$$= a_\nu\varphi_\nu(\xi,\eta).$$

Einsetzen in (16) ergibt die Behauptung für den Fall $g=1$. Aus bekannten Eigenschaften der Besselschen Funktionen erschließt man sofort $\lim\limits_{\varrho\to 0} a_\nu(\varrho) = 1$ und $|a_\nu(\varrho)| \leqq c(\varrho)\frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$, wo c eine nur von ϱ abhängige Konstante bedeutet.

Für beliebiges g wird der Beweis durch Induktion geführt. Sei also der Satz für $g-1$ richtig. Um ξ,η werde der Kreis $\varkappa_g$ mit dem Radius $g\cdot\varrho$ geschlagen. Der Nachweis ist für nicht in seinem Innern gelegenes x, y zu führen. Sämtliche Punkte σ,τ des Kreises $\varkappa_1$ gehören dann einem Bereich an, der von der Berandung von B keinen kleineren Abstand als $(g-1)\varrho$ hat, und für sie gilt $(x-\sigma)^2+(y-\tau)^2 \geqq (g-1)^2\varrho^2$. Infolgedessen kann in (16) für $K(x,y;\sigma,\tau)$ die Reihenentwickelung mit $g-1$ eingesetzt werden:

$$K(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{\varkappa_1}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1}\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1}\frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\frac{1}{\pi\varrho^2}\iint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Gemäß (17) folgt hieraus die Behauptung für jedes g.

§ 7.

Die Bilinearreihen für die ersten Ableitungen der Greenschen Funktion.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die mit den konvergenzverbessernden Faktoren versehene Bilinearreihe für $g \geqq 2$ gliedweise differenziert werden darf.

---

[10]) Z. B. Watson, Theory of Bessel Functions, S. 18.

Satz 7. *$K(x, y; \xi, \eta)$ bedeute einen Kern der in Satz 6 gekennzeichneten Art. Der Punkt ξ, η werde auf einen inneren abgeschlossenen Teilbereich B_1 von B beschränkt. g sei eine ganze Zahl, die größer als 1 ist. Wird ϱ so klein gewählt, daß $g \cdot \varrho$ den Minimalabstand des Bereiches B_1 von der Berandung von B nicht übersteigt, dann gilt für alle x, y in B mit $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2$*

$$\frac{\partial K(x, y; \xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_\nu(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial K(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi_\nu(\xi, \eta).$$

Die Reihen konvergieren gleichmäßig und absolut für alle x, y in B und alle ξ, η in B_1.

Beweis. Offenbar genügt der Nachweis für die Richtigkeit der zweiten Gleichung. Hierzu gehe man von der Relation (16) aus:

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \int_{\eta-w}^{\eta+w} K(x, y; \sigma, \tau)\, d\tau\, d\sigma \qquad \left(w = +\sqrt{\varrho^2 - (\xi-\sigma)^2}\right),$$

$$\frac{\partial K(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \Big(K(x, y; \sigma, (\eta+w)) - K(x, y; \sigma, (\eta-w))\Big)\, d\sigma.$$

Die Punkte $\sigma, \eta + w$ und $\sigma, \eta - w$ liegen auf dem Kreise mit dem Radius ϱ um ξ, η, und haben infolgedessen vom Rande von B und von x, y keinen größeren Abstand als $(g-1)\varrho$. Demgemäß kann für K die Entwicklung aus Satz 6 mit $g-1$ eingeführt werden, die absolut und in σ gleichmäßig konvergiert:

$$\frac{\partial K(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1} \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} (\varphi_\nu(\sigma, \eta+w) - \varphi_\nu(\sigma, \eta-w))\, d\sigma$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{g-1} \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} \int_{\eta-w}^{\eta+w} \varphi_\nu(\sigma, \tau)\, d\sigma\, d\tau.$$

In Rücksicht auf (17) ist dies die Reihe der Behauptung.

Die Aussage des Satzes 7 ist in x, y und ξ, η nicht mehr symmetrisch, da die Differentiation nach ξ bzw. η ausgeführt wird und der Punkt ξ, η auf B_1 beschränkt bleiben muß, während x, y in B variieren kann. Daß auch umgekehrt ξ, η den ganzen Wertevorrat von B durchlaufen kann, falls der Punkt x, y B_1 nicht verläßt, soll unter weiteren Einschränkungen über K bewiesen werden. Hierzu wird eine Abschätzung der Greenschen

Funktion benötigt, die im Falle eines mit einer analytischen Randkurve versehenen Bereiches bereits durch Poincaré bekannt ist.

Hilfssatz 1. *Der einfach zusammenhängende Bereich B der schlichten Ebene besitze eine Berandung, die sich aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammensetzt*[11]). *Die Winkel, unter denen zwei derselben zusammenstoßen, sollen größer als* 0 *und höchstens* π *sein, d. h. es seien keine Spitzen und einspringende Ecken vorhanden.* $G(x, y; \xi, \eta)$ *bezeichne die zu B gehörige auf dem Rande verschwindende Greensche Funktion. Dann existiert eine von* $x, y; \xi, \eta$ *unabhängige Konstante* a, *so daß für alle inneren Punkte* x, y *und* ξ, η *des Bereiches*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqq \frac{a}{r}, \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| \leqq \frac{a}{r} \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right)$$

ausfällt.

Beweis. Man setze $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ und verstehe unter $w = f(z)$ eine solche Funktion, die den Bereich B der z-Ebene konform auf den Einheitskreis der w-Ebene abbildet. Dann ist bekanntlich, wenn noch die Abkürzung $f(\zeta) = \omega$ eingeführt wird,

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{-1}{2\pi} \Re \log \frac{f(z) - f(\xi)}{1 - f(z)\bar{f}(\xi)}$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \Re \log \frac{w - \omega}{1 - w\bar{\omega}},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \Re \left[\frac{f'(z)}{w - \omega}\left(1 + \bar{\omega}\frac{w - \omega}{1 - w\bar{\omega}}\right)\right],$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \Im \left[\frac{f'(z)}{w - \omega}\left(1 + \bar{\omega}\frac{w - \omega}{1 - w\bar{\omega}}\right)\right]$$

und

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{z - \zeta}\right| \left|\frac{f'(z)(z-\zeta)}{f(z) - f(\zeta)}\right| \cdot \left|1 + \bar{\omega}\frac{w - \omega}{1 - w\bar{\omega}}\right|.$$

Dieselbe Abschätzung gilt für $\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|$. Zufolge $|w| \leqq 1$ und $|\omega| \leqq 1$ ist, da ja $\frac{w - \omega}{w\bar{\omega} - 1}$ eine Abbildung des Einheitskreises in sich darstellt, $\left|1 + \bar{\omega}\frac{w - \omega}{1 - w\bar{\omega}}\right| \leqq 2$. Somit genügt es, die Existenz einer von z und ζ unabhängigen Konstanten β mit der Eigenschaft nachzuweisen, daß für alle inneren Punkte z und ζ von B

$$\left|\frac{f(z) - f(\zeta)}{f'(z)(z - \zeta)}\right| \geqq \beta \tag{18}$$

[11]) Diese Kurvenstücke sind dabei auch noch in den Eckpunkten, in denen zwei derselben zusammenstoßen, als analytisch vorausgesetzt.

ausfällt. Zu diesem Zwecke betrachte man

$$F(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(\zeta)}{f'(z)(z-\zeta)} & \text{für} \quad z\neq\zeta,\\ 1 & \text{für} \quad z=\zeta\end{cases}$$

als Funktion der beiden Veränderlichen z und ζ. Dieselbe ist für alle z und ζ in B nebst Rand mit Ausschluß der Ecken stetig und von Null verschieden, da bekanntlich $f(z)$ auch noch auf dem Rande, abgesehen von den Ecken, analytisch ist und daselbst $f'(z)\neq 0$ gilt. Wäre nun die Annahme (18) nicht richtig, so müßte es zwei Folgen, z_ν und ζ_ν, geben, die sich in einer Ecke häufen, und für welche $F(z_\nu,\zeta_\nu)$ gegen 0 strebt. Es bleibt demnach nur zu zeigen, daß dies nicht möglich ist. Ohne Beschränkung kann hierbei die Ecke als im Nullpunkt gelegen angenommen werden, d. h. $z_\nu\to 0$, $\zeta_\nu\to 0$.

