Acta Mechanica 40, 169—180 (1981)

ACTA MECHANICA

Zum Potential der Materialfunktionen nichtlinear-viskoelastischer Stoffe

Von

H. Balke und **H. Bergander**, Dresden, Deutsche Demokratische Republik

(*Eingegangen am 15. Juli 1980*)

Zusammenfassung — Summary

Zum Potential der Materialfunktionen nichtlinear-viskoelastischer Stoffe. Für die nichtlinearen Tensorfunktionen in dem Deformationsgesetz der Viskoelastizität vom Typ des Einfachintegraloperators wird nachgewiesen, daß ein übergeordnetes Potential mit Minimalwert im Ausgangszustand hinreichend für die Erfüllung der Dissipationsungleichung ist. Dann sind auch eine der möglichen Erweiterungen der Onsager-Beziehungen im nichtlinearen Fall und das Druckersche Stabilitätskriterium erfüllt.

On the Potential of the Constitutive Functions of Nonlinear-Viscoelastic Continua. Nonlinear viscoelastic constitutive equations of the type of the simple integral operator are investigated. For the nonlinear tensor functions in the constitutive equations it is show that the existence of a potential with a minimum for the natural state is sufficient satisfy the dissipation inequality. Thus one of the possible generalizations of the Onsager to relations and Drucker's stability postulate are satisfied too.

1. Das Deformationsgesetz

Unter den vielen Varianten viskoelastischer Deformationsgesetze nimmt im Bereich kleiner Verzerrungen das Gesetz

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\gamma}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) + \int\limits_{-\infty}^{t} \varkappa(t-\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\boldsymbol{\varphi}\big(\boldsymbol{\sigma}(\tau)\big)\,d\tau \tag{1}$$

mit[1] $\boldsymbol{\sigma}$ — Vektor der linear unabhängigen Komponenten des Spannungstensors, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — entsprechender Vektor[2] der Komponenten des Verzerrungstensors, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — ebenfalls in analoge Vektoren eingeordnete Tensorfunktionen, $\varkappa$ — Kriechfunktion, eine in zweifacher Hinsicht bemerkenswerte Sonderstellung ein.

Einerseits bildet es in sehr vielen Fällen das reale Materialverhalten besser als andere Operatoren (z. B. Mehrfachintegraloperatoren mit Produktkernen oder

[1] Folgende Schreibweise wird eingeführt: Kleine halbfett gedruckte Buchstaben sind Vektoren, analoge große stellen Matrizen dar. Eine funktionelle Abhängigkeit der Vektoren und Matrizen von einem Vektor bedeutet, daß jedes Element eine Funktion des entsprechenden Vektors ist.

[2] Der Aufbau von $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird so vereinbart, daß die mechanische Leistung dem Skalarprodukt $\boldsymbol{\sigma}^T\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ entspricht. Die Tensorkomponenten ε_{12}, ε_{23}, ε_{31} werden daher mit dem Faktor 2 in $\boldsymbol{\varepsilon}$ aufgenommen.

0001-5970/81/0040/0169/$02.40

zu (1) inverse Darstellungen) ab oder erreicht mindestens deren Qualität [1], [2]. Andererseits kann es bequem durch einen Satz nichtlinearer Differentialoperatoren 1. Ordnung ersetzt und so der rechentechnischen Behandlung von Anfangsrandwertproblemen zugrunde gelegt werden [3].

Der älteste, noch eindimensional formulierte Ansatz des Typs (1) stammt von Leadermann [4]. Iljuschin und Pobjedrja [5] haben gezeigt, daß sich (1) als Sonderfall in die allgemeine Theorie der Nachwirkung mit Mehrfachintegraloperatoren nach Volterra einordnet, wenn zum Aufbau der Kerne der allgemeinen Theorie auch Singularitäten vom Typ der δ-Funktion zugelassen werden.

