GROEMER, H.
Math. Zeitschr. 73, 285—294 (1960)

Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich

Von
HELMUT GROEMER

1. Liegt ein beschränkter konvexer Bereich B mit dem Flächeninhalt F vor, so gilt nach FEJES TÓTH [*1*] für die Anzahl n der Einheitskreise, die B ohne übereinanderzugreifen eingelagert werden können, falls $n \geqq 2$ ist,

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F. \tag{1}$$

Die Konstante $\sqrt{12}$ kann dabei durch keine größere ersetzt werden. Unter Benutzung eines Ergebnisses von SEGRE und MAHLER [*2*] soll hier eine Verschärfung von (1) bewiesen werden:

SATZ. *Sind in einem konvexen Bereich vom Flächeninhalt F und Umfang U n Einheitskreise eingelagert, so ist*

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F - \varkappa U + \lambda \tag{2}$$

mit

$$\varkappa = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 0{,}1339\ldots, \qquad \lambda = \sqrt{12} - \pi(\sqrt{3}-1) = 1{,}1642\ldots.$$

Das Gleichheitszeichen steht in (2) *genau dann, wenn B die konvexe Hülle aller eingelagerten Kreise ist und, wenn die konvexe Hülle H aller Kreismittelpunkte eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) H kann in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 2 *zerlegt werden und jeder Eckpunkt dieser Dreiecke ist Mittelpunkt eines Kreises.*

b) H kann in geradlinige Strecken der Länge 2 *zerlegt werden, und jeder Endpunkt dieser Strecken ist Mittelpunkt eines Kreises.*

c) H ist ein Punkt.

Die Ungleichung (2) ist auch für $n=1$ richtig und für $n>1$, mit Rücksicht auf

$$U \geqq 2\pi + 4 > \frac{\lambda}{\varkappa} = 8{,}7\ldots,$$

atsächlich schärfer als (1).

Es sei noch bemerkt, daß eine zu (2) analoge Ungleichung unmittelbar aus einer von FEJES TÓTH a.a.O. S. 71 bewiesenen Beziehung folgt, nämlich

$$n \cdot \sqrt{12} \leqq F - (2-\sqrt{3})\,p + \sqrt{12} - \pi.$$

p bedeutet dabei die Anzahl der an der Peripherie liegenden Kreise. (Ein Kreis heiße an der Peripherie liegend, wenn ein Randpunkt von B existiert, dessen Abstand vom Mittelpunkt dieses Kreises kleiner ist als seine Distanz von allen anderen Kreismittelpunkten.)

2. Für den Beweis des Satzes darf man annehmen, daß B die konvexe Hülle C aller eingelagerten Kreise ist. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen: Bedeuten $\bar{F}$ und $\bar{U}$ den Flächeninhalt bzw. den Umfang von C, so sei $\Delta F = F - \bar{F}$ und $\Delta U = U - \bar{U}$ gesetzt. Es genügt

$$\Delta F - \varkappa \Delta U \geqq 0$$

zu zeigen. Der Bereich $B - C$ werde hierzu durch Gerade, die von den Endpunkten der Strecken, welche C begrenzen, ausgehen und auf diese senkrecht stehen, in Teilbereiche D_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ zerlegt. D_i liefere zu ΔF den Beitrag ΔF_i und zu ΔU den Beitrag ΔU_i. Offenbar reicht es hin,

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq 0$$

zu beweisen. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden.

a) D_i wird von einer Geraden g, zwei auf g senkrecht stehenden Geraden und einem g gegenüberliegenden konvexen Bogen begrenzt. Betrachtet man ein in D_i liegendes Dreieck mit der Basis g und größt möglicher Höhe, so sieht man, daß wegen $g \geqq 2$

$$\Delta F_i \geqq \frac{h \cdot g}{2} \geqq h$$

ist. Für ΔU_i findet man, da der D_i begrenzende konvexe Bogen in einem Koordinatensystem, das Achsen parallel zu g und h hat, in zwei monotone Bögen zerfällt und da $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqq |\Delta x| + |\Delta y|$ ist

