Math. Z. 184, 359–375 (1983)

Mathematische
Zeitschrift

Zur Regularitätstheorie der instationären Gleichungen von Navier-Stokes

Hermann Sohr

Fachbereich Mathematik der Universität-Gesamthochschule, Warburger Straße 100, D-4790 Paderborn, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

Sei G ein beschränktes Gebiet oder ein Außengebiet des $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 3)$ mit einem $(C^{2+\mu}$-) glatten Rand ∂G; sei $0<T \leqq \infty$ ($T=\infty$ sei zugelassen) und sei $G^T := (0,T)\times G$ das zugehörige Zylindergebiet. Wir betrachten auf G^T die instationären Gleichungen von Navier-Stokes

$$u' - \Delta u + u \circ \nabla u + \nabla \pi = f, \qquad \operatorname{div} u = 0, \qquad u|_{\partial G} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0 \tag{1.1}$$

für das Geschwindigkeitsfeld $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \dots, u_n(t,x))$ und den Druck $\pi(t,x)$ einer Strömung innerhalb von G. Dabei ist f die äußere Kraft und u_0 die Anfangsgeschwindigkeit; die Viskosität ist hier gleich 1 angenommen. Es ist seit langem bekannt, daß (1.1) in einem schwachen Sinn (Hopf [10]) gelöst werden kann. Ein wesentliches Problem der Lösungstheorie dieser Gleichungen besteht darin, möglichst schwache Zusatzbedingungen an eine solche schwache Lösung u zu finden derart, daß von der Glattheit der Daten f und u_0 auf die Glattheit der Lösung u geschlossen werden kann; auf diese Weise gelangt man zu klassischen Lösungen. Von Serrin [17, 18] ist die Zusatzbedingung $u \in L^s(0,T;L^r)$ $(s>2,\ r>n,\ (2/s)+(n/r)<1)$ angegeben worden, unter der ein solcher Regularitätsschluß möglich ist. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der folgenden Probleme:

a) *Erweiterung der Serrin-Bedingung auf den Grenzfall* $n=r$, $s=\infty$. Wünschenswert wäre die Bedingung $u \in L^\infty(0,T;L^n)$ (vgl. [26; §3]); die schwächste bisher bekannte Bedingung ist im Falle eines beschränkten Gebietes G^T die Stetigkeit von u: $[0,T] \to L^n$ (v. Wahl [26]). Wir beweisen, daß die folgende schwächere Bedingung ausreicht: Es gibt eine Folge (u_k) in $L^\infty(G^T)$ derart, daß $(u-u_k)$ im Raum $L^\infty(0,T;L^n)$ eine Nullfolge ist. Diese Bedingung kann auch auf Außengebiete und auf $T=\infty$ ausgedehnt werden. Dann braucht u nicht in $L^\infty(0,T;L^n)$ zu liegen; so ist es z.B. hinreichend, wenn u die Form $u=u_1+u_2$ hat, mit etwa stetigem u_1: $[0,T] \to L^n$ und mit $u_2 \in L^\infty(G^T)$. Für unbeschränkte Gebiete erhält man damit Bedingungen, die außerhalb des Serrinschen Ansatzes liegen. Für beschränkte Gebiete G^T folgt die Bedingung, daß u im $L^\infty(0,T;L^r)$-Abschluß von $L^\infty(G^T)$ liegt; dieser Abschluß umfaßt die stetigen Funktionen. In einem gewissen Sinn wird dadurch das Homotopie-Kriterium von v. Wahl [25; S. 276] erweitert. Dort wird gefordert, u im Raum $L^\infty(0,T;L^r)$ durch eine bestimmte Schar schwacher Lösungen von (1.1) zu approximieren. Hier ist u durch die Folge (u_k) zu approximieren; die u_k brauchen keine Lösungen zu sein, brauchen keine (H^1-) Glattheitseigenschaften zu besitzen und brauchen auch nicht divergenzfrei zu sein. Dagegen braucht die Schar nicht in $L^\infty(G^T)$ zu liegen. Die Erweiterung auf unbeschränkte Gebiete G^T ergibt einen zusätzlichen Aspekt; eine Regularitätsaussage etwa der Form $u(t)\in H^{2,q}$ liefert nach den Einbettungssätzen Konvergenzaussagen für $x\to\infty$ (decay); das Entsprechende gilt auch für $t\to\infty$.

Dieses Ergebnis kann auf den stationären Fall $u'\equiv 0$ übertragen werden. Dadurch können wir ein Ergebnis von Gerhardt [3] auf Außengebiete und $n>4$ erweitern.

b) *Erweiterung auf die anderen Grenzfälle* $(2/s)+(n/r)=1$ *mit* $r>n$ *und Aufstellung von Wachstumsschranken für zweite Ableitungen.* Diese haben die Form

$$\int_0^t |u'|_q^q\,d\tau+\int_0^t |\Delta u|_q^q\,d\tau$$
$$\leqq c\left[|(-\Delta+I)^{1-1/(q+\varepsilon)}u_0|_q^q+\int_0^t |f|_q^q\,d\tau+\int_0^t |u|_q^q\,d\tau\right]\exp\left(c\int_0^t |u|_r^s\,d\tau\right)$$

$(2\leqq q<r,\ n<r,\ (q/s)+(n/r)=1,\ c>0,\ \varepsilon>0)$ und gelten für alle $0\leqq t<T$. Für beschränkte Gebiete G kann dabei der Term $\int_0^t |u|_q^q\,d\tau$ rechts weggelassen werden. Der Grenzfall $q=2$ ist mit eingeschlossen. Diese Abschätzung kann auf beliebige Gewichtsfunktionen $g\in C^1([0,T))$ erweitert werden; dazu wird f durch $gf+g'u$, u_0 durch $g(0)u_0$ und u überall außer im Term $\exp(\dots)$ durch gu ersetzt. Hiermit können schwache Lösungen auf einem Anfangsintervall starker Lösbarkeit abgeschätzt und ihr Verhalten für $t\to T$ untersucht werden. Im Fall $n=3$ können wir damit asymptotische Aussagen von Masuda [12] und Heywood [8] von der Form $|\nabla u|_2\leqq c/t^{1/4}$ verbessern, indem $t^{1/4}$ durch eine beliebige Gewichtsfunktion $g(t)$ mit $g'(t)/g(t)\to 0$ (für $t\to\infty$) ersetzt wird.

Etwas allgemeiner als bei Lösungen im Sinne von Hopf [10] lassen wir zu, daß u nicht quadratintegrierbar ist. Dies ist für Außengebiete von Bedeutung (vgl. Bemelmans [2]), wenn u lediglich einer Bedingung der Form $|u(x)|\leqq c/|x|^\beta$ $(0<\beta\leqq 1)$ für große $|x|$ genügt.

Wesentlich für die Beweismethode ist die Verwendung der Yosida-Approximation [28; IX]. Wir verwenden diese Approximation zur Glättung der schwachen Lösung u. Die geglättete Funktion $u_m:=J_m u$ $(J_m:=(I+(1/m)\tilde{A}^\beta)^{-1}$, $\tilde{A}:=-P\Delta+I$, $0<\beta\leqq 1)$ ist dann eine starke Lösung einer gegenüber (1.1) modifizierten Gleichung. Diese kann unter Verwendung der Analytizität der Halbgruppe $\exp(-t\tilde{A})\,(t\geqq 0)$ ähnlich abgeschätzt werden wie (1.1); sie wird dann wie üblich durch Inversion des linearen Anteils in eine Integralgleichung übergeführt und mit einem Satz von Solonnikov [20] und v. Wahl [25] abgeschätzt. Die danach erforderliche Abschätzung der Nichtlinearität $u \circ \nabla u$ beruht im wesentlichen auf Lemma (2.2), das durch Erweiterung und Verschärfung eines Lemmas von Miyakawa [13] erhalten wird. Neben der Analytizität der Halbgruppe $\exp(-t\tilde{A})$ werden dabei die bekannten Einbettungseigenschaften der Besselpotential-Räume [24, 1] verwendet. Die gegenüber Solonnikov [20] und Sobolevski [19] weitergehendere tiefliegende Aussage von Giga [4, 5] über die Halbgruppe $\exp(-t\tilde{A})$ wird nur beim Beweis des Grenzfalles $(2/s)+(n/r)=1$, $r>n$ benötigt. Unter Verwendung dieses Ergebnisses folgt auch, daß in der obenstehenden Abschätzung $\varepsilon=0$ gesetzt werden kann.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor W. v. Wahl sehr herzlich danken für einige wertvolle Diskussionen über den Gegenstand dieser Arbeit und für die Überlassung eines Preprints von [26].

2. Bezeichnungen und Hilfsmittel

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 3)$ ein beschränktes Gebiet oder ein Außengebiet. Der Rand ∂G sei von der Klasse $C^{2+\mu}$ mit einem $0<\mu<1$ (im Sinne von [15; S. 55]). Ein Außengebiet ist ein Gebiet, das zugleich das Komplement des Abschlusses eines beschränkten Gebietes ist. Sei $0<T \leqq \infty$ und sei $G^T := (0,T)\times G$.

Ungeachtet der physikalischen Interpretation von (1.1) sind im folgenden alle Räume komplex. Wir verwenden die üblichen Räume $L^p(G)$ für $1 \leqq p \leqq \infty$, $C^k(G)$ und $C_0^k(G)$ für $k=0, 1, 2, \ldots$, die Sobolev-Räume $H^{l,p}(G)$ und $H_0^{l,p}(G)$ für $1<p<\infty$, $l=1, 2, \ldots$ und die H-wertigen Sobolev-Räume $L^p(0,T;H)$ und $H^{l,p}(0,T;H)$ für $1<p<\infty$, $l=1, 2, \ldots$; dabei ist H einer der obenstehenden Räume. $L^p(G)^n$, $C^k(G)^n$, $H^{l,p}(G)^n$, ... sind die entsprechenden Räume für n-komponentige Funktionen $u=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Die Norm in $L^p(G)$ wird je nach Zweckmäßigkeit mit $|u|_{L^p(G)}=|u|_p=|u|_{1/p}$ bezeichnet.