Die Vielfalt der Materialfunktionen des elastischen Anteils $\gamma(\sigma)$ wird bekanntlich durch die Existenz des übergeordneten skalaren Potentials $\Gamma(\sigma)$ begrenzt, aus dem γ durch Differentiation folgt:

$$\gamma(\sigma) = \frac{\partial \Gamma(\sigma)}{\partial \sigma}. \tag{2}$$

Ohne diese Forderung lassen sich Deformationszyklen aufbauen, durch die der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt wird.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Frage, ob ein derartiges Potential $\Phi(\sigma)$ für die Funktion

$$\varphi(\sigma) = \frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma} \tag{3}$$

auch physikalisch interpretiert oder nur als reine Materialannahme gewertet werden kann.

Eine Prüfung der Literatur ergab, daß zwar Ansätze, die (3) erfüllen, überwiegen, daß aber prinzipiell auch Deformationsgesetze formuliert und sogar angewendet werden, die (3) verletzen. In der umfassenden Monographie [5] wird eine Bedingung der Wechselseitigkeit (als spezielle Symmetriebedingung der Operatorkern-Tensoren) formuliert, deren Erfüllung im Sonderfall (1) genau (3) entspricht. Sie wird allein als Klassifizierungsmerkmal betrachtet. Darüber hinaus baut dann Moskwitin [6] ein ganzes Buch von Anwendungsproblemen auf isotropen Gesetzen auf, die (3) verletzen. Aber auch in [7], [8] werden den Materialfunktionen keinerlei Beschränkungen im Sinne von (3) auferlegt.

Im folgenden wird nun gezeigt, daß (3) eine hinreichende und im Spezialfall auch notwendige Voraussetzung zur Erfüllung der Dissipationsungleichung ist und damit einen physikalischen Inhalt bekommt.

2. Schlußfolgerungen aus der Dissipationsungleichung

Die weiteren Betrachtungen entsprechen dem in [9] aufgezeigten Weg. Die Dissipationsungleichung

$$\dot{D} = \sigma^T \dot{\varepsilon} - \dot{F} \geqq 0 \tag{4}$$

läßt sich nur untersuchen, wenn die freie Energie F bekannt ist. Um sie als Zustandsfunktion formulieren zu können, wird zunächst in (1) die Funktion $\varkappa(t)$ durch

$$\varkappa(t) = \varkappa_0 \frac{t}{T_0} + \sum_{n=1}^{N} \varkappa_n \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_n}\right)\right] \tag{5}$$

approximiert. Hierin sollen alle Parameter positive Konstanten sein:

$$\varkappa_n > 0 \tag{6.1}$$

$$T_n > 0. \tag{6.2}$$

Für Kriechfunktionen $\varkappa(t)$ mit ständig abnehmendem Anstieg

$$\ddot{\varkappa}(t) \leqq 0 \tag{7}$$

kann der Ansatz (5) jede beliebige Kurvenform mit festgelegter Genauigkeit annähern [2], so daß durch (5) die Allgemeinheit nicht beschränkt wird. Nach dem Einsetzen von (5) in (1) gelten folgende Definitionen

$$\boldsymbol{h}_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varkappa_0 \frac{t-\tau}{T_0} \frac{\partial}{\partial\tau} \varphi\big(\sigma(\tau)\big)\, d\tau \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{h}_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varkappa_n \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_n}\right)\right] \frac{\partial}{\partial\tau} \varphi\big(\sigma(\tau)\big)\, d\tau, \quad 1 \leqq n \leqq N. \tag{8.2}$$

Werden diese Abkürzungen in (1) eingesetzt und diese sowie die Gln. (8) nach t differenziert, ergibt sich der folgende zu (1) äquivalente Satz von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{G}(\sigma)\, \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{n=0}^{N} \boldsymbol{c}_n(\sigma, \boldsymbol{h}_n) \tag{9.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{h}}_0 = \boldsymbol{c}_0(\sigma) = \frac{\varkappa_0}{T_0} \varphi(\sigma) \tag{9.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{h}}_n = \boldsymbol{c}_n(\sigma, \boldsymbol{h}_n) = \frac{1}{T_n} [\varkappa_n \varphi(\sigma) - \boldsymbol{h}_n], \quad 1 \leqq n \leqq N. \tag{9.3}$$

Hier wurde außerdem

$$\boldsymbol{G}(\sigma) = \frac{\partial\gamma(\sigma)}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{10}$$

eingeführt.

