

## Topologische Typen reeller kubischer Flächen

Horst Knörrer und Thomas Müller

Mathematisches Institut der Universität, Wegelestr. 10, D 5300 Bonn 1,  
Bundesrepublik Deutschland

Wir nennen zwei kubische Flächen im reell projektiven Raum  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  vom gleichen topologischen Typ, wenn sie sich kontinuierlich und ohne Gestaltungsänderung ineinander überführen lassen (für eine präzise Definition siehe (4.1) unten). Das Hauptziel dieser Arbeit ist, eine vollständige Klassifikation aller topologischen Typen von kubischen Flächen in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  anzugeben.

Im letzten Jahrhundert haben Schläfli [11], Klein [7] und Rodenberg [10] reelle kubische Flächen nach ähnlichen Kriterien klassifiziert. Allerdings sind sowohl die in diesen Arbeiten zugrundegelegten Äquivalenzbegriffe als auch die bei der Klassifikation verwendeten Methoden für heutige Standards nicht präzise genug formuliert. So finden sich dann auch in [7] und [11] unvollständige oder fehlerhafte Ergebnisse zur Einordnung gewisser Flächen mit gewöhnlichen Doppelpunkten in die Klassifikation. (In [10a] ist diese Lücke geschlossen, siehe auch [8]). Die Klassifikation bezüglich des feineren Äquivalenzbegriffs von (4.11) wird in [8] begonnen, aber nicht vollständig ausgeführt.

Deshalb erscheint es uns sinnvoll, die Frage nach der Klassifikation der reellen kubischen Flächen unter Verwendung der Sprache und Methoden der „modernen Singularitätentheorie“ noch einmal aufzugreifen.

Neben der Konfiguration der Singularitäten auf einer kubischen Fläche ist die Zahl der auf ihr liegenden Geraden eine wichtige Invariante. J.W. Bruce und C.T.C. Wall hatten in [2] eine Formel für die Anzahl der Geraden auf einer komplexen kubischen Fläche mit höchstens rationalen Doppelpunkten als Funktion der Milnorzahlen der Singularitäten beobachtet. In § 1 geben wir einen Beweis dieser Formel mit Hilfe der Darstellung der kubischen Fläche als Del Pezzo-Fläche; in § 2 wird dies zu einer Formel für die Anzahl der reellen Geraden auf einer reellen kubischen Fläche verfeinert. Den Homöomorphietyp von reellen kubischen Flächen mit nur rationalen Doppelpunkten als Singularitäten bestimmen wir in § 3. In § 4 schließlich wird die Klassifikation von topologischen Typen reeller kubischer Flächen (im wesentlichen im Stil von F. Klein [7, 8] durchgeführt).

Zu dieser Arbeit wurden wir angeregt durch das Projekt von G. Fischer [5], eine Sammlung von Photos mathematischer Modelle herauszugeben. Unter

diesen Modellen ist auch eine Serie von kubischen Flächen, die im Anschluß an die Arbeit [10] angefertigt wurden.

## 1. Geraden auf komplexen kubischen Flächen

Eine irreduzible kubische Fläche  $X$  in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ist entweder eine Regelfläche oder ein Kegel über einer ebenen kubischen Kurve, oder aber sie hat nur rationale Doppelpunkte als Singularitäten ([2]). In den ersten beiden Fällen enthält  $X$  unendlich viele Geraden; für den dritten Fall wurde von J.W. Bruce und C.T.C. Wall [2] die folgende Formel für die Anzahl der auf  $X$  liegenden Geraden beobachtet:

**Satz 1.1.** *Sei  $X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  eine kubische Fläche, die nur rationale Doppelpunkte als Singularitäten hat. Dann enthält  $X$*

$$\frac{(8-\mu)(7-\mu)}{2} - 1 + k$$

*Geraden, wobei  $k$  die Anzahl der auf  $X$  gelegenen Singularitäten und  $\mu$  die Summe ihrer Milnorzahlen bezeichnet.*

Wir geben hier einen Beweis dieser Formel, der auf der Beschreibung von  $X$  als Bild von  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  unter einer rationalen Abbildung, die durch ein dreidimensionales Linearsystem von Kubiken definiert wird, beruht (vgl. hierzu und zu den im Folgenden verwendeten Begriffen [3], [9]). Es gibt eine Folge  $\Sigma$  von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  (im Sinne von [3] III), so daß die minimale Desingularisierung  $\tilde{X}$  von  $X$  isomorph ist zu der Fläche  $\tilde{X}(\Sigma)$ , die durch Aufblasen von  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  in  $\Sigma$  entsteht. Die Desingularisierungsabbildung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  wird durch das Linearsystem  $| -K_{\tilde{X}} |$  gegeben, bläst also alle effektiven Kurven der Selbstschnittzahl  $-2$  zusammen. Man hat einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Pic } \tilde{X} &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^7 =: P \\ \xi &\mapsto (\xi \cdot E_0; \xi \cdot E_1, \dots, \xi \cdot E_6), \end{aligned}$$

wobei  $E_0$  das strikte Urbild einer Geraden in  $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$  und  $E_i$  das totale Urbild des  $i$ -ten Punktes der Folge  $\Sigma$  bezeichnet. Bei diesem Isomorphismus entspricht die Schnittform auf  $\text{Pic } X$  der durch  $(a_0; a_1, \dots, a_6)^2 = a_0^2 - a_1^2 - \dots - a_6^2$  definieren quadratischen Form auf  $P$ .

Wie in [3] sei  $\omega := (-3; -1, \dots, -1) \in P$ ,  $R := \{\alpha \in P \mid \alpha \cdot \omega = -2, \alpha \cdot \omega = 0\}$  die Menge der „Wurzeln“ und  $I := \{\xi \in P \mid \xi^2 = -1, \xi \cdot \omega = -1\}$  die Menge der „exzeptionellen Kurven“.  $R$  ist ein Wurzelsystem vom Typ  $E_6$ . Wir bezeichnen mit  $W$  seine Weylgruppe; es ist die Gruppe, die von den Spiegelungen  $s_\alpha, \alpha \in R$  erzeugt wird.  $I$  hat 27 Elemente, und die strikten Urbilder der Geraden auf  $X$  repräsentieren gerade die irreduziblen Elemente von  $I \subset \text{Pic } \tilde{X}$ . Zum Beweis von Satz 1.1 genügt es also, die irreduziblen Elemente von  $I$  abzuzählen. Dazu erinnern wir zunächst an die Beschreibung dieser irreduziblen Elemente in [3] III. 7:

**Lemma 1.2.**  *$\xi \in I$  ist genau dann irreduzibel, wenn für jede effektive Wurzel  $\alpha$  das Produkt  $\xi \cdot \alpha \geq 0$  ist.*

Die irreduziblen effektiven Wurzeln sind die irreduziblen Komponenten der exzeptionellen Menge der Auflösung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Um zu sehen, welche Elemente von  $I$  reduzibel sind, verwenden wir die folgenden drei Lemmata:

**Lemma 1.3.** *Sei  $\alpha \in R$ . Dann gibt es genau sechs Elemente  $\xi \in I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0$ .*

*Beweis.*  $W$  operiert transitiv auf  $R$  und führt  $I$  in sich über. Also sei o.E.  $\alpha = (0; 0, 0, 0, 0, 1, -1)$ . Man bestimmt mit Hilfe von [3] II, table 3 sofort die Elemente  $\xi \in I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0$ .

**Lemma 1.4.** *Seien  $\alpha, \beta \in R$  Wurzelbasis eines Unterwurzelsystems  $R'$  von  $R$ .*

(i) *Falls  $\alpha \cdot \beta = 1$  (also  $R' \cong A_2$ ) ist, gibt es kein  $\xi \in I$  mit  $\alpha \cdot \xi < 0, \beta \cdot \xi < 0$ .*

(ii) *Falls  $\alpha \cdot \beta = 0$  (also  $R' \cong A_1 \times A_1$ ) ist, gibt es genau ein  $\xi \in I$  mit  $\alpha \cdot \xi < 0$  und  $\beta \cdot \xi < 0$ .*

*Beweis.* (i) Sei  $\xi \in I$  mit  $\alpha \cdot \xi < 0, \beta \cdot \xi < 0$ . Nach [3] III. 7, lemme 8c ist dann  $\alpha \cdot \xi = -1 = \beta \cdot \xi$ , und es gibt  $\xi' \in I$ , so daß  $\xi = \alpha + \xi'$ . Dann ist aber  $-1 = \beta \cdot \xi = \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \xi'$ , also  $\beta \cdot \xi' = -2$ , im Widerspruch zu [3] III 7, lemme 8c.

(ii) Da  $W$  transitiv auf Paaren orthogonaler Wurzeln operiert, sei o.E.  $\alpha = (0; 0, 0, 0, 0, 1, -1), \beta = (0; 0, 0, 1, -1, 0, 0)$ . Dann ist offensichtlich  $\xi := (1; 0, 0, 1, 0, 1, 0)$  das einzige Element von  $I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0$ .

**Lemma 1.5.** *Sei  $\alpha, \beta, \gamma$  eine Wurzelbasis eines Unterwurzelsystems  $R'$  von  $R$ . Dann gibt es kein  $\xi \in I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0, \xi \cdot \gamma < 0$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 1.4 können wir annehmen, daß  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot \alpha = 0$ . Ist  $\xi \in I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0, \xi \cdot \gamma < 0$ , so gibt es – wieder nach [3] III 7 lemme 8c – ein Element  $\xi' \in I$  so daß  $\xi = \alpha + \xi'$ . Dann gilt  $\xi' \cdot \beta < 0, \xi' \cdot \gamma < 0$ , also  $\xi = \xi'$  nach Lemma 1.4. Dies ist ein Widerspruch.

*Beweis von Satz 1.1.* Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu \in \text{Pic } \tilde{X} \cong P$  die irreduziblen Komponenten der exzeptionellen Menge von  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ . Sie bilden eine Basis des Unterwurzelsystems  $R'$  von  $R$ , das von den effektiven Elementen erzeugt wird. Das Dynkindiagramm von  $R'$  ist eine disjunkte Vereinigung von  $k$  Bäumen und hat insgesamt  $\mu$  Knoten, also hat es genau  $\mu - k$  Kanten. Deshalb ist die Zahl der ungeordneten Paare  $\{\alpha_i, \alpha_j\}$  mit  $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$  gleich  $\frac{1}{2} \cdot \mu(\mu - 1) - (\mu - k)$ . Die Zahl der Elemente  $\xi \in I$ , für die es ein  $\alpha_j$  gibt mit  $\alpha_j \cdot \xi < 0$ , ist nach den Lemmata 1.3–1.5 also gleich

$$6\mu - \left[ \frac{1}{2} \mu(\mu - 1) - (\mu - k) \right].$$

Nach Lemma 1.2 ist dies die Zahl der reduziblen Elemente von  $I$ . Da  $I$  aus 27 Elementen besteht, ist die Zahl der irreduziblen Elemente also gleich

$$27 - 6\mu + \frac{1}{2} \mu(\mu - 1) - \mu + k = \frac{1}{2}(8 - \mu)(7 - \mu) - 1 + k.$$

## 2. Geraden auf reellen kubischen Flächen

Wir nehmen nun an, daß  $X$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  ist, die nur rationale Doppelpunkte als Singularitäten hat. Mit  $X_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  bezeichnen wir ihren im Reellen gelegenen Teil.

Die Singularitäten von  $X_{\mathbb{R}}$  sind reelle Formen rationaler Doppelpunkte. Die komplexe Konjugation operiert auf dem Auflösungsgraphen eines solchen rationalen Doppelpunktes, wir markieren im Auflösungsgraphen mit

- $\odot$  eine reelle  $(-2)$ -Kurve (mit reellen Punkten)
- $\ominus$  ein Paar konjugiert komplexer  $(-2)$ -Kurven
- $\bullet$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte  $(-2)$ -Kurve ohne reelle Punkte.

$\mu_{\mathbb{R}}$  sei die Zahl der über  $\mathbb{R}$  definierten  $(-2)$ -Kurven,  $\nu$  die Zahl der Paare sich nicht schneidender konjugiert komplexer  $(-2)$ -Kurven in Auflösungsgraphen eines über  $\mathbb{R}$  definierten rationalen Doppelpunktes. Aus den möglichen Typen von Singularitäten auf komplexen kubischen Flächen (siehe etwa [2]) und der Klassifikation der reellen Formen rationaler Doppelpunkte (siehe etwa [13], App. I) ergibt sich, daß auf  $X_{\mathbb{R}}$  höchstens die in Liste 1 aufgeführten Typen von Singularitäten auftreten können.

Liste 1

Name	Gleichung	Auflösungsgraph	$\mu_{\mathbb{R}}$	$\nu$	
$A_{2k}^-$	$x^{2k+1} + y^2 - z^2$	$\odot - \odot \cdots \odot - \odot$	$2k$	$0$	$k=1, 2$
$A_{2k}^+$	$x^{2k+1} + y^2 + z^2$	$\ominus \cdots \ominus$	$0$	$k-1$	$k=1, 2^*$
$A_{2k-1}^-$	$x^{2k} + y^2 - z^2$	$\odot - \odot - \odot \cdots \odot$	$2k-1$	$0$	$k=1, 2, 3$
$A_{2k-1}^+$	$x^{2k} - y^2 - z^2$	$\odot - \ominus \cdots \ominus$	$1$	$k-1$	$k=2, 3^*$
$A_{2k-1}^*$	$x^{2k} + y^2 + z^2$	$\odot - \ominus \cdots \ominus$	$1$	$k-1$	$k=1, 2^*, 3^*$
$D_4^-$	$x^2y - y^3 - z^2$	$\odot - \odot - \odot$	$4$	$0$	
$D_4^+$	$x^2y + y^3 + z^2$	$\odot - \odot - \ominus$	$2$	$1$	
$D_5^-$	$x^2y + y^4 - z^2$	$\odot - \odot - \odot - \odot$	$5$	$0$	
$D_5^+$	$x^2y + y^4 + z^2$	$\odot - \odot - \odot - \ominus$	$3$	$1$	$*$
$E_6^-$	$x^3 + y^4 - z^2$	$\odot - \odot - \odot - \odot$	$6$	$0$	
$E_6^+$	$x^3 + y^4 + z^2$	$\odot - \odot - \ominus - \ominus$	$2$	$2$	$*$

\* In § 4 zeigen wir, daß die mit \* markierten Singularitäten nicht auftauchen können.

Neben den im Reellen gelegenen Singularitäten können auf  $X$  auch Paare von konjugiert komplex liegenden Punkten auftreten. Diese sind nach [2] alle vom Typ  $A_1$  oder  $A_2$ . Für ein Paar konjugiert komplexer Singularitäten definieren wir ebenfalls  $\nu$  als die Anzahl der sich nicht schneidenden konjugiert komplexen  $(-2)$ -Kurven, also als die Milnorzahl einer der beiden Singularitäten. Mit  $\mu_{\mathbb{R}}(X)$  bzw.  $\nu(X)$  bezeichnen wir die Summe der  $\mu_{\mathbb{R}}$  bzw.  $\nu$  über alle in  $X_{\mathbb{R}}$  bzw.  $X$  liegenden Singularitäten.

Da  $X$  über  $\mathbb{R}$  definiert ist, ist auch die minimale Desingularisierung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  über  $\mathbb{R}$  definiert.

**Lemma 2.1.** *Hat  $X_{\mathbb{R}}$  mindestens einen singulären Punkt, so gibt es eine über  $\mathbb{R}$  definierte Folge  $\Sigma$  von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , so daß  $\tilde{X}$  (über  $\mathbb{R}$ ) isomorph ist zu der Varietät  $\bar{X}(\Sigma)$ , die durch Aufblasen von  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  längs  $\Sigma$  entsteht.*

*Beweis.* Sei  $p$  ein singulärer Punkt von  $X_{\mathbb{R}}$ ,  $\rho: X \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  die Projektion mit Zentrum  $p$  auf eine generische über  $\mathbb{R}$  definierte Ebene.  $\rho$  ist über  $\mathbb{R}$  definiert und birational. Die (mit Multiplizität gezählt) sechs Geraden auf  $X$  durch  $p$  entsprechen vermöge  $\rho$  einer Folge  $\Sigma$  von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , und man prüft leicht nach, daß diese Folge das Gewünschte leistet.

*Bemerkung 2.2.* Falls  $X_{\mathbb{R}}$  glatt und zusammenhängend ist, so erhält man  $\tilde{X}$  ebenfalls durch Aufblasen einer über  $\mathbb{R}$  definierten Folge von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ . Dies entspricht den Typen  $F_1, \dots, F_4$  in [12], p. 40. Falls  $X$  eine Fläche vom Typ  $F_5$  in dieser Klassifikation ist, so ist eine derartige Darstellung nicht möglich.

**Definition 2.3.** Sei  $\Sigma$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte Folge von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ . Dann gibt es eine natürliche Zahl  $r=r(\Sigma)$ , so daß  $\Sigma$  aus  $2r$  konjugationsinvarianten und  $6-2r$  paarweise konjugiert komplexen Punkten besteht. Wir nennen  $r(\Sigma)$  den *Realitätsindex* von  $\Sigma$ .

**Lemma 2.4.** *Seien  $\Sigma, \Sigma'$  zwei über  $\mathbb{R}$  definierte Folgen von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , so daß  $\tilde{X} \cong_{\mathbb{R}} \bar{X}(\Sigma) \cong_{\mathbb{R}} \bar{X}(\Sigma')$ . Dann ist  $r(\Sigma)=r(\Sigma')$ .*

*Beweis.* Die komplexe Konjugation auf  $P \cong \text{Pic } \tilde{X}$  führt  $R$  und  $I$  in sich über; wir bezeichnen mit  $R_{\mathbb{R}}$  resp.  $I_{\mathbb{R}}$  ihre Fixpunktmenngen. Seien  $\{E_1, \dots, E_6\} \subset \text{Pic } \tilde{X} \cong \text{Pic } \bar{X}(\Sigma)$  die totalen Urbilder der sechs Punkte von  $\Sigma$ . Wir können annehmen, daß für  $i=1, \dots, 3-r(\Sigma)$  die Kurve  $E_{2i-1}$  zu  $E_{2i}$  konjugiert ist, während  $E_{6-2r(\Sigma)+1}, \dots, E_6$  konjugationsinvariant sind. Aus der expliziten Beschreibung von  $I$  in [2] II ergibt sich (2.5)

$$(2.5) \quad \# I_{\mathbb{R}} = \frac{(2+2r)(1+2r)}{2} - r + 2 \quad \text{mit } r=r(\Sigma).$$

Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

**Definition 2.6.** Wir definieren den *Realitätsindex*  $r=r(X)$  von  $X$  folgendermaßen:  $r(X)=r(\Sigma)$ , falls  $\tilde{X} \cong_{\mathbb{R}} \bar{X}(\Sigma)$  für eine über  $\mathbb{R}$  definierte Folge  $\Sigma$  von sechs Punkten in fast allgemeiner Lage in  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , und  $r(X)=-1$  sonst.

2.7 *Bemerkungen.* (i) Man kann zeigen, daß die komplexe Konjugation auf  $P \cong \text{Pic } \bar{X}$  eine in der Weylgruppe  $W$  enthaltene Involution definiert, die sich als Produkt von  $3-r$  Spiegelungen schreiben läßt. Auf diese Weise zeigt man, daß Formel (2.5) auch für  $r = -1$  richtig ist.

(ii) Die Klassifikation nichtsingulärer reeller kubischer Flächen in Segre [12] entspricht der nach dem Realitätsindex:  $F_i$  hat Realitätsindex  $4-i$ .

Mit diesen Definitionen läßt sich nun das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

**Satz 2.8.** *Sei  $X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche, die höchstens rationale Doppelpunkte als Singularitäten hat.  $X_{\mathbb{R}}$  habe  $k$  singuläre Punkte; es sei  $\mu_{\mathbb{R}}(X)$  die Summe der Zahlen  $\mu_{\mathbb{R}}$  für diese singulären Punkte, und  $v(X)$  die Summe der Zahlen  $v$  aller auf  $X$  liegenden Singularitäten. Dann erhält  $X_{\mathbb{R}}$  genau*

$$\frac{(2+2r-\mu_{\mathbb{R}}(X))(1+2r-\mu_{\mathbb{R}}(X))}{2} - (r-2) + k - v(X)$$

*Geraden. Dabei bezeichnet  $r = r(X)$  den Realitätsindex von  $X$ .*

Zum Beweis notieren wir zunächst die folgenden Analoga von Lemma 1.3–1.4:

**Lemma 2.9.** *Sei  $\alpha \in R_{\mathbb{R}}$ . Dann ergibt es genau  $2r$  Elemente  $\xi \in I_{\mathbb{R}}$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0$ .*

*Beweis.*  $R_{\mathbb{R}}$  ist vom Typ  $E_6, A_5, A_3, A_1$  oder leer. Die Weylgruppe von  $R_{\mathbb{R}}$  operiert transitiv auf  $R_{\mathbb{R}}$ , und man verfährt wie in Lemma 1.3.

**Lemma 2.10.** *Seien  $\alpha, \beta \in R$  Wurzelbasis eines Unterwurzelsystems, so daß die Menge  $\{\alpha, \beta\}$  konjugationsinvariant ist.*

(i) *Ist  $\alpha \cdot \beta = 1$ , so gibt es kein  $\xi \in I_{\mathbb{R}}$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0$ .*

(ii) *Ist  $\alpha \cdot \beta = 0$ , so gibt es genau ein  $\xi \in I_{\mathbb{R}}$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0$ .*

*Beweis.* (i) folgt direkt aus (1.4.i).

(ii) Nach (1.4.ii) gibt es genau ein  $\xi \in I$  mit  $\xi \cdot \alpha < 0, \xi \cdot \beta < 0$ . Da  $\bar{\xi} \in I$  die Bedingung ebenfalls erfüllt, ist  $\xi = \bar{\xi}$ .

Der Beweis von Satz 2.8 ist nun analog zu den von Satz 1.1:

Nach (2.5), (2.9), (2.10) und (1.2) ist die Anzahl der irreduziblen Elemente in  $I_{\mathbb{R}}$  gleich

$$\frac{1}{2}(2+2r)(1+2r) - r + 2 - 2r \cdot \mu_{\mathbb{R}}(X) + \frac{1}{2} \mu_{\mathbb{R}}(X) \cdot (\mu_{\mathbb{R}}(X) - 1) - (\mu_{\mathbb{R}}(X) - k) - v(X)$$

### 3. Die Topologie reeller kubischer Flächen

Sei weiterhin  $X \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche mit höchstens rationalen Doppelpunkten als Singularitäten.  $Y := X_{\mathbb{R}}$  bezeichne ihren Durchschnitt mit  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ . Der glatte Ort  $Y - \text{Sing } Y$  von  $Y$  zerfällt in endlich viele Zusammenhangskomponenten  $Y_i$ , und jedes  $Y_i$  ist diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit, die man aus einer – durch  $Y_i$  eindeutig bestimmten – kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\bar{Y}_i$  durch Weglassen endlich vieler Punkte erhält. Wir berechnen aus der Singularitätenkonfiguration und dem Realitätsin-

dex von  $Y$  die Eulerzahlen  $\chi(\bar{Y}_i) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k \dim H_k(\bar{Y}_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 2 - \dim H_1(\bar{Y}_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Zusammen mit Korollar 3.9 bestimmen diese die Topologie von  $Y$ .

Wie in § 1 sei  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  die minimale Desingularisierung und  $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$  die Fixpunktmenge der komplexen Konjugation auf  $\tilde{X}$ .

**Lemma 3.1.** *Ist  $r = r(X)$  der Realitätsindex von  $X$ , so ist*

$$\chi(\tilde{X}_{\mathbb{R}}) = 1 - 2r.$$

*Beweis.* Für  $r \geq 0$  erhält man  $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$  aus  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  durch Aufblasen einer Folge von  $2r$  Punkten. Im Fall  $r = -1$  ist  $Y \cong \tilde{X}_{\mathbb{R}}$  eine Fläche vom Type  $F_5$  aus [12], p. 40, also diffeomorph zu  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup S^2$  ([12], p. 92, p. 101).

Falls die exzeptionelle Menge von  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  keine über  $\mathbb{R}$  definierte  $(-2)$ -Kurve ohne reelle Punkte enthält, so entsteht  $Y$  aus  $\tilde{X}_{\mathbb{R}}$  durch Kontrahieren von  $\mu_{\mathbb{R}}(X)$  Kurven, die homöomorph zu  $S^1$  sind. Im anderen Fall hat  $Y$  eine Singularität vom Typ  $A'$  (vgl. Liste 1 in § 2). Daraus ergibt sich

**Lemma 3.2.**  *$Y$  enthalte keine Singularität vom Typ  $A'$ . Ist  $r(X) \geq 0$ , so ist  $Y$  zusammenhängend und*

$$\chi(Y) = 1 - 2r + \mu_{\mathbb{R}}(X).$$

*Ist  $r(X) = -1$ , so ist  $Y$  diffeomorph zur disjunkten Vereinigung  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup S^2$ .*

Der Fall, daß auf  $Y$  Singularitäten vom Typ  $A'$  auftreten, kann leicht gesondert behandelt werden.

**Lemma 3.3.** *Sei  $p \in Y$  ein singulärer Punkt vom Typ  $A'_1$ . Dann hat  $Y$  keine weiteren Singularitäten und ist diffeomorph zu  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup \{p\}$ .*

*Beweis.* Wäre  $q \in Y$  ein von  $p$  verschiedener singulärer Punkt, so wäre (aus Gradgründen) die Verbindungsgerade von  $p$  und  $q$  in  $Y$  enthalten. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß  $p$  ein Einsiedlerpunkt ist.

Sei  $E \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  eine generische Ebene. Man sieht leicht, daß die Projektion von  $p$  aus auf  $E$  einen Diffeomorphismus zwischen  $Y - \{p\}$  und  $E$  induziert.

**Bemerkung 3.4.** In § 4 werden wir zeigen, daß Singularitäten vom Typ  $A'_{k, k \geq 2}$  auf  $Y$  nicht auftreten können.

Es sei  $\bar{Y} = \cup \bar{Y}_i$  die zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit die man erhält, wenn man – wie oben beschrieben – alle Komponenten  $Y_i$  von  $Y - \text{Sing } Y$  kompaktifiziert. Zur Bestimmung von  $\bar{Y}$  betrachten wir die Gestalt von  $Y$  in Umgebungen seiner singulären Punkte.

**Lemma 3.5.** *Sei  $p \in Y$  ein singulärer Punkt,  $U$  der Schnitt von  $Y$  mit einem kleinen Ball (bzgl. der Fubini-Metrik auf  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ ) um  $p$ .*

- (i) *Ist  $(Y, p)$  vom Typ  $A'_{2k}, D'_4$  oder  $E'_6$ , so ist  $U - \{p\}$  zusammenhängend.*
- (ii) *Ist  $(Y, p)$  vom Typ  $A'_{2k-1}, D'_5$ , so hat  $U - \{p\}$  zwei Komponenten.*
- (iii) *Ist  $(Y, p)$  vom Typ  $D'_4$ , so hat  $U - \{p\}$  drei Komponenten.*

*Beweis.* Die lokalen Gleichungen aus Liste 1 schreiben  $(Y, p)$  als doppelte zweigete Überlagerung einer Kreisscheibe, woraus man sofort die lokale Topologie abliest. Aus Lemma 3.2 und 3.5 ergibt sich jetzt sofort

**Proposition 3.6.** *Y habe keine Singularitäten vom Typ  $A'$ ,  $m_1$  Singularitäten vom Typ  $A_{2k-1}^\pm$  oder  $D_5^\pm$  und  $m_2$  Singularitäten vom Typ  $D_4^-$ . Dann ist*

$$\chi(\bar{Y}) = 1 - 2r + \mu_{\mathbb{R}}(X) + m_1 + 2m_2.$$

Wir wollen nun die Anzahl der Komponenten von  $Y - \text{Sing } Y$  und die Lage der Singularitäten in Bezug auf diese Komponenten beschreiben. Dazu verwenden wir ein Verfahren, das bereits in den Arbeiten von Klein [7] und Rodenberg [10] benutzt wird, nämlich die Realisierung lokaler Deformationen der Singularitäten von  $Y$  durch Deformationen der ganzen Fläche  $Y$ .

**Proposition 3.7.** *Sei  $Y \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  eine kubische Fläche,  $\text{Sing}(Y) = \{y_1, \dots, y_k\}$ .*

$$\begin{array}{ccccc} (Y, y_i) \subset (\mathcal{Y}_i, y_i) & \subset & (\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \times D, (y_i, 0)) \\ \downarrow & & \downarrow F_i & & \downarrow pr_2 \\ 0 & \in & (D, 0) & = & (D, 0) \end{array}$$

seien Repräsentanten von Deformationen der Singularitäten  $(Y, y_i)$  d.h. Deformationen ihrer lokalen Gleichungen im Sinne von [1] p. 146 ff. über  $D := (-1, 1)$ .

Dann gibt es eine differenzierbare Familie

$$\begin{array}{ccccc} Y \subset \mathcal{Y} & \subset & \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \times D \\ \downarrow & & \downarrow F & & \downarrow pr_2 \\ 0 \in D & = & D & & D \end{array}$$

von kubischen Flächen über  $D$ , und für jedes genügend kleine  $\varepsilon > 0$  offene Umgebungen  $U_i$  von  $y_i$  in  $\mathcal{Y}$  und  $D'$  von 0 in  $D$ , so daß gilt:

(i) Ist  $V_i$  der Durchschnitt der Kugel  $B_\varepsilon(y_i)$  mit  $\mathcal{Y}_i \cap F_i^{-1}(D')$ , dann gibt es einen Diffeomorphismus  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & & \mathcal{Y}_i \\ \cup & & \cup \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & V_i \\ F|_{U_i} \searrow & & \swarrow F_i \\ & D' & \end{array}$$

kommutativ macht.

(ii) Die Abbildung  $F: \mathcal{Y} - \cup U_i \rightarrow D'$  ist ein differenzierbar triviales Bündel von Mannigfaltigkeiten mit Rand.

*Beweis.* Sei  $H$  eine Ebene in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ , so daß  $C := Y \cap H$  eine nichtsinguläre kubische Kurve ist. Der projektive Kegel  $K$  über  $C$  mit Spitze in einem Punkt



$q \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) - H$  hat in  $q$  eine Singularität vom Typ  $\tilde{E}_6$ . Die semi-universelle Deformation der Singularität  $(K, q)$  läßt sich durch eine Familie

$$\begin{array}{ccc} K \subset F & & \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ 0 \in S & & \end{array}$$

affiner kubischer Flächen realisieren.

Beliebig nahe an 0 gibt es Punkte  $s \in S$ , deren Urbilder  $\rho^{-1}(s)$  affin äquivalent zu  $Y - C$  sind (vgl. auch [2] § 4). Die Behauptung folgt nun aus der Offenheit der Versalität (vgl. [14], § 4).

**Korollar 3.8.** Sei  $X \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche mit höchstens rationalen Doppelpunkten als Singularitäten, so daß  $Y = X_{\mathbb{R}}$  keine Singularitäten vom Typ  $A'$  hat. Dann hat  $\bar{Y}$  höchstens zwei Komponenten.

$\bar{Y}$  hat genau dann zwei Komponenten, wenn  $\chi(\bar{Y}) = 3$ , und dann ist  $Y$  homöomorph zu  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \cup S^2$ .

*Beweis.* Man glätte alle Singularitäten von  $Y$ , und zwar so, daß die lokalen Komponenten von  $Y - \text{Sing } Y$  getrennt werden.  $Y'$  sei die durch diese Deformation entsprechend Prop. 3.7 erhaltene glatte kubische Fläche. Offenbar ist  $\bar{Y}$  homöomorph zu  $\bar{Y}'$ , welches wiederum isomorph zu  $Y'$  ist. Die Behauptung folgt nun aus der Klassifikation nichtsingulärer reeller kubischer Flächen ([12]).

**Korollar 3.9.** Unter den Voraussetzungen von (3.8) liegt jeder singuläre Punkt von  $Y$  im Abschluß jeder Komponente von  $Y - \text{Sing } Y$ .

*Beweis.* Sonst könnte man alle Singularitäten, die im Abschluß von  $Y_1$  und von  $Y_2$  liegen, lokal in zwei resp. drei Komponenten glätten und erhielte eine singuläre, nicht zusammenhängende Fläche, im Widerspruch zu Lemma 3.2.

#### 4. Klassifikation

Die möglichen Konfigurationen von Singularitäten auf reellen kubischen Flächen kann man etwa mit Hilfe von Bemerkung 2.7.i relativ leicht bestimmen. In diesem Abschnitt führen wir eine Klassifikation nach der folgenden – etwas feineren – Äquivalenzrelation durch:

**Definition 4.1.** (i) Eine differenzierbare Familie  $(Y_t)_{t \in [0, 1]}$  von Kubiken in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  (mit Gleichungen  $f_t = 0$ ) nennen wir *äquisingulär*, wenn sie sich in der Umgebung jedes Punktes zu einer Familie von Diffeomorphismen des umgebenden Raumes fortsetzen läßt, d.h. wenn es für jedes  $t_0 \in [0, 1]$  und jedes  $p \in Y_{t_0}$  eine Umgebung  $I$  von  $t_0$  in  $[0, 1]$ , eine Umgebung  $U$  von  $p$  in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  und einen Diffeomorphismus  $\phi: U \times I \rightarrow U \times I$  gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 U \times I & \xrightarrow{\phi} & U \times I \\
 \cup & & \cup \\
 \{(x, t) \in U \times I \mid f_t(x) = 0\} & \xrightarrow{\phi} & \{(x, t) \in U \times I \mid f_t(x) = 0\} \\
 \searrow \text{pr}_2 & & \swarrow \text{pr}_2 \\
 & I &
 \end{array}$$

kommutiert. Zwei Flächen, die sich durch eine äquisinguläre Familie ineinander überführen lassen, nennen wir *äquisingulär isotop*.

(ii) Wir nennen zwei kubische Flächen  $Y_0, Y_1$  in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  vom gleichen topologischen Typ, wenn es projektiv äquivalente Flächen  $Y'_0, Y'_1$  gibt, die zueinander äquisingulär isotop sind.

*Bemerkung.* Alle Kollineationen aus  $PGL(4, \mathbb{R})$  mit positiver Determinante lassen sich zur identischen Abbildung deformieren. Daher gibt es höchstens zwei äquisinguläre Isotopieklassen von kubischen Flächen desselben Typs.

Äquisinguläre Familien sind dadurch charakterisiert, daß die Singularitätenkonfiguration (d.h. die Anzahl und analytischen Isomorphietypen der Singularitäten) konstant bleibt..

**Proposition 4.2.** (i) *Haben zwei kubische Flächen in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  mit nur isolierten Singularitäten den gleichen topologischen Typ, so sind geeignete Umgebungen ihrer singulären Mengen analytisch isomorph.*

(ii) *Jede differenzierbare Familie von Kubiken in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  mit nur isolierten Singularitäten, in der die Singularitätenkonfiguration konstant bleibt, ist äquisingulär.*

*Beweis.* (i) Sei  $(Y_t)_{t \in [0, 1]}$  eine äquisinguläre Familie kubischer Flächen mit nur isolierten Singularitäten mit den Gleichungen  $f_t = 0$ . Dann gibt es differenzierbare Schnitte  $(p_i^{(t)})_{t \in [0, 1]}$ ,  $i = 1, \dots, k$  so daß  $\text{Sing } Y_t = \{p_t^{(1)}, \dots, p_t^{(k)}\}$  für  $t \in [0, 1]$ . Die Keime von  $F_t$  in  $p_i^{(t)}$  sind für alle  $t \in [0, 1]$  differenzierbar und somit auch analytisch  $V$ -äquivalent im Sinne von [1] p. 126.

(ii) Aus der Konstanz der Singularitätenkonfiguration folgt, daß es wie oben differenzierbare Schnitte gibt, die die singulären Punkte der Kubiken in der Familie beschreiben. Da die Isomorphieklassen der Singularitäten längs der Schnitte konstant bleiben, folgt Äquisingularität.

Wir notieren noch

**Lemma 4.3.** (i) *Kubische Flächen vom gleichen topologischen Typ sind homöomorph.*

(ii) *Zwei kubische Flächen vom gleichen topologischen Typ mit nur rationalen Singularitäten haben gleichen Realitätsindex.*

*Beweis.* (i) Die Tatsache, daß sich der Homöomorphietyp bei äquisingulären Deformation nicht ändert, folgt etwa aus [6] II 5.2.

(ii) Nach (3.6) resp. (3.3) bestimmt sich der Realitätsindex aus der Topologie und der Singularitätenkonfiguration.

Wir beginnen nun mit der Klassifikation der topologischen Typen reeller kubischer Flächen. Sei also  $X$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche und  $Y = X_{\mathbb{R}}$  ihr reeller Teil. Der umfangreichste Teil der Klassifikation betrifft den Fall, daß  $X$  höchstens rationale Doppelpunkte als Singularitäten hat. Daneben treten noch folgende Fälle (4.4)–(4.6) auf:

(4.4) *Reduzible kubische Flächen.* Falls  $X$  reduzibel ist, so zerfallen  $X$  und auch  $Y$  in eine Ebene und eine – evtl. singuläre – Quadrik. Die Klassifikation dieser Fälle ist offensichtlich.

(4.5) *Kubische Regelflächen.* Falls  $X$  irreduzibel ist und nicht-isolierte Singularitäten hat, so ist der singuläre Ort eine Gerade  $l$  ([2] p. 252), die notwendigerweise reell ist. Falls  $X$  kein Kegel über einer singulären ebenen Kubik ist, so folgt wie in [2], daß  $Y$  projektiv äquivalent zu einer der folgenden drei Flächen ist:

$$\begin{aligned} x_0^2 x_2 + x_1^2 x_3 &= 0 \\ (x_0^2 - x_1^2) x_2 - 2x_0 x_1 x_3 &= 0 \\ x_1^3 + x_0^2 x_2 + x_0 x_1 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Fälle heißen in der klassischen Literatur Plücker’sches, die dritte Cayley’sches Konoid oder Zylindroid.

Die singuläre Gerade dieser Flächen ist  $l := \{x_0 = x_1 = 0\}$ . Die Projektion von  $l$  aus auf eine generische reelle Gerade  $g$  realisiert die Normalisierung  $X'$  von  $X$  als Regelfläche. Der reelle Teil  $X'_{\mathbb{R}}$  der Normalisierung ist ein  $S^1$ -Bündel über  $S^1$ . Eine generische Ebene  $E \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  definiert einen Schnitt dieses  $S^1$ -Bündels von ungerader Selbstschnittzahl, also ist  $X'_{\mathbb{R}}$  homöomorph zur Kleinschen Flasche. Aus den Gleichungen bestimmt man nun leicht die Topologie von  $Y$  in allen drei Fällen.

(4.6) *Kegel über irreduziblen ebenen Kubiken.* Nach der Klassifikation irreduzierbarer ebener Kubiken ist  $Y$  projektiv äquivalent zu einer der Flächen

$$x_1^2 x_3 - 4x_0^3 - g_2 x_0 x_3^2 - g_3 x_3^3 = 0, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

Die Flächen mit nicht-isolierten Singularitäten ( $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ ) zerfallen in drei projektive Äquivalenzklassen, je nachdem, ob

$$\begin{aligned} g_2 \neq 0, \quad g_3 > 0 & \quad (\text{Selbstdurchdringung}) \\ g_2 \neq 0, \quad g_3 < 0 & \quad (\text{isolierte Gerade}) \\ g_2 = g_3 = 0 & \quad (\text{Rückkehrkante}). \end{aligned}$$

Zwei Flächen mit  $\Delta \neq 0$  sind genau dann projektiv äquivalent, wenn die  $j$ -Invariante  $j = g_2^3/\Delta$  und das Vorzeichen von  $g_3$  übereinstimmen ([4] Kap. 12). Die Topologie von  $Y$  ist in all diesen Fällen leicht zu bestimmen.

Wir nehmen von nun an an, daß  $X$  nur rationale Doppelpunkte als Singularitäten hat. Eine Zusammenfassung aller dabei auftretenden topologischen Typen geben wir in Liste 4 am Ende dieses Kapitels.

Bevor wir mit der eigentlichen Klassifikation beginnen, betrachten wir die möglichen Typen von Singularitäten, die auf  $Y$  auftreten können. Aus der Klassifikation im Komplexen ergab sich, daß dies höchstens die Singularitäten aus Liste 1 in § 2 sein können. Tatsächlich aber kommen nicht alle diese Singularitäten vor:

**Lemma 4.7.** (i) *Auf reellen kubischen Flächen treten die folgenden Typen von Singularitäten nicht auf:*

$$A_3^*, A_4^+, A_5^*, A_5^+, D_5^+, E_6^+.$$

(ii) *Hat eine reelle kubische Fläche mindestens zwei isolierte singuläre Punkte, so sind alle ihre singulären Punkte vom Typ  $A^-$ .*

*Beweis.* (i) Jede der genannten Singularitäten deformiert in zwei Singularitäten, von denen eine vom Typ  $A_1^*$  ist. Proposition 3.7 und Lemma 3.3 liefern die Behauptung.

(ii) Die komplexe Klassifikation ([2]) zeigt, daß in diesen Fall alle Singularitäten vom Typ  $A$  sind. Singularitäten vom Typ  $A^+$  oder  $A^*$  deformieren aber in  $A_1^*$ .

Wir beginnen jetzt mit der eigentlichen Klassifikation. Die topologischen Typen nichtsingulärer Kubiken sind in [12] bestimmt. Sei also ohne Einschränkung

$$p := (0, 0, 0, 1)$$

ein singulärer Punkt von  $Y$ . Dann hat  $Y$  die Gleichung

$$x_3 \cdot f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x_0, x_1, x_2) = 0$$

mit reellen homogenen nicht-verschwindender Polynomen  $f_i$  vom Grad  $i$ .

$$Q := \{x \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) / f_2(x) = 0\} \quad \text{und}$$

$$C := \{x \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) / f_3(x) = 0\}$$

sind über  $\mathbb{R}$  definierte Kurven.

Die Projektion von  $Y$  auf  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  mit Zentrum  $p$  bläst  $p$  auf zu der Quadrik  $Q$  und schlägt die Geraden auf  $Y$  durch  $p$  zu – mit Multiplizität gezählt –  $2r(X)$  Punkten zusammen. Dies sind die reellen Punkte von  $Q \cap C$ .

Um die projektive Äquivalenzklasse von  $Y$  zu untersuchen, genügt es, die Quadrik  $Q$  mit den Punkten  $Q \cap C$  zu betrachten:

**Lemma 4.8.** *Wir nehmen an, daß  $Q$  reduziert ist. Es sei  $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$  ( $m \leq 2$ ) die Zerlegung von  $Q$  in irreduzible Komponenten und  $\tilde{Q} = Q_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} Q_m$  die Normalisierung von  $Q$ . Sei  $Y' \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  eine Kubik mit der Gleichung*

$$x_3 \cdot f_2(x_0, x_1, x_2) + g_3(x_0, x_1, x_2) = 0$$

mit einem nichtverschwindenden reellen homogenen Polynom  $g_3$  vom Grad 3, und sei  $C' := \{x \in \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) / g_3(x) = 0\}$ .

Es gibt genau dann ein  $\varphi \in \text{PGL}(4, \mathbb{R})$  mit  $\varphi(Y) = Y'$  und  $\varphi(p) = p'$ , wenn es einen über  $\mathbb{R}$  definierten Isomorphismus  $\psi: Q \rightarrow Q$  gibt, der den Divisor  $Q_1 \cdot C + \dots + Q_m \cdot C$  auf  $\tilde{Q}$  in den Divisor  $Q_1 \cdot C' + \dots + Q_m \cdot C'$  überführt.

Der Beweis dieses Lemma's ist analog zu [2], Lemma 2a. Die Klassifikation folgt nun den verschiedenen Typen der Quadrik  $Q$ , also des Tangentialkegels von  $Y$  in  $p$ .

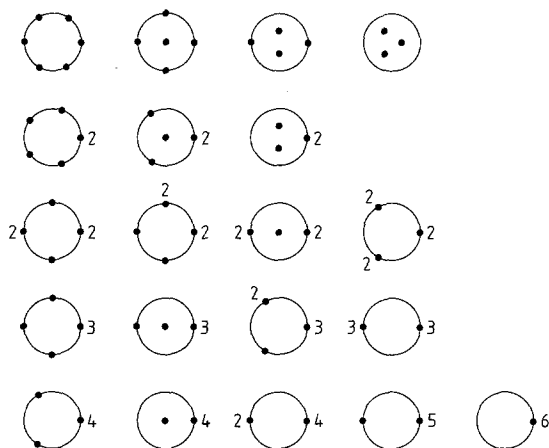
1. Fall:  $Q$  ist irreduzibel und hat reelle Punkte ( $Y$  hat in  $p$  eine Singularität vom Typ  $A_1^-$ ):

Nach Lemma 4.8 werden die projektiven Äquivalenzklassen kubischer Flächen in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  mit einer Singularität vom Typ  $A_1^-$  in  $p$  durch Isomorphieklassen konjugations-invarianter Divisoren vom Grad 6 auf  $Q$  gegeben, denn jeder solche Divisor wird von einer reellen Kubik ausgeschnitten. Nach [2], Lemma 2 entsprechen Singularitäten auf  $Y - \{p\}$  gerade mehrfachen reellen Punkten von  $Q \cdot C$ ; wegen (4.7.ii) und [2] gehört zu einem  $k$ -fachen reellen Punkt  $Q \cdot C$  eine Singularität vom Typ  $A_{k-1}^-$ .

Sind  $D, D'$  konjugationsinvariante Divisoren vom Grad 6 auf  $Q$ , deren reelle Anteile man unter Erhalt aller Multiplizitäten auf dem reellen Teil  $Q_{\mathbb{R}}$  von  $Q$  ineinander verschieben kann oder die durch Automorphismen von  $Q_{\mathbb{R}}$  ineinander überführt werden können, so sind die zugehörigen Flächen offensichtlich vom gleichen topologischen Typ. Eine Äquivalenzklasse solcher Divisoren bezüglich derartiger Verschiebungen und Automorphismen nennen wir eine *Konfiguration*.

Wir symbolisieren eine Konfiguration von  $2r$  reellen und  $3-r$  Paaren konjugiert komplexer Punkte auf  $Q$  durch Markieren von  $2r$  Punkten (mit Multiplizitäten) auf einer Kreislinie und  $3-r$  Punkten im Inneren des Kreises. Die möglichen Konfigurationen sind in Liste 2 angegeben. Die zugehörigen topologischen Typen kubischer Flächen sind alle verschieden: bis auf einen Fall unterscheiden sie sich durch Singularitätenkonfiguration und Realitätsindex. Die beiden Typen kubischer Flächen mit drei Singularitäten vom Typ  $A_1^-$  unterscheiden sich durch die relative Lage der einfach und mehrfach zu zählenden Geraden auf einem (jedem) Tangentialkegel in einem singulären Punkt.

Liste 2



2. Fall:  $Q$  ist irreduzibel und hat keine reellen Punkte ( $p$  ist singulärer Punkt vom Typ  $A_1^+$ ):

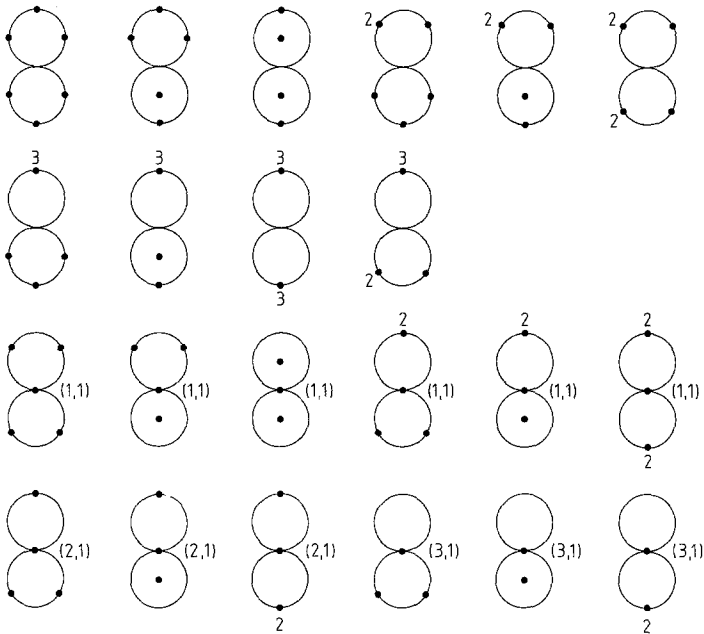
Mit demselben Argument wie oben sieht man, daß es nur einen topologischen Typ gibt.

3. Fall:  $Q$  zerfällt in zwei über  $\mathbb{R}$  definierte Geraden ( $(Y, p)$  ist vom Typ  $A_k^-, k \geq 2$ ):

Sei  $q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  der Doppelpunkt von  $Q$ . Nach [2], Lemma 3 und Lemma 4.7 entsprechen die Singularitäten von  $Y - \{p\}$  den reellen mehrfachen Punkten von  $Q \cdot C$  auf  $Q - \{q\}$ , und zwar entspricht ein  $k$ -facher derartiger Punkt einer  $A_{k-1}^-$ -Singularität. Sind außerdem  $k_1, k_2$  die Schnittzahlen von  $Q_1, Q_2$  in  $q$ , so hat  $Y$  in  $p$  eine Singularität vom Typ  $A_k^-$  mit  $k = \max(2, k_1 + k_2 + 1)$ .

$Q_{\mathbb{R}}$  ist homöomorph zu einem Bouquet  $S^1 \vee S^1$  von Kreislinien. Wir markieren wieder Punkte auf bzw. innerhalb der Kreise, um die topologischen Typen zu klassifizieren ( $q \in Q_{\mathbb{R}}$  hat eine Bi-Multiplizität  $(k_1, k_2)$ ). Bis auf Vertauschen der Komponenten von  $Q_{\mathbb{R}}$  hat man die in Liste 3 angegebenen Konfigurationen.

Liste 3



4. Fall:  $Q$  zerfällt in ein Paar konjugiert komplexer Geraden:

Wir können dann annehmen, daß  $f_2(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2$ . Je nachdem, ob  $f_3$  in  $(0, 0, 1)$  verschwindet oder nicht, hat  $Y$  in  $p$  eine Singularität vom Typ  $A_3^+$  oder  $A_2^+$  ([2], Lemma 3). Es gibt jeweils genau einen topologischen Typ.

5. Fall:  $Q$  ist eine Doppelgerade.

Nach [2] und Lemma 4.7 hat  $X$  in  $P$  eine Singularität vom Typ  $E_6^-, D_5^-, D_4^+$  oder  $D_4^-$ . Die Klassifikation wird geliefert von

**Lemma 4.9.** (i) *Je zwei reelle kubische Flächen mit einer Singularität vom Typ  $E_6^-$  (bzw.  $D_5^-$ ) sind reell projektiv äquivalent.*

(ii) *Die reellen kubischen Flächen mit einer Singularität vom Typ  $D_4^+$  bzw.  $D_4^-$  zerfallen jeweils in zwei reell projektive Äquivalenzklassen, die aber jeweils den gleichen topologischen Typ haben.*

*Beweis.* (i) zeigt man wie in [2], Lemma 4.

(ii) Genauso wie in [2], Lemma 4 rechnet man aus, daß jede reelle kubische Fläche mit einer Singularität vom Typ  $D_4$  bis auf reell projektive Äquivalenz folgendermaßen aussieht:

$$D_4^+ : x_3 x_0^2 + a x_0 x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 = 0 \quad a=0,1$$

$$D_4^- : x_3 x_0^2 + a x_0 x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 = 0 \quad a=0,1.$$

Damit sind alle topologischen Typen reeller kubischer Flächen erfaßt.

*Bemerkung 4.10.* Ist  $X$  eine über  $\mathbb{R}$  definierte kubische Fläche in  $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$  mit nur isolierten Singularitäten, so sieht man wie in (3.7), daß  $X_{\mathbb{R}}$  (im Reellen) äquisingular in eine kubische Fläche  $Y'$  deformiert werden kann, auf deren Komplexifizierung keine weiteren singulären Punkte liegen. Die allgemeine kubische Fläche eines vorgegebenen topologischen Typs hat also nur reelle Singularitäten. Bei speziellen kubischen Flächen in einem topologischen Typ können aber auf der Komplexifizierung noch Paare konjugiert komplex liegender Singularitäten auftreten. Welche derartigen Paare konjugiert komplexer Singularitäten in den einzelnen topologischen Typen vorkommen, ergibt sich für im Reellen glatte Flächen aus (2.7.i), ansonsten aus der obigen Klassifikation. In Spalte 3 von Liste 4 sind alle Möglichkeiten aufgeführt.

*4.11 Klassifikation nach äquisingulärer Isotopie.* Nach der Bemerkung in (4.1) ist für die feinere Unterteilung nach äquisingulärer Isotopie für jeden topologischen Typ zu entscheiden, ob er zwei Flächen enthält, die durch eine Spiegelung an einer Ebene auseinander hervorgehen. In der Tat findet man, falls dies der Fall ist, immer eine Fläche, die selbst spiegelsymmetrisch ist. Die Angabe dieser Flächen durch Gleichungen, und damit der Nachweis, daß der entsprechende topologische Typ mit der äquisingulären Isotopieklasse zusammenfällt, ist in jedem Fall leicht möglich.

Die folgenden 6 topologischen Typen spalten sich in zwei äquisinguläre Isotopieklassen auf:

- (i) die Fläche mit einer  $A_2^-$ -Singularität und Realitätsindex 2.
  - (ii) die beiden Flächen mit  $A_2^- A_1^-$ -Singularitäten
  - (iii) alle drei Flächen, auf denen eine  $A_4^-$ -Singularität auftritt.
- (Diese topologischen Typen sind in Liste 4 markiert.)

Sei nämlich  $Y$  eine solche Fläche,  $p \in Y$  der singuläre Punkt vom Typ  $A_2^-$  oder  $A_4^-$ .

Durch die Verteilung der Geraden sind die beiden Ebenen des Tangentialkegels an  $Y$  in  $p$  klar voneinander unterschieden. Auf mindestens einer dieser Ebenen findet man genau eine Gerade durch  $p$ , die keinen weiteren singulären Punkt mehr trifft. Durchläuft ein Punkt  $q$  eine solche Gerade, so dreht sich

Liste 4. Topologische Typen reeller kubischer Flächen mit höchstens rationalen Doppelpunkten

Singularitäten- konfiguration	Realitäts- index	Anzahl der reellen Geraden	Eulerchar. $\chi(\bar{Y})$	Mögliche weitere komplexe Singularitäten
$\emptyset$	3	27	-5	
$\emptyset$	2	15	-3	
$\emptyset$	1	7	-1	$A_1, 2A_1$
$\emptyset$	0	3	1	$A_1, A_2$
$\emptyset$	-1	3	1+2	$A_1, A_2$
$A_1^-$	3	21	-3	
$A_1^-$	2	11	-1	
$A_1^-$	1	5	1	$A_1$
$A_1^-$	0	3	1+2	$A_1, A_2$
$A_1^-$	0	3	1	$A_1, A_2$
$2A_1^-$	3	16	-1	
$2A_1^-$	2	8	1	
$2A_1^-$	1	4	1+2	$A_1$
$A_2^-$	3	15	-3	
$A_2^{-a}$	2	7	-1	
$A_2^-$	1	3	1	
$A_2^+$	0	3	1	$A_1, A_2$
$3A_1^-$	3	12	1	
$3A_1^-$	3	12	1	
$3A_1^-$	2	6	1+2	
$A_2^- A_1^{-a}$	3	11	-1	
$A_2^- A_1^{-a}$	2	5	1	
$A_3^-$	3	10	-1	
$A_3^-$	2	4	1	
$A_3^-$	1	2	1+2	
$A_3^+$	1	4	1	$A_1$
$4A_1^-$	3	9	1+2	
$A_2^- 2A_1^-$	3	8	1	
$2A_2^-$	3	7	-1	
$2A_2^-$	2	3	1	
$A_3^- A_1^-$	3	7	1	
$A_3^- A_1^-$	2	3	1+2	
$A_4^{-a}$	3	6	-1	
$A_4^{-a}$	2	2	1	
$D_4^-$	3	6	1	
$D_4^+$	1	2	1	
$2A_2^- A_1^-$	3	5	1	
$A_3^- 2A_1^-$	3	5	1+2	
$A_4^- A_1^{-a}$	3	4	1	
$A_5^-$	3	3	1	
$A_5^-$	2	1	1+2	
$D_5^-$	3	3	1	
$3A_2^-$	3	3	1	
$A_5^- A_1^-$	3	2	1+2	
$E_6^-$	3	1	1	

<sup>a</sup> zerfällt in zwei äquisinguläre Isotopieklassen

die Tangentialebene an  $Y$  in  $q$ , und zwar ständig in dieselbe Richtung. Verlangt man, daß diese Drehung eine Rechtsdrehung ist, so definiert das eine Orientierung der Geraden, die nur vom äquisingulären Isotopietyp der Fläche abhängt, durch eine Spiegelung der Fläche an einer Ebene jedoch umgekehrt wird. Die



so erhaltene Fläche ist also nicht zu  $Y$  äquisingulär isotop, hat aber denselben topologischen Typ.

*Zusammenfassung 4.11.* Die topologischen Typen reeller kubischer Flächen werden durch (4.4)–(4.6) und Liste 4, die äquisingulären Isotopieklassen hierdurch und durch (4.11) vollständig klassifiziert. Für Flächen mit nur rationalen Doppelpunkten bestimmt man die Zahl der reellen Geraden nach (2.8), die Topologie aus (3.3) und (3.6).

## Literatur

1. Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N.: Singularities of differentiable maps, vol. I. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1985
2. Bruce, J.W., Wall, C.T.C.: On the classification of cubic surfaces. *J. Lond. Math. Soc. II. Ser.* **19**, 245–256 (1979)
3. Demazure, M.: Surface de Del Pezzo II, III Séminaire sur les singularités des surfaces, LN 777. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
4. Du Val, P.: Elliptic functions and elliptic curves. Cambridge: University Press 1972
5. Fischer, G. (Hrsg.): Mathematische Modelle. Wiesbaden: Vieweg 1986
6. Gibson, C., Wirthmüller, K., du Plessis, A., Looijenga, E.: Topological stability of smooth mappings. LN 552. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
7. Klein, F.: Über Flächen dritter Ordnung. *Math. Ann.* **6** (1873). Leicht veränderte Fassung in: Klein, F., *Ges. Math. Abh. II.* Berlin: Springer 1922
8. Klein, F.: Über Flächen dritter Ordnung mit konischen und biplanaren Punkten. Zusatz I zu [7] in: Klein, F., *Ges. Math. Abh. II.* Berlin: Springer 1922
9. Pinkham, H.: Résolution simultanée de points doubles rationnels. Séminaire sur les singularités des surfaces, LN 777. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
10. Rodenberg, C.: Zur Klassifikation der Flächen dritter Ordnung. *Math. Ann.* **14**, 46–110 (1879)
- 10a. Rodenberg, C.: Modelle von Flächen dritter Ordnung. in: *Math. Abh. aus dem Verlage Math. Modelle von M. Schilling, Erste Folge*, Halle 1904
11. Schläfli, L.: On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in reference to the absence or presence of Singular Points, and the reality of their Lines. *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **153**, 193–241 (1863)
12. Segre, B.: The non-singular cubic surfaces. Oxford: University Press 1942
13. Slodowy, P.: Simple singularities and simple algebraic groups, LN 815. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
14. Wall, C.T.C.: Finite determinary of smooth map-germs. *Bull. Lond. Math. Soc.* **13**, 481–539 (1981)

Eingegangen am 1. Oktober 1985