Zunächst wird folgendes Lemma über die Funktion F nachgewiesen: Sind z_ν und ζ_ν zwei in B gelegene Punktfolgen, für die $z_\nu\to 0$, $\zeta_\nu\to 0$ sowie $\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|<1$ gilt, so gibt es hierzu eine positive Konstante β_1, so daß für alle ν von einer Stelle an

$$|F(z_\nu,\zeta_\nu)|\geqq\beta_1$$

ausfällt.

Zum Beweise sei der von den beiden die Ecke bildenden Kurvenstücken eingeschlossene Winkel mit $\alpha\pi$ bezeichnet $(0<\alpha<1)$. Nach Lichtenstein[12]) gestattet dann $f'(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes die Darstellung

$$f'(z)=z^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot f_1(z), \tag{19}$$

wobei f_1 eine stetige, für $z=0$ nicht verschwindende Funktion bedeutet und $z^{\frac{1}{\alpha}-1}$, $z=|z|e^{i\psi}$ $(0\leqq\psi<2\pi)$ gesetzt, den Wert $|z|^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{i\psi\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}$ hat. $F(z_\nu,\zeta_\nu)$ kann nunmehr in die Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned}F(z_\nu,\zeta_\nu)&=\frac{1}{(z_\nu-\zeta_\nu)f'(z_\nu)}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}f'(\sigma)\,d\sigma\\&=\frac{1}{(z_\nu-\zeta_\nu)z_\nu^{\frac{1}{\alpha}-1}}\int_{\zeta_\nu}^{z_\nu}\sigma^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)}\,d\sigma.\end{aligned} \tag{20}$$

Dabei sei der Integrationsweg nach folgender Vorschrift gewählt: Man

[12]) Über die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken, Journal f. d. Mathematik **140**.

schreite längs der geradlinigen Verbindungslinie von ζ_ν nach z_ν fort, soweit diese in B verläuft; verläßt sie B, so gehe man längs der Randlinie bis zu ihrem Wiedereintritt weiter. Da die beiden Stücke der Berandung als analytische Bögen vorausgesetzt sind, und zwar auch noch über die Ecke hinaus, existiert eine von ν unabhängige Konstante γ derart, daß die Länge des Integrationsweges die Größe $\gamma\,|z_\nu - \zeta_\nu|$ nicht übertrifft. Aus demselben Grunde und wegen $|\zeta_\nu| < |z_\nu|$ ist für hinreichend großes ν auf dem ganzen Integrationswege $|\sigma| \leqq |z_\nu|$. Aus (20) erhält man

$$(21)\quad F(z_\nu, \zeta_\nu) = \frac{1}{(z_\nu - \zeta_\nu)\, z_\nu^{\frac{1}{\alpha}-1}} \int_{\zeta_\nu}^{z_\nu} \sigma^{\frac{1}{\alpha}-1} d\sigma + \frac{1}{z_\nu - \zeta_\nu} \int_{\zeta_\nu}^{z_\nu} \left(\frac{\sigma}{z_\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)} - 1\right) d\sigma.$$

Der zweite Posten wird dem Betrage nach gemäß dem soeben Bemerkten durch

$$\frac{1}{|z_\nu - \zeta_\nu|}\, \gamma\, |z_\nu - \zeta_\nu|\, \mathrm{Max} \left| \frac{f_1(\sigma)}{f_1(z_\nu)} - 1 \right|$$

abgeschätzt, wo das Maximum auf dem Integrationswege zu nehmen ist. Dieser Ausdruck strebt wegen der Stetigkeit von $f_1(z)$ und $f_1(0) \neq 0$ mit wachsenden ν gegen 0, denn mit z_ν und ζ_ν rücken sämtliche Punkte des Integrationsweges in den Nullpunkt hinein.

Es muß also nur noch dargetan werden, daß der Absolutwert des ersten Postens in (21) über einer festen Zahl verbleibt. Derselbe hat, $z_\nu = |z_\nu|\, e^{i\Psi_\nu}$, $\zeta_\nu = |\zeta_\nu|\, e^{iX_\nu}$ gesetzt, den Wert

$$\alpha \frac{|z_\nu|^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\Psi_\nu}{\alpha}} - |\zeta_\nu|^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{X_\nu}{\alpha}}}{\left(|z_\nu|\, e^{i\Psi_\nu} - |\zeta_\nu|\, e^{iX_\nu}\right) |z_\nu|^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{i\Psi_\nu\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}} = \alpha \frac{1 - \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right|^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{1}{\alpha}(X_\nu - \Psi_\nu)}}{1 - \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| e^{i(X_\nu - \Psi_\nu)}}.$$

Da nun die Punkte z_ν und ζ_ν, sowie der Integrationsweg dem Bereiche B angehören, so bleibt von einem ν an, der Bedeutung von α gemäß, $|X_\nu - \Psi_\nu|$ unter $\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)\pi$ und es ist also

$$\frac{1}{\alpha}\,|X_\nu - \Psi_\nu| \leqq \frac{3}{2}\pi.$$

Demzufolge kann sich der Zähler des zuletzt gefundenen Ausdruckes mit wachsendem ν der Null nur dann nähern, wenn für eine Teilfolge

$$\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| \to 1 \quad \text{und} \quad |X_\nu - \Psi_\nu| \to 0, \text{ d. h. } Z_\nu = \frac{\zeta_\nu}{z_\nu} \to 1$$

gilt. Wegen $\lim\limits_{Z_\nu \to 1} \alpha \frac{1 - Z_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - Z_\nu} = 1$ jedoch sinkt der ganze Ausdruck dem Betrage nach nicht unter eine positive Konstante herab. Somit ist das Lemma bewiesen.

Um nun die Behauptung für zwei beliebige Folgen z_ν und ζ_ν als richtig zu erkennen, zerlege man diese in die durch

$$\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| < 1, \qquad \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| > 1$$

gekennzeichneten Teilfolgen. Die beiden ersten sind erledigt. Für die dritte hat man gemäß (19)

$$F(z_\nu, \zeta_\nu) = F(\zeta_\nu, z_\nu)\frac{f'(\zeta_\nu)}{f'(z_\nu)} = F(\zeta_\nu, z_\nu)\left(\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{f_1(\zeta_\nu)}{f_1(z_\nu)}.$$

Aus den Eigenschaften von $f_1(z)$ folgt $\frac{f_1(\zeta_\nu)}{f_1(z_\nu)} \to 1$. Nach dem Lemma existiert wegen $\left|\frac{z_\nu}{\zeta_\nu}\right| < 1$ eine Zahl β_2, so daß für hinreichend großes ν

$$|F(\zeta_\nu, z_\nu)| \geqq \beta_2$$

ist. Also ist für $\left|\frac{\zeta_\nu}{z_\nu}\right| > 1$ von einer Stelle an

$$|F(z_\nu, \zeta_\nu)| \geqq \frac{1}{2}\beta_2.$$

Daher gibt es keine Folgen, für welche

$$\lim F(z_\nu, \zeta_\nu) = 0$$

gilt, womit der Beweis von Hilfssatz 1 erbracht ist.

Aus ihm kann jetzt leicht eine Abschätzung für die Ableitungen der Eigenfunktionen gewonnen werden:

Hilfssatz 2. *Ist B ein Bereich der in Hilfssatz 1 gekennzeichneten Art, so bestehen für die Eigenfunktionen φ_ν und Eigenwerte λ_ν der zu ihm gehörigen am Rande verschwindenden Greenschen Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$, als Kern einer Integralgleichung aufgefaßt, für alle Punkte ξ, η in B und $\nu \geqq \nu_0$ die Ungleichungen*

$$\left|\frac{\partial\varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial\xi}\right| \leqq b\,\lambda_\nu(\log\lambda_\nu)^{\frac{1}{2}}, \qquad \left|\frac{\partial\varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right| \leqq b\,\lambda_\nu(\log\lambda_\nu)^{\frac{1}{2}},$$

wobei ν_0 und b von ξ, η und ν unabhängige Konstante bedeuten [13]).