Nach den Überlegungen in [9] bilden die Größen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{h}_n$ $(0 \leqq n \leqq N)$ die Zustandsparameter des Deformationsgesetzes (9) bzw. (1) mit (5). Die Gl. (9.1) läßt sich auch in der Form

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \sum_{n=0}^{N} \dot{\boldsymbol{h}}_n \tag{11}$$

angeben, wobei

$$\dot{\varepsilon}_E = \boldsymbol{G}(\sigma)\, \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{12.1}$$

bzw.

$$\varepsilon_E = \gamma(\sigma) \tag{12.2}$$

gilt. Statt ε und $\boldsymbol{h}_n$ können auch ε_E und $\boldsymbol{h}_n$ als äquivalenter Zustandsparametersatz eingeführt werden. Einsetzen von (11) in (4) ergibt

$$\dot{D} = \sigma^T \dot{\varepsilon}_E + \sum_{n=0}^{N} \sigma^T \dot{\boldsymbol{h}}_n - \dot{F}(\varepsilon_E, \boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N) \geqq 0 \tag{13}$$

bzw.

$$\dot{D} = \left(\sigma - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_E}\right)^T \dot{\varepsilon}_E + \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right)^T \dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0. \tag{14}$$

Der erste Term verschwindet, da wegen (2) auch das komplementäre Potential $W(\varepsilon_E) = \sigma^T \varepsilon_E - \Gamma(\sigma)$ existiert (Legendresche Transformation) und daher

$$F(\varepsilon_E, \boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N) = W(\varepsilon_E) + F_R(\boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N) \tag{15}$$

gilt (umgekehrt könnte natürlich aus (4) auch (2) an dieser Stelle gefolgert werden, da $\sigma = \sigma(\varepsilon_E)$ die Umkehrung von (12.2) ist).

Damit geht (14) in die Ungleichung

$$\dot{D} = \sum_{n=0}^{N} \left(\sigma - \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right)^T \dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0 \tag{16}$$

über.

Zur Erfüllung von (16) ist hinreichend, daß für jeden Summanden

$$\dot{D}_n = \left(\sigma - \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right)^T \dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0 \tag{17}$$

gilt. Dazu wird die Spannung über (9.3) als Funktion der Zustandsparameter ausgedrückt:

$$\sigma = \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n)\right). \tag{18}$$

Dabei soll

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{19}$$

mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ die Umkehrfunktion zu

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) \tag{20}$$

sein. Hierin sei vorausgesetzt, daß diese Funktionen umkehrbar eindeutig sind, d. h. daß mit

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{21}$$

die Bedingung

$$\det\left[\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n)\right)\right] \neq 0 \tag{22}$$

gilt. Auf den bedeutsamen Sonderfall Inkompressibilität, bei dem (22) verletzt ist, wird noch eingegangen.

Zur Erfüllung von (17) mit (18)

$$\dot{D}_n = \left[\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n)\right) - \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right]^T \dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0 \tag{23}$$

wird zunächst die Umgebung des Punktes $\dot{\boldsymbol{h}}_n = \boldsymbol{0}$ betrachtet. Hier gilt die Taylor-Entwicklung für (18) unter Beachtung von (21)

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n}(\boldsymbol{h}_n + T_n\dot{\boldsymbol{h}}_n)\right) \approx \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right) + \boldsymbol{H}\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right)\frac{T_n}{\varkappa_n}\dot{\boldsymbol{h}}_n \tag{24}$$

und damit folgt aus (23)

$$\left[\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right) - \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right]^T \dot{\boldsymbol{h}}_n + \frac{T_n}{\varkappa_n}\dot{\boldsymbol{h}}_n{}^T\boldsymbol{H}^T\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right)\dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0. \tag{25}$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn der zweite Term nicht negativ wird und der erste verschwindet, d. h.

