LÜNEBURG, H.
Math. Zeitschr. 85, 419—450 (1964)

Charakterisierungen der endlichen desarguesschen projektiven Ebenen

Von
HEINZ LÜNEBURG

0. Einleitung

Ausgangspunkt der Untersuchungen dieser Arbeit ist die folgende Frage: Gibt es endliche nicht desarguessche projektive Ebenen $\mathscr{E}$ mit der Eigenschaft, daß es in $\mathscr{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathscr{E}$ für alle $Q \in g$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist? Dabei heißt eine projektive Ebene (R, h)-transitiv, falls es zu jedem Punktepaar X, Y mit $R \neq X, Y$ und $X, Y \notin h$ und $RX = RY$ eine Perspektivität σ mit dem Zentrum R und der Achse h gibt, so daß $X^\sigma = Y$ ist. Nicht desarguessche projektive Ebenen $\mathscr{E}$, in denen es ein solches nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, sind vom Lenz-Barlotti-Typ III-2 oder III-1, je nachdem $\mathscr{E}$ auch noch (P, g)-transitiv ist oder nicht (s. LENZ [*16*] und BARLOTTI [*5*]). Wie YAQUB in [*29*] bemerkte, beschreiben die von PICKERT in [*21*] S. 93 angegebenen cartesischen Gruppen projektive Ebenen dieser Typen. Zu dieser Klasse von Ebenen gehören auch die von MOULTON in [*19*] angegebenen nicht desarguesschen projektiven Ebenen. Dies sind nun, soweit mir bekannt ist, alle bekannten projektiven Ebenen vom Lenz-Barlotti-Typ III-1 bzw. III-2. Alle diese Ebenen sind unendlich. Die Vermutung, daß es keine endlichen projektiven Ebenen dieser Art gibt, wird durch die Ergebnisse dieser Arbeit nahegelegt. Die Korollare 3 und 5 besagen nämlich, daß die Ordnung einer endlichen projektiven Ebene vom Lenz-Barlotti-Typ III-2 kongruent 1 mod 4 ist, während eine endliche projektive Ebene gerader Ordnung vom Lenz-Barlotti-Typ III-1 nach Korollar 4 notwendig quadratische Ordnung hat.

Ist $\mathscr{E}$ eine desarguessche projektive Ebene und ist (P, g) ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar in $\mathscr{E}$, so ist die von allen Translationen von $\mathscr{E}$, deren Zentren auf g liegen und deren Achsen durch P gehen, erzeugte Gruppe Δ isomorph zur $SL(2, K)$, wenn K der Koordinatenkörper von $\mathscr{E}$ ist. Satz 2 sagt nun, daß eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q = p^r$ (p eine Primzahl), die eine Kollineationsgruppe Δ besitzt, die zur $SL(2, q)$ isomorph ist, sicher dann desarguessch ist, falls man noch, wenn $p = 2$ ist, voraussetzt, daß alle Involutionen aus Δ Perspektivitäten sind.

Um unsere eingangs gestellte Frage zu beantworten, wird man also versuchen, die Struktur der Kollineationsgruppe Δ, die von allen Translationen, deren Zentren auf g liegen und deren Achsen durch P gehen, erzeugt wird, zu bestimmen. Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen (s. die Sätze 5, 6 und 7 und die zugehörigen Korollare) ist es möglich, die Struktur von Δ vollständig aufzudecken und nachzuweisen, daß Δ zur $SL(2, q)$ isomorph ist, während q gerade die Ordnung der untersuchten Ebene ist, so daß diese Ebene nach Satz 2 dann desarguessch ist.

Der schon erwähnte und für die Frage nach der Existenz von endlichen projektiven Ebenen vom Lenz-Barlotti-Typ III-1 bzw. III-2 so wichtige Satz 2 gehört zu einem anderen Fragenkreis. Man kann sich nämlich fragen: Welche Untergruppen der Kollineationsgruppe einer endlichen desarguesschen projektiven Ebene bestimmen bereits vollständig die Struktur dieser Ebenen? Insbesondere wird man sich fragen, ob gewisse, geometrisch besonders ausgezeichnete Untergruppen die Struktur der Ebene bereits vollständig bestimmen. Wir sind dieser Frage für die Gruppen $SL(2, q)$, $PSL(2, q)$ und $PGL(2, q)$ nachgegangen. Unter zusätzlichen Voraussetzungen konnten wir zeigen, daß diese Gruppen die zugehörigen Ebenen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen (s. die Sätze 2, 3 und 4). Ferner konnten wir klären, wie diese Gruppen auf ihren zugehörigen desarguesschen Ebenen operieren. In diesem Zusammenhang ist es noch von Interesse zu erwähnen, daß Satz 3 für unendliche projektive Ebenen nicht mehr gilt (vgl. SALZMANN [*23*]).