Beweis. Aus der für die normierten Eigenfunktionen gültigen Integralgleichung

$$\varphi_\nu(\xi, \eta) = \lambda_\nu \iint_B G(\xi, \eta; \sigma, \tau)\,\varphi_\nu(\sigma, \tau)\,d\sigma\,d\tau \tag{22}$$

---

[13]) Man kann übrigens unschwer weit bessere Abschätzungen in jedem keinen Randpunkt enthaltenden Teilbereich finden, was für unsere Zwecke jedoch nicht ausreicht.

findet man auf Grund der Schwarzschen Ungleichung, wenn unter A_1 eine von ξ, η und ν unabhängige Konstante verstanden wird,

$$(23)\qquad |\varphi_\nu(\xi,\eta)| \leqq \lambda_\nu \Big\{\iint_B G^2\,d\sigma\,d\tau \cdot \iint_B \varphi_\nu^2\,d\sigma\,d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}} \leqq A_1 \lambda_\nu .$$

ξ, η bedeute einen Punkt im Innern oder auf dem Rande von B. Man schlage um ihn einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\lambda_\nu}$ und nenne B dessen Durchschnitt mit B. Nun folgt aus (22)

$$\left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi}\right| \leqq \lambda_\nu \left(\left|\iint_{B-\mathsf{B}} \frac{\partial G}{\partial \xi}\varphi_\nu\,d\sigma\,d\tau\right| + \left|\iint_{\mathsf{B}} \frac{\partial G}{\partial \xi}\varphi_\nu\,d\sigma\,d\tau\right|\right)$$

$$< \lambda_\nu \left(\left\{\iint_{B-\mathsf{B}} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)^2 d\sigma\,d\tau \iint_B \varphi_\nu^2\,d\sigma\,d\tau\right\}^{\frac{1}{2}} + \iint_{\mathsf{B}} \left|\frac{\partial G}{\partial \xi}\right| |\varphi_\nu|\,d\sigma\,d\tau\right).$$

In den Integralen werden jetzt Polarkoordinaten r, ϑ um ξ, η als Anfangspunkt eingeführt. Dann liefert Hilfssatz 1

$$\left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi}\right| \leqq \lambda_\nu a \left(\left\{\iint_{B-\mathsf{B}} \frac{dr\,d\vartheta}{r}\right\}^{\frac{1}{2}} + \iint_{\mathsf{B}} |\varphi_\nu|\,dr\,d\vartheta\right)$$

oder, wenn R den größten gegenseitigen Abstand zweier Randpunkte von B bedeutet, in Rücksicht auf (23)

$$\left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi}\right| \leqq a\lambda_\nu \left(\left\{\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{\lambda_\nu}}^{R} \frac{dr\,d\vartheta}{r}\right\}^{\frac{1}{2}} + A_1\lambda_\nu \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\lambda_\nu}} dr\,d\vartheta\right)$$

$$= a\lambda_\nu\left(\{2\pi(\log R + \log\lambda_\nu)\}^{\frac{1}{2}} + 2\pi A_1\right).$$

Hieraus entnimmt man die Behauptung unmittelbar.

Jetzt kann die Differenzierbarkeit der für die Greensche Funktion gültigen Reihe in dem erwähnten Sinne gezeigt werden.

Satz 8. *Der einfach zusammenhängende Bereich B besitze eine Berandung, die sich aus einer endlichen Anzahl von analytischen Kurvenstücken zusammensetzt, welche weder in Spitzen noch in einspringenden Ecken zusammenstoßen sollen. $G(x, y; \xi, \eta)$ bezeichne die zu ihm gehörige am Rande verschwindende Greensche Funktion. Wird der Punkt x, y auf einen ganz im Innern von B enthaltenden Teilbereich B_1 beschränkt, so ist für alle ξ, η in B, ganzes $g \geqq 2$ und hinreichend kleines ϱ*

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial \xi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu}\frac{\partial \varphi_\nu(\xi,\eta)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

$$((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \geqq (g\varrho)^2).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für ξ, η in B und x, y in B_1.

Beweis. Für den Rest der Reihe findet sich bei Beachtung von (17) und Hilfssatz 2 für genügend großes p und q die Abschätzung

$$\sum_{\nu=p}^{q} \left| a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right| = \sum_{\nu=p}^{q} \left| \frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{a_\nu^{g-1}}{\lambda_\nu} \right| \left| \frac{1}{\pi \varrho^2} \iint_{\varkappa_1} \varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt \right|$$

$$\leqq \left\{ \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\partial \varphi_\nu(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{a_\nu^{g-1}}{\lambda_\nu} \right)^2 \frac{1}{\pi^2 \varrho^4} \iint_{\varkappa_1} 1\, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left\{ \frac{b}{\pi \varrho^2} \sum_{\nu=p}^{q} \log \lambda_\nu\, a_\nu^{2(g-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Berücksichtigt man, daß a_ν für hinreichend große Werte von ν unter konst. $\lambda_\nu^{-\frac{3}{4}}$ liegt (S. 288), so ergibt sich für den Rest die obere Schranke

$$\text{konst.} \left\{ \sum_{\nu=p}^{q} \log \lambda_\nu \cdot \lambda_\nu^{-\frac{3}{2}(g-1)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die Konvergenz der Quadratsumme der reziproken Eigenwerte zieht somit für $g \geqq 3$ die der Reihe der Behauptung nach sich und zwar gleichmäßig in x, y und ξ, η. Aber auch für $g = 2$ kann dieselbe erschlossen werden, da für die Greensche Funktion bekanntlich $\lambda_\nu \sim \nu$ ist. Somit ist die gliedweise Differenzierbarkeit nach ξ und ebenso nach η gerechtfertigt.

§ 8.

Ausdehnung einiger Ergebnisse auf drei Dimensionen.

Es ist nicht schwer zu erkennen, daß sich ein Teil der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Sätze auf drei Dimensionen ausdehnen läßt.

Die Funktion H_ϱ ist wie folgt zu erklären:

Um den Punkt ξ, η, ζ schlage man die Kugel $\varkappa_1$ mit dem Radius ϱ und setze für einen von ξ, η, ζ verschiedenen Punkt u, v, w

$$H_\varrho(\xi, \eta, \zeta; u, v, w) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{r^2}{2\varrho^3} - \frac{1}{2\varrho}\right) & \text{für } u, v, w \text{ in } \varkappa_1, \\ 0 & \text{„} \quad u, v, w \text{ außerhalb } \varkappa_1, \end{cases}$$

$$r = \sqrt{(\xi-u)^2 + (\eta-v)^2 + (\zeta-w)^2}.$$

Man erkennt leicht, daß diese Funktion der in zwei Dimensionen eingeführten (§ 3) analoge Eigenschaften hat:

$$H(\varrho)=0, \qquad \frac{dH(\varrho)}{dr}=0, \qquad \varDelta H=\begin{cases}\frac{3}{4\pi\varrho^3} & (r\leqq\varrho)\\ 0 & (r>\varrho),\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{K_1} H^2\,du\,dv\,dw \leqq \text{konst. } \varrho.$$

Mit ihrer Hilfe läßt sich Satz 4 nebst Beweis ohne weiteres übertragen, wobei man $\varrho=|\lambda_n|^{-\frac{15}{16}}$ zu wählen hat.

Die Greensche Funktion im Raume hat bekanntlich die Gestalt

$$K(x,y,z;\,\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{\pi r}+\gamma(x,y,z;\,\xi,\eta,\zeta)$$

$$\left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right),$$

wo γ mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehen ist. Ferner gilt $\varDelta K=0$ und $\lambda_\nu>0$.

Für sie besteht das Analogon zu Satz 6 und 7, wenn darin $\varkappa_g$ die Kugel mit dem Radius $g\cdot\varrho$ um ξ,η,ζ als Mittelpunkt bedeutet, und

$$a_\nu=\frac{-3}{\varrho^2\lambda_\nu}\cos\left(\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho\right)+\frac{3}{\varrho^3\lambda_\nu^{\frac{3}{2}}}\sin\left(\sqrt{\lambda_\nu}\,\varrho\right)$$

gesetzt ist.