$$\Delta U_i \leqq 2h.$$

Somit erhält man die gewünschte Ungleichung

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq h - 2\varkappa h \geqq 0{,}73\, h \geqq 0.$$

b) D_i wird von einem Einheitskreisbogen der Länge α_i, zwei auf diesem senkrecht stehenden Geraden und einem konvexen Bogen b_i der Länge L_i begrenzt. Der Flächeninhalt F_i von D_i wird durch

$$F_i = \tfrac{1}{2} \int_0^{L_i} H(s)\, ds$$

gegeben, wobei ds das Differential der Bogenlänge von b_i, und $H(s)$ die durch b_i definierte Stützfunktion in bezug auf den Mittelpunkt des zugehörigen Kreises ist. Wegen $H(s) \geqq 1$ gilt demnach $F_i \geqq \frac{L_i}{2}$ und daher

$$\Delta F_i \geqq \frac{L_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2}.$$

Somit ergibt sich

$$\Delta F_i - \varkappa \Delta U_i \geqq \frac{L_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2} - \varkappa (L_i - \alpha_i) = (L_i - \alpha_i)\left(\frac{1}{2} - \varkappa\right) \geqq 0,$$

letzteres, weil $\varkappa < \frac{1}{2}$ ist und weil in einem geeigneten Polarkoordinatensystem (ϱ, φ), das den Ursprung im entsprechenden Kreismittelpunkt hat wegen $\varrho \geqq 1$

$$L_i = \int_0^{\alpha_i} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \geqq \int_0^{\alpha_i} d\varphi = \alpha_i$$

gilt.

Damit ist bewiesen, daß stets

$$\bar{F} - \varkappa \bar{U} \leqq F - \varkappa U$$

gilt, dabei steht das Gleichheitszeichen, wie man unmittelbar aus dem Beweis ersieht nur für $B = C$.

Für alles weitere wird $B = C$ angenommen. Der Rand B^* von B besteht dann aus einer endlichen Anzahl von Geraden und Kreisbögen vom Radius 1. Für die Summe S der Längen aller dieser Kreisbögen gilt, wie man leicht bestätigt,

(3) $$S = 2\pi.$$

Zu einem Kreis K werde nun die Menge Z aller Punkte betrachtet, die vom Mittelpunkt von K einen Abstand haben, der nicht größer ist als die Abstände zu den Mittelpunkten der anderen Kreise. Z heiße die zu K gehörige Zelle. Man sieht unschwer, daß Z konvex ist, K enthält und daß die Vereinigung aller Zellen B lückenlos überdeckt, wobei zwei verschiedene Zellen höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Der Rand von Z besteht aus einer endlichen Anzahl von geraden Strecken, die die Zellenwände genannt werden sollen, und einem Kreisbogen. Dabei sei hier wie bei allen Feststellungen ähnlicher Art die Möglichkeit eingeschlossen, daß entweder der geradlinige oder der gekrümmte Teil des Randes des betreffenden Bereiches verschwindet. Jede Zellenwand ist in der Mittelsenkrechten der Verbindungslinie vom Mittelpunkte P des in der Zelle eingelagerten Kreises zu dem Mittelpunkt eines gewissen anderen Kreises enthalten. Verbindet man P mit den Endpunkten der Zellenwände und fällt man von P aus auf die Zellenwände das Lot, falls es in Z enthalten ist, so zerfällt Z in eine endliche Anzahl von Dreiecken und einen Kreissektor. Ein Polygon, das von zwei von P ausgehenden Geraden der eben beschriebenen Art und einem Teil des Randes von Z begrenzt wird soll ein Zellenpolygon oder, falls es m Ecken hat, ein Zellen m-Eck genannt werden. Der Punkt P, der die Spitze des Zellenpolygons heißen soll, ist dabei stets als Ecke mitzuzählen. Unter dem Winkel eines Zellenpolygons ist der entsprechende Innenwinkel an der Spitze zu verstehen. Als Basis eines Zellendreiecks werde die seinem Winkel gegenüberliegende Seite bezeichnet und die von P ausgehende Höhe soll die Höhe des Zellendreiecks heißen. Enthält ein Zellendreieck nicht seine Höhe, so werde es ausgeartet genannt und ist die Höhe eine Seite des Zellendreiecks, der Winkel zwischen einer Dreiecksseite und der Basis also ein rechter, so werde von einem normalen Zellendreieck gesprochen. Schließlich definiere ich noch den Randbeitrag eines Zellenpolygons Z_0 als die Summe der Längen aller Seiten von Z_0, die in B^* liegen; gibt es keine solche Seite, so sei der Randbeitrag von Z_0 0 gesetzt. Man beachte hierbei, daß eine Seite von Z_0 entweder ganz in B^* liegt oder höchstens endlich viele Punkte mit B^* gemeinsam hat.