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right) = \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}. \tag{26}$$

Dann ist

$$F_R = \sum_{n=1}^{N} F_n(\boldsymbol{h}_n), \tag{27}$$

und $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ hat das Potential $P(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial P(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{28}$$

Die freie Energie lautet also mit (26) bis (28)

$$F(\varepsilon_E, \boldsymbol{h}_0, \boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_N) = W(\varepsilon_E) + \sum_{n=1}^{N} \varkappa_n P\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right). \tag{29}$$

Der zweite Term in Gl. (25) wird wegen Gl. (6) nicht negativ, wenn

$$\dot{\boldsymbol{h}}_n{}^T\boldsymbol{H}\left(\frac{1}{\varkappa_n}\boldsymbol{h}_n\right)\dot{\boldsymbol{h}}_n \geqq 0. \tag{30}$$

Falls das Deformationsgesetz (9) nur aus den Gln. (9.1) und (9.3) mit $N = 1$ besteht, ist $\dot{\boldsymbol{h}}_1$ in (25), (17) eine unabhängige variierbare Größe. Da $\dot{\boldsymbol{h}}_1$ linear in (17) vorkommt, sind die Forderung (26) und die hieraus gefolgerten Beziehungen (27) bis (30) dann auch notwendig.

Aus (30) läßt sich nach (28) die zweite wesentliche Anforderung an die Materialfunktion ableiten: Die Matrix $\boldsymbol{H}$ gemäß (21) muß für alle Argumente positiv semidefinit sein

$$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z} \geqq 0. \tag{31}$$

Aus (31) kann geschlossen werden, daß das Potential $P(\boldsymbol{x})$ im Ursprung, wo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ gelten soll, seinen minimalen Wert annimmt (vgl. Anhang).

Die Bedingung (31) reicht auch für beliebig große $\dot{\boldsymbol{h}}_n$ zur Gewährleistung von (17) aus. Der Mittelwertsatz mit Integralrestglied für Vektorfunktionen führt auf

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^T\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^T\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k} \tag{32}$$

mit

$$0 \leqq \alpha \leqq 1 \tag{33}$$

(vgl. Anhang). Wird in (23) der Ausdruck (26) eingesetzt und (32) angewendet, entsteht

$$\dot{D}_n = \frac{T_n}{\varkappa_n} \dot{\boldsymbol{h}}_n{}^T \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + \alpha_n T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n) \right) \dot{\boldsymbol{h}}_n . \tag{34}$$

Mit (31) und unter Beachtung von (33) und (6) ist (17) und damit auch (4) erfüllt.

Wenn (28) gilt, dann folgt aus (19) und (20) über die Legendresche Transformation auch

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}, \tag{35}$$

wobei $\Phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} - P(\boldsymbol{x})$ das zu $P(\boldsymbol{x})$ komplementäre Potential ist. Die Dissipationsungleichung ist somit erfüllt, wenn die Funktion $\varphi(\sigma)$ in (1) ein Potential (3) besitzt und die Funktionalmatrix positiv semidefinit ist.

3. Inkompressibles Material

Die Bedingung der Inkompressibilität ist ein äußerst wichtiger Sonderfall, da sie meistens den Funktionen φ auferlegt wird. Dann ist

$$s = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{36}$$

eine vom Deformationsgesetz unabhängige Variable.

Mit

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial s}{\partial \sigma} \tag{37}$$

lassen sich die Deviatoren des Spannungstensors

$$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} \boldsymbol{a} s = \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T \right) \sigma \tag{38}$$

und der Verzerrungen (sowie deren Teilemenente gemäß (11))

$$\boldsymbol{h}_n{}^D = \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T \right) \boldsymbol{h}_n = \boldsymbol{h}_n \tag{39}$$

angeben. Die Materialfunktion vermittelt jetzt den Zusammenhang zwischen den Deviatorgrößen, also entweder nach (9.3)

$$\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n) = \varphi^* \left(\sigma - \frac{1}{3} \boldsymbol{a} s \right) \tag{40}$$

oder in der Umkehrung nach (18)

$$\sigma - \frac{1}{3} \boldsymbol{a} s = \boldsymbol{f}^* \left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n) \right). \tag{41}$$

Wesentlich ist hierbei, daß die Umkehrung möglich ist, obwohl beide Gleichungsgruppen wegen

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{h}_n{}^D = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{h}_n = 0 \to \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\varphi}^* = 0 \tag{42.1}$$

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{a}^T \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\, \boldsymbol{a} s\right) = 0 \to \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{f}^* = 0 \tag{42.2}$$

je eine abhängige Gleichung aufweisen. Die Umkehrung erfolgt nach Streichen je eines Deviatorelementes unter Beachtung von (42) und ist dann eindeutig. Nach der Umkehrung dient (42) wieder der Vervollständigung des Systems um eine abhängige Gleichung.