Für $1<p<\infty$ wird $L^{p'}(G)^n$ wie üblich mit dem Dualraum von $L^p(G)^n$ identifiziert, wobei p' der zu p adjungierte Index ist mit $(1/p)+(1/p')=1$. Wir setzen

$$(u \circ v)(x) := u(x) \circ v(x) := (u(x), v(x)) := \sum_{l=1}^{n} u_l(x)\, v_l(x)$$

und $(u,v)_G := \int_G (u(x), v(x))\, dx$; entsprechend definieren wir $(u,v)_{G^T} := \int_{G^T} (u(t,x), v(t,x))\, dt\, dx$, wobei $(u(t,x), v(t,x)) = (u \circ v)(t,x) = u(t,x) \circ v(t,x)$ analog gegeben sei.

Im folgenden bezeichnet $D_l = \partial/\partial x_l$ für $l=1, 2, \ldots, n$ die partielle Ableitung im Distributionssinn $(x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\nabla=(D_1, D_2, \ldots, D_n)$, $\operatorname{div} u = \nabla \circ u = D_1 u_1 + D_2 u_2 + \ldots + D_n u_n$ und $(\nabla u, \nabla v) := \sum_{l=1}^{n} (\nabla u_l, \nabla v_l)$, wobei wieder der Index G oder G^T verwendet wird.

Der Laplaceoperator Δ_p: $D(\Delta_p) \to L^p(G)^n$ ist definiert durch $D(\Delta_p) := H_0^{1,p}(G)^n \cap H^{2,p}(G)^n$ und durch $\Delta_p u = D_1^2 u + D_2^2 u + \ldots + D_n^2 u$. Für den adjungierten Operator Δ_p' erhält man $\Delta_p' = \Delta_{p'}$. Wir setzen im folgenden $A_p := -\Delta_p + I$ mit der Identität I; im Falle eines beschränkten Gebietes G kann im folgenden der Summand I weggelassen werden.

Sei $\tilde{C}_0^\infty(G)^n := \{u \in C_0^\infty(G)^n | \operatorname{div} u = 0\}$ und $\tilde{H}_0^{l,p}(G)^n := \{u \in H_0^{l,p}(G)^n | \operatorname{div} u = 0\}$. Mit $\tilde{L}^p(G)^n$ bezeichnen wir den $L^p(G)^n$-Abschluß des Raumes $\tilde{C}_0^\infty(G)^n$. Nach dem Zerlegungssatz [7; S. 694, 14; S. 119, 20; S. 471] existieren ein beschränkter Operator P_p von $L^p(G)^n$ auf $\tilde{L}^p(G)^n$ mit $P_p^2 = P_p$ (Projektor) und für jedes $f \in L^p(G)^n$ eine Zerlegung der Form $f = P_p f + \nabla \pi$ mit $\pi \in L^p_{\mathrm{loc}}(G)$ und $\nabla \pi \in L^p(G)^n$. Der zu $\tilde{L}^p(G)^n$ duale Raum kann mit $\tilde{L}^{p'}(G)^n$ identifiziert werden und für den zu P_p adjungierten Operator P_p' gilt die Beziehung $P_p' = P_{p'}$ $(1 < p < \infty)$. Wir schreiben kurz $P = P_p$.

Der Stokesoperator $\tilde{\Delta}_p := P_p \Delta_p$ ist als Operator $D(\tilde{\Delta}_p) \to \tilde{L}^p(G)^n$, $D(\tilde{\Delta}_p) \subseteq \tilde{L}^p(G)^n$, definiert durch $D(\tilde{\Delta}_p) := \tilde{H}_0^{1,p}(G)^n \cap H^{2,p}(G)^n$ und $P_p \Delta_p u := P_p(\Delta_p u)$. Wir setzen $\tilde{A}_p := -\tilde{\Delta}_p + I$, wobei wieder im Falle eines beschränkten Gebietes der Summand I weggelassen werden kann. Für den adjungierten Operator $\tilde{\Delta}_p'$ erhält man wie oben $\tilde{\Delta}_p' = \tilde{\Delta}_{p'}$ [7]. Der Index p wird im folgenden meist weggelassen, wenn er aus dem Zusammenhang hervorgeht: $\tilde{\Delta}_p = \tilde{\Delta}$, $\Delta_p = \Delta$, $\tilde{A}_p = \tilde{A}$, ... $(1 < p < \infty)$.

Wir setzen $u \circ \nabla u := (u \circ \nabla u_l)_{l=1,2,\dots,n}$. Dies wird im folgenden stets lokal integrierbar und damit im Distributionssinn wohldefiniert sein auf G^T. Im Fall $\operatorname{div} u = 0$ folgt $u \circ \nabla u_l = \nabla \circ (u u_l)$ und wir setzen $u \circ \nabla u = \nabla \circ (uu) = (\nabla \circ (u u_l))_{l=1,2,\dots,n}$.

Der Operator $\tilde{A}_p$ erzeugt eine analytische C_0-Halbgruppe $\exp(-t\tilde{A}_p)$ $(t \geqq 0)$ in $\tilde{L}^p(G)^n$ (Sobolevski [19], Solonnikov [20], Giga [4]) und mit Konstanten $M > 0$, $K > 0$ gelten die Abschätzungen $|\exp(-t\tilde{A}_p)| \leqq M \cdot \exp(-Kt)$ und $|(tI + \tilde{A}_p)^{-1}| \leqq M(K+t)^{-1}$ für alle $t \geqq 0$. Durch eine Integraldarstellung $\tilde{A}_p^{-\beta} := R \int_0^\infty t^{-\beta}(tI + \tilde{A}_p)^{-1}\,dt$ $(R > 0)$ sind die gebrochenen Potenzen $\tilde{A}_p^{-\beta}$ definiert und durch $\tilde{A}_p^\beta := (\tilde{A}_p^{-\beta})^{-1}$ $(D(\tilde{A}_p^\beta) := \tilde{A}_p^{-\beta} \tilde{L}^p(G)^n)$ erhält man die Potenzen $\tilde{A}_p^\beta$ für $0 < \beta < 1$ [11]. Entsprechendes gilt auch für die Potenzen A_p^β. Dabei ist stets $1 < p < \infty$. Die Definitionsbereiche $D(\tilde{A}_p^\beta) \subseteq \tilde{L}^p(G)^n$ und $D(A_p^\beta) \subseteq L^p(G)^n$ werden im folgenden stets als Banachräume mit der Graphen-Norm angesehen.

Wir benötigen die Abschätzungen $|\tilde{A}_p^\beta \exp(-t\tilde{A}_p)| \leqq c_1 t^{-\beta} \exp(-c_2 t)$ und $|\tilde{A}_p^\beta (tI + \tilde{A}_p)^{-1}| \leqq c_3(1+t)^{-(1-\beta)}$ für alle $t > 0$ und mit Konstanten $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ [11; S. 305, 288]. Das Entsprechende gilt auch für A_p^β.

In dieser Arbeit sind c, c_1, c_2, ... positive Konstanten, die von Rechnung zu Rechnung wechseln.

Im nachfolgenden Satz wird der lineare Anteil der Gln. (1.1) abgeschätzt. Der Satz wurde von Solonnikov [20, 21] für $n = 3$ bewiesen. Die erforderlichen Modifikationen für beliebiges $n \geqq 3$ sind von v. Wahl [25] durchgeführt worden. Wir benötigen diesen Satz nur für $p \geqq 2$. In diesem Fall ist der Besselpotential-Raum $L^{\beta,p}(G)$ stetig im Besovraum $B^{\beta,p}(G)$ eingebettet [24; 327 (2)]. Daher gilt eine Abschätzung der Form $|u|_{B^{\beta,p}} \leqq c |A_p^{\beta/2} u|_p$ für $u \in D(A_p^{\beta/2})$. Deshalb können wir den Term $|u_0|_{B^{2-2/p,p}}$ in [21] hier durch $|A_p^{1-1/p} u_0|_p$ ersetzen.

(2.1) **Satz** (Solonnikov, v. Wahl). *Sei $p \geqq 2$. Für jedes $f \in L^p(G^T)^n$ und jedes $u_0 \in D((-\Delta_p + I)^{1-1/p})$ mit $\nabla \circ u_0 = 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, T; D(\Delta_p))$ mit $u' \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, T; L^p(G)^n)$ und ein $\pi \in L^p_{\mathrm{loc}}(G^T)$ mit*

$\nabla\pi\in L^p_{\mathrm{loc}}(0,T;L^p(G)^n)$ *so, daß* $u'-\Delta u+\nabla\pi=f$, $\nabla\circ u=0$, $u(0)=u_0$ *und*

$$\int_0^t |u'|_p^p\,d\tau+\int_0^t|\Delta_p u|_p^p\,d\tau+\int_0^t|\nabla\pi|_p^p\,d\tau$$
$$\le c\left[|(-\Delta_p+I)^{1-1/p}u_0|_p^p+\int_0^t|u|_p^p\,d\tau+\int_0^t|f|_p^p\,d\tau\right]$$

gilt für alle $0<t<T$ *und mit einer Konstanten* $c=c(G,p)>0$. *Im Falle eines beschränkten Gebietes G entfällt rechts der Term* $\int_0^t|u|_p^p\,d\tau$.