3. Es sollen nun einige Hilfssätze bewiesen werden. Für die Bezeichnung einer Strecke und der Länge dieser Strecke werden im allgemeinen dieselben Buchstaben verwendet und entsprechendes gilt auch für die Bezeichnung von Winkeln und Flächen.

HILFSSATZ 1. *Kann jede Zelle in einen Kreissektor und in eine Anzahl von Zellenpolygone Z_i so zerlegt werden, daß für den Randbeitrag r_i und den Winkel α_i von Z_i gilt*

$$\alpha_i \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} r_i \leqq Z_i, \tag{4}$$

so ist (2) *richtig. Gilt in jeder der Ungleichungen* (4) *Gleichheit, so auch in* (2); *gilt in mindestens einer der Ungleichungen* (4) *nicht das Gleichheitszeichen, so gilt es auch in* (2) *nicht.*

BEWEIS. Wegen (3) ist $\sum r_i = U - 2\pi$, $\sum Z_i = F - \pi$ und $\sum \alpha_i = 2\pi n - 2\pi$, wobei die Summation über die im Hilfssatz genannten Zellenpolygone aller vorhandenen Zellen zu erstrecken ist. Führt man in (4) die entsprechende Summation aus, so erhält man damit

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(2\pi n - 2\pi) + \frac{2-\sqrt{3}}{2}(U - 2\pi) \leqq F - \pi.$$

Dies aber ist mit (2) gleichbedeutend und die Richtigkeit der Behauptung über das Gleichheitszeichen ist daraus ebenfalls ersichtlich.

HILFSSATZ 2. *Hat ein Zellenpolygon den Randbeitrag* 0, *so gilt für dessen Winkel und Fläche* (4).

Für den Beweis siehe SEGRE und MAHLER [*2*].

HILFSSATZ 3. *Gilt für die Höhe h eines Zellendreiecks Z_0*

$$h \geqq 1{,}2,$$

so ist für dessen Randbeitrag r und dessen Winkel α (4) *erfüllt.*

BEWEIS. Wegen Hilfssatz 2 kann man $r > 0$ annehmen. r ist dann die Basis von Z_0. Bezeichnet β den Winkel zwischen h und der Winkelhalbierenden von α, so ergibt sich

$$r = h\left(\operatorname{tg}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\right). \tag{5}$$

Da $\beta + \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ sein muß, ist $\frac{\partial r}{\partial \beta} \geqq 0$ und daher die rechte Seite von (5) am kleinsten, wenn $\beta = 0$ ist; daraus folgt, daß stets

$$r \geqq 2h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \tag{6}$$

gilt. Aus der Tatsache daß $\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ monoton fällt, was ebenfalls leicht durch Differenzieren einzusehen ist, und aus (6) folgt für $h \geqq 1{,}2$

$$\frac{1}{r}\left(Z_0 - \alpha \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{r}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{2h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{h}{2} - \frac{1}{h}\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq 0{,}14\ldots$$

und somit

$$\frac{1}{r}\left(Z_0 - \alpha \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) > \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

was mit (4) äquivalent ist.

HILFSSATZ 4. *Hat ein ausgeartetes Zellendreieck positiven Randbeitrag, so erfüllt es die Ungleichung* (4).