Einsetzen von $\boldsymbol{\sigma}$ gemäß (41) in (17) ergibt mit (42.1)

$$\dot{D}_n = \left[\boldsymbol{f}^* \left(\frac{1}{\varkappa_n} (\boldsymbol{h}_n + T_n \dot{\boldsymbol{h}}_n)\right) - \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{h}_n}\right] \dot{\boldsymbol{h}}_n \gtreqless 0\,. \tag{43}$$

Diese Gleichung entspricht völlig (23) und stellt den Anschluß an die vorangegangene Herleitung her. Es gilt also weiter (28) und (31) auch für $\boldsymbol{f}^*$.

Für (35) ist dann lediglich zu beachten, daß $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ im Vergleich zu (40) oder (41) festgelegt werden, d. h. daß

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial \Phi^*(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}} \tag{44}$$

mit

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\, \boldsymbol{a} s \tag{45}$$

gebildet wird. Daher gilt auch hier

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\, \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\right) \boldsymbol{\varphi}^* \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\, \boldsymbol{a} s\right) = \boldsymbol{\varphi}^* \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\, \boldsymbol{a} s\right). \tag{46}$$

Da $\boldsymbol{H}^*$ gemäß (21) aus $\boldsymbol{f}^*$ berechnet wird, folgt wegen (42.2)

$$\det(\boldsymbol{H}^*) = 0\,. \tag{47}$$

Außer der Aussage, daß in (31) der positiv definite Fall ausgeschlossen ist und die quadratische Form stets semidefinit ist, hat diese Besonderheit keine weiteren Konsequenzen.

4. Orthogonalität

In diesem Abschnitt wird auf den Index n zur Vereinfachung der Schreibarbeit verzichtet. Im linearen Grenzfall für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{48}$$

liefert (28)

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \tag{49}$$

und (34)

$$\dot{D} = \frac{T}{\varkappa} \dot{\boldsymbol{h}}^T \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{h}} \geqq 0. \tag{50}$$

Aus (28) ergibt sich, daß die Matrix $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist. Diese Symmetrie wurde auch mit der Anwendung des Onsager-Prinzips auf (48), (18) begründet [10]. Wegen (50) ist $\boldsymbol{A}$ außerdem positiv semidefinit.

Aus (49) und (50) lassen sich zwei Orthogonalitätsbeziehungen

$$\sigma^i = \frac{\partial \Pi(\dot{\boldsymbol{h}})}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} \tag{51}$$

oder

$$\sigma^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} \tag{52}$$

schlußfolgern.

Hierin ist

$$\sigma^i = \sigma - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{h}} \tag{53}$$

der Anteil der Spannungen, der irreversible Arbeit leistet. Für diesen ergibt sich mit (48), (18) und (29) im linearen Grenzfall

$$\sigma^i = \frac{T}{\varkappa} \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{h}}. \tag{54}$$

Verallgemeinerungen sowohl von (51) als auch (52) im nichtlinearen Fall hat Ziegler vorgeschlagen. Während der Ansatz (51) in einer älteren Arbeit vertreten wurde [11], gab er später der Verallgemeinerung von (52) im nichtlinearen Fall

$$\sigma^i = \lambda \frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\dot{D}}{\left(\frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}}\right)^T \dot{\boldsymbol{h}}} \tag{55}$$

den Vorzug [12], [13], [14], [15] („Thermomechanische Orthogonalität"). Die beiden Verallgemeinerungen (51) und (55) des Onsager-Prinzips für den nichtlinearen Fall widersprechen sich im allgemeinen. Nur wenn die Dissipationsleistung $\dot{D}$ der Funktionalgleichung [12]

$$\left(\frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}}\right)^T \dot{\boldsymbol{h}} = f(\dot{D}) \tag{56}$$

genügt, existieren (51) und (55) gleichzeitig.