Beim Beweise ist dabei der Webersche Mittelwertsatz durch den Helmholtzschen[14]) zu ersetzen. Dieser besagt: Jede der Gleichung

$$\varDelta\varphi_\nu-\lambda_\nu\varphi_\nu=0 \qquad (\lambda_\nu>0)$$

genügende Funktion φ_ν kann in der Form

$$\varphi_\nu(\xi,\eta,\zeta)\,R\sin\left(\sqrt{\lambda_\nu}\,R\right)=\frac{\sqrt{\lambda_\nu}}{4\pi}\iint\varphi_\nu\,d\sigma,$$

wobei das Integral über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R zu erstrecken ist, geschrieben werden. Durch Integration nach R zwischen den Grenzen 0 und ϱ ergibt sich

$$\text{(17a)}\quad\begin{aligned}\varphi_\nu(\xi,\eta,\zeta)\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda_\nu}}\int\limits_0^\varrho R\sin\left(\sqrt{\lambda_\nu}\,R\right)dR&=\iiint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(u,v,w)\,du\,dv\,dw,\\ a_\nu\varphi_\nu(\xi,\eta,\zeta)&=\frac{3}{4\pi\varrho^3}\iiint\limits_{\varkappa_1}\varphi_\nu(u,v,w)\,du\,dv\,dw,\end{aligned}$$

wenn a_ν den soeben angegebenen Wert bezeichnet. Dies ist die (17) ent-

[14]) Z. B.: F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\varDelta u+k^2u=0$, S. 217 (1891).

sprechende Formel. Die übrigen Teile der Beweise übertragen sich unmittelbar.

Es sei noch bemerkt, daß $\lim\limits_{\varrho \to 0} a_\nu(\varrho) = 1$ und $a_\nu(\varrho) \underset{\nu \to \infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_\nu}$ ist.

V.

Die Entwicklung unstetiger Funktionen.

Die Ergebnisse des IV. Abschnittes können zur Entwicklung gegebener Funktionen mit Unstetigkeiten nach den Eigenfunktionen von $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ herangezogen werden.

Lediglich unter Verwendung der Sätze 6 und 7 soll ein Satz bewiesen werden, der sowohl in der Ebene als auch im Raume Gültigkeit besitzt, der Einfachheit halber aber nur in zwei Dimensionen formuliert wird.

Satz 9. *Vorgelegt sei ein Bereich B, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven C_ν von derselben Beschaffenheit wie die Berandung in Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem der Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihren Normalableitungen bei Annäherung an C_ν von der Art der Annäherung unabhängigen, längs C_ν stetigen Werten zu, die freilich beim Heranrücken von verschiedenen Seiten nicht übereinzustimmen brauchen. Weiter existiere $\iint\limits_{B_\nu} \Delta F(s, t)^2\, ds\, dt$ für jedes B_ν. Endlich genüge F auf dem Rande von B einer Randbedingung der Form

$$h_1 \frac{\partial F}{\partial N} + h_2 F = 0,$$

wobei N die äußere Normale, h_1 und h_2 positive Konstante bezeichnen.

Unter λ_ν, φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

bei der Randbedingung

$$h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial N} + h_2\varphi = 0$$

verstanden.

g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Dann gilt bei beliebigem hinreichend kleinen $\varrho > 0$ für alle Punkte x, y, deren Abstand von den Kurven C_ν nicht kleiner als $g \cdot \varrho$ ist,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(a_\nu^g \iint\limits_B F\varphi_\nu\, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint\limits_F \Delta F \varphi_\nu\, ds\, dt \right).$$

Die Konstanten a_ν sind dabei die im vorigen Abschnitt eingeführten von F unabhängigen Größen.

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle x, y in B.

Dem Beweise seien einige Bemerkungen vorausgeschickt.

Bezeichnet K die zu B und der Randbedingung gehörige Greensche Funktion, so kann der zweite Posten jedes Summengliedes in der Form

$$(24) \qquad (a_\nu^{\varrho} - 1) \iint_B \iint_B K(s, t; \sigma, \tau)\, \Delta F(s, t)\, \varphi_\nu(\sigma, \tau)\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau$$

geschrieben werden. Daraus ist ersichtlich, daß obige Entwicklung, falls F der Randbedingung genügt und längs aller C_ν nebst seiner Normalableitung stetig bleibt, mit der üblichen Fourierentwicklung übereinstimmt, weil alsdann

$$\iint_B K(s, t; \sigma, \tau)\, \Delta F(s, t)\, ds\, dt = -F(\sigma, \tau)$$

gilt. Im anderen Falle unterscheiden sich die ersten Koeffizienten der Reihe der Behauptung nur wenig von den Fourierkoeffizienten, da die ersten a_ν nahe an 1 liegen. Für große ν hingegen wird zufolge $a_\nu \sim \frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$ der Einfluß der mit der unstetigen Funktion F gebildeten Koeffizienten $\iint_B F \varphi_\nu\, ds\, dt$ abgeschwächt, und die mit dem stetigen

$$\iint_B K(s, t; \sigma, \tau)\, \Delta F(s, t)\, ds\, dt$$

gebildeten gewinnen das Übergewicht. Daß die Koeffizienten dann nicht mehr mit den Fourierkoeffizienten übereinstimmen, ergibt sich, wenn für F eine nicht identisch verschwindende den Randbedingungen genügende und in B die Gleichung $\Delta F = 0$ befriedigende Funktion gewählt wird.

Will man zulassen, daß die Kurven C_ν nicht geschlossen sind, sondern zwei Punkte des Randes von B verbinden, und soll ferner F keiner Randbedingung unterworfen sein, in welchem Falle die Reihe freilich F nur noch außerhalb einer gewissen Umgebung des Randes darstellen kann, so muß Satz 8 herangezogen werden. Die Voraussetzungen sind demgemäß einzuschränken, und der Beweis bleibt nur noch in zwei Dimensionen stichhaltig. Das Ergebnis läßt sich wie folgt formulieren:

Satz 10. *Vorgelegt ein Bereich B der schlichten Ebene, dessen Berandung aus einer geschlossenen sich selbst nicht überschneidenden Linie besteht, die sich aus einer endlichen Anzahl analytischer Bögen zusammensetzt, die weder in Spitzen noch in einspringenden Ecken zusammenstoßen. Derselbe werde durch endlich viele sich nicht treffende, stückweise stetig gekrümmte, entweder geschlossene oder zwei Randpunkte von B verbindende Kurven C_ν in die Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem dieser Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihrer Normalableitung bei Annäherung an C_ν und den Rand von B stetigen Grenzwerten zu. Weiter existiere $\iint\limits_{B_\nu} \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt$ für jedes B_ν.

Unter λ_ν, φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$$

bei der Randbedingung $\varphi = 0$ verstanden.

g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Dann gilt bei beliebigem, hinreichend kleinem ϱ für alle Punkte x, y, deren Abstand von C_ν und dem Rande von B kleiner als $g \cdot \varrho$ ist,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(a_\nu^g \iint\limits_B F \varphi_\nu \, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint\limits_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt \right).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für alle x, y in B.

Beweis. Der Anfang der Beweise der Sätze 9 und 10 ist gemeinsam. Über B seien zunächst nur die Voraussetzungen von Satz 9, über C_ν die von Satz 10 gemacht, F unterliege keiner Randbedingung.