BEWEIS. Das Zellendreieck werde mit Z_1 bezeichnet. Es habe die Höhe h_1 und die Basis also auch den Randbeitrag b_1. Wegen Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen $h_1 \geqq 1{,}2$ ist. Da Z_1 ausgeartet ist, wird h_1 etwa im Abstand x von der Spitze des Dreiecks von der Basis b_2 eines benachbarten Zellendreiecks Z_2 geschnitten. Die Höhe von Z_2 sei h_2. Ist Q derjenige Endpunkt von h_2, der nicht die Spitze von Z_2 ist, so hat Q von der Geraden die b_1 enthält einen Abstand d mit $d \geqq 1$; denn Q ist der Mittelpunkt einer Strecke, deren beide Endpunkte Mittelpunkte von eingelagerten Kreisen sind. Berechnet man x aus h_1, h_2 und d, so ergibt sich damit, wenn $h_1 < 1{,}2$ wäre, unter Beachtung von $h_2 \geqq 1$

$$h_1 > x = \frac{h_2^2}{(h_1 - d)} \geqq 5.$$

HILFSSATZ 5. *Ein Zellenviereck Z_0 bestehe aus zwei normalen Zellendreiecken Z_1 und Z_2, so daß deren gemeinsame Seite die Hypotenuse von Z_1 und Z_2 ist. Für Z_0 gilt* (4).

BEWEIS. Für $i = 1{,}2$ bezeichne h_i die Höhe und b_i die Basis von Z_i. Der Winkel von Z_0 sei α. Wegen der Hilfssätze 2 und 3 kann angenommen werden, daß eine der beiden Basen, etwa b_1, der Randbeitrag von Z_0 ist und $h_1 < 1{,}2$ gilt. Der zur Spitze von Z_0 bezüglich b_2 symmetrische Punkt ist der Mittelpunkt eines eingelagerten Kreises und hat daher von der Geraden, die b_1 enthält, einen Abstand, der nicht kleiner als 1 ist. Daraus folgt

$$\cos\alpha \leqq \frac{h_1 - 1}{2h_2}. \tag{7}$$

Berechnet man b_1 und b_2 aus α, h_1 und h_2, so ergibt sich

$$b_1 = \frac{h_2 - h_1 \cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad b_2 = \frac{h_1 - h_2\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Damit erhält man

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{b_1}\left(Z_0 - \alpha\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = \dfrac{h_1 b_1 + h_2 b_2}{2b_1} - \dfrac{\alpha}{b_1}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} \\ \qquad = \dfrac{h_1}{2} + \dfrac{h_2}{2}\,\dfrac{h_1 - h_2\cos\alpha}{h_2 - h_1\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{h - h_1\cos\alpha}\,\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}. \end{cases}$$

Es sei zunächst $\alpha < \frac{\pi}{2}$, also $\cos\alpha > 0$ vorausgesetzt. (7) und (8) ergeben dann

$$(9)\qquad \frac{1}{b_1}\left(Z_0 - \alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \geqq \frac{1+3h_1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2 - h_1(h_1 - 1)}.$$

Bezeichnet man den letzten Ausdruck mit $F(h_1)$, so ist für $1 \leqq h_1 < 1{,}2$ $2 - h_1(h_1 - 1) > 0$ und somit

$$\frac{d^2F(h_1)}{dh^2} = \frac{-\sqrt{3}}{(2 - h_1(h_1 - 1))^2}\left(1 + \frac{(2h_1 - 1)^2}{2 - h_1(h_1 - 1)}\right) < 0.$$

$F(h_1)$ nimmt daher das Minimum am Rande an und wegen

$$F(1{,}2) > \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \qquad F(1) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

ist daher

$$\frac{1}{b_1}\left(Z_0 - \alpha\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) > \frac{2 - \sqrt{3}}{2},$$

woraus unmittelbar (4) folgt.

Nun werde $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, also $\cos\alpha \leqq 0$, angenommen. Es gilt einerseits, da $h_1 \geqq 1$ und daher $h_1 - \cos\alpha \geqq 1 - h_1\cos\alpha$ ist.

$$(10)\qquad \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\,\frac{h_1 - h_2\cos\alpha}{h_2 - h_1\cos\alpha} \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{h_1 - \cos\alpha}{1 - h_1\cos\alpha} \geqq 1$$

und andererseits wegen der Monotonie von $\dfrac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$$(11)\qquad \frac{\alpha\sin\alpha}{h_2 - h_1\cos\alpha}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \leqq \frac{\alpha\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \leqq \frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \leqq \frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(8), (10) und (11) ergeben abermals (4).

Es möge beachtet werden, daß das Gleichheitszeichen durchgehend genau dann gilt, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $h_1 = 1$ und $h_2 = 1$ ist. Weiters sei noch bemerkt, daß die Formeln (9) und (10) zeigen, daß stets $\frac{Z_0}{b_1} \geqq 1$ ist.

HILFSSATZ 6. *Z_1 sei ein Zellendreieck, dessen Basis nicht in B^* liegt. Gilt für die Höhe h_1 von Z_1 $h_1 \leqq \sqrt{2}$, so ist Z_1 nicht ausgeartet.*

BEWEIS. Angenommen Z_1 sei ausgeartet. h_1 wird dann von der Basis eines benachbarten Zellendreiecks Z_2 etwa im Abstand x von der Spitze von Z_1 geschnitten. Z_2 habe die Höhe h_2. Die dritte Seite des Dreiecks mit den Seiten h_1 und h_2 sei g. Es muß $g \geqq 1$ sein; denn verlängert man h_1 und h_2

über g hinaus auf das Doppelte, so erhält man ein Dreieck mit den Seiten $2h_1$, $2h_2$, $2g$ und dessen Ecken Mittelpunkte von Einheitskreisen sind. Bezeichnet α den Winkel zwischen h_1 und h_2, so gilt

$$\cos\alpha = \frac{h_2^2 + h_1^2 - g^2}{2h_2 h_1}, \tag{12}$$

und wegen $h_2 \geqq 1$, $g \geqq 1$, $h_1 \leqq \sqrt{2}$ ist $h_2^2 \geqq h_1^2 - g^2$, woraus mit (12) $\cos\alpha \leqq \frac{h_2}{h_1}$ folgt. Dies gibt, da $\cos\alpha = \frac{h_2}{x}$ sein muß, $x \geqq h_1$. Aus der Annahme, daß Z_1 ausgeartet ist, entnimmt man aber auf Grund der Definition von x, daß $x < h_1$ ist.

HILFSSATZ 7. *Ein normales Zellendreieck Z_1 habe eine Basis, die in B^* liegt. Hat ein Zellendreieck Z_2, dessen eine Seite die Hypotenuse von Z_1 ist, eine Höhe h_2 mit $h_2 \geqq 1{,}56$, so gilt für Z_1* (4).

BEWEIS. Es seien für $i = 1, 2$ α_i der Winkel, h_i die Höhe und b_i die Basis von Z_i. Wie immer kann $h_1 < 1{,}2$ angenommen werden. Zunächst ist leicht einzusehen, daß

$$b_1 < 1{,}48 \tag{13}$$

vorausgesetzt werden darf. Ist nämlich $b_1 \geqq 1{,}48$, so hat man, da $\frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}$ eine monoton fallende Funktion ist,

$$\frac{1}{b_1}\left(Z_1 - \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = \frac{h_1}{2} - \frac{\operatorname{arctg}\frac{b_1}{h_1}}{b_1}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$
$$\geqq \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{arctg} 1{,}48}{1{,}48}\,\frac{\sqrt{3}}{\pi} \geqq \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

also gilt (4) in diesem Falle. Der Hilfssatz ist somit bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß aus (13) $h_2 < 1{,}56$ folgt. Bedeutet α den Winkel zwischen h_1 und h_2, so findet man, daß

$$h_2 = h_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha \tag{14}$$

ist. Gilt $\alpha \geqq \frac{\pi}{2}$, so erhält man daraus

$$h_2 \leqq b_1 \sin\alpha \leqq b_1 < 1{,}48 < 1{,}56.$$

Ist aber $\alpha < \frac{\pi}{2}$, so folgt aus (7) $h_2 \leqq \frac{h_1 - 1}{2\cos\alpha}$ und dies ergibt mit (14)

$$h_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha \leqq \frac{h_1 - 1}{2\cos\alpha}.$$

Daraus findet man

$$\operatorname{tg}\alpha \geqq \frac{b_1}{h_1 - 1} + \sqrt{\frac{b_1}{(h_1-1)^2} + \frac{h_1 + 1}{h_1 - 1}}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wächst mit b_1 und fällt mit h_1; sie wird daher nicht vergrößert, wenn man $b_1 = 1{,}48$ und $h_1 = 1{,}2$ setzt. Dies ergibt

$\operatorname{tg}\alpha > 15{,}5$, woraus $\cos\alpha < 0{,}065$ und damit

$$h_2 = h_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha < 1{,}2 \cdot 0{,}065 + 1{,}48 < 1{,}456$$

folgt.

HILFSSATZ 8. *Es sei ein Zellenfünfeck Z_0 gegeben, das aus drei Zellendreiecken Z_1, Z_2, Z_3, besteht, die folgende Eigenschaften haben: Z_1 sei normal und habe eine Basis die in B^* liegt. Die Hypotenuse von Z_1 sei eine Seite von Z_2. Z_2 soll ausgeartet sein und eine Höhe h_2 haben, für die $h_2 < 1{,}56$ gilt. Z_3 habe eine Seite mit Z_2 gemeinsam, eine Basis die nicht in B^* liegt und, falls es zwei Zellendreiecke mit diesen Eigenschaften gibt, so sei Z_3 dasjenige mit den kleineren Winkel. Unter diesen Voraussetzungen ist Z_3 normal und für Z_0 gilt* (4).

BEWEIS. Wie üblich sollen h_i und b_i die Höhe bzw. die Basis von Z_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnen. α_0 sei der Winkel von Z_0. Es kann wieder $h_1 < 1{,}2$ vorausgesetzt werden, denn ist $h_1 \geqq 1{,}2$, so gilt (4) für Z_1 nach Hilfssatz 3. Da Z_2 und Z_3 den Randbeitrag 0 haben, ist (4) auch für diese beiden Dreiecke richtig, wie aus Hilfssatz 2 zu entnehmen ist. Durch Addition der drei entsprechenden Ungleichungen für Z_1, Z_2 und Z_3 erhält man dann (4) für Z_0.

Vorerst läßt sich zeigen, daß Z_3 nicht ausgeartet ist, woraus dann unmittelbar folgt, da es minimalen Winkel hat, daß Z_3 normal ist. Nach Hilfssatz 6 ist es hinreichend $h_3 \leqq \sqrt{2}$ zu beweisen. Der Winkel zwischen h_2 und h_3 werde mit β bezeichnet und g sei die dritte Seite in dem Dreieck mit den Seiten h_2 und h_3. Wie beim Beweis von Hilfssatz 6 sieht man, daß $g \geqq 1$ gilt und da Z_2 ausgeartet ist, muß

$$h_3 \leqq h_2 \cos\beta \tag{15}$$

sein. Damit folgt

$$g^2 = h_2^2 + h_3^2 - 2 h_2 h_3 \cos\beta \leqq h_2^2 - h_3^2$$

und daher

$$\frac{\partial \cos\beta}{\partial h_3} = \frac{\partial}{\partial h_3} \frac{h_2^2 + h_3^2 - g}{2 h_2 h_3} = \frac{1}{h_2 h_3^2} (g^2 - h_2^2 - h_3^2) \leqq 0.$$

$\cos\beta$ als Funktion von h_3 ist also monoton fallend und somit gilt wegen $g \geqq 1$

$$\cos\beta = \frac{h_2^2 + h_3^2 - g_2^2}{2 h_2 h_3} \leqq \frac{h_2^2 + 1 - g^2}{2 h_2} \leqq \frac{h_2}{2}. \tag{16}$$

Zusammen mit (15) gibt dies

$$h_3 \leqq \frac{h_2^2}{2} \leqq \frac{1{,}56^2}{2} < \sqrt{2}.$$

Z_3 ist demnach normal. Aus (16) und $h_2 < 1{,}56$ erhält man noch

$$\beta > 0{,}66 > \frac{\pi}{6}. \tag{17}$$

Es seien nun T_1 das von h_1, h_2, b_1 und von der Geraden die b_2 enthält begrenzte Viereck. Der Teil von T_1 der nicht in Z_0 liegt ist ein Dreieck, das mit T_2 bezeichnet werde. Schließlich sei T_3 dasjenige Dreieck, dessen Seiten in h_2, h_3 und b_3 liegen. Offenbar ist

$$Z_0 = T_1 - T_2 + T_3$$

und daher ist (4) für Z_0 bewiesen, sobald

(18) $$\beta \frac{\sqrt{3}}{\pi} \leqq T_3$$

und

(19) $$(\alpha_0 - \beta) \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{2-\sqrt{3}}{2} b_1 \leqq T_1 - T_2$$

gezeigt ist, denn die Addition von (18) und (19) gibt (4). Zum Beweis von (18) beachte man, daß wegen der Monotonie von $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$ und auf Grund von (17)

$$T_3 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \beta = \frac{1}{2} h_3 \operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \beta \geqq \beta \left(\frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) > 0$$

gilt. Um (19) zu beweisen, werde die Fläche von T_2 abgeschätzt. Man findet wegen $h_2 < 1{,}56$ und (17)

(20) $$T_2 = \frac{1}{2} \left(h_2 - \frac{h_3}{\cos\beta} \right)^2 \operatorname{ctg}\beta \leqq \frac{1}{2} \left(1{,}56 - \frac{1}{\cos 0{,}66} \right)^2 \operatorname{ctg} 0{,}66 < 0{,}06.$$

Weiters kann

(21) $$b_1 > 1{,}25$$

vorausgesetzt werden; denn (7) auf den hier vorliegenden Fall angewendet ergibt $\cos(\alpha_0 - \beta) \leqq 0{,}1$ und damit, falls $b_1 \leqq 1{,}25$ ist,

$$h_2 = h_1 \cos(\alpha_0 - \beta) + b_1 \sin(\alpha_0 - \beta) \leqq 1{,}2 \cdot 0{,}1 + 1{,}25 \leqq \sqrt{2}.$$

Aus Hilfssatz 6 folgt dann, daß Z_2 nicht ausgeartet sein kann. Wendet man die am Ende des Beweises von Hilfssatz 5 gemachte Bemerkung auf T_1 und b_1 an, so erhält man $\frac{T_1}{b_1} \geqq 1$. Zusammen mit (20) und (21) ergibt sich daraus

(22) $$\frac{T_1 - T_2}{b_1} \geqq 1 - \frac{0{,}06}{1{,}25} > 0{,}95.$$

Nach Voraussetzung und Hilfssatz 6 ist $h_1 < 1{,}2 < \sqrt{2} \leqq h_2$ und daher

$$\frac{1}{2}(\alpha_0 - \beta) < \operatorname{arctg} \frac{b_1}{h_1}.$$

Die letzte Ungleichung, (21), (22) und die Monotonie von $\frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1}$ ergeben

$$\frac{1}{b_1}\left(T_1 - T_2 - (\alpha_0 - \beta) \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) > 0{,}95 - 2 \frac{\operatorname{arctg} \frac{b_1}{h_1}}{b_1} \frac{\sqrt{3}}{\pi}$$
$$\geqq 0{,}95 - 2 \frac{\operatorname{arctg} b_1}{b_1} \frac{\sqrt{3}}{\pi} > 0{,}95 - 2 \frac{\operatorname{arctg} 1{,}25}{1{,}25} \frac{\sqrt{3}}{\pi} > \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Daraus aber ersieht man unmittelbar (19) und der Hilfssatz ist bewiesen.

4. Der eingangs formulierte Satz kann nun leicht bewiesen werden. Um die Richtigkeit der Ungleichung (2) zu zeigen, ist nur zu überprüfen, ob die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt sind. Hat eine Zelle den Randbeitrag 0, so gilt für sie (4) wegen Hilfssatz (2). Es möge demnach positiver

Randbeitrag vorausgesetzt werden. Z_1 sei ein Zellendreieck, dessen Basis in B^* liegt. Nach Hilfssatz 3 kann für die Höhe h von Z_1 $h < 1{,}2$ angenommen werden, und Hilfssatz 4 berechtigt zu der Annahme, daß Z_1 nicht ausgeartet ist. Z_1 ist dann entweder normal oder kann in zwei normale Zellendreiecke zerlegt werden. Man kann jedes der beiden Dreiecke separat behandeln und somit Z_1 als normal voraussetzen. Ist ein Zellendreieck Z_2, dessen eine Seite die Hypotenuse von Z_1 ist, normal, so ergibt Hilfssatz 5 die Richtigkeit von (4) für das Zellenviereck, das aus Z_1 und Z_2 besteht. Es sei somit vorausgesetzt, daß das Z_1 benachbarte Zellendreieck Z_2 ausgeartet ist und zudem, wegen Hilfssatz 7, daß die Höhe von Z_2 nicht größer als $1{,}56$ ist. Dann besagt aber Hilfssatz 8, daß (4) für das Zellenfünfeck, das aus Z_1, Z_2 und dem sich an Z_2 anschließenden normalen Zellendreieck besteht, richtig ist. Um die im Hilfssatz 1 verlangte Einteilung einer Zelle in Zellenpolygone zu gewinnen, hat man demnach die normalen Zellendreiecke mit positivem Randbeitrag und eventuell noch je ein oder zwei diesem benachbarte Zellendreiecke zu verwenden. Es ist leicht einzusehen, daß ein Zellendreieck nie in mehreren solchen Vereinigungen vorkommen kann. Alle restlichen Dreiecke der Zelle, falls es welche gibt, haben den Randbeitrag 0 und Hilfssatz 2 gibt (4) für diese Zellendreiecke.

Die Hilfssätze 3, 4, 5, 7 und 8 ergaben für die Relation (4) strikte Ungleichheit, es sei denn, wie am Ende des Beweises von Hilfssatz 5 bemerkt wurde, daß ein Zellenviereck vorliegt, das ein Quadrat der Seitenlänge 1 mit einer in B^* liegenden Seite ist. Den im Satze genannten Bereich H erhält man dann von B ausgehend, wenn man alle diese Quadrate und die im Hilfssatz 2 erwähnten Kreissektoren von B abzieht. Ist H ein- oder nulldimensional, so liegen also die Fälle b) oder c) des Satzes vor und umgekehrt gilt in diesen Fällen auch Gleichheit. Ist H zweidimensional, so besteht H aus einer Anzahl von Zellenpolygonen, für die (4) gilt. Aus dem von Segre und Mahler gegebenen Beweis des Hilfssatzes 2 folgt, daß für alle diese Zellenpolygone dann und nur dann Gleichheit in (4) besteht, wenn der Durchschnitt einer jeden Zelle mit H entweder ein reguläres, einem eingelagerten Kreis umschriebenes Sechseck ist oder, falls der Mittelpunkt des Kreises auf dem Rande von H liegt, der Teil eines solchen Sechsecks ist, der durch zwei Mittelsenkrechten auf die Seiten von dem regulären Sechseck ausgeschnitten wird. Verbindet man die Mittelpunkte von je zwei einander berührenden Kreisen, so erhält man die verlangte Zerlegung von H in gleichseitige Dreiecke. Andererseits gilt in diesem Falle auch wirklich Gleichheit in (4) und damit in (2). Dies ergibt Teil a) des Satzes.

Literatur

[1] Fejes Tóth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 65, S. 67. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [2] Segre, B., and K. Mahler: On the densest packing of circles. Amer. Math. Monthly **51**, 261—270 (1944).

Department of Mathematics, Oregon State Coll. Corvallis, Oregon, U.S.A.

(Eingegangen am 12. Juni 1959)