Für das hier untersuchte elementare Deformationsgesetz (18) ergibt sich aus (53) mit (29)

$$\sigma^i = \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h} + T\dot{\boldsymbol{h}})\right) - \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{\varkappa} \boldsymbol{h}\right). \tag{57}$$

Für $\boldsymbol{f}$ gilt (28). Mit

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{h}}, \boldsymbol{h}) = \frac{\varkappa}{T} P\left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h} + T\dot{\boldsymbol{h}})\right) - \varkappa \dot{P}\left(\frac{1}{\varkappa} \boldsymbol{h}\right) \tag{58}$$

folgt σ^i über (51), d. h., das elementare Deformationsgesetz erfüllt eine mögliche Verallgemeinerung des Onsager-Prinzips, die die Symmetrie in den Mittelpunkt stellt. Denn die Matrix

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^i}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} = \frac{T}{\varkappa} \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h} + T\dot{\boldsymbol{h}}) \right) \tag{59}$$

ist, wie in Abschnitt 2. nachgewiesen wurde, symmetrisch und positiv semidefinit und teilt diese Eigenschaften mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ des linearen Grenzfalles.

Dem Zieglerschen Dissipationsprinzip (55) kann, da der Potentialbedingung (51) genügt wird, nur dann noch entsprochen werden, wenn (56) erfüllt ist.

Der wichtigste Fall, bei dem (56) gewährleistet wird, ist der homogener Funktionen

$$\dot{D}(\beta \dot{\boldsymbol{h}}) = \beta^n \dot{D}(\dot{\boldsymbol{h}}), \tag{60}$$

da für diese der Eulersche Satz

$$\left(\frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} \right)^T \dot{\boldsymbol{h}} = n \dot{D} \tag{61}$$

gilt. Gleichung (57) zeigt jedoch, daß selbst für homogene Funktionen $\boldsymbol{f}$ (gegen die einige grundsätzliche Bedenken bezüglich der Beschreibung der Isochronen erhoben werden müssen) σ^i und damit $\dot{D}$ stets inhomogen werden.

Da (60) jedoch nur eine mögliche Lösung der Funktionalgleichung (56) ist, wird (56) direkt mit (57) geprüft

$$\left(\frac{\partial \dot{D}}{\partial \dot{\boldsymbol{h}}} \right)^T \dot{\boldsymbol{h}} = \dot{D} + \frac{T}{\varkappa} \dot{\boldsymbol{h}}^T \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h} + T\dot{\boldsymbol{h}}) \right) \dot{\boldsymbol{h}}. \tag{62}$$

Für $\dot{D}$ kann noch (34) verwendet werden. Außer im linearen Fall läßt sich der zweite Term der rechten Seite von (62) sicher nicht durch $\dot{D}$ ausdrücken, und daher ist (56) dann nicht zu erfüllen. Im Sonderfall des tensoriell linearen isotropen Stoffes ist dieser Fakt bereits diskutiert worden [16]. Hier konnte gezeigt werden, daß auch im allgemeinsten Fall der Einfachintegraltheorie das Deformationsgesetz (1) mit dem *Ziegler*schen Dissipationsprinzip unverträglich ist, obwohl die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes und des Potentialansatzes (51) als einfache Erweiterung des Onsager-Prinzips garantiert sind.

5. Stabilität

Als Materialannahme, die die Beobachtungen an vielen Materialien verallgemeinert, ist das Druckersche Stabilitätskriterium zu verstehen. Die allgemeinste Formulierung ist [17]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\sigma_{(2)} - \sigma_{(1)})^T (\dot{\varepsilon}_{(2)} - \dot{\varepsilon}_{(1)}) \, d\tau \geqq 0, \tag{63}$$

wobei $\sigma_{(1)}(\tau)$ und $\sigma_{(2)}(\tau)$ zwei unterschiedliche Belastungsprogramme und $\varepsilon_{(1)}(\tau)$ und $\varepsilon_{(2)}(\tau)$ die über das Deformationsgesetz zugeordneten Verzerrungen sind.

Stimmen zwei Lastgeschichten bis $t = t_0$ überein und unterscheiden sich dann, so folgt aus der Entwicklung um $t = t_0$

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)})^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(2)} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(1)}) \geqq 0 \quad \text{für} \quad t = t_0 \tag{64}$$

oder, falls bei unterschiedlichem $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)}$ infolge des Deformationsgesetzes noch $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(1)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(2)}$ gilt,

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)})^T (\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(2)} - \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(1)}) \geqq 0 \quad \text{für} \quad t = t_0. \tag{65}$$

Die Anwendung auf das Elementar-Deformationsgesetz (18), in dem der Zustandsparameter $\boldsymbol{h}_n$ die Dehnung repräsentiert, geschieht wieder unter Fortlassen des Index n. Im Zeitpunkt $t = t_0$ unterscheiden sich die Zustände noch nicht:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(1)}(t_0) = \boldsymbol{\sigma}_{(2)}(t_0) = \boldsymbol{\sigma}_{(0)} \tag{66.1}$$

$$\boldsymbol{h}_{(1)}(t_0) = \boldsymbol{h}_{(2)}(t_0) = \boldsymbol{h}_{(0)}. \tag{66.2}$$

Aus (18) folgt dann

$$\dot{\boldsymbol{h}}_{(1)}(t_0) = \dot{\boldsymbol{h}}_{(2)}(t_0) = \dot{\boldsymbol{h}}_{(0)}, \tag{67}$$

so daß Gl. (65) zur Anwendung kommen muß. Dazu wird (18) unter Beachtung von (21) nach t differenziert

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\varkappa} \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h} + T\dot{\boldsymbol{h}}) \right) (\dot{\boldsymbol{h}} + T\ddot{\boldsymbol{h}}). \tag{68}$$

Für $t = t_0$ gilt

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)} = \frac{T}{\varkappa} \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h}_{(0)} + T\dot{\boldsymbol{h}}_{(0)}) \right) (\ddot{\boldsymbol{h}}_{(2)} - \ddot{\boldsymbol{h}}_{(1)}), \tag{69}$$

und das Kriterium (65) verlangt

$$\frac{T}{\varkappa} (\ddot{\boldsymbol{h}}_{(2)} - \ddot{\boldsymbol{h}}_{(1)})^T \boldsymbol{H} \left(\frac{1}{\varkappa} (\boldsymbol{h}_{(0)} + T\dot{\boldsymbol{h}}_{(0)}) \right) (\ddot{\boldsymbol{h}}_{(2)} - \ddot{\boldsymbol{h}}_{(1)}) \geqq 0. \tag{70}$$

Diese Beziehung und ihre Erweiterung auf mehrere Summanden ($N > 1$) sind jedoch für positiv semidefinites $\boldsymbol{H}$ erfüllt.

6. Verallgemeinerte Einfachintegraltheorie

Wird (1) zur besseren Anpassung aus mehr als einer nichtlinearen Kennfunktion aufgebaut

$$\varepsilon(t) = \gamma\big(\sigma(t)\big) + \int\limits_{-\infty}^{t} \sum_{m=1}^{M} \varkappa_m(t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_m\big(\sigma(\tau)\big) \, d\tau, \tag{71}$$

so lassen sich nach Approximation jeder Kriechfunktion $\varkappa_m(t)$ durch (5) alle Schlußfolgerungen auf jede einzelne Funktion übertragen. Somit gilt

$$\boldsymbol{\varphi}_m(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \Phi_m(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \tag{72}$$

Auch der Ansatz (71) erfüllt mit (72) wie (1) mit (3) die Dissipationsungleichung, die Potentialbedingung (51) als mögliche Verallgemeinerung des Onsager-Prinzips auf den nichtlinearen Fall und das Druckersche Stabilitätskriterium.

Anhang

Es sei

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial P(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} P_{,1} \\ P_{,2} \\ \cdots \\ P_{,N} \end{bmatrix} \tag{A 1}$$

und

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,N} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{N,1} & f_{N,2} & \cdots & f_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{A 2}$$

Die Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt der Mittelwertsatz mit Integralrestglied [18], S. 32

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}\, dt, \tag{A 3}$$

wobei die rechte Seite als Integral über jede Komponente erklärt wird.

Für das Skalarprodukt

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^T \boldsymbol{k} = \int_0^1 \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}\, dt \tag{A 4}$$

läßt sich dann über den Mittelwertsatz der Integralrechnung der Ausdruck

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]^T \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k} \tag{A 5}$$

mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ berechnen.

Wird auf die Funktion $P(\boldsymbol{x})$ die Taylorsche Formel mit Restglied der Ordnung 2 angewendet, folgt

$$P(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}) - P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{k} + \frac{1}{2!} \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k} \tag{A 6}$$

mit $0 \leqq \beta \leqq 1$. Hieraus ergibt sich mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$P(\boldsymbol{k}) - P(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{k}^T \boldsymbol{H}(\beta\boldsymbol{k})\, \boldsymbol{k}. \tag{A 7}$$

Mit (31) folgt

$$P(\boldsymbol{k}) \geqq P(\boldsymbol{0}) = P_{\min}. \tag{A 8}$$

Literatur

[1] Bergander, H.: Berechnungsgerechte Deformationsgesetze in der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie. Mitt. der Math. Gesellschaft der DDR **1975**, 3/4, 5–37.
[2] Bergander, H.: Die Aufbereitung der Grundgleichungen der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie für die numerische Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. Diss. B, TU Dresden, 1976.
[3] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM **58**, 489–499 (1978).
[4] Leadermann, H.: Elastic and creep properties of filamentous materials and other high polymers. Washington: Textile Foundation 1943.
[5] Ильюшин, А. А.; Победря, Б. Е.: Основы математической теории термовязкоупругости. Москва: 1970.
[6] Москвитин, В. В.: Сопротивление вязкоупругих материалов. Москва: 1972.
[7] Lockett, F. J.: Nonlinear viscoelastic solids. London–New York: 1972.
[8] Findley, W. N., Lai, J. S., Onaran, K.: Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. Amsterdam (u. a.): 1976.
[9] Balke, H.: Thermodynamische Analyse von Deformationsgesetzen des Modellstruktursystems. ZAMM **54**, 233–240 (1974).
[10] Biot, M. A.: Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. J. Appl. Phys. **26**, 1385–1391 (1954).
[11] Ziegler, H.: Thermodynamik und rheologische Probleme. Ing.-Arch. **25**, 58–70 (1957).
[12] Ziegler, H.: An attempt to generalize Onsager's principle and its significance for rheological problems. ZAMP **9b**, 748–763 (1958).
[13] Ziegler, H.: Zwei Extremalprinzipien der irreversiblen Thermodynamik. Ing.-Arch. **30**, 410–416 (1961).
[14] Ziegler, H.: A possible generalization of Onsager's theory. In: Parkus, H., Sedov, L. I.: Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids, Symposia IUTAM Vienna 1966, pp. 411–424. Wien–New York: Springer 1968.
[15] Ziegler, H.: Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics. ZAMP **21**, 853–863 (1969).
[16] Balke, H.: Eine Bemerkung zum Zieglerschen Dissipationsprinzip in der nichtlinearen Viskoelastizitätstheorie. ZAMM **56**, 247–251 (1976).
[17] Drucker, D. C.: A definition of stable inelastic material. J. Appl. Mech. **26**, 101–106 (1959).
[18] Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen. Berlin: 1979.

Dr.-Ing. H. Balke
Zentralinstitut für Festkörperphysik
und Werkstofforschung
Akademie der Wissenschaften der DDR
Helmholtzstraße 20
DDR - 8027 Dresden
Deutsche Demokratische Republik

Doz. Dr. sc. techn. H. Bergander
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
Technische Universität Dresden
Mommsenstraße 13
DDR - 8027 Dresden
Deutsche Demokratische Republik