Der Rand von B werde mit C bezeichnet. x, y bedeute einen nicht auf C und C_ν gelegenen Punkt. Man wende die Greensche Formel mit F und der zur gegebenen Randbedingung[15] $h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$ gehörigen Greenschen Funktion K von B auf sämtliche Bereiche B_ν einzeln an. Dabei ist jeweils, falls die zweiten Ableitungen von F bei Annäherung an die Berandung nicht endlich bleiben, in üblicher Weise zunächst ein kleineres Gebiet zu nehmen, welches nachträglich stetig in das ursprüngliche übergeführt wird. Addiert man die Resultate, so findet sich

$$(25) \quad \sum\nolimits^\nu \iint\limits_{B_\nu} \left(F(s, t)\, \Delta_{s,t} K(x, y; s, t) - K(x, y; s, t)\, \Delta F(s, t)\right) ds\, dt$$
$$= F(x, y) + \int\limits_C \left(F \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N}\right) dl + \sum\nolimits^\nu \int\limits_{C_\nu} \left(F \Big|_i^a \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N}\Big|_i^a\right) dl.$$

Dabei bedeutet $F \Big|_i^a$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial N}\Big|_i^a$ die Differenz der beiderseitisen Grenzwerte an C_ν bei sinngemäßer Festsetzung des Vorzeichens der Normalableitung.

Von jetzt ab habe der Punkt x, y von allen C_ν mindestens den Abstand $g \cdot \varrho$.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 9 verschwindet das Integral über C, und sämtliche Punkte von C_ν haben sowohl vom Rande (bei hinreichend kleinem ϱ), als auch von x, y keinen kleineren Abstand

[15]) Diese bezieht sich natürlich auf die Berandung C von B.

als $g \cdot \varrho$. Für K und $\frac{\partial K}{\partial N}$ können auf der rechten Seite von (25) also die Entwickelungen gemäß der auch in drei Dimensionen gültigen Sätze 6 und 7 eingeführt werden, wobei für den dort mit B_1 bezeichneten Teilbereich die Vereinigung der Kurven C_ν zu wählen ist.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 10 ist weiterhin zu verlangen, daß der Punkt x, y auch von C um mindestens $g \cdot \varrho$ entfernt ist. K ist jetzt die auf dem Rande verschwindende Greensche Funktion von B. Für K kann wieder die Entwickelung aus Satz 6, für $\frac{\partial K}{\partial N}$ hingegen die nach Satz 8 genommen werden. Der dort auftretende Teilbereich B_1 ist wie folgt zu wählen: Von B werde die Vereinigung aller Kreise mit dem Radius $g \cdot \varrho$, deren Mittelpunkte auf C oder C_ν liegen, weggenommen. Die dann von B verbleibenden Punkte machen B_1 aus.

In beiden Fällen erhält man also für die Integrale auf der rechten Seite von (25) für alle in Frage kommenden Punkte x, y mit Rücksicht auf die gleichmäßige Konvergenz

$$\int_C + \sum \int_{C_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^g}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x, y) \left(\int_C \left(F \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} - \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial N} \right) dl + \sum \int_{C_\nu} \left(F \Big|_i^a \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} - \varphi_\nu \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_i^a \right) dl \right),$$

wobei freilich im Falle des Satzes 9 die Integrale über C verschwinden. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Wird unter den Integralen

$$\varphi_\nu = \lambda_\nu \iint_B K \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial N} = \lambda_\nu \iint_B \frac{\partial K}{\partial N} \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau$$

gesetzt, so erhält man in Rücksicht auf die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge [16])

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \varphi_\nu(x, y) \iint_B \left(\int_C \left(F \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \right) dl + \sum \int_{C_\nu} \left(F \Big|_i^a \frac{\partial K}{\partial N} - K \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_i^a \right) dl \right) \varphi_\nu(\sigma, \tau) \, d\sigma \, d\tau,$$

oder wegen (25) und $\Delta K = 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \varphi_\nu(x, y) \left(- \iint_B F \varphi_\nu \, d\sigma \, d\tau - \iint_B \iint_B K \Delta F \varphi_\nu \, ds \, dt \, d\sigma \, d\tau \right).$$

---

[16]) Eine nähere Begründung hierfür findet sich z. B. bei A. Kneser, loc. cit. 3, S. 191.

Weiter gilt nach dem Entwicklungssatze aus der Theorie der Integralgleichungen

$$\iint\limits_B K(x, y; s, t)\, \Delta F(s, t)\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \iint\limits_B \iint\limits_B K \Delta F \varphi_\nu\, ds\, dt\, d\sigma\, d\tau,$$

wobei die Reihe wiederum absolut und gleichmäßig konvergiert.

Eintragen der beiden zuletzt gefundenen Werte in (25) ergibt in Rücksicht auf $\Delta K = 0$ und (24) die Behauptung beider Sätze.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll unter der Voraussetzung der Existenz höherer Ableitungen der Funktion F in den Teilbereichen B_ν eine besser konvergente Reihe aufgestellt werden. Es gilt

Satz 11. *Der Bereich B und die Kurven C_ν seien von der in Satz 9 oder 10 gekennzeichneten Art. Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem Teilbereiche B_ν stetige Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung, und genüge, falls über B und C_ν die Annahmen von Satz 9 gemacht sind, noch bei Annäherung des Punktes x, y an den Rand der Bedingung*

$$\lim \left(h_1 \frac{\partial \Delta^{(\mu)} F}{\partial N} + h_2 \Delta^{(\mu)} F\right) = 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei $\Delta^{(\mu)} F$ bedeutet, daß der Laplacesche Operator Δ μ-mal auf die Funktion F angewandt werden soll ($\Delta^{(0)} F = F$). Für jedes B_ν existiere ferner $\iint\limits_{B_\nu} (\Delta^{(m)} F(s, t))^2\, ds\, dt$. Dann ist unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Satz 9 bzw. 10 für alle Punkte x, y, die mindestens den Abstand $m g \varrho$ vom Rande und den C_ν haben

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x, y),$$

$$A_\nu = a_\nu^g \sum_{\mu=0}^{m-1} \left(\frac{a_\nu - 1}{\lambda_\nu}\right)^\mu \iint\limits_B \Delta^{(\mu)} F \varphi_\nu\, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu}\right)^m \iint\limits_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu\, ds\, dt.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Wählt man $g \geqq \frac{4(m+1)}{3}$, so besitzen die Koeffizienten die Eigenschaft, daß $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ konvergiert.

Beweis. Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe leuchtet leicht wie folgt ein: Wegen $a_\nu \leqq c \frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$ (S. 288) und $g \geqq 2$ ist $|a_\nu^g \varphi_\nu(x, y)| \leqq c^g \left|\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu}\right|$. Da die Reihen $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu}\right)^2$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(\iint\limits_B \Delta^{(\mu)} F \varphi_\nu\, ds\, dt\right)^2$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m)$ gleichmäßig konvergieren, folgt in Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung dasselbe für die Reihe der Behauptung.

Der Beweis für die Gestalt der Koeffizienten A_ν wird durch Induktion geführt.

Für $m = 1$ ist die Aussage in den Sätzen 9 bzw. 10 enthalten. $F(x, y)$ besitze in jedem B_ν Ableitungen bis zur $(2m+1)$-ten Ordnung. Die Behauptung sei für $m-1$ richtig und ist für m zu zeigen.

Gemäß der Annahme gilt für alle Punkte x, y, die von dem Rande und den Kurven C_ν einen größeren Abstand als $(m-1) g \varrho$ haben,

$$\Delta F = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(x, y),$$

$$D_\nu = a_\nu^g \sum_{\nu=0}^{m-2} \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu}\right)^\mu \iint_B \Delta^{(\mu+1)} F \varphi_\nu \, ds\, dt + \left(\frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu}\right)^{m-1} \iint_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Ferner ist nach Satz 9 bzw. 10 für alle Punkte x, y, deren Abstand vom Rande und den Kurven C_ν mindestens $g\varrho$ beträgt,

$$F(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) a_\nu^g \iint_B F \varphi_\nu \, ds\, dt + S,$$

wobei zur Abkürzung

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x, y) \left(\frac{a_\nu^g}{\lambda_\nu} - \frac{1}{\lambda_\nu}\right) \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt - \iint_B K(x, y; s, t) \Delta F(s, t) \, ds\, dt$$

gesetzt ist. Unter $\varkappa$ sei die Kreisscheibe mit dem Radius $g\varrho$ um x, y als Mittelpunkt verstanden. Dann wird

$$\iint_B K \Delta F \, ds\, dt = \iint_\varkappa K \Delta F \, ds\, dt + \iint_{B-\varkappa} K \Delta F \, ds\, dt.$$