Die in [4] gewonnene explizite Form der Resolvente $(zI+\tilde A_p)^{-1}$ führt nach [5] zum Resultat $D(\tilde A_p^\beta)=D(A_p^\beta)\cap\tilde L^p(G)^n$ im mengentheoretischen und topologischen Sinn für $0\le\beta\le1$, $1<p<\infty$. Mit diesem Ergebnis folgt unmittelbar die Aussage (2.2) a) des nachfolgenden Lemmas. Die Aussage (2.2) b) ist eine unmittelbare Folge der Einbettungseigenschaften der Besselpotential-Räume $L^{\beta,p}(G)$ [24; S. 327 oder 1] und einer Interpolationseigenschaft [16 in Verbindung mit 24; S. 103], die zur Äquivalenz der Normen von $D(A_p^{\beta/2})$ und $L^{\beta,p}(G)$ führt. Wir brauchen den Fall $\alpha=\beta$ in (2.2) a) nur für den Grenzfall $(2/s)+(n/r)=1$, $r>n$, in Satz 4.1; sonst wird nur der Fall $\alpha<\beta$ benötigt; dieser Fall folgt jedoch allein aus der Analytizität von $e^{-t\tilde A_p}$ im Sinne von [19, 20] ohne Verwendung von [4, 5]. Im Fall $\alpha<\beta$ erhält man nämlich aus der Integraldarstellung von $\tilde A_p^{-\beta}$ die Beschränktheit des Operators $A_p^\alpha\tilde A_p^{-\beta}P_p$ in $L^p(G)^n$ und aus der Integraldarstellung von $A_{p'}^{-\beta}$ die Beschränktheit von $A_{p'}^{-\beta}\tilde A_{p'}^\alpha P_{p'}$ in $L^{p'}(G)^n$. Hieraus folgt (2.2) a) für $\alpha<\beta$. Durch (2.2) wird ein Lemma von Miyakawa [13; S. 13] verschärft und erweitert.

(2.2) **Lemma.** *Sei* $1<p\le q<\infty$ *und* $0\le\alpha\le1$, $0\le\beta\le1$. *Dann gilt:*

a) *Aus* $\alpha\le\beta$ *folgt* $D(\tilde A_p^\beta)\subseteq D(A_p^\alpha)\cap\tilde L^p(G)^n$ *und* $D(A_p^\beta)\cap\tilde L^p(G)^n\subseteq D(\tilde A_p^\alpha)$ *mit jeweils stetiger Einbettung.*

b) *Aus* $2\beta-n/p\ge2\alpha-n/q$ *folgt* $D(A_p^\beta)\subseteq D(A_q^\alpha)$ *mit stetiger Einbettung.*

Damit folgen in a) die Abschätzungen $|A_p^\alpha u|_p\le c_1|\tilde A_p^\beta u|_p$ $(u\in D(\tilde A_p^\beta))$ und $|\tilde A_p^\alpha u|_p\le c_2|A_p^\beta u|_p$ $(u\in D(A_p^\beta)\cap\tilde L^p(G)^n)$ und in b) die Abschätzung $|A_q^\alpha u|_q\le c_3|A_p^\beta u|_p$ $(u\in D(A_p^\beta))$ mit Konstanten $c_1, c_2, c_3>0$.

Sei $p>1$. Wir setzen $J_m:=(I+(1/m)\tilde A_p)^{-1}$ für $m=1,2,\dots$. Dann gilt $|J_m|\le c$ und J_m konvergiert im starken Sinn gegen I (Yosida [28; IX]).

Sei $u\in L^p(0,T;D(\tilde A_p))\cap H^{1,p}(0,T;\tilde L^p(G)^n)$, $f\in L^p(0,T;\tilde L^p(G)^n)$, $u_0\in D(\tilde A_p^{1/p'})$ und es gelte $u'+\tilde A_pu=f$, $u(0)=u_0$. Dann folgt

$$(J_mu)'+\tilde A_pJ_mu=J_mf,$$

$$J_mu(t)=(\exp-t\tilde A_p)J_mu_0+\int_0^t(\exp-(t-\tau)\tilde A_p)J_mf(\tau)\,d\tau$$

und

$$u(t)=(\exp-t\tilde A_p)u_0+\int_0^t(\exp-(t-\tau)\tilde A_p)f(\tau)\,d\tau\qquad(0\le t<T). \tag{2.3}$$

Sei $p>\bar{p}>1$, $\rho\geqq p$ und $0<\alpha<1$ so, daß $1-\alpha-1/\bar{p}>-1/\rho$ gilt. Im Fall $u_0=0$ erhält man zunächst

$$\left(\int_0^t|\tilde{A}_p^\alpha u|_p^\rho\,d\tau\right)^{1/\rho}\leqq c_1\left(\int_0^t|f|_p^p\,d\tau\right)^{1/p};$$

weiter erhält man für das angegebene u_0

$$|\tilde{A}_p^{1-1/\bar{p}}u(t)|_p\leqq c_2\left[|\tilde{A}_p^{1-1/\bar{p}}u_0|_p+\left(\int_0^t|f|_p^p\,d\tau\right)^{1/p}\right]\quad(0\leqq t<T)\tag{2.4}$$

jeweils mit Konstanten c_1, $c_2>0$. Wählt man $g\in C^1([0,T))$ mit $g(0)=0$ und $g(t)=1$ und beachtet die Darstellung $(gu)'+\tilde{A}_p(gu)=gf+g'u$, so gelangt man zu einer Abschätzung

$$|\tilde{A}_p^{1-1/\bar{p}}u(t)|_p\leqq c(t)\left(\int_0^t(|u'|_p^p+|A_pu|_p^p)\,d\tau\right)^{1/p}\quad(c(t)\to\infty\text{ für }t\to 0),\tag{2.5}$$

die für $0<t<T$ gilt. Dies kann so geschehen, daß nach Wahl eines $T_0>0$ die (positive) Funktion $c(t)$ für $t\geqq T_0$ konstant ist. Aus Symmetriegründen gilt eine solche Abschätzung auch, wenn $u(t)$ auf der linken Seite durch $u(0)=u_0$ ersetzt wird. Damit erhält man eine Abschätzung

$$\left(\int_0^t|\tilde{A}_p^\alpha u|_p^\rho\,d\tau\right)^{1/\rho}\leqq c_1(t)\left(\int_0^t(|u'|_p^p+|A_pu|_p^p)\,d\tau\right)^{1/p},$$

wobei $c_1(t)$ die gleiche Bedeutung hat wie $c(t)$. Zusammen mit (2.2) b) erhält man dann das nachfolgende Lemma (2.6). Im Fall $p=2$ gelten (2.4) und (2.5) auch für $\bar{p}=2$. Dies folgt direkt unter Verwendung des Skalarproduktes. Der Fall $\rho=\infty$ ist hierbei nicht ausgeschlossen. Dann ist $(\int|\dots|^\rho d\tau)^{1/\rho}$ zu ersetzen durch $\sup|\dots|$.

(2.6) **Lemma.** *Sei $1<p<\infty$, $p\leqq\rho\leqq\infty$, $p\leqq q<\infty$, $0\leqq\beta\leqq 1$ und sei*

$$u\in H^{1,p}(0,T;\tilde{L}^p(G)^n)\cap L^p(0,T;D(\Delta_p)).$$

Es gelte $2-(n/p)-(2/p)>2\beta-(n/q)-(2/\rho)$. Dann folgt $u\in L^\rho(0,T;D((-\Delta_q+I)^\beta))$ und

$$\left(\int_0^t|(-\Delta_q+I)^\beta u|_q^\rho\,d\tau\right)^{1/\rho}\leqq c(t,G,p,q,\rho,\beta)\left(\int_0^t(|u'|_p^p+|(-\Delta_p+I)u|_p^p)\,d\tau\right)^{1/p}$$

für $0<t<T$ mit einer Funktion $c(.)>0$, die so gewählt werden kann, daß sie nach Vorgabe eines $T_0>0$ nicht von $t\geqq T_0$ abhängt. Im Falle $\rho=\infty$ ist die linke Seite zu ersetzen durch $\sup_{0<\tau<t}|(-\Delta_q+I)^\beta u(\tau)|_q$. Im Falle eines beschränkten Gebietes G kann jeweils der Summand I weggelassen werden.

3. Regularitätseigenschaften im Fall $u\in L^\infty(0,T;L^n(G)^n)$

Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ und $0<T\leqq\infty$ wie zuvor. Eine schwache Lösung u von (1.1) im Sinne von Hopf [10] genügt der Bedingung $u\in L^\infty(0,T;\tilde{L}^2(G)^n)$

$\cap L^2_{\mathrm{loc}}(0, T; \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$. Es ist sinnvoll, diesen Begriff hier etwas weiter zu fassen. Bei Außengebieten soll zugelassen sein, daß u nicht quadratintegrierbar ist. Für $t \to T$ sollen auch im Fall $T < \infty$ beliebige Singularitäten möglich sein. Wir setzen daher nur voraus, daß $u \in L^r(0, t; L^p(G)^n) \cap L^q(0, t; \tilde{H}_0^{1,q}(G)^n)$ gilt für alle $0 < t < T$, mit $r \geqq 2$, $p \geqq 2$, $q \geqq 2$. Genauer: $u: \tau \to u(\tau)$ ist meßbar auf $(0, T)$ und die Einschränkung auf $(0, t)$ liegt jeweils im angegebenen Raum.

Aufgrund dieser Glattheitseigenschaften von u können wir den Testfunktionenraum folgendermaßen („möglichst groß") wählen. Sei dazu $C_0^2([0, T) \times \bar{G})^n$ der Raum aller stetigen v: $[0, T) \times G \to \mathbb{C}^n$ mit kompaktem Träger in $[0, T) \times \bar{G}$ und mit gleichmäßig stetigen Ableitungen der Ordnungen $\leqq 2$. Dabei ist $\bar{G}$ der Abschluß von G. Entsprechend sind $C_0^2(\bar{G})^n$ und $C_0^2([0, T))$ definiert. Wir setzen

$$\mathscr{C}(G^T)^n := \{v \in C_0^2([0, T) \times \bar{G})^n \mid \operatorname{div} v = 0, v|_{[0,T) \times \partial G} = 0\},$$
$$\mathscr{C}(G)^n := \{v \in C_0^2(\bar{G})^n \mid \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial G} = 0\}.$$

Im folgenden ist $\mathscr{C}(G^T)^n$ der Testfunktionenraum auf G^T. Unter den obenstehenden Voraussetzungen an u ist $(u \circ \nabla u) \circ v$ integrierbar auf G^T für alle $v \in \mathscr{C}(G^T)^n$; daher ist $(u \circ \nabla u, v)_{G^T}$ wohldefiniert. Wir benutzen die Bezeichnungen $(v(t))(x) = v(t, x)$ und $(v'(t))(x) = (\partial/\partial t) v(t, x)$. Für $v \in \mathscr{C}(G^T)^n$ ist stets $v(T) = 0$, es ist jedoch i.allg. $v(0) \neq 0$. Aus $h \in C_0^2([0, T))$ und $v \in \mathscr{C}(G)^n$ folgt stets $hv \in \mathscr{C}(G^T)^n$.

(3.1) **Definition.** Sei $r \geqq 2$, $p \geqq 2$, $q \geqq 2$ und sei $u \in L^r(0, t; L^p(G)^n) \cap L^q(0, t; \tilde{H}_0^{1,q}(G)^n)$ für alle $0 < t < T$. Sei $f \in L^q(0, T; L^q(G)^n)$ und $u_0 \in \tilde{L}^q(G)^n$. Dann heißt u eine *schwache Lösung von* (1, 1) *zu* f *und* u_0, *wenn*

$$-(u, v')_{G^T} - (u_0, v(0))_G + (\nabla u, \nabla v)_{G^T} + (u \circ \nabla u, v)_{G^T} = (f, v)_{G^T}$$

gilt für alle $v \in \mathscr{C}(G^T)^n$.

Jede schwache Lösung $u \in L^\infty(0, T; L^2(G)^n) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0, T; \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$ im üblichen Sinn nach Hopf [10] erfüllt diese Definition mit $p = 2$, $q = 2$ und beliebigem $r \geqq 2$.

Der nachfolgende Hauptsatz dieses Abschnittes ist stets auch für $\varepsilon = 0$ richtig. Dies folgt unter Verwendung von [4, 5]; wir wollen jedoch dieses Resultat nur an wesentlichen Stellen verwenden.

(3.2) **Satz.** *Sei* $2 \leqq q < n$, $p \geqq 2$, $\varepsilon > 0$ *(für* $q = 2$ *sei* $\varepsilon = 0$ *zugelassen),* $f \in L^q(0, T; L^q(G)^n)$, $u_0 \in D((-\Delta_q + I)^{1 - 1/(q+\varepsilon)}) \cap \tilde{L}^q(G)^n$ *und sei* u *eine schwache Lösung von* (1.1) *mit* $u \in L^q(0, t; L^q(G)^n) \cap L^p(0, t; \tilde{H}_0^{1,p}(G)^n)$ *für alle* $0 < t < T$. *Es existiere eine Folge* (u_k) *in* $L^\infty(G^T)^n$ *derart, daß* $(u - u_k)$ *im Raum* $L^\infty(0, T; L^n(G)^n)$ *liegt und dort eine Nullfolge ist. Dann folgt:*

a) $u' \in L^q(0, t; L^q(G)^n)$, $u \in L^q(0, t; D(\Delta_q))$ $(\subseteq L^q(0, t; H^{2,q}(G)^n))$ *für* $0 < t < T$.

b) *Es gibt ein* $c > 0$ *und ein (von* u *abhängiges)* $c(u) > 0$ *so, daß*

$$\int_0^t |(gu)'|_q^q \, d\tau + \int_0^t |\Delta_q g u|_q^q \, d\tau$$
$$\leqq c \left[|(-\Delta_q + I)^{1 - 1/(q+\varepsilon)} g(0) u_0|_q^q + \int_0^t |gf|_q^q \, d\tau + \int_0^t |g' u|_q^q \, d\tau \right] + c(u) \int_0^t |gu|_q^q \, d\tau$$

gilt für alle $0 < t < T$ *und alle* $g \in C^1([0, T))$.

Beweis. Sei $v \in \mathscr{C}(G)^n$ und $h \in C_0^2([0,T))$. Dann gilt $hv \in \mathscr{C}(G^T)^n$. Zur Abkürzung sei $\tilde{A}_q = \tilde{A}$, $\Delta_q = \Delta$, ... Die Norm in $L^q(0,t; L^q(G)^n)$ bezeichnen wir mit $|\cdot|_{q,q,t}$ und die Norm in $L^q(G)^n$ wie zuvor mit $|\cdot|_q$. Dabei ist es zweckmäßig, anstelle von q gelegentlich $1/q$ als Index zu verwenden. Wir setzen

$$J_m := (I + (1/m)\tilde{A}_q)^{-1} = (I + (1/m)\tilde{A})^{-1} \qquad \text{für } m = 1, 2, \ldots.$$

Der Index m kann zunächst unterdrückt werden: $J_m = J$. Damit setzen wir $v = JJ^{-1}v = Jw$ mit $w := J^{-1}v$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&-(u,(hv)')_{G^T} - (u_0, h(0)v)_G + (\nabla u, \nabla(hv))_{G^T} + (u \circ \nabla u, hv)_{G^T} \\
&= -\int_0^T (Ju, w)_G h' \, dt - (Ju_0, w)_G h(0) - \int_0^T (u, P\Delta Jw)_G h \, dt + \int_0^T (JPu \circ \nabla u, w)_G h \, dt \\
&= \int_0^T (JPf, w)_G h \, dt.
\end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir: $JPu \circ \nabla u \in L^q(0,t; L^q(G)^n)$ $(0 < t < T)$. Mit (2.2) folgt

$$\begin{aligned}
|JPu \circ \nabla u|_q = |JPAA^{-1}\nabla \circ (uu)|_q &\leqq c_1 |A^{-1}\nabla \circ (uu)|_q \\
&\leqq c_1 |A^{-1}\nabla \circ (u - u_k)u|_q + c_1 |A^{-1}\nabla \circ u_k u|_q \\
&\leqq c_1 |A^{-1/2}A^{-1/2}\nabla \circ (u - u_k)u|_q + c_2 |u_k u|_q \\
&\leqq c_3 |A^{-1/2}\nabla \circ (u - u_k)u|_{(1/q)+(1/n)} + c_2 |u_k u|_q \\
&\leqq c_4 |(u - u_k)u|_{(1/q)+(1/n)} + c_2 |u_k u|_q \\
&\leqq c_5 |u - u_k|_n |u|_q + c_2 |u_k u|_q.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$|JPu \circ \nabla u|_{q,q,t} \leqq c_6 [|u - u_k|_{n,\infty,T} |u|_{q,q,t} + |u_k|_{\infty,\infty,T} |u|_{q,q,t}] < \infty.$$

Mit $(u, P\Delta Jw)_G = (P\Delta Ju, w)_G$ und wegen $JPu \circ \nabla u$, JPf, $P\Delta Ju \in L^q(0,t; L^q(G)^n)$ erhält man aus der obenstehenden für alle $h \in C_0^2([0,T))$ geltenden Gleichung das Ergebnis $(Ju, w)'_G \in L^q([0,t])$ und

$$(Ju, w)'_G - (P\Delta Ju, w)_G + (JPu \circ \nabla u, w)_G = (JPf, w)_G, \quad ((Ju)(0), w)_G = (Ju_0, w)_G.$$

Mit der Abkürzung $\tilde{f} := P\Delta Ju - JPu \circ \nabla u + JPf$ folgt

$$((Ju)(t), w)_G = (Ju_0, w)_G + \left(\int_0^t \tilde{f}(\tau)\, d\tau, w\right)_G$$

und

$$\left(Ju(t) - Ju_0 - \int_0^t \tilde{f}(\tau)\, d\tau, w\right)_G = 0 \qquad \text{für } 0 < t < T.$$

Dies gilt für alle $w = J^{-1}v = (I + (1/m)\tilde{A}_q)v$ mit $v \in \mathscr{C}(G)^n$. Offenbar ist $\mathscr{C}(G)^n$ ein definierender Bereich (core) für $\tilde{\Delta}_q$ und damit auch für $\tilde{A}_q$. Daher ist $J^{-1}\mathscr{C}(G)^n$

dicht in $\tilde{L}^q(G)^n$ und wir erhalten

$$Ju(t)=Ju_0+\int_0^t \tilde{f}(\tau)\,d\tau \quad (0<t<T), \qquad (Ju)(0)=Ju_0.$$

Hieraus folgt

$$(Ju)'-P\Delta Ju+JPu\circ\nabla u=JPf$$

und damit erhält man

$$(3.3) \qquad (Ju)'+\tilde{A}_q Ju=-JPu\circ\nabla u+JPf+Ju, \qquad Ju(0)=Ju_0.$$

Auf jedem Intervall $[0,t)$ sind damit alle Voraussetzungen erfüllt, um Satz (2.1) anwenden zu können. Wir erhalten

$$Ju(t)=(\exp(-t\tilde{A}_q))Ju_0+\int_0^t(\exp-(t-\tau)\tilde{A}_q)(-JPu\circ\nabla u+JPf+Ju)\,d\tau$$

und die Abschätzung

$$|A_qJu|_{q,q,t}^q\leqq K[|A^{1-1/q}Ju_0|_q^q+|JPu\circ\nabla u|_{q,q,t}^q+|JPf|_{q,q,t}^q+|Ju|_{q,q,t}^q]$$

mit einer Konstanten $K>0$.

Das weitere Vorgehen besteht nun darin, den nichtlinearen Term $|JPu\circ\nabla u|_{q,q,t}^q$ abzuschätzen und mit der linken Seite zu verrechnen. Genauer: Wir suchen zu jedem vorgegebenen $\eta>0$ ein $c_1(u)>0$ derart, daß

$$|JPu\circ\nabla u|_{q,q,t}^q\leqq\eta\,|A_qJu|_{q,q,t}^q+c_1(u)\,|Ju|_{q,q,t}^q$$

gilt. Für genügend kleines η gelangt man dann für $m\to\infty$ zur Abschätzung unter (3.2) b) mit $g\equiv 1$.

Zunächst wird der nichtlineare Term zerlegt. Mit $u=J^{-1}Ju=Ju+(1/m)\tilde{A}Ju$ erhält man

$$\begin{aligned}JPu\circ\nabla u&=JPu\circ\nabla Ju+JPu\circ\nabla(1/m)\tilde{A}Ju=JPu\circ\nabla Ju+(1/m)JP\nabla\circ(u\tilde{A}Ju)\\&=JP(u-u_k)\circ\nabla Ju+JPu_k\circ\nabla Ju+(1/m)JP\nabla\circ(u-u_k)\tilde{A}Ju\\&\quad+(1/m)JP\nabla\circ u_k\tilde{A}Ju=:I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}$$

Mit Lemma (2.2) folgt

$$|JP(u-u_k)\circ\nabla Ju|_q\leqq c_1\,|u-u_k|_{1/n}\,|\nabla Ju|_{(1/q)-(1/n)}\leqq c_2\,|u-u_k|_{1/n}\,|AJu|_{1/q}$$

und

$$|JP(u-u_k^{)}\circ\nabla\{u|_{q,q,t}\leqq c_2\,|u-u_k|_{n,\infty,T}\,|AJu|_{q,q,t}.$$

Für den zweiten Term ergibt sich mit $M>0$:

$$\begin{aligned}|JPu_k\circ\nabla Ju|_q&\leqq c_1\,|u_k\circ\nabla Ju|_q\leqq c_2\,|u_k|_\infty\,|AJu|_q^{1/2}\,|Ju|_q^{1/2}\\&\leqq c_2(M^2/2)\,|u_k|_\infty\,|AJu|_q+c_2(1/2M^2)\,|u_k|_\infty\,|Ju|_q,\end{aligned}$$

$$|JPu_k\circ\nabla Ju|_{q,q,t}\leqq c_3[(M^2/2)\,|u_k|_{\infty,\infty,T}\,|AJu|_{q,q,t}+(1/2M^2)\,|u_k|_{\infty,\infty,T}\,|Ju|_{q,q,t}].$$

Aus Lemma (2.2) folgt die Beschränktheit (der Abschließung) der Operatoren $A^{-1/2}\nabla$ und $\tilde{A}^{-\rho}P\nabla$ für irgend ein ρ mit $(1/2)<\rho<1$. Hieraus und aus den Abschätzungen $|(1/m)\tilde{A}J|\leqq c_1$, $|(1/m)\tilde{A}^{\rho}J|\leqq c_2(1+m)^{-(1-\rho)}$ folgt:

$$\begin{aligned}|I_3|_q &= |(1/m)\tilde{A}JA^{-1/2}A^{-1/2}\nabla\circ(u-u_k)\tilde{A}Ju|_q \leqq c_1|A^{-1/2}A^{-1/2}\nabla\circ(u-u_k)\tilde{A}Ju|_q\\ &\leqq c_3|A^{-1/2}\nabla\circ(u-u_k)\tilde{A}Ju|_{(1/q)+(1/n)} \leqq c_4|(u-u_k)\tilde{A}Ju|_{(1/q)+(1/n)}\\ &\leqq c_5|u-u_k|_{1/n}|AJu|_{1/q},\end{aligned}$$

$$|I_3|_{q,q,t}\leqq c_5|u-u_k|_{n,\infty,T}|AJu|_{q,q,t},$$

$$\begin{aligned}|I_4|_q &= |(1/m)\tilde{A}^{\rho}J\tilde{A}^{-\rho}P\nabla\circ u_k\tilde{A}Ju|_q \leqq c_6(1+m)^{-(1-\rho)}|u_k\tilde{A}Ju|_q\\ &\leqq c_7(1+m)^{-(1-\rho)}|u_k|_\infty|AJu|_q,\end{aligned}$$

$$|I_4|_{q,q,t}\leqq c_7(1+m)^{-(1-\rho)}|u_k|_{\infty,\infty,T}|AJu|_{q,q,t}.$$

Hieraus erhält man, daß bei vorgegebenem $\eta>0$ ein m_0 und ein $c_1(u)>0$ gefunden werden kann so, daß für $m\geqq m_0$ folgendes gilt:

$$|JPu\circ\nabla u|^q_{q,q,t}\leqq\eta|AJu|^q_{q,q,t}+c_1(u)|Ju|^q_{q,q,t}.$$

Aus dieser und der folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned}|A^{1-1/q}Ju_0|_q &\leqq c_1|\tilde{A}^{1-1/(q+\bar{\varepsilon})}Ju_0|_q = c_1|J\tilde{A}^{1-1/(q+\bar{\varepsilon})}u_0|_q\\ &\leqq c_2|A^{1-1/(q+\varepsilon)}u_0|_q, \qquad \varepsilon>\bar{\varepsilon}>0,\end{aligned}$$

(aus (2.2) folgt, daß dies unter Verwendung von [5] auch mit $\varepsilon=0$ gilt) erhält man für $m\geqq m_0$ eine Abschätzung der Form

$$|AJ_m u|^q_{q,q,t}\leqq c_3[|A^{1-1/(q+\varepsilon)}u_0|^q_q+|f|^q_{q,q,t}]+c_2(u)|J_m u|^q_{q,q,t}.$$

Für $m\to\infty$ erhält man hieraus die Behauptungen (3.2) a) und (3.2) b) im Fall $g\equiv 1$. Mit einem beliebigen $g\in C^1([0,T))$ erhalten wir aus (3.3) die Beziehung

$$(J(gu))'+\tilde{A}J(gu)=-JPu\circ\nabla(gu)+JP(gf)+Jg'u+J(gu).$$

Damit kann die obenstehende Rechnung wiederholt werden; der nichtlineare Term ist zu ersetzen durch $JPu\circ\nabla(gu)$. Damit gelangt man zur Abschätzung

$$\begin{aligned}|AJ_m gu|^q_{q,q,t} &\leqq c_4[|A^{1-1/(q+\varepsilon)}g(0)u_0|^q_q+|gf|^q_{q,q,t}+|J_m g'u|^q_{q,q,t}]\\ &\quad +c_2(u)|J_m gu|^q_{q,q,t},\end{aligned}$$

aus der für $m\to\infty$ die Behauptung (3.2)b) folgt. Damit ist (3.2) bewiesen.

(3.4) *Ergänzung*. Auf der linken Seite von (3.2)b) kann (nach Wahl von anderen Konstanten c, $c(u)>0$) noch der Term $|(-\Delta_q+I)^{1-1/\bar{q}}g(t)u(t)|^q_q$ hinzugefügt werden; dabei ist $2<\bar{q}<q$ und für $q=2$ ist $\bar{q}=2$ zugelassen. In der Abschätzung unter (3.2)b) kann f durch Pf ersetzt werden. In der Voraussetzung von (3.2) genügt es, $f\in L^q(0,t;L^q(G)^n)$ für alle $0<t<T$ zu verlangen.

Die Einschränkung $q<n$ in (3.2) ist unwesentlich. Man kann sich mit Hilfe eines Standard-Schlusses von dieser Einschränkung befreien. Dazu bringt man

(1.1) in die Form $u'-P\Delta u=-Pu\circ\nabla u+Pf$. Da q beliebig nahe unterhalb n sein kann, erhält man mit Hilfe von (2.6) Informationen über $Pu\circ\nabla u$, die es erlauben, direkt (2.1) anzuwenden. Dann wird wieder (2.6) angewendet und der Schluß wird wiederholt. Damit gelangt man zur nächsten Aussage, die zur Vereinfachung etwas spezieller formuliert ist.

(3.5) **Satz.** *Sei* $2\leqq q<\infty$, $f\in L^2(G^T)^n\cap L^q(G^T)^n$, $u_0\in D(\Delta_2)\cap D(\Delta_q)\cap \tilde{L}^q(G)^n$ *und sei* u *eine schwache Lösung von* (1.1) *mit* $u\in L^q(0,t;L^q(G)^n)\cap L^2(0,t;\tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$ *für* $0<t<T$. *Es existiere eine Folge* (u_k) *wie in* (3.2). *Dann folgt* $u'\in L^q(0,t;L^q(G)^n)$, $u\in L^q(0,t;D(\Delta_q))$ *für alle* $0<t<T$.

Im folgenden werden einige hinreichende Bedingungen für die Existenz der Folge (u_k) in Satz (3.2) angegeben. Für $T<\infty$ gilt „d) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a)“ und die Bedingung a) ist nach Satz (3.2) unmittelbar evident. Die Einschränkung $q<n$ kann wieder wie oben eliminiert werden.

(3.6) **Satz.** *Sei* $2\leqq q<n$, $f\in L^q(0,T;L^q(G)^n)$, $u_0\in D((-\Delta_q+I)^{1-1/(q+\varepsilon)})\cap\tilde{L}^q(G)^n$ $(\varepsilon>0$, *im Fall* $q=2$ *sei* $\varepsilon=0$ *zugelassen) und sei* $u\in L^q(0,T;\tilde{H}_0^{1,q}(G)^n)$ *eine schwache Lösung von* (1.1). *Dann ist im Falle eines beschränkten Intervalls* $[0,T]$ *jede der folgenden Bedingungen* a), b), c) *und* d) *hinreichend für die Aussage* $u'\in L^q(0,T;L^q(G)^n)$, $u\in L^q(0,T;H^{2,q}(G)^n)$.

a) *u liegt im* $L^\infty(0,T;L^n(G)^n)$*-Abschluß von* $L^\infty(G^T)^n\cap L^\infty(0,T;L^n(G)^n)$.

b) *u ist gleichmäßiger Limes* $L^n(G)^n$*-wertiger meßbarer Funktionen auf* $[0,T]$, *deren Wertebereich endlich ist.*

c) $u(t)\in L^n(G)^n$ *für alle* $t\in[0,T]$ *und der Graph* $\{(t,u(t))\,|\,t\in[0,T]\}$ *ist eine kompakte Teilmenge von* $[0,T]\times L^n(G)^n$.

d) $u(t)\in L^n(G)^n$ *für alle* $t\in[0,T]$ *und* $u\colon[0,T]\to L^n(G)^n$ *ist eine stetige Funktion.*

Wesentlich ist dabei, daß die Folge (u_k) in (3.2) nicht divergenzfrei zu sein braucht und auch keine Differenzierbarkeitseigenschaften zu haben braucht. In einem gewissen Sinn kann daher (3.2) als eine Erweiterung und Vereinfachung eines Homotopie-Kriteriums von v. Wahl [25; S. 276] angesehen werden. Dort ist es erforderlich, die schwache Lösung u bezüglich der $L^\infty(0,T;L^n(G)^n)$-Norm durch schwache Lösungen von (1.1) zu approximieren; hier brauchen die u_k keine Lösungen und auch nicht regulär zu sein. Außerdem gilt (3.2) auch für Außengebiete. Dagegen brauchen die schwachen Lösungen in [25] nicht in $L^\infty(G^T)^n$ zu liegen.

Das Kriterium d) ist für beschränkte Gebiete G von v. Wahl [26] angegeben worden. Die übrigen Bedingungen sind Erweiterungen dieses Kriteriums.

Satz (3.2) gilt analog, wenn $u\circ\nabla u$ in (1.1) durch $v\circ\nabla u$ ersetzt wird, wobei v die gleichen Eigenschaften wie u besitzt und vorgegeben ist. Damit kann der stationäre Fall $u'\equiv 0$ sehr einfach auf den instationären Fall zurückgeführt werden.

Sei $f\in L^q(G)^n$, $q\geqq 2$. Dann heißt $u\in\tilde{H}_0^{1,q}(G)^n$ eine schwache Lösung der stationären Gleichungen von Navier-Stokes

$$(3.7)\qquad -\Delta u+u\circ\nabla u+\nabla\pi=f,\qquad \operatorname{div}u=0,\ u|_{\partial G}=0,$$

wenn $(\nabla u,\nabla v)_G+(u\circ\nabla u,v)_G=(f,v)_G$ gilt für alle $v\in\mathscr{C}(G)^n$.

Wir wählen ein $g \in C^1([0, T))$ mit kompaktem Träger in $(0, T)$, das nicht identisch verschwindet. Dann wenden wir auf die zeitabhängige Gleichung $(gu)' - \Delta(gu) + u \circ \nabla(gu) + \nabla(g\pi) = gf + g'u$, $(gu)(0) = 0$, die vorigen Ergebnisse an und erhalten den folgenden Satz.

(3.8) **Satz.** *Sei* $2 \leqq q < n$, $p \geqq q$, $f \in L^p(G)^n \cap L^q(G)^n$ *und sei* $u \in \tilde{H}_0^{1,q}(G)^n$ *eine schwache Lösung von* (3.7). *Es gelte* $u \in L^r(G)^n$ *für irgendein* r *mit* $n \leqq r \leqq \infty$. *Dann folgt* $u \in H^{2,p}(G)^n$.

Durch die Voraussetzung an u ist sichergestellt, daß stets eine der beiden Aussagen $u \in L^n(G)^n$ oder $u \in L^\infty(G)^n$ erfüllt ist. Die Aussage von (3.8) ist für $n = 4$ und ein beschränktes Gebiet G bekannt (Gerhardt [3]). Für ein beschränktes Gebiet genügt es, in der Voraussetzung $q = 2$ und $r = n$ zu betrachten. Für $n = 4$ ist „$u \in L^n(G)^n$" eine Folge der Aussage „$u \in H_0^{1,2}(G)^n$". Dies gilt auch für $n = 3$ [23]. Wahrscheinlich läßt sich jedoch die Methode von Gerhardt [3] auch auf stationäre Gleichungen in höheren Dimensionen übertragen, mindestens für beschränkte Gebiete. Die Möglichkeit von $q > 2$ und $r > n$ ist nur für Außengebiete von Interesse.

Die Aussage $u \in H^{2,p}(G)^n$ enthält im Falle eines Außengebietes G auch Informationen über das Verhalten von $|u(x)|$ und $|\nabla u(x)|$ für $|x| \to \infty$; nach bekannten Einbettungssätzen [1; 5.15] folgt $|u(x)| \to 0$ aus $2 - n/p > 0$ und $|\nabla u(x)| \to 0$ aus $1 - n/p > 0$. Entsprechende Aussagen erhält man auch im instationären Fall $u(t, x)$, wobei hier noch der Fall $t \to \infty$ hinzutritt.

4. Regularitätseigenschaften im Fall $u \in L^s(0, T; L^r(G)^n)$ mit $(q/s) + (n/r) = 1$, $r > n$, $q \geqq 2$, $s > q$

Auch in diesem Abschnitt ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ wie zuvor ein Innen- oder Außengebiet mit $C^{2+\mu}$-glattem Rand, $0 < T \leqq \infty$ und $G^T := (0, T) \times G$. Die übliche Voraussetzung $u \in L^\infty(0, T; L^2(G)^n) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0, T; \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$ einer schwachen Lösung u im Sinne von Hopf [10] wird im nachfolgenden Hauptsatz dieses Abschnittes wieder etwas abgeschwächt. Im kritischen Grenzfall $(2/s) + (n/r) = 1$ mit $r > n$, $s > 2$ ist ein Regularitätssatz im Fall $G = \mathbb{R}^n$ bekannt (Fabes-Jones-Riviere [6]). Der folgende Satz bezieht diesen Grenzfall mit ein; allerdings wird in diesem Fall das Resultat von Giga [5] benutzt, das auf [4] beruht. Auch dieser Satz ist stets für $\varepsilon = 0$ richtig. Dabei muß wieder das Resultat von Giga verwendet werden, was wir jedoch an dieser Stelle vermeiden wollen. Die Wachstumsabschätzungen mit der Gewichtsfunktion $g(t)$ können sowohl für kleine $t > 0$ (bei lokaler Regularität) als auch für große t verwendet werden.

(4.1) **Satz.** *Sei* $r > n$, $2 \leqq q < r$, $p \geqq 2$, $\varepsilon > 0$ *(im Fall* $q = 2$ *sei* $\varepsilon = 0$ *zugelassen),* $f \in L^q(0, T; L^q(G)^n)$, $u_0 \in D((-\Delta_q + I)^{1 - 1/(q+\varepsilon)}) \cap \tilde{L}^q(G)^n$ *und sei* u *eine schwache Lösung von* (1.1) *mit* $u \in L^{qr/n}(0, t; L^q(G)^n) \cap L^p(0, t; \tilde{H}_0^{1,p}(G)^n)$ *für alle* $0 < t < T$. *Es gelte* $u \in L^s(0, t; L^r(G)^n)$ *für alle* $0 < t < T$, *wobei* $s > q$ *und* $(q/s) + (n/r) = 1$ *sei. Dann folgt:*

a) $u' \in L^q(0, t; L^q(G)^n)$, $u \in L^q(0, t; D(\Delta_q))$ $(\subseteq L^q(0, t; H^{2,q}(G)^n))$ *für alle* $0 < t < T$.

b) *Es gibt ein* $c = c(G, q, r, \varepsilon) > 0$ *derart, daß für alle* $0 < t < T$ *und alle*

$g \in C^1([0,T))$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\int_0^t |(gu)'|_q^q \, d\tau + \int_0^t |\Delta_q g u|_q^q \, d\tau \leqq c \left[|(-\Delta_q + I)^{1-1/(q+\varepsilon)} g(0) u_0|_q^q + \int_0^t |gf|_q^q \, d\tau + \int_0^t |gu|_q^q \, d\tau + \int_0^t |g' u|_q^q \, d\tau \right] \exp\left(c \int_0^t |u|_r^s \, d\tau \right).$$

Dabei kann im Falle eines beschränkten Gebietes G der Term $\int_0^t |gu|_q^q \, d\tau$ weggelassen werden; im Fall $g(0)=0$ braucht für b) *nur $u_0 \in \tilde{L}^q(G)^n$ zu gelten.*

Bemerkung. Auf der linken Seite unter b) kann (nach Wahl einer anderen Konstanten $c>0$) noch der Term $|(-\Delta_q + I)^{1-1/\bar{q}} g(t) u(t)|_q^q$ (mit $2<\bar{q}<q$ und $\bar{q}=2$ im Fall $q=2$) hinzugefügt werden. Dies folgt aus dem nachfolgenden Beweis; aus (2.6) würde nur eine etwas schwächere Aussage folgen.

Beweis. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von (3.2), modifizieren jedoch die Bedeutung von $J=J_m$ $(m=1,2,\ldots)$. Wir wählen ein $\bar{r}$ mit $r>\bar{r}>n$ und setzen $J=J_m := (I+(1/m)\tilde{A}^{\bar{\beta}})^{-1}$ mit $\bar{\beta} := (1+n/\bar{r})/2$, $\tilde{A}=\tilde{A}_q$. Sei $\beta := (1+n/r)/2$.

Zunächst zeigen wir, daß $|JPu \circ \nabla u|_{q,q,t} < \infty$ gilt für $0<t<T$. Dies erhält man aus der folgenden Abschätzung. Mit (2.2) folgt wegen $\beta < \bar{\beta}$:

$$\begin{aligned} |JPu \circ \nabla u|_q &= |JP \nabla \circ (uu)|_q = |\tilde{A}^{\bar{\beta}} J \tilde{A}^{-\bar{\beta}} P A^{\beta} A^{-n/2r} A^{-1/2} \nabla \circ (uu)|_q \\ &\leqq c_1 |A^{-n/2r} A^{-1/2} \nabla \circ (uu)|_q \leqq c_2 |A^{-1/2} \nabla \circ (uu)|_{(1/q)+(1/r)} \\ &\leqq c_3 |uu|_{(1/q)+(1/r)} \leqq c_4 |u|_q |u|_r \end{aligned}$$

und

$$|JPu \circ \nabla u|_{q,q,t} \leqq c_4 \left(\int_0^t |u|_q^q |u|_r^q \, d\tau \right)^{1/q} \leqq c_4 |u|_{r,s,t} |u|_{q,qr/n,t} < \infty .$$

Wie im Beweis von (3.2) erhalten wir damit die Gleichung

$$(4.2) \qquad (Ju)' - P\Delta J u = -JPu \circ \nabla u + JPf, \quad (Ju)(0) = Ju_0 \qquad (0<t<T).$$

Dabei wird lediglich $u_0 \in \tilde{L}^q(G)^n$ verwendet. Wir wählen nun ein $\bar{q}$ mit $2<\bar{q}<q$ im Fall $q>2$ und mit $\bar{q}=2$ im Fall $q=2$. Unter Verwendung von (2.1) und (2.4) gelangt man damit zur folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned} &|(Ju)'|_{q,q,t}^q + |AJu|_{q,q,t}^q + |A^{1/\bar{q}'} J u(t)|_q^q \\ &\quad \leqq c [|A^{1/q'} J u_0|_q^q + |JPf|_{q,q,t}^q + |Ju|_{q,q,t}^q + |JPu \circ \nabla u|_{q,q,t}^q]. \end{aligned}$$

Dabei kann für ein beschränktes Gebiet G der Term $|Ju|_{q,q,t}^q$ rechts weggelassen werden.

Zur Abschätzung des nichtlinearen Terms $|JPu \circ \nabla u|_q^q$ benutzen wir wieder die Identität $u = J^{-1} J u = Ju + (1/m) \tilde{A}^{\bar{\beta}} J u$. Man erhält mit (2.2):

$$JPu \circ \nabla u = JPu \circ \nabla J u + (1/m) JP \nabla \circ (u \tilde{A}^{\bar{\beta}} J u) =: I_1 + I_2,$$

$$|I_1|_q \leqq c_1 |u \circ \nabla J u|_q \leqq c_2 |u|_{1/r} |\nabla J u|_{(1/q)-(1/r)} \leqq c_3 |u|_r |A^{1/2} J u|_{(1/q)-(1/r)}$$
$$\leqq c_4 |u|_r |A^{(1+n/r)/2} J u|_q \leqq c_5 |u|_r |\tilde{A}^{\beta} J u|_q,$$
$$|I_2|_q = |(1/m) \tilde{A}^{\beta} J \tilde{A}^{-\beta} P A^{\beta} A^{-\beta} \nabla \circ (u \tilde{A}^{\beta} J u)|_q$$
$$\leqq |(1/m) \tilde{A}^{\beta} J|_q |\tilde{A}^{-\beta} P A^{\beta}|_q |A^{-\beta} \nabla \circ (u \tilde{A}^{\beta} J u)|_q \leqq c_6 |A^{-\beta} \nabla \circ (u \tilde{A}^{\beta} J u)|_q$$
$$= c_6 |A^{-n/2r} A^{-1/2} \nabla \circ (u A^{\beta} J u)|_q \leqq c_7 |A^{-1/2} \nabla \circ (u \tilde{A}^{\beta} J u)|_{(1/q)+(1/r)}$$
$$\leqq c_8 |u \tilde{A}^{\beta} J u|_{(1/q)+(1/r)} \leqq c_9 |u|_r |\tilde{A}^{\beta} J u|_q.$$

Es folgt $|J P u \circ \nabla u|_q \leqq c_{10} |u_r| |\tilde{A}^{\beta} J u|_q$. Im Fall $q > 2$ können wir $\bar{r}$ nun so wählen, daß $\bar{q} = 2(1 - n/r)(1 - n/\bar{r})^{-1}$ gilt. Dann erhält man $\bar{\beta} = (1 + n/\bar{r})/2 = (1/\bar{q}') + n/\bar{q} r$ und es folgt

$$|\tilde{A}^{\beta} J u|_q = |(\tilde{A}^{1/\bar{q}})^{n/r} (\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u)|_q \leqq c_{11} |\tilde{A} J u|_q^{n/r} \cdot |\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u|_q^{1-n/r}.$$

Mit beliebigem $K > 0$ erhält man damit

$$|J P u \circ \nabla u|_q \leqq c_{12} K^{r/n} |A J u|_q + c_{13} K^{-(1/(1-n/r))} |u|_r^{1/(1-n/r)} |\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u|_q.$$

Im Grenzfall $q = 2$, $\bar{q} = 2$ ist nur $\bar{r} = r$ möglich. Dann gelten die obenstehenden Abschätzungen ebenfalls; jedoch muß dann Lemma (2.2) (mit der dort verwendeten Bezeichnung) im Grenzfall $\alpha = \beta$ angewendet werden; hierzu wird das Resultat von Giga [4, 5] verwendet.

Wählt man $K > 0$ hinreichend klein, so gelangt man schließlich mit einem $c > 0$ zur folgenden Abschätzung:

$$|(J u)'|_{q,q,t}^q + |A J u|_{q,q,t}^q + |\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u(t)|_q^q$$
$$\leqq c \left[|A^{1/q'} J u_0|_q^q + |J P f|_{q,q,t}^q + |J u|_{q,q,t}^q + \int_0^t |u|_r^s |\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u|_q^q \, d\tau \right]$$
$$(0 < t < T).$$

Wir setzen

$$y(t) := |(J u)'|_{q,q,t}^q + |A J u|_{q,q,t}^q + |\tilde{A}^{1/\bar{q}'} J u(t)|_q^q,$$
$$h_1(t) := c(|A^{1/q'} J u_0|_q^q + |J P f|_{q,q,t}^q + |J u|_{q,q,t}^q)$$

und

$$h_2(t) := c\, |u(t)|_r^s$$

und erhalten $y \in L^\infty([0, t])$, $y(t) \leqq h_1(t) + \int_0^t h_2(\tau)\, y(\tau)\, d\tau$ für $0 \leqq t < T$. Nach dem Lemma von Gronwall [27, 22] erhält man dann $y(t) \leqq Y(t)$, wobei $Y(t)$ gegeben ist durch $Y(t) = h_1(t) + \int_0^t h_2(\tau)\, Y(\tau)\, d\tau$. Eine elementare Rechnung ergibt $Y(t) \leqq h_1(t) \exp\left(\int_0^t h_2(\tau)\, d\tau\right)$.

Hieraus und aus der Abschätzung

$$|A^{1/q'} J u_0|_q \leqq c_1 |\tilde{A}^{1-1/(q+\bar{\varepsilon})} J u_0|_q = c_1 |J \tilde{A}^{1-1(/q+\bar{\varepsilon})} u_0|_q$$
$$\leqq c_2 |A^{1-1/(q+\varepsilon)} u_0|_q \qquad (0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon)$$

folgt mit $m\to\infty$ die Behauptung (4.1)a) und (4.1)b) für $g\equiv 1$. Die Behauptung (4.1)b) für beliebiges $g\in C^1([0,T))$ folgt, indem man anstelle von (4.2) die Gleichung

$$(J g u)'-P\Delta J g u=-J P u\circ \nabla g u+J P g f+J g' u, \qquad (J g u)(0)=J g(0) u_0$$

verwendet und die gleiche Rechnung wiederholt. Unter Verwendung von [4, 5] erhält man nach (2.2) die schärfere Abschätzung $|A^{1/q'} J u_0|_q \leqq c_2 |\tilde{A}^{1/q'} J u_0|_q = c_2 |J \tilde{A}^{1/q'} u_0|_q \leqq c_3 |A^{1/q'} u_0|_q$, woraus folgt, daß (4.1) auch mit $\varepsilon=0$ richtig ist. Im Fall $q=2$ gilt diese Abschätzung ohnehin und sie entfällt im Fall $g(0)=0$; dann braucht nur $u_0\in \tilde{L}^q(G)^n$ zu gelten. Damit ist (4.1) bewiesen.

In den folgenden Sätzen werden einige spezielle Fälle untersucht. Zunächst sei $q=2$, $p=2$, $g\equiv 1$ und u sei eine Hopfsche Lösung, die in einer Halbumgebung $[0,T)$ von 0 regulär sei; hierzu genügt $\int_0^t |u|_r^s\,d\tau<\infty$ für $0<t<T$ mit $(2/s)+(n/r)=1$, $r>n$. Dann kann eine Wachstumsschranke für $\int_0^t |\Delta_2 u(\tau)|_2^2\,d\tau$ angegeben werden.

(4.3) **Satz.** *Sei* $f\in L^2(0,T;L^2(G)^n)$, $u_0\in \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n$ *und sei*

$$u\in L^\infty(0,T;L^2(G)^n)\cap L^2(0,T;\tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$$

eine schwache Lösung von (1.1) *im Fall* $0<T<\infty$. *Es gelte* $\int_0^t |u|_r^s\,d\tau<\infty$ *für* $0<t<T$ *mit* $s>2$, $r>n$, $(2/s)+(n/r)=1$. *Dann folgt*

$$\int_0^t |u'|_2^2\,d+\int_0^t |\Delta_2 u|_2^2\,d\tau$$
$$\leqq c\left(|\nabla u_0|_2^2+|u_0|_2^2+\int_0^t |f|_2^2\,d\tau+\int_0^t |u|_2^2\,d\tau\right)\exp\left(c\int_0^t |u|_r^s\,d\tau\right)$$

für alle $0<t<T$ *und mit einem* $c>0$.

Sei $n=3$, $f\in L^2(0,T;L^2(G)^n)$ und u_0 wie in (4.3). Dann kann (4.3) auf eine lokal existierende starke Lösung angewendet werden (im Sinne von [9; Theorem 2.1]); auf dem Existenzintervall $[0,T)$ sind dann die Voraussetzungen von (4.3) erfüllt.

Im nächsten Satz untersuchen wir schwache Lösungen für große t. Um die Abschätzung unter (4.1)b) anwenden zu können, ist es erforderlich, hinreichende Bedingungen an die Daten zu finden derart, daß die rechte Seite $<\infty$ ist. Der Anfangswert u_0 kann ignoriert werden, da $g(0)=0$ angenommen werden kann. Im Falle eines beschränkten Gebietes entfällt der Term $\int_0^t |g u|_q^q\,d\tau$. Um den Term mit g' eliminieren zu können, genügt es offenbar, daß $g'(t)/g(t)\to 0$ gilt für $t\to\infty$. Dann kann für hinreichend große t dieser Term mit der linken Seite verrechnet werden. Ein Beispiel hierfür ist $g(t):=t^\beta$ mit $\beta>0$. Um auch die Fälle $g(t)=\exp(at)$ einbeziehen zu können, betrachten wir etwas allgemeiner Scharen $g_a(t)$ mit $0\leqq a<\infty$, wobei zugelassen ist, daß g_a nicht von a abhängt. Es genügt dann zu fordern, daß $g_a'(t)/g_a(t)\to 0$ gilt für $t\to\infty$, $a\to 0$ (als Zweifach-Limes):

Sei g_a für $0 \leqq a < \infty$ stetig differenzierbar und positiv auf $(0, \infty)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere $t_0 > 0$, $a_0 > 0$ derart, daß $|g_a'(t)/g_a(t)| \leqq \varepsilon$ gilt für alle $t \geqq t_0$ und $0 \leqq a \leqq a_0$.

Im Fall $n=3$ können nach Masuda [12] und Heywood [8] Bedingungen für f aus (1.1) angegeben werden, unter denen $\int_t^\infty |u|_r^s \, d\tau < \infty$ gilt für hinreichend große t und mit s und r wie in (4.1). Damit gelangt man schließlich zu Abschätzungen (decay) von der Form

$$|(-\Delta_q + I)^{1-1/(q-\varepsilon)} u(t)|_q \leqq c/g_a(t) \qquad (t \geqq t_0,\ 0 \leqq a \leqq a_0)$$

im Falle eines beschränkten Gebietes G. Abschätzungen dieser Form sind in [8] nur in den Fällen $f=0$, $g_a(t) = \exp(at)$ und $g_a(t) = t^a$ $(a<1)$ angegeben worden und eine Erweiterung auf $f \neq 0$ scheint mit der Methode in [8] nicht möglich zu sein (vgl. [8; Abschnitt 4]). Im Fall $f \neq 0$ sind Abschätzungen dieser Form für $g_a(t) = g(t) = t^\beta$ mit gewissen Werten $0 < \beta < 1$ bekannt (Masuda [12]).

(4.4) **Satz.** *Sei $f \in L^2(0, \infty; L^2(G)^n)$, $u_0 \in \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n$ und sei $u \in L^\infty(0, \infty; L^2(G)^n) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(0, \infty; \tilde{H}_0^{1,2}(G)^n)$ eine schwache Lösung von (1.1). Sei $r > q \geqq 2$, $s > q$, $r > n$ mit $(q/s) + (n/r) = 1$ und sei $g_a(t)$ wie oben angegeben. Es gebe ein $t_0 > 0$ und ein $\alpha_0 > 0$ so, daß $\sup_{0 \leqq a \leqq a_0} \int_{t_0}^\infty |g_a f|_q^q \, d\tau < \infty$, $\int_{t_0}^\infty |u|_r^s \, d\tau < \infty$, $u \in L^{qr/n}_{\mathrm{loc}}(t_0, \infty, L^q(G)^n)$ und im Falle eines Außengebietes $\sup_{0 \leqq a \leqq a_0} \int_{t_0}^\infty |g_a u|_q^q \, d\tau < \infty$ gilt. Sei $2 < \bar{q} < q$ oder $2 = \bar{q} = q$. Dann gibt es Zahlen $t_1 \geqq t_0$, $0 < a_1 < a_0$ und $c > 0$ derart, daß*

$$|(-\Delta_q + I)^{1-1/\bar{q}} u(t)|_q \leqq c/g_a(t)$$

gilt für alle $t \geqq t_1$, $0 \leqq a \leqq a_1$.

Eine Hopfsche Lösung u von (1.1) genügt im Fall $n=3$ einer Abschätzung $|\nabla u(t)|_2 \leqq K t^{-1/4}$ $(K > 0)$ für alle hinreichend großen t, wenn folgendes gilt: $f \in L^1(0, \infty; L^2(G)^n)$, $\sup_{t>0} \left(\int_t^{t+1} |(d/d\tau) f|_2^2 \, d\tau \right) < \infty$, $\int_0^\infty \tau^{1/2} |(d/d\tau) f|_2 \, d\tau < \infty$ [12].

Setzt man diese Abschätzung voraus, dann folgt $\int_t^\infty |u|_r^s \, d\tau < \infty$ für alle hinreichend großen t, wenn folgende Konstanten gewählt werden: $r=6$, $2<q<6$, $n=3$, $4<s<12$, $(q/s)+(3/6)=1$, $s=2q$. Dann ist auch die Bedingung $u \in L^{q2}_{\mathrm{loc}}(t, \infty; L^q(G)^n)$ für alle hinreichend großen t erfüllt.

Wenn also u eine Hopfsche Lösung von (1.1) ist im Sinne von [12], wenn $f \in L^2(0, \infty; L^2(G)^n)$ mit $n=3$ die obenstehenden Bedingungen erfüllt und wenn $\sup_{0 \leqq a \leqq a_0} \int_0^\infty |g_a f|_q^q \, d\tau < \infty$ gilt (mit $2<q<6$ und $a_0>0$), dann folgt im Falle eines beschränkten Gebietes G die Abschätzung

$$|(-\Delta_q + I)^{1-1/\bar{q}} u(t)|_q \leqq c/g_a(t) \qquad (\text{mit } 2 < \bar{q} < q,\ \bar{q} = 2 \text{ für } q = 2)$$

für alle hinreichend großen t und kleinen a. Mit Hilfe von (4.4) kann also (für beschränkte Gebiete und $n=3$) die Abschätzung $|\nabla u(t)|_2 \leqq K/t^{1/4}$ erweitert werden.

Literatur

1. Adams, R.A.: Sobolev Spaces. New York-San Francisco-London: Academic Press 1975
2. Bemelmans, J.: Eine Außenraumaufgabe für die instationären Navier-Stokes-Gleichungen. Math. Z. **162**, 145–173 (1978)
3. Gerhardt, C.: Stationary Solutions to the Navier-Stokes Equations in Dimension Four. Math. Z. **165**, 193–197 (1979)
4. Giga, Y.: Analyticity of the Semigroup Generated by the Stokes Operator in L_r Spaces. Math. Z. **178**, 297–329 (1981)
5. Giga, Y.: The Stokes Operator in L_r Spaces. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **57**, 85–89 (1981)
6. Fabes, E.B., Jones, B.F., Riviere, N.M.: The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with Data in L^p. Arch. Rational Mech. Anal. **45**, 222–240 (1972)
7. Fujiwara, D., Morimoto, H.: An L_r-theorem of Helmholtz decomposition of vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24**, 685–700 (1977)
8. Heywood, J.G.: The Navier Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions. Indiana Univ. Math. J. **29**, 639–681 (1980)
9. Heywood, J.G., Rannacher, R.: Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem. SIAM J. Numer. Anal. **19**, 275–311 (1982)
10. Hopf, E.: Über die Anfangswertaufgaben für die hydrodynamischen Gleichungen. Math. Nachr. **4**, 213–231 (1951)
11. Krasnoselski, M.A.: Integral operators in spaces of summable functions. Leyden: Noordhoff International Publishing 1976
12. Masuda, K.: On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects. J. Math. Soc. Japan **27**, 294–327 (1975)
13. Miyakawa, T.: On the initial value problem for the Navier-Stokes equation in L^p-spaces. Hiroshima Math. J. **118**, 9–20 (1981)
14. Miyakawa, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. **12**, 115–140 (1982)
15. Nečas, J.: Les méthodes directes en theorie des équations elliptiques. Prague: Éditeurs Academia 1967
16. Seeley, R.: Norms and Domains of the Complex Powers A_B^z. Amer. J. Math. **93**, 299–309 (1971)
17. Serrin, J.: The initial value problem for the Navier-Stokes equations. Nonlinear Problems, Proceedings of a Symposium (Madison 1962), pp. 69–98. Madison, Wisconsin: Univ. of Wisconsin Press 1963
18. Serrin, J.: On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. Arch. Rational Mech. Anal. **9**, 187–195 (1962)
19. Sobolevski, P.E.: Study of Navier-Stokes equations by the methods of the theory of parabolic equations in Banach spaces. Soviet Math. Dokl. **5**, 720–723 (1964)
20. Solonnikov, V.A.: Estimates for solutions of nonstationary Navier-Stokes equations. J. Soviet Math. **8**, 467–529 (1977)
21. Solonnikov, V.A.: Estimates of the solutions of a nonstationary linearized system of Navier-Stokes equations. Amer. Math. Soc. Transl. **75**, 1–116 (1968)
22. Specovius, M.: Über einen Struktursatz von Leray für Lösungen Navier-Stokesscher Anfangswertaufgaben. Diplomarbeit, Universität-Gesamthochschule Paderborn 1981
23. Temam, R.: Navier-Stokes Equations. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland 1977
24. Triebel, H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland 1978
25. Wahl, W. von: Regularitätsfragen für die instationären Navier-Stokesschen Gleichungen in höheren Dimensionen. J. Math. Soc. Japan **32**, 263–283 (1980)
26. Wahl, W. von: Nichtlineare Evolutionsgleichungen. Teubner-Texte zur Math. **50**, pp. 294–302. Leipzig: Teubner 1983
27. Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
28. Yosida, K.: Functional Analysis. Grundlehren Math. Wiss. **123**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965

Eingegangen am 14. Februar 1983