Bezeichnungen und Definitionen

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G.

$[G:U]$ = Index der Untergruppe U von G in G.

$\mathscr{Z}G$ = Zentrum von G.

$\mathscr{U}G$ = größter Normalteiler ungerader Ordnung von G.

$\mathscr{N}U$ = der Normalisator der Untergruppe U von G.

$\langle\cdots \mid \cdots\rangle$ = die von ... mit ... erzeugte Gruppe.

Ist G eine Permutationsgruppe und X ein Element der permutierten Menge, so ist $G_X = \{g \in G \mid X^g = X\}$ die Standuntergruppe von X.

$\mathscr{A}_n$ = alternierende Gruppe vom Grade n.

$\mathscr{S}_n$ = symmetrische Gruppe vom Grade n.

$GF(q)$ = Galoisfeld mit q Elementen.

$GL(2, q)$ = lineare Gruppe in zwei Variabeln über $GF(q)$ = Gruppe aller 2×2-Matrizen mit Elementen aus $GF(q)$ und Determinante ungleich 0.

$SL(2, q)$ = spezielle lineare Gruppe in zwei Variabeln über $GF(q)$ = Gruppe aller 2×2-Matrizen mit Elementen aus $GF(q)$ und Determinante gleich 1.

$PGL(2, q) = GL(2, q)/\mathscr{Z}GL(2, q)$ = projektive lineare Gruppe in zwei Variabeln über $GF(q)$.

$PSL(2, q) = SL(2, q)/\mathscr{Z}SL(2, q)$ = spezielle projektive lineare Gruppe in zwei Variabeln über $GF(q)$.

$P\Gamma L(2, q)$ = Gruppe aller Abbildungen $x \to \dfrac{a x^\alpha + b}{c x^\alpha + d}$ mit $a, b, c, d \in GF(q)$, $ad - bc \neq 0$ und $\alpha \in \operatorname{Aut} GF(q)$, der Automorphismengruppe von $GF(q)$.

$PSU(3, 2^{2r})$ = spezielle projektive unitäre Gruppe in drei Variabeln über $GF(2^{2r})$.

$S(2^{2r+1})$ = Suzuki-Gruppe (s. SUZUKI [*26*]).

Ist P ein Punkt und g eine Gerade einer projektiven Ebene $\mathscr{E}$ und ist σ eine Kollineation von $\mathscr{E}$, die P geradenweise und g punktweise festläßt, so heißt σ eine (P, g)-Perspektivität oder auch kurz Perspektivität von $\mathscr{E}$. Ist $P \in g$, so sagen wir statt Perspektivität auch Translation, und ist $P \notin g$, so sagen wir statt Perspektivität auch Streckung. Der Punkt P heißt Zentrum und die Gerade g Achse von σ. Eine nicht triviale Perspektivität hat genau ein Zentrum und genau eine Achse (BAER [*3*]). Die Menge aller (P, g)-Perspektivitäten bilden eine Gruppe, die wir mit $\Gamma(P, g)$ bezeichnen werden.

Eine projektive Ebene heißt (P, g)-transitiv, falls es zu jedem Punktepaar X, Y mit $P \neq X, Y$ und $X, Y \notin g$ und $PX = PY$ ein $\sigma \in \Gamma(P, g)$ mit $X^\sigma = Y$ gibt.

Eine Dualität δ einer projektiven Ebene heißt perspektiv mit dem Zentrum P und der Achse g, falls $X^\delta = XP$ für alle $X \in g$ und $x^\delta = x \cap g$ für alle x mit $P \in x$ ist. Insbesondere ist also $P \notin g$. Eine projektive Ebene heißt (P, g)-homogen, falls $P \notin g$ ist und falls es zu jedem Punkt-Geradenpaar (X, y) mit $P \neq X \notin g$, $P \notin y \neq g$ und $g \cap y = g \cap PX$ eine perspektive Dualität δ mit dem Zentrum P und der Achse g gibt, so daß $X^\delta = y$ ist. Eine (P, g)-homogene Ebene ist insbesondere (P, g)-transitiv (BAER [*2*]).

Eine Menge $\mathscr{C}$ von $q+1$ Punkten einer endlichen projektiven Ebene $\mathscr{E}$ der Ordnung q heißt ein Oval, falls keine drei Punkte von $\mathscr{C}$ kollinear sind. Eine Gerade von $\mathscr{E}$ heißt Passante, Tangente oder Sekante, je nachdem sie keinen, einen oder zwei Punkte von $\mathscr{C}$ enthält. Durch jeden Punkt von $\mathscr{C}$ geht genau eine Tangente. Ist $q \equiv 0 \bmod 2$, so gehen alle Tangenten an $\mathscr{C}$ durch ein und denselben Punkt, den Knoten von $\mathscr{C}$. Ist $q \equiv 1 \bmod 2$, so sind keine drei Tangenten konfluent. Wir nennen einen Punkt, der nicht auf $\mathscr{C}$ liegt, äußeren Punkt, wenn durch ihn genau zwei Tangenten an $\mathscr{C}$ gehen. Alle übrigen Punkte, die nicht auf $\mathscr{C}$ liegen, nennen wir innere Punkte (QVIST [*22*]).

1. Zweifach transitive Untergruppen der $P\Gamma L(2, q)$

In diesem Abschnitt werden wir uns einen Überblick über die Untergruppen der $P\Gamma L(2, q)$ verschaffen, die einmal die $PSL(2, q)$ enthalten und die zum andern eine Darstellung als zweifach transitive Permutationsgruppe besitzen.

Bekanntlich (s. DICKSON [*9*] § 239) besitzt die $PSL(2, q)$ eine Darstellung als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade $q+1$ und jede Untergruppe der $P\Gamma L(2, q)$, die die $PSL(2, q)$ enthält, ist ebenfalls zweifach transitiv vom selben Grad. Daß es darüber hinaus nur sehr wenige andere Möglichkeiten gibt, zeigt der

Satz 1. *Ist* $G = PSL(2, q)$, $K = P\Gamma L(2, q)$ *und* $G \subseteq H \subseteq K$, *besitzt ferner* H *eine treue Darstellung als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade* $n+1$, *so ist entweder* $n = q$ *und* H *irgendeine Untergruppe von* K *mit* $G \subseteq H$ *oder es ist*

(1) $q=4$, $n=5$ *und* $H = PSL(2, 4)$ *oder* $H = P\Gamma L(2, 4)$;

(2) $q=5$, $n=4$ *und* $H = PSL(2, 5)$ *oder* $H = PGL(2, 5)$;

(3) $q=7$, $n=6$ *und* $H = PSL(2, 7)$;

(4) $q=8$, $n=27$ *und* $H = P\Gamma L(2, 8)$;

(5) $q=9$, $n=5$ *und* $H = PSL(2, 9)$ *oder* $H = PSL(2, 9)\langle\sigma\rangle$, *wobei* σ *die durch* $x^\sigma = x^3$ *erklärte Abbildung aus* $P\Gamma L(2, 9)$ *ist.*

(6) $q=11$, $n=10$ *und* $H = PSL(2, 11)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die sechs Ausnahmefälle wirklich vorkommen und daß es für H keine anderen Möglichkeiten gibt, falls q und n die unter (1) bis (6) aufgeführten Werte haben.

Ad (1). Nach DICKSON [9] §§ 280, 281 sind die Gruppen $PSL(2, 4)$ und $PSL(2, 5)$ isomorph. Aus dieser Isomorphie folgt, daß die $PSL(2, 4)$ eine Darstellung als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade 6 besitzt, d.h. $q=4$, $n=5$ und $H = PSL(2, 4)$ kommt vor. Da die $PSL(2, 4)$ einfach ist, ist sie zur Gruppe ihrer inneren Automorphismen isomorph. Diese operiert aber als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade 6 auf den 5-Sylow-Gruppen der $PSL(2, 4)$ und jede zweifach transitive Darstellung vom Grade 6 der $PSL(2, 4)$ ist dieser Darstellung äquivalent. Daher folgt, da die $PSL(2, 4)$ in $P\Gamma L(2, 4)$ normal ist, daß auch die $P\Gamma L(2, 4)$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 6 besitzt. Andere Möglichkeiten für H gibt es nicht, da der Index von $PSL(2, 4)$ in $P\Gamma L(2, 4)$ gleich 2 ist.

Ad (2). Daß die $PSL(2, 5)$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 5 besitzt, folgt aus der Isomorphie dieser Gruppe mit der $PSL(2, 4)$. Nun ist jede Darstellung vom Grade 5 der $PSL(2, 5)$ äquivalent der Darstellung der Gruppe der inneren Automorphismen als Permutationsgruppe auf den 2-Sylow-Gruppen. Hieraus folgt wegen der Normalität von $PSL(2, 5)$ in $PGL(2, 5)$, daß auch die $PGL(2, 5)$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 5 besitzt. Andere Möglichkeiten gibt es wegen $PGL(2, 5) = P\Gamma L(2, 5)$ nicht.

Ad (3). Nach DICKSON [9] § 282 sind die Gruppen $PSL(2, 7)$ und $PSL(3, 2)$ isomorph. Nun ist bekanntlich die $PSL(3, 2)$ die Kollineationsgruppe der projektiven Ebene der Ordnung 2 und besitzt daher eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 7. Jede solche Darstellung ist äquivalent einer Darstellung der Gruppe der inneren Automorphismen auf einer Klasse konjugierter Oktaedergruppen. Nach DICKSON [9] § 257 gibt es 14 solcher Oktaedergruppen in der $PSL(2, 7)$, die alle unter $PGL(2, 7)$ konjugiert sind. Folglich kann die $PGL(2, 7)$ keine Darstellung als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade 7 haben. Weitere Möglichkeiten für H gibt es nicht, da $PGL(2, 7) = P\Gamma L(2, 7)$ ist.

Ad (4). Sei $G=PSL(2, 8)$ und S eine 3-Sylow-Gruppe von G. Wegen $o(G)=9 \cdot 8 \cdot 7$ ist $o(S)=9$. Nach DICKSON [9] § 243 ist S, da ja alle Sylow-Gruppen konjugiert sind, zyklisch. Der Normalisator von S ist nach DICKSON [9] § 246 eine Dieder-Gruppe der Ordnung 18. Die Anzahl der 3-Sylow-Gruppen von G ist daher 28. Die Gruppe G besitzt also eine transitive Darstellung vom Grade 28 und folglich auch $K=P\Gamma L(2, 8)$. Da der Normalisator einer 3-Sylow-Gruppe die Ordnung 18 hat und die 3-Sylow-Gruppen nach DICKSON [9] § 243 paarweise den Durchschnitt 1 haben, folgt, daß auch $S \cap \mathcal{N}T=1$ ist, falls T eine von S verschiedene 3-Sylow-Gruppe von G ist. Daher zerlegt S die Menge $\mathcal{T}$ der von S verschiedenen 3-Sylow-Gruppen in drei Transitivitätsgebiete $\mathcal{T}_i$ der Länge 9. Ist nun $\bar{S}$ eine 3-Sylow-Gruppe von K, die S enthält, so folgt aus $o(\bar{S})=27$, daß $\bar{S}$ entweder auf $\mathcal{T}$ transitiv ist oder aber die gleichen Transitivitätsgebiete wie S hat. Es genügt also für eine 3-Sylow-Gruppe $\bar{S}$ von K zu zeigen, daß z.B. $\mathcal{T}_1^{\bar{S}} \neq \mathcal{T}_1$ ist.

Das Polynom $f(x)=x^3+x+1$ ist irreduzibel über $GF(2)$, jedoch $f(x)=0$ lösbar in $GF(8)$. Daraus folgt, daß ein $a \in GF(8)$ mit $f(a)=0$ die multiplikative Gruppe von $GF(8)$ erzeugt. Sei also $a \in GF(8)$ und $f(a)=0$. Die Matrix

$$A_i=\begin{pmatrix} 0 & a^i \\ a^{-i} & 1 \end{pmatrix}, \qquad i=0, 1, \ldots, 6,$$

ist ein Element der Ordnung 3 in $PSL(2, 8)$. Ferner ist

$$A_i^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & a^i \\ a^{-i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach DICKSON [9] § 243 bestimmen die A_i daher sieben paarweise verschiedene 3-Sylow-Gruppen von $PSL(2, 8)$. Sei

$$C=\begin{pmatrix} a & a^4 \\ a^4 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $C^3=A_0$ und folglich $o(C)=9$. Die Matrix C erzeugt also eine 3-Sylowgruppe von G, sie werde mit S bezeichnet. Setzt man $B_j=C^{-j} A_1 C^j$, $j=0, 1, \ldots, 8$, so ist

$$B_0=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1=\begin{pmatrix} a^6 & a^3 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} a^2 & a^4 \\ a^6 & a^6 \end{pmatrix},$$

$$B_3=\begin{pmatrix} a^3 & a^4 \\ a & a \end{pmatrix}, \quad B_4=\begin{pmatrix} a^5 & a^3 \\ a^3 & a^4 \end{pmatrix}, \quad B_5=\begin{pmatrix} a^3 & a \\ a^4 & a \end{pmatrix},$$

$$B_6=\begin{pmatrix} a^2 & a^6 \\ a^4 & a^6 \end{pmatrix}, \quad B_7=\begin{pmatrix} a^6 & 1 \\ a^3 & a^2 \end{pmatrix}, \quad B_8=\begin{pmatrix} 0 & a^6 \\ a & 1 \end{pmatrix}=A_6.$$

Man sieht, daß A_1 und A_6 unter S konjugiert sind, während es kein Element aus S gibt, welches A_1 in A_i oder A_i^{-1} transformiert, wenn nur i von 1 und 6 verschieden ist. Die 3-Sylow-Gruppen, die A_1 und A_6 enthalten, liegen also im gleichen Transitivitätsgebiet $\mathcal{T}_1$ von S, während die 3-Sylow-Gruppen, die die übrigen A_i enthalten, nicht in $\mathcal{T}_1$ liegen. Nun zerlegt die von σ mit $x^\sigma = x^3$ erzeugte Untergruppe von $P\Gamma L(2, 8)$ die Menge der A_i in drei Transitivitätsgebiete, nämlich $\{A_0\}$, $\{A_1, A_2, A_4\}$ und $\{A_3, A_5, A_6\}$. Daraus folgt dann nach dem weiter oben Bemerkten, daß $\bar{S}$ auf $\mathcal{T}$ transitiv ist. Folglich besitzt $P\Gamma L(2, 8)$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 28. Aus Ordnungsgründen gibt es keine weiteren Möglichkeiten für H.

Ad (5). Nach DICKSON [*9*] § 287 sind die Gruppen $PSL(2, 9)$ und $\mathcal{A}_6$ isomorph. Daher besitzt die $PSL(2, 9)$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 6. Jede solche Darstellung ist äquivalent der Darstellung der Gruppe der inneren Automorphismen auf einer Klasse konjugierter Ikosaedergruppen. Nun enthält nach DICKSON [*9*] § 259 die $PSL(2, 9)$ genau 12 Ikosaedergruppen, die alle unter $PGL(2, 9)$ konjugiert sind. Folglich besitzt die $PGL(2, 9)$ keine zweifach transitive Darstellung vom Grade 6. Sei nun σ die durch $x^\sigma = x^3$ definierte Abbildung aus $P\Gamma L(2, 9)$. Dann hat σ die Fixpunkte 0, 1, 2 und ∞. Daraus folgt, daß es eine Untergruppe der Ordnung 3 in $PSL(2, 9)$ gibt, die von σ zentralisiert wird. S sei eine solche Gruppe und A sei eine zur $\mathcal{A}_5$ isomorphe Untergruppe, die S enthält. Dann ist $S = \sigma^{-1} S \sigma \subseteq \sigma^{-1} A \sigma$, d.h. es ist $S \subseteq A \cap \sigma^{-1} A \sigma$. Daraus folgt, daß A und $\sigma^{-1} A \sigma$ bereits unter $PSL(2, 9)$ konjugiert sind, da die Ordnung des Durchschnittes zweier nicht konjugierter Untergruppen von $PSL(2, 9)$, die beide zur $\mathcal{A}_5$ isomorph sind, gleich 10 ist. Die beiden Klassen konjugierter Ikosaedergruppen werden also von σ invariant gelassen. Folglich besitzt auch $H = PSL(2, 9) \langle \sigma \rangle$ eine zweifach transitive Darstellung vom Grade 6.

Ad (6). Die $PSL(2, 11)$ besitzt eine primitive Darstellung auf 11 Ziffern (DICKSON [*9*] § 262). Die Standuntergruppe S einer Ziffer ist isomorph der $\mathcal{A}_5$. Ferner hat S nur eine Ziffer als universelles Fixelement, da die Darstellung primitiv ist. Daher zerlegt S, falls die Darstellung nicht zweifach transitiv ist, die Ziffern in ein Transitivitätsgebiet $\mathcal{T}_1$ der Länge 1 und zwei Transitivitätsgebiete $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_3$ der Länge 5. Auf $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_3$ operiert S dann als alternierende Gruppe vom Grade 5. Insbesondere ist S also zweifch transitiv auf $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_3$, was nach MANNING [*18*] Theorem nicht sein kann. Also ist die Darstellung zweifach transitiv. Da es nach DICKSON [*9*] § 259 insgesamt 22 Ikosaedergruppen in der $PSL(2, 11)$ gibt, die unter $PGL(2, 11)$ alle konjugiert sind, kann die $PGL(2, 11)$ keine zweifach transitive Darstellung vom Grade 11 besitzen.

Nun zeigen wir, daß dies alle Ausnahmefälle sind. Sei also $G = PSL(2, q) \subseteq H \subseteq K = P\Gamma L(2, q)$. Ferner besitze H eine treue Darstellung Δ als zweifach transitive Permutationsgruppe vom Grade $n+1$. Ist $q \leqq 3$, so besitzt G eine abelsche, charakteristische Untergruppe N der Ordnung $q+1$. Da H durch Δ treu dargestellt ist, muß N in der Darstellung Δ scharf transitiv vom Grade $n+1$ sein. Folglich ist $n+1 = q+1$, d.h. $n = q$. Wir können also annehmen, daß $q > 3$ ist. Nach DICKSON [*9*] § 261 ist G dann einfach. Nun ist G normal in K und daher auch normal in H. Da G einfach ist, ist G ein minimaler Normalteiler in H. Ist Γ der G in Δ entsprechende Normalteiler, so ist also auch Γ ein minimaler Normalteiler von Δ. Aus der zweifachen Transitivität von Δ folgt daher nach BURNSIDE [7] § 154, daß Γ primitiv vom Grade $n+1$ ist. Um n zu berechnen, brauchen wir folglich nur die Indizes der maximalen Untergruppen von Γ auszurechnen und dabei zu beachten, daß $n(n+1)$ ein Teiler von $o(H)$ ist. Da $o(H)$ ein Teiler von $o(K)$ ist, ist also auch $n(n+1)$ ein Teiler von $o(K)$. Ist $q=p^s$, so ist $o(K)=sq(q^2-1)$ und es gilt daher

(i) $n(n+1)$ teilt $sq(q^2-1)$.

Als maximale Untergruppen von G kommen nach DICKSON [9] § 262 nur die folgenden Gruppen in Frage[1]):

1. $N=\mathscr{N}G_p$, wobei G_p eine p-Sylow-Gruppe von G ist.

2. Dieder-Gruppen D_1 mit $o(D_1)=q+1$ bzw. $2(q+1)$ je nachdem, ob $p>2$ oder $p=2$ ist.

3. Dieder-Gruppen D_2 mit $o(D_2)=q-1$ bzw. $2(q-1)$ je nachdem, ob $p>2$ oder $p=2$ ist.

4. $G_r \cong PSL(2, p^r)$ mit $sr^{-1} \geqq 3$.

5. $G^r \cong PGL(2, p^r)$ mit $p>2$ und $sr^{-1}=2k \geqq 4$.

6. $D_3 \cong \mathscr{A}_4$, falls $q \equiv \pm 3 \bmod 8$.

7. $D_4 \cong \mathscr{S}_4$, falls $q \equiv \pm 1 \bmod 8$.

8. $D_5 \cong \mathscr{A}_5$, falls $q \equiv \pm 1 \bmod 10$.

Es ist $o(PSL(2, q))=\frac{1}{2}q(q^2-1)$ bzw. $=q(q^2-1)$, je nachdem $p>2$ oder $=2$ ist. Ferner ist $o(N)=\frac{1}{2}q(q-1)$ oder $=q(q-1)$, je nachdem $p>2$ oder $=2$ ist.

1. Fall. $n+1=[G:N]$. Nach dem eben Bemerkten ist daher

$$n+1=[G:N]=\frac{2^{-1}q(q^2-1)}{2^{-1}q(q-1)}=\frac{q(q^2-1)}{q(q-1)}=q+1, \quad \text{d.h. } n=q\,.$$

2. Fall. $n+1=[G:D_1]=\frac{1}{2}q(q-1)$. Dies ist wieder für alle q richtig. Nach (i) ist daher $\frac{1}{2}p^s(p^s-1)-1=\frac{1}{2}(p^{2s}-p^s-2)$ ein Teiler von $sp^s(p^{2s}-1)$. Nun ist $(\frac{1}{2}q(q-1)-1, \frac{1}{2}q(q-1))=1$. Folglich ist $\frac{1}{2}(p^{2s}-p^s-2)$ ein Teiler von $2s(p^s+1)$. Daher ist $p^{2s}-p^s-2 \leqq 4sp^s+4s$. Hieraus folgt, daß $p^{2s}-(4s+1)p^s \leqq 4s+2$ ist. Dann ist

$$\left(p^s-\frac{4s+1}{2}\right)^2 \leqq 4s+2+\frac{(4s+1)^2}{4}.$$

Hieraus folgt, daß

$$p^s-\frac{4s+1}{2}<4s+1+\frac{4s+1}{2}$$

ist. Also ist $p^s<8s+2$. Ist nun $p^t>8t+2$, so folgt, daß $p^{t+1}>8tp+2p>8(t+1)+2$ ist. Ist $p \geqq 11$, so ist $p>10$ und daher $p^s>8s+2$. Daher folgt aus $p^s<8s+2$, daß $p=2$, 3, 5 oder 7 ist und man sieht leicht, daß $p^s=2$, 4, 8, 16,

[1]) Die Dicksonsche Liste ist nicht vollständig. Es fehlen jedoch nur die Dieder-Gruppen der Ordnung $2(q\pm 1)$, falls q gerade ist.

32, 3, 9, 5 oder 7 ist. Mit Hilfe von (i) sieht man, daß nur $q=4$ oder 8 möglich ist. Dann ist aber $n=5$ bzw. 27, d.h. wir haben gerade die Fälle (1) und (4) vor uns.

3. Fall. $n+1=[G:D_2]=\frac{1}{2}q(q+1)$. Aus (i) folgt, daß $\frac{1}{2}q(q+1)-1$ ein Teiler von $sq(q^2-1)$ ist. Hieraus folgt, daß $\frac{1}{2}q(q+1)-1$ sogar ein Teiler von $2s(q-1)$ ist. Dann ist aber $p^{2s}+(1-4s)p^s \leqq 2-4s<0$. Folglich ist $p^s<4s-1$. Ist $p\geqq 3$ und ist $p^s\geqq 4s-1$ bereits bewiesen, so ist $p^{s+1}\geqq p(4s-1)>2(4s-1)\geqq 4(s+1)-2$. Hieraus folgt, daß auch $p^{s+1}\geqq 4(s+1)-1$ ist. Ferner ist $2^4=16>4\cdot 4-1$. Aus $2^s>4s-1$ folgt einmal $s\geqq 4$ und $2^{s+1}>4\cdot 2s-2=4(s+1)+4(s-1)-2>4(s+1)-1$. Aus $p^s<4s-1$ folgt daher, daß $p^s=2$, 4 oder 8 ist. Aus (i) folgt, daß $p^s=2$ ist. Dann ist aber $n=2=q$.

4. Fall. Sei $M=G_r$ oder $=G^r$ und $n+1=[G:M]$. Dann ist

$$n+1=a^{-1}p^{s-r}\frac{p^{2s}-1}{p^{2r}-1}$$

und $a=1$ oder 2. Nach (i) ist dann

$$a^{-1}p^{s-r}\frac{p^{2s}-1}{p^{2r}-1}-1$$

ein Teiler von $sp^s(p^{2s}-1)$. Wegen $s-r\geqq 1$ und $(n+1,n)=1$ ist

$$a^{-1}p^{s-r}\frac{p^{2s}-1}{p^{2r}-1}-1$$

sogar ein Teiler von $s(p^{2r}-1)$. Hieraus folgt, daß

$$p^{s-r}\left[a^{-1}\frac{p^{2s}-1}{p^{2r}-1}-1\right]<s(p^{2r}-1)$$

ist. Wegen $s>s-r\geqq 2r$ ist dann

$$a^{-1}\frac{p^{2s}-1}{p^{2r}-1}\leqq s\frac{p^{2r}-1}{p^{s-r}}<s\frac{p^{2r}-1}{p^{2r}-1}=s.$$

Folglich ist, da $a\leqq 2$ ist, $p^{2s}-1<2s(p^{2r}-1)<2s(p^s-1)$. Hieraus folgt, daß $p^s+1<2s$ ist. Nun ist $p\geqq 2$. Sei bereits bewiesen, daß $p^t\geqq 2t$ ist. Dann ist $p^{t+1}\geqq 2pt\geqq 2(t+1)$. Daher ist stets $p^s+1>2s$: ein Widerspruch. Folglich kann der Grad von H nicht gleich $[G:M]$ sein.

5. Fall. Sei nun

$$n+1=[G:D_i]=\frac{p^s(p^{2s}-1)}{2o(D_i)}\qquad (i=3,4,5).$$

Nach (i) ist wieder $n=[G:D_i]-1$ ein Teiler von $sp^s(p^{2s}-1)$. Wegen $(n+1,n)=1$ ist dann n sogar ein Teiler von $2s\,o(D_i)$. Folglich ist $p^s(p^{2s}-1)\leqq 4[o(D_i)]^2s+2o(D_i)$ und daher

(ii) $p^s(p^{2s}-1)<2\cdot 4\,[o(D_i)]^2\,s$.

Sei $p^s(p^{2s}-1)>8\,[o(D_i)]^2\,s$. Dann ist

$$p^{s+1}(p^{2(s+1)}-1)>p^{s+1}(p^{2s+2}-p^2)>8\,p^3\,[o(D_i)]^2\,s>8\,[o(D_i)]^2(s+1).$$

Es gilt also

(iii) Aus $p^s(p^{2s}-1)>8\,[o(D_i)]^2\,s$ folgt, daß auch

$$p^{s+1}(p^{2(s+1)}-1)>8\,[o(D_i)]^2(s+1)$$

ist.

Sei $i=3$. Nach (ii) ist dann $p^s(p^{2s}-1)<2\cdot 24^2 s$. Sei $p\geqq 11$. Dann ist $p(p^2-1)\geqq 12\cdot 11\cdot 10>2\cdot 24^2$. Aus (ii) und (iii) folgt daher, daß $p=3,5$ oder 7 ist. Ebenso leicht sieht man, daß q nur gleich 3, 9, 5 oder 7 sein kann. Nun ist aber $q\equiv\pm 3$ mod 8. Folglich kann q nur gleich 5 sein, da wir $q>3$ vorausgesetzt hatten. Dann ist $n=4$: Dies ist der Fall (2).

Sei $i=4$. Nach (ii) ist dann $p^s(p^{2s}-1)<2\cdot 48^2 s$. Mit Hilfe von (iii) sieht man wieder, daß $p^s=3$, 9, 5, 7, 11 oder 13 ist. Aus $q\equiv\pm 1$ mod 8 folgt, daß nur $q=7$ oder 9 in Frage kommen. $q=7$ ergibt $n=6$, d.h. den Fall (3) und $q=9$ ergibt $n=14$. Nun ist 14 kein Teiler von $2\cdot 9\cdot 80$, so daß also $q=9$ und $n=14$ nicht möglich ist.

Sei schließlich $i=5$. Mit Hilfe von (ii) und (iii) und $q\equiv\pm 1$ mod 10 erhält man, daß für q nur die Werte 9, 11, 19 und 29 in Frage kommen. $q=9$ führt auf $n=5$, d.h. den Fall (5). Mit $q=11$ errechnet man für n den Wert 10: Dies ist der Fall (6). Die übrigen Werte führen mit (i) auf einen Widerspruch. Damit ist Satz 1 bewiesen.

2. Kennzeichnungen der endlichen desarguesschen Ebenen mit Hilfe gewisser Untergruppen der projektiven Gruppe dieser Ebenen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, ob eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q=p^r$, p eine Primzahl, die eine Kollineationsgruppe besitzt, die zur $SL(2,q)$ bzw. $PSL(2,q)$ isomorph ist, desarguessch ist. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen, die möglicherweise überflüssig sind, ist dies richtig, so daß wir also, da die projektive Gruppe einer desarguesschen Ebene der Ordnung q ja stets Untergruppen enthält, die zur $SL(2,q)$ bzw. $PSL(2,q)$ isomorph sind, Kennzeichnungen der endlichen desarguesschen Ebenen erhalten.

Satz 2. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q=p^r$, p eine Primzahl, ist ferner Δ eine zur $SL(2,q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ und ist ferner, falls $p=2$ ist, jede Involution aus Δ eine Perspektivität, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch.*

Beweis. Sei zunächst $p=2$, d.h. $q=2^r$. Wir beweisen dann:

(1) Δ besitzt ein universelles Fixelement.

Sei Σ eine 2-Sylow-Gruppe von Δ und $1\neq\sigma\in\Sigma$. Da die 2-Sylow-Gruppen der $SL(2,2^r)$ elementarabelsche 2-Gruppen sind, ist σ eine Involution. Nach Voraussetzung ist daher σ zentral und, da die Ordnung von $\mathscr{E}$ gerade ist, sogar eine Translation. Sei P das Zentrum und g die Achse von σ. Dann ist, da Σ abelsch ist, $P^\Sigma = P$ und $g^\Sigma = g$. Ist ferner $1 \neq \tau \in \Sigma$, so ist τ ebenfalls eine Translation. Ist Q das Zentrum und h die Achse von τ, so ist wieder $Q^\Sigma = Q$ und $h^\Sigma = h$. Ist $Q \neq P$, so ist QP Fixgerade aller Involutionen aus Σ. Da ferner Q und P unter Σ festbleiben, ist QP Achse aller Translationen aus Σ. Dual gilt: Ist $g \neq h$, so ist $g \cap h$ Zentrum aller Translationen aus Σ. Die Translationen aus Σ haben also alle entweder das gleiche Zentrum oder die gleiche Achse oder aber gleiches Zentrum und gleiche Achse. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß g die Achse jeder Involution aus Σ ist. Ist T eine von Σ verschiedene 2-Sylow-Gruppe von Δ, so gibt es, da ja Σ und T konjugiert sind, eine Gerade h, die Achse jeