manuscripta math. 34, 17 - 25 (1981)

manuscripta mathematica

EIN EXISTENZBEWEIS FÜR HARMONISCHE ABBILDUNGEN, DIE EIN DIRICHLETPROBLEM LÖSEN, MITTELS DER METHODE DES WÄRMEFLUSSES

Jürgen Jost

This paper is concerned with the initial - boundary value problem for the parabolic system associated with harmonic mappings of Riemannian manifolds. We prove the existence of solutions $u(x,t)$ for all time and verify that $u(\cdot,t)$ tends to a harmonic mapping $u_\infty(\cdot)$, as $t \to \infty$, which assumes the prescribed boundary values. The assumption on the Riemannian manifolds are the same as in the elliptic case.

Es sei $f: M_1 \to M_2$ eine Abbildung zwischen zwei zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten; f, M_1 und M_2 seien von der Klasse C^∞, M_1 sei kompakt und möglicherweise berandet, M_2 vollständig und randlos. Es erhebt sich dann die Frage, unter welchen Bedingungen eine harmonische Abbildung $u: M_1 \to M_2$ existiert, die - sofern M_1 berandet ist - auf ∂M_1 die gleichen Randwerte wie f annimmt und zu f homotop (bei festgehaltenen Randwerten) ist.
Es seien nun x^α, $\alpha=1,\dots \dim M_1$, und u^i, $i=1,\dots \dim M_2$, lokale Koordinaten auf M_1 bzw. M_2 ; mit $\gamma_{\alpha\beta}$ und g_{ik} seien die zugehörigen Darstellungen der Metriken bezeichnet. $(\gamma^{\alpha\beta})$ sei die zu $(\gamma_{\alpha\beta})$ inverse Matrix, und $\gamma := \det(\gamma_{\alpha\beta})$. Ferner seien Γ^j_{ik} die zur Metrik g_{ik} gehörenden Christoffelsymbole zweiter Art auf M_2. Daß u harmonisch ist, bedeutet nun, daß in diesen lokalen Koordinaten

0025-2611/81/0034/0017/$01.80

$$\Delta u^l(x) := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma}\, \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} u^l(x))$$
$$+ \gamma^{\alpha\beta}(x) \Gamma^l_{ik}(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} = 0$$

für $l = 1,\dots \dim M_2$ gilt. Dabei soll $u \in C^2(M_1, M_2)$ sein. Harmonische Abbildungen sind kritische Punkte des Energiefunktionals E, wobei

$$E(u) = \int_{M_1} e(u)\, dM_1$$

und in lokalen Koordinaten

$$e(u(x)) = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta}(x)\, g_{ik}(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} \quad \text{ist.}$$

Über doppelt auftretende Indices wird übrigens summiert, und zwar über griechische Minuskeln von 1 bis $\dim M_1$ und über lateinische von 1 bis $\dim M_2$.
Die zuerst erfolgreich verwandte Methode zur Lösung des angesprochenen Existenzproblems besteht nun in der Untersuchung des Wärmeflusses mit Anfangswerten f, i.e. der Untersuchung des parabolischen Systems

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) \quad \text{für } x \in M_1 \text{ und } t \geq 0$$

mit Anfangswerten $u(x, 0) = f(x)$ für $x \in M_1$
und Randwerten $u(x, t) = f(x)$ für $x \in \partial M_1$ und $t \geq 0$.
Wir wollen dieses Problem mit (P) bezeichnen. Man bemüht sich dann - so diese Methode -, zu zeigen, daß für alle Zeiten eine Lösung existiert und daß diese für $t \to \infty$ gegen eine harmonische Abbildung konvergiert.
Jedoch führte diese Methode bislang nur unter der zusätzlichen Voraussetzung zum Erfolg, daß die Schnittkrümmung von M_2 in keinem Punkte positiv ist (vgl. [1] und [2]).
Nun gelang es in den Arbeiten von Hildebrandt, Kaul und Widman (vgl. [5], [6] und [7]), auch mit anderen Methoden

Existenzsätze für harmonische Abbildungen zu beweisen und die genannte einschränkende Krümmungsvoraussetzung zu überwinden. Das in dieser Hinsicht beste Resultat ist das folgende:

Satz 1 (Hildebrandt, Kaul & Widman)
M_1 sei hier und im Folgenden berandet. Es sei $f(M_1)$ in einem geodätischen Ball $B_M(p) := \{q \in M_2 : d(p, q) \le M\}$ ($d(\cdot, \cdot)$ sei die Abstandsfunktion auf $M_2 \times M_2$), $p \in M_2$, enthalten, für dessen Radius $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ gelte, wobei $\kappa \ge 0$ eine obere Schranke für die Schnittkrümmung von M_2 bezeichnet, und der disjunkt zum Schnittort von p sei. Dann existiert eine harmonische Abbildung $u : M_1 \to B_M(p)$ der Klasse C^∞, die auf ∂M_1 mit f übereinstimmt.

Bemerkung
In [7] wurde noch gefordert, daß $B_M(p)$ disjunkt zu seinem Schnittort sei; wie eine geometrische Überlegung zeigt, genügt jedoch, daß $B_M(p)$ disjunkt zum Schnittort seines Zentrums p ist (vgl. [10]).

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, einen neuen Beweis von Satz 1 durch Untersuchung des Wärmeflusses zu erbringen. Dieser Beweis ist zwar konzeptuell schwieriger als der in [7] erbrachte, dürfte jedoch einiges geometrisches Interesse für sich beanspruchen können.
Das wesentliche Hilfsmittel hierbei wird der folgende Stabilitäts- und Eindeutigkeitssatz aus [9] sein:

Satz 2 (Jäger & Kaul)
Für $T > 0$ seien $M_1^T := M_1 \times [0, T]$ und $\partial_T M_1 := = (M_1 \times \{0\}) \cup (\partial M_1 \times [0, T])$; u_1 und u_2 seien stetige Abbildungen von M_1^T nach M_2 und im Innern von M_1^T Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u .$$

$u_1(M_1^T)$ und $u_2(M_1^T)$ seien wiederum in einem geodätischen Ball $B_M(p)$ enthalten, der disjunkt zum Schnittort von p sei und der Bedingung $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ genüge.

Dann gilt

$$\sup_{M_1^T} \theta \le \sup_{\partial_T M_1} \theta,$$

wobei

$$\theta(x,t) = \frac{q_\kappa\,(d(u_1(x,t),u_2(x,t)))}{\cos(\sqrt{\kappa}\,d(p,u_1(x,t)))\cdot\cos(\sqrt{\kappa}\,d(p,u_2(x,t)))}$$

und $$q_\kappa\,(s) = \begin{cases} (1-\cos(\sqrt{\kappa}\,s))/\kappa & \text{für } \kappa > 0 \\ \frac{s^2}{2} & \text{für } \kappa = 0 \end{cases}$$

ist.

Bemerkungen

1) Bezüglich der Schnittortbedingung gilt das gleiche wie in der Bemerkung nach Satz 1.

2) Aus Satz 2 folgt insbesondere, daß, falls die Anfangs- und Randwerte in $B_M(p)$ liegen, die zugehörige Lösung der Wärmeleitungsgleichung nicht aus $B_M(p)$ herauslaufen kann.

Stabilitätsaussagen wurden erstmals von Hartman [3] beim Studium harmonischer Abbildungen verwandt. Allgemeinere Überlegungen, wie man mit Hilfe von Stabilitätsaussagen Existenzsätze für Lösungen elliptischer Systeme erhalten kann, stellte von Wahl an (vgl. [12],[13]). In seinem Vortrag [13] skizzierte von Wahl auch einen Beweis für die Existenz einer globalen Lösung des Problems (P) unter Benutzung der Stabilitätsaussage von Jäger und Kaul. Jedoch zeigte er noch nicht, daß für $t \to \infty$ $u(x,t)$ oder wenigstens eine Folge $u(x,t_n)$ gegen eine harmonische Abbildung strebt. Dies wird in der vorliegenden Arbeit nachgewiesen. Außerdem wird ein etwas anderer Beweis als in [13] für die Existenz einer globalen Lösung gegeben. Unser Ausgangspunkt zu letzterem wird nun, wie in [13], der nachstehende Satz von Hamilton (vgl. [2], S. 124 und 119) sein, der lokale Existenz und Regularität einer Lösung des Problems (P) beinhaltet.

<u>Satz 3</u> (Hamilton)

Es sei $m > \dim M_1 + 2$. $f\colon M_1 \times \{0\} \to M_2$ *und* $h\colon \partial M_1 \times [0,T] \to M_2$ $(T > 0)$ *seien von der Klasse* C^∞, *und es gelte* $f = h$ *auf* $\partial M_1 \times \{0\}$. *Dann existiert ein* $\varepsilon > 0$ *und eine Abbildung* $u\colon M_1 \times [0,\varepsilon] \to M_2$ *der Klasse* $L_2^m(M_1 \times [0,\varepsilon], M_2)$, *die die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, also* $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ *auf* $M_1 \times [0,\varepsilon]$, *und die auf* $M_1 \times \{0\}$ *mit* f *und auf* $M_1 \times [0,\varepsilon]$ *mit* h *übereinstimmt. Außerdem ist eine Lösung* $u\colon M_1 \times [0,T] \to M_2$ *der Klasse* $L_2^m(M_1 \times [0,T], M_2)$ $(T > 0)$ *zu vorgegebenen Anfangs- und Randwerten eindeutig bestimmt und von der Klasse* C^∞, *ausgenommen an der Kante* $\partial M_1 \times \{0\}$ *(falls dort nicht eine unendliche Anzahl von Verträglichkeitsbedingungen zwischen Anfangs- und Randwerten erfüllt ist).*

Daß u aus $L_2^m(M_1 \times [0,\varepsilon], M_2)$ ist, bedeutet dabei, daß, falls $u^i(x)$ die Komponenten von $u(x)$ in lokalen Koordinaten auf M_2 sind, u^i, $\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ und $\frac{\partial u^i}{\partial t}$ von der Klasse $L^m(M_1 \times [0,\varepsilon])$ sind, was festzustellen aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes keine Schwierigkeiten bereitet, da $m > \dim M_1 + 2$ gewählt ist.
Hieraus folgt unmittelbar

<u>Lemma 1</u>

Die Menge derjenigen $T > 0$, *für die auf* $M_1 \times [0,T]$ *eine Lösung der Klasse* C^∞ *(außer auf* $\partial M_1 \times \{0\}$*) des Problems* (P) *existiert, ist offen und von der leeren Menge verschieden.*

Im Folgenden setzen wie nun immer voraus, daß $f(M_1) \subset B_M(p)$ gilt, wobei M die genannten Bedingungen erfüllt. Nach der Bemerkung 2) nach Satz 2 liegt dann auch jede Lösung von (P) in $B_M(p)$.
Satz 2 wollen wir nun auf die folgende Weise anwenden:
Ist $u(x,t) \in L_2^m(M_1 \times [0,T], M_2)$, $m > \dim M_1 + 2$, eine Lösung von (P), so setzen wir $u_1(x,\bar{t}) = u(x,\bar{t} + \tau)$ und

$u_2(x,\bar{t}) = u(x,\bar{t} + \tau + h)$ für $\tau,h > 0$ und $\bar{t} + \tau + h \leq T$. u_1 und u_2 sind dann Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu Anfangswerten $u(x,\tau)$ bzw. $z(x,\tau + h)$. Aus Satz 2 folgt daher, weil die vorgeschriebenen Randwerte zeitunabhängig sind,

$$q_\kappa\,(d(u(x,t),u(x,t + h))) \leq \tag{1}$$
$$\leq \frac{1}{\cos^2(M\sqrt{\kappa})} \sup_{y \in M_1} q_\kappa\,(d(u(y,\tau),u(y,\tau + h)))$$

für $0 < \tau < t < T$ und $x \in M_1$, falls $t + h \leq T$ ist. Da nun nach Satz 3 u von der Klasse C^∞ auf $M_1 \times [\tau,T]$ ist, kann man hieraus die folgende Aussage gewinnen:

<u>Lemma 2</u>

Bei beliebig klein gewählten $\tau_o > 0$ *gilt für alle* $t \in [\tau_o,T]$ *und* $x \in M_1$

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \leq \frac{4}{\cos(M\sqrt{\kappa})} \sup_{y \in M_1} \left|\frac{\partial u(y,\tau_o)}{\partial t}\right| .$$

Wir setzen

$$K_1 := \frac{4}{\cos(M\sqrt{\kappa})} \sup_{y \in M_1} \left|\frac{\partial u(y,\tau_o)}{\partial t}\right| .$$

Wir können also die zeitliche Ableitung von u durch das Verhalten von u zu beliebig kleiner Zeit kontrollieren. Dies wollen wir nun benutzen, um weitere Schranken zu gewinnen, und zwar sowohl für das u als auch für seine zeitlichen und räumlichen Ableitungen.

<u>Lemma 3</u>

Es gilt eine solche von $t \in [\tau_o,T]$ *unabhängige Zahl* K_2, *daß bei festgehaltenem* $t \in [\tau_o,T]$

$$|u(\cdot,t)|_{C^{2+\alpha}(M_1)} + \left|\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right|_{C^\alpha(M_1)} \leq K_2$$

ist $(0 < \alpha < 1)$. K_2 *hängt dabei von* K_1 *und der Geometrie von* M_1 *und* M_2 *sowie von* f *ab.*

Beweis

Wir schreiben die Gleichung in lokalen Koordinaten in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}u^l\right) = -\gamma^{\alpha\beta}\,\Gamma^l_{ik}\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^l}{\partial t}$$

$(l = 1,\dots \dim M_2)$.

Wir fassen also $\frac{\partial u}{\partial t}$ als inhomogenen Zusatzterm auf der rechten Seite eines quasilinearen elliptischen Systems auf. Da diese Inhomogenität nun nach Lemma 2 beschränkt ist, lassen sich nun durch eine geometrische Variante der Methode aus [8] zunächst C^α-Schranken gewinnen. Wie diese geometrische Variante in dem Falle aussieht, daß kein inhomogener Zusatzterm vorliegt, ist in [4] ausgeführt. Unsere Inhomogenität bereitet aber nun keinerlei prinzipiell neue Schwierigkeiten mehr, so daß hier auf die Details verzichtet werden kann und soll.

Aus [11], Kap.8, erhält man dann Schranken für $|u(\cdot,t)|_{C^{1+\alpha}(M_1)}$. Nun folgt die Behauptung des Lemmas aus der Theorie der linearen parabolischen Differentialgleichungen. q.e.d.

Aus den Schranken von Lemma 3, dem Satz von Arzelà-Ascoli und der Stabilitätsaussage (1) folgt jetzt, daß die Menge derjenigen $T > 0$, für die das Problem (P) eine Lösung der Klasse C^∞ auf $M_1 \times [0,T]$ besitzt, abgeschlossen ist. In Verbindung mit Lemma 1 folgt nun

Satz 4

Falls $f(M_1) \subset B_M(p)$ *ist, besitzt das Problem* (P) *eine globale, d.h. auf* $M_1 \times [0,\infty]$ *existierende Lösung der Klasse* C^∞ *(ausgenommen an der Kante* $\partial M_1 \times \{0\}$ *), die* M_1 *in* $B_M(p)$ *abbildet.*

Nun wollen wir zeigen, daß für $t \to \infty$ $u(x,t)$ gegen eine harmonische Abbildung $u_\infty(x)$ konvergiert. Dazu verwenden wir das folgende

<u>Lemma 4</u>

Für die zeitliche Ableitung der Energien der Abbildungen $u(\cdot,t) : M_1 \to M_2$ *gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} E\,(u(\cdot,t)) = -\int_{M_1} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|^2 dM_1 \quad .$$

Dies läßt sich sehr einfach nachrechnen und findet sich überdies in [2], S.135.

Da nun nach Definition der Energie $E(u(\cdot,t))$ nicht negativ werden kann und nach Lemma 3 $\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial t}$ bezüglich der räumlichen Variablen eine zeitunabhängige C^{α} - Schranke besitzt, folgt

<u>Lemma 5</u>

Es gibt eine Folge (t_n) *, die für* $n \to \infty$ *gegen Unendlich strebt, und für die* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_n)$ *gleichmäßig in* x *für* $n \to \infty$ *gegen Null strebt.*

Aufgrund der $C^{2+\alpha}$ - Schranken aus Lemma 3 und des Satzes von Arzelà - Ascoli gibt es dann eine solche Teilfolge von (t_n), der Einfachheit halber wieder mit (t_n) bezeichnet, daß $u(x,t_n)$ für $n \to \infty$ gegen eine harmonische Abbildung $u_\infty(x)$ konvergiert, die auf ∂M_1 die durch f vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Wir setzen nun in Satz 2 $u_1(x,\bar{t}) = u(x,\bar{t}+t_n)$ und $u_2(x,\bar{t}) = u_\infty(x)$ ein. Man beachte dabei, daß u_∞ als harmonische Abbildung eine zeitunabhängige Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es folgt dann aus Satz 2 analog zur Herleitung von (1), daß für $t > t_n$

$$q_K(d(u(x,t),\ u_\infty(x))) \le$$

$$\le \frac{1}{\cos^2(M\sqrt{K})} \sup_{y \in M_1} q_K(d(u(y,t_n),\ u_\infty(y)))$$

gilt. Weil die rechte Seite mit $n \to \infty$ gegen Null strebt, folgt, daß auch $u(\cdot,t)$ für $t \to \infty$ gegen die harmonische Abbildung u_∞ konvergiert. Damit ist das Ziel dieser Arbeit erreicht.

Literatur

[1] Eells,J., und J.H.Sampson, "Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds", Amer.J.Math.86, 109 - 160 (1964)

[2] Hamilton, R., "Harmonic Maps of Manifolds with Boundary", Springer Lecture Notes 471, Berlin, Heidelberg, New York 1975

[3] Hartman,P., "On Homotopic Harmonic Maps", Can.J.Math. 19, 673 - 687 (1967)

[4] Hildebrandt,S., J.Jost und K.-O.Widman, "Harmonic Mappings and Minimal Submanifolds", erscheint in Inv.math.

[5] Hildebrandt,S., H.Kaul und K.-O.Widman, "Harmonic Mappings into Riemannian Manifolds with Non-positive Sectional Curvature", Math.Scand.37, 257-263 (1975)

[6] dies., "Dirichlet's Boundary Value Problem for Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds", MZ 147, 225-236 (1976)

[7] dies., "An Existence Theorem for Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds", Acta Math.138, 1-16 (1977)

[8] Hildebrandt,S. und K.-O.Widman, "On the Hölder Continuity of Weak Solutions of Quasilinear Elliptic Systems of Second Order", Annali Sc.N.Pisa(IV) 4, 145-178 (1977)

[9] Jäger,W. und H.Kaul,"Uniqueness and Stability of Harmonic Maps and their Jacobi Fields", man.math.28, 269-291 (1979)

[10] Jost,J., "Eine geometrische Bemerkung zu Sätzen über harmonische Abbildungen, die ein Dirichletproblem lösen", erscheint in man.math.

[11] Ladyženskaja,O.A. und N.N.Ural'ceva, "Équations aux dérivées partiells de type elliptique",Dunod, Paris 1968

[12] v.Wahl,W., "Existenzsätze für nichtlineare elliptische Systeme", Nachr.Akad.Wiss.Gött.Nr.3 (1978)

[13] v.Wahl,W., "Verhalten der Lösungen parabolischer Gleichungen für $t \to \infty$ und Lösbarkeit im Großen", Vortrag, gehalten am 17.7.80 in Oberwolfach

Jürgen Jost

Math. Inst. der Univers. Bonn

Beringstr. 4

D - 5300 Bonn 1

(Eingegangen am 20. August 1980)