Verlangt man nun, daß der Punkt x, y von den Kurven C_ν und vom Rande mindestens den Abstand $m g \varrho$ hat, so sind alle Punkte s, t von $\varkappa$ um mehr als $(m-1) g\varrho$ von den C_ν und vom Rande entfernt; für ΔF gilt in $\varkappa$ die eingangs vermerkte Entwicklung. Setzt man diese in das erste Integral auf der rechten Seite ein, in das zweite hingegen die für K nach Satz 6, so ergibt sich

$$\iint_B K \Delta F \, ds\, dt = \iint_\varkappa K \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(s, t) \, ds\, dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x, y)}{\lambda_\nu} \iint_{B-\varkappa} \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Somit wird:

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \iint_{\varkappa} \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt - \iint_B K \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(s,t)\, ds\, dt$$
$$+\iint_{B-\varkappa} K \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(s,t)\, ds\, dt.$$

Führt man wiederum im ersten Integral für ΔF, im dritten für K die Reihen ein, so findet sich, wenn noch im mittleren Posten gliedweise integriert wird[17]),

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} \iint_{\varkappa} \sum_{\mu=1}^{\infty} D_\mu \varphi_\mu(s,t)\varphi_\nu(s,t)\, ds\, dt$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \frac{\varphi_\mu(x,y)}{\lambda_\mu} \iint_{B-\varkappa} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu(s,t) \varphi_\mu(s,t)\, ds\, dt$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^g \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} D_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x,y)}{\lambda_\nu} D_\nu.$$

Also wird

$$F(x,y)=\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x,y)\left(a_\nu^g \iint_B F\varphi_\nu\, ds\, dt + \frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu} D_\nu\right).$$

In Rücksicht auf den angegebenen Wert von D ist dies die behauptete Entwickelung.

Um endlich die Aussage über die Koeffizienten als richtig zu erkennen, beachte man, daß wegen $|a_\nu| \leqq c\frac{1}{\lambda_\nu^{\frac{3}{4}}}$ (S. 288), wenn $g \geqq \frac{4(m+1)}{3}$ ist, $|a_\nu^g| \leqq c^g \frac{1}{\lambda_\nu^{m+1}}$ ausfällt. Wird dann $\lambda_\nu^m A_\nu$ in der Form

$$\lambda_\nu^m A_\nu = \lambda_\nu^m a_\nu^g E_\nu + (-1)^m \iint_B \Delta^{(m)} F \varphi_\nu\, ds\, dt$$

---

[17]) Die gliedweise Integration kann etwa wie folgt gerechtfertigt werden. Es ist für ganzes N

$$\iint_B K \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} D_\nu \iint_B K\varphi_\nu\, ds\, dt + \iint_B K \sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu\, ds\, dt$$

und

$$\left|\iint_B K \sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu\, ds\, dt\right| \leqq \left\{\iint_B K^2\, ds\, dt \iint_B \left(\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu\, ds\, dt\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser Restposten hat zufolge der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{\nu=N+1}^{\infty} D_\nu \varphi_\nu$ den Limes 0 für $N \to \infty$.

geschrieben, so verbleiben die Größen $|\lambda_\nu^m a_\nu^g E_\nu|$ unterhalb $\frac{1}{\lambda_\nu}$, multipliziert mit einer von ν unabhängigen Konstanten. Die Konvergenz von $\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\iint_B \Delta^{(m)} F\varphi_\nu\, ds\, dt\right)^2$ zieht dann die von $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_\nu^m A_\nu)^2$ nach sich, was gezeigt werden sollte.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn ϱ hinreichend klein ist, die ersten a_ν sich wenig von der Einheit unterscheiden, woraus folgt, daß die Anfangsglieder der Entwicklung von F wenig von denen der Fourierreihe abweichen.

Unter den Voraussetzungen von Satz 9 behält Satz 11 auch in drei Dimensionen Gültigkeit.

VI.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung.

Auf Grund des Satzes 9 kann jetzt leicht die Lösung der Randwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung in der Ebene und im Raume angegeben werden. Das Ergebnis lautet, der Einfachheit halber in zwei Dimensionen formuliert, wie folgt:

Satz 12. *Unter B werde ein Bereich verstanden, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven C_ν von derselben Beschaffenheit wie die Berandung in Teilbereiche B_ν zerlegt.*

Die Funktion $F(x, y)$ besitze in jedem der Teilbereiche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und strebe nebst ihren Normalableitungen bei Annäherung an C_ν Werten zu, die von der Art des Heranrückens unabhängig und längs C_ν stetig sind, indessen beim Heranrücken von verschiedenen Seiten nicht übereinzustimmen brauchen. Weiter existiere $\iint_{B_\nu} \Delta F(s, t)^2\, ds\, dt$ für jedes B_ν. Endlich genüge F auf dem Rande von B einer Randbedingung der Form

$$h_1 \frac{\partial F}{\partial N} + h_2 F = 0,$$

wobei N die äußere Normale, h_1 und h_2 positive Konstante bezeichnen.

Unter λ_ν und φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$$

bei der Randbedingung

$$h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial N} + h_2\varphi = 0$$

verstanden. g bedeute eine ganze Zahl größer als 1.

Für hinreichend kleines ϱ, alle x, y in B und $T > 0$, stellt

$$u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, e^{-A\lambda_\nu T},$$

$$c_\nu = a_\nu^g \iint_B F \varphi_\nu \, ds\, dt + \frac{a_\nu^g - 1}{\lambda_\nu} \iint_B \Delta F \varphi_\nu \, ds\, dt$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \Delta u \qquad (A > 0)$$

dar, welche für die Punkte x, y des Randes von B und alle T der Bedingung

$$h_1 \frac{\partial u}{\partial N} + h_2 u = 0$$

genügt, und die für $T = 0$ und alle x, y, deren Abstand von C_ν nicht kleiner als $g \cdot \varrho$ ist, mit $F(x, y)$ übereinstimmt[18]*.*

Beweis. Die in Satz 9 erwiesene absolute Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)$ hat zur Folge, daß die Reihe der Behauptung in jedem Intervall $0 \leqq T \leqq T_1$ gleichmäßig konvergiert; demnach bleibt u bei Annäherung von T an den Wert 0 stetig, und die Funktion hat somit gemäß Satz 9 die für $T = 0$ verlangte Eigenschaft.

Zufolge der für ganzes $k > 0$, $T \geqq T_0 > 0$ und $\nu \geqq \nu_0(k, A, T_0)$ gültigen Relation

$$0 < \lambda_\nu^k e^{-\lambda_\nu A T} \leqq \lambda_\nu^k e^{-\lambda_\nu A T_0} \leqq 1$$

folgt die absolute und für $T \geqq T_0$ gleichmäßige Konvergenz der Reihen

$$\frac{\partial u}{\partial T} = -A \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, \lambda_\nu e^{-A\lambda_\nu T} \tag{26}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = A^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y)\, \lambda_\nu^2 e^{-A\lambda_\nu T}. \tag{27}$$

$\frac{\partial u}{\partial T}$ sowie $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}$ sind also für alle Punkte x, y in B und $T > 0$ stetige Funktionen.

---

[18]) Auf Satz 12 läßt sich folgender Fall zurückführen: $F(x, y)$ ist keiner Randbedingung unterworfen. Gesucht eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial T} = A \Delta u$, die für alle T die Randwerte von F hat, und für $T = 0$ außerhalb eines Streifens um die Unstetigkeitslinien mit F übereinstimmt. Man hat nur unter u_1 die in B reguläre Potentialfunktion zu verstehen, welche die Randwerte von F hat, und u_2 nach Satz 12 als die am Rande verschwindende Lösung von $\frac{\partial u_2}{\partial T} = A \Delta u_2$ zu bestimmen, die für $T = 0$ mit $F(x, y) - u_1(x, y)$ außerhalb einer Umgebung der Kurven C_ν übereinstimmt. $u = u_1 + u_2$ ist die gesuchte Lösung.

Daß u der Differentialgleichung genügt[19]), wird leicht folgendermaßen eingesehen. Es ist, wenn K die zur Randbedingung gehörige Greensche Funktion von $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ bedeutet, für $T > 0$

$$\begin{aligned} u(x, y; T) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y) e^{-A\lambda_\nu T} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{-A\lambda_\nu T} \lambda_\nu \iint_B K(x, y; s, t)\varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt \\ &= \iint_B K(x, y; s, t) \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s, t) \lambda_\nu e^{-A\lambda_\nu T}\, ds\, dt, \end{aligned}$$

wo die Vertauschbarkeit der Summation mit der Integration wie in Anm. 17 gerechtfertigt wird.

In Rücksicht auf (26) erhält man hieraus[20])

$$u(x, y; T) = -\frac{1}{A} \iint_B K(x, y; s, t) \frac{\partial u(s, t; T)}{\partial T}\, ds\, dt. \tag{28}$$

Auf Grund von (26) und (27) ergibt sich ganz ebenso

$$\frac{\partial u(x, y; T)}{\partial T} = \frac{-1}{A} \iint_B K(x, y; s, t) \frac{\partial^2 u(s, t; T)}{\partial T^2}\, ds\, dt. \tag{29}$$

Nach bekannten Sätzen über die Greensche Funktion kann aus (29) die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial y}$ in B erschlossen werden, derzufolge man nun (28) die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sowie die behauptete Relation

$$\Delta u(x, y; T) = \frac{1}{A} \frac{\partial u(x, y; T)}{\partial T}$$

entnimmt.

Da endlich K die Randbedingnng erfüllt, zeigt (28), daß dasselbe für u bei beliebigem $T > 0$ gilt, womit der Satz völlig bewiesen ist.

Zusatz. Will man zulassen, daß die Kurven C_ν auch zwei Punkte der Berandung von B verbinden, so müssen die Voraussetzungen des Satzes 12 über B durch die von Satz 10 ersetzt werden, und für K und φ_ν ist das Verschwinden auf dem Rande von B zu fordern. Das vorige

---

19) Das Beweisverfahren läßt sich leicht auf die Differentialgleichung $L(u) = P(x, y)\frac{\partial u}{\partial T}$ ausdehnen, wenn $L(u) = \frac{\partial(p u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(p u_y)}{\partial y} - qu$ ist, wobei die Funktionen $p(x, y) > 0$, $q(x, y) \geqq 0$, $P(x, y) > 0$ genügend oft differenzierbar sind. Man hat dabei unter φ_ν die Eigenfunktionen von $L(\varphi) + \lambda P\varphi$ zu verstehen.

20) Integraldifferentialgleichungen der Form von (28) sind von Amoroso behandelt. (Sopra un equazione integro-differenziale del tipo parabolico. I. II. Rom. Acc. L. Rend. (5) 21_2.) In dem Beweis des Textes wird jedoch von der Theorie der Integraldifferentialgleichungen kein Gebrauch gemacht.

Beweisverfahren liefert sodann, wenn statt Satz 9 jeweils Satz 10 zur Verwendung kommt, daß wiederum

$$u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x, y) e^{-A\lambda_\nu T},$$

wo die Konstanten c_ν dieselbe Bedeutung wie in Satz 12 haben, eine am Rande verschwindende Lösung darstellt, die jedoch für $T = 0$ mit $F(x, y)$ nur noch in *den* Punkten x, y übereinstimmt, die außer von C_ν auch noch von der Berandung von B mindestens den Abstand $g \cdot \varrho$ haben.

VII.

Anwendung auf die Gleichung der schwingenden Membran.

In diesem Abschnitte sollen Untersuchungen, die denen des vorigen analog sind, für die Gleichung der schwingenden Membran durchgeführt werden, jedoch unter weniger weitgehenden Voraussetzungen.

Satz 13. *Unter φ_ν seien die der Randbedingung $h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial N} + h_2 \varphi = 0$ genügenden Eigenfunktionen der Differentialgleichung*

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$$

in einem Bereiche B verstanden. Sind die Konstanten A_ν und B_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) so beschaffen, daß $\sum_{\nu=1}^{M} (\lambda_\nu^3 A_\nu)^2$ und $\sum_{\nu=1}^{M} (\lambda_\nu^{\frac{5}{2}} B_\nu)^2$ unter von M unabhängigen Konstanten verbleiben, so stellt

$$(30) \qquad u(x, y; T) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(A_\nu \cos \sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin \sqrt{\lambda_\nu}\, T \right) \varphi_\nu(x, y)$$

eine für alle T der Randbedingung $h_1 \frac{\partial u}{\partial N} + h_2 u = 0$ genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x, y; T)}{\partial T^2} = \Delta u(x, y; T)$$

dar.

Beweis. Die Reihe (30) kann viermal gliedweise nach T differenziert werden, denn für

$$\frac{\partial^4 u}{\partial T^4} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 \left(A_\nu \cos \sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin \sqrt{\lambda_\nu}\, T \right) \varphi_\nu(x, y)$$

gilt die Restabschätzung

$$\sum_{\nu=p}^{q} \lambda_\nu^3 \left(|A_\nu| + \frac{|B_\nu|}{\sqrt{\lambda_\nu}} \right) \frac{|\varphi_\nu|}{\lambda_\nu}$$

$$\leqq \left(\sum_{\nu=p}^{q} (\lambda_\nu^3 A_\nu)^2 \cdot \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu=p}^{q} (\lambda_\nu^{\frac{5}{2}} B_\nu)^2 \sum_{\nu=p}^{q} \left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

was zufolge der über A_ν und B_ν gemachten Annahme und der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu}\right)^2$ die der Reihe für $\frac{\partial^4 u}{\partial T^4}$ nach sich zieht.

Nun ist, wenn K die zur Randbedingung gehörige Greensche Funktion bezeichnet,

$$(31)\quad \begin{aligned} &u(x, y;\, T)\\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(A_\nu \cos\sqrt{\lambda_\nu}\, T + \frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}} \sin\sqrt{\lambda_\nu}\, T\right)\lambda_\nu \iint_B K(x, y;\, s, t)\,\varphi_\nu(s, t)\, ds\, dt\\ &= -\iint_B K(x, y;\, s, t)\,\frac{\partial^2 u(s, t;\, T)}{\partial T^2}\, ds\, dt, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Summation und Integration wie in Anmerkung 17 gerechtfertigt werden kann. Ebenso ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u(x, y;\, T)}{\partial T^2} = -\iint_B K(x, y;\, s, t)\,\frac{\partial^4 u(s, t;\, T)}{\partial T^4}\, ds\, dt.$$

Aus dieser Gleichung erschließt man die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial^3 u}{\partial T^2 \partial x}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial T^2 \partial y}$ und als Folge davon aus (31) die von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, sowie $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}$, was gezeigt werden sollte.

Daß u der Randbedingung genügt, kann (31) unmittelbar entnommen werden.

Zusatz. *Satz 13 nebst Beweis läßt sich ohne weiteres auf die allgemeinere Differentialgleichung*

$$p(x, y)\,\Delta u + p_x(x, y)\, u_x + p_y(x, y)\, u_y - q(x, y)\, u = P(x, y)\, u_{TT},$$

wobei die Funktionen p, q, P *genügend oft differenzierbar sind, und* $p > 0$, $q \geq 0$, $P > 0$ *ist, ausdehnen.*

Aus Satz 13 folgt sofort: *Haben die Funktionen* F_1 *und* F_2 *im Bereiche* B *stetige, beschränkte partielle Ableitungen bis zur sechsten Ordnung einschließlich, verschwindet ferner auf dem Rande von* B *sowohl* F_1 *und* F_2 *als auch*[21] ΔF_1, $\Delta^{(2)} F_1$, ΔF_2, $\Delta^{(2)} F_2$, *so stellt die mit den*

[21]) Dies ist natürlich so zu verstehen, daß die im Innern von B stetigen Funktionen ΔF_1 usw. bei Annäherung an den Rand gegen 0 streben. Diese Forderung ist unter der Annahme, daß eine Lösung $u(x, y, T)$ mit stetigen Ableitungen genügend hoher Ordnung existiert, auch notwendig. Sind nämlich die Funktionen $\frac{\partial^l u(x, y, T)}{\partial T^l}$ für alle x, y des abgeschlossenen Bereiches B und alle T stetig, so folgt aus der für alle T gültigen Bedingung $u(\bar{x}, \bar{y}, T) = 0$, wo $\bar{x}, \bar{y}$ die Punkte des Randes durchläuft, $\frac{\partial^l u(\bar{x}, \bar{y}, T)}{\partial T^l} = 0$. Die rechten Seiten der Gleichungen

(Fortsetzung der Fußnote 21 auf der nächsten Seite.)

Fourierkoeffizienten

$$A_\nu = \iint_B F_1 \varphi_\nu \, ds\, dt, \qquad B_\nu = \iint_B F_2 \varphi_\nu \, ds\, dt$$

gebildete Reihe[1] (30) *eine am Rande verschwindende Lösung von* $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u$ *dar, für welche*

$$u(x, y, 0) = F_1(x, y), \qquad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial T} = F_2(x, y)$$

ist. Die Eigenfunktionen φ_ν *sind dabei der Randbedingung* $\varphi_\nu = 0$ *zu unterwerfen.*

Es ist nämlich, wie man wegen $\Delta \varphi_\nu = -\lambda_\nu \varphi_\nu$ durch wiederholte Anwendung der Greenschen Formel erkennt:

$$A_\nu = -\frac{1}{\lambda_\nu}\iint_B F_1 \Delta\varphi_\nu \, ds\, dt = -\frac{1}{\lambda_\nu}\iint_B \Delta F_1 \varphi_\nu \, ds\, dt = \frac{1}{\lambda_\nu^2}\iint_B \Delta F_1 \Delta\varphi_\nu \, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_\nu^2}\iint_B \Delta^{(2)} F_1 \varphi_\nu \, ds\, dt = -\frac{1}{\lambda_\nu^3}\iint_B \Delta^{(3)} F_1 \varphi_\nu \, ds\, dt$$

und

$$B_\nu = -\frac{1}{\lambda_\nu^3}\iint_B \Delta^{(3)} F_2 \varphi_\nu \, ds\, dt.$$

Die Größen A_ν und B_ν haben in der Tat die in Satz (13) verlangten Eigenschaften.

Läßt man zu, daß die Funktionen F_1 und F_2 mit ihren Differentialquotienten längs gegebener Linien Unstetigkeiten aufweisen, so kann eine Lösung angegeben werden, die mit dem Anfangszustand außerhalb einer beliebig klein wählbaren Umgebung der Unstetigkeitslinien und des Randes übereinstimmt, und deren erste Koeffizienten A_ν, B_ν um beliebig wenig von den Fourierkoeffizienten abweichen. Es gilt nämlich, wie aus Satz 13 und 11, mit $m = 3$ angewandt, ohne weiteres erschlossen wird:

Satz 14. *Unter B sei ein Bereich verstanden, dessen Berandung aus einer geschlossenen, sich selbst nicht überschneidenden, stückweise stetig gekrümmten Linie C besteht. Derselbe werde durch eine endliche Anzahl von ganz in seinem Innern verlaufenden, sich nicht treffenden Kurven* C_ν

---

[1] $$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial T^4} = \frac{\partial^2}{\partial T^2}\Delta u = \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta^{(2)} u,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial T^3} = \Delta \frac{\partial u}{\partial T}, \qquad \frac{\partial^5 u}{\partial T^5} = \Delta \frac{\partial^3 u}{\partial T^3} = \Delta^{(2)} \frac{\partial u}{\partial T}$$

nehmen für $T = 0$ bezüglich die Werte ΔF_1, $\Delta^{(2)} F_1$, ΔF_2, $\Delta^{(2)} F_2$ an, die, wenn sich der Punkt x, y dem Rande nähert, der Null zustreben, weil dasselbe für die linken Seiten gilt.

von derselben Beschaffenheit wie die Berandung im Teilbereiche B_ν zerlegt. Läßt man zu, daß die Kurven C_ν auch zwei Punkte von C verbinden können, so muß dieses stückweise analytisch, ohne Spitzen und einspringende Ecken angenommen werden.

Die Funktionen $F_1(x,y)$ und $F_2(x,y)$ mögen in jedem B_ν stetige Ableitungen bis zur siebenten Ordnung einschließlich besitzen, die bei Annäherung an C und C_ν stetigen, von der Art des Heranrückens unabhängigen Grenzwerten zustreben. Wenn C nicht stückweise analytisch ist[22]*), müssen F_1 und F_2 überdies der Randbedingung $h_1\frac{\partial\Delta^{(\mu)}F}{\partial N}+h_2\Delta^{(\mu)}F=0\ (\mu=0,1,2,3)$ genügen. Weiter existiere $\iint\limits_B(\Delta^{(3)}F)^2\,ds\,dt$ für jedes B_ν.*

Unter λ_ν und φ_ν seien die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von

$$\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$$

bei der Randbedingung

$$h_1\frac{\partial\varphi}{\partial N}+h_2\varphi=0$$

verstanden. Im Falle, daß einige der Kurven C_ν im Rande enden, muß $h_1=0$ sein. g bedeute eine ganze Zahl größer als 6.

Für hinreichend kleines ϱ, alle x,y in B und alle T stellt

$$u(x,y;T)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(A_\nu\cos\sqrt{\lambda_\nu}\,T+\frac{B_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu}}\sin\sqrt{\lambda_\nu}\,T\Big)\varphi_\nu(x,y),$$

$$A_\nu=a_\nu^g\sum_{\mu=0}^{2}\left(\frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu}\right)^\mu\iint\limits_B\Delta^{(\mu)}F_1\varphi_\nu\,ds\,dt+\left(\frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu}\right)^3\iint\limits_B\Delta^{(3)}F_1\varphi_\nu\,ds\,dt,$$

$$B_\nu=a_\nu^g\sum_{\mu=0}^{2}\left(\frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu}\right)^\mu\iint\limits_B\Delta^{(\mu)}F_2\varphi_\nu\,ds\,dt+\left(\frac{a_\nu^g-1}{\lambda_\nu}\right)^3\iint\limits_B\Delta^{(3)}F_2\varphi_\nu\,ds\,dt$$

eine Lösung von

$$\frac{\partial^2u(x,y;T)}{\partial T^2}=\Delta u(x,y;T)$$

dar, die der Randbedingung $h_1\frac{\partial u}{\partial N}+h_2u=0$ genügt und so beschaffen ist, daß für alle Punkte x,y, die mindestens den Abstand $3g\varrho$ vom Rande und den C_ν haben,

$$u(x,y;0)=F_1(x,y),\qquad\frac{\partial u(x,y;0)}{\partial T}=F_2(x,y)$$

gilt.

Sind die Funktionen F_1 und F_2 sowie ihre Δ-Ableitungen keinen Randbedingungen unterworfen, so muß C stückweise analytisch voraus-

[22]) Das bedeutet soviel, als daß für C und die C_ν die Voraussetzungen von Satz 9 gelten.

gesetzt werden. *Versteht man unter u_1 die reguläre Potentialfunktion mit den Randwerten von $F_1(x, y)$, und unter u_2 die nach dem soeben angegebenen Verfahren zu bildende, am Rande verschwindende Lösung von $\frac{\partial^2 u_2}{\partial T^2} = \Delta u_2$, für welche außerhalb einer Umgebung von C und C_r $u_2(x, y; 0) = F_1(x, y) - u_1(x, y)$, $\frac{\partial u_2(x, y; 0)}{\partial T} = F_2(x, y)$ gilt, so ist $u = u_1 + u_2$ eine solche Lösung von $\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = \Delta u$, die für alle T die Randwerte von F_1 hat und mit ihrer Ableitung nach T außerhalb von Streifen der Breite $3g\varrho$ um den Rand und die Unstetigkeitslinien von F_1 und F_2 die vorgegebenen Anfangswerte annimmt.*

(Eingegangen am 31. Oktober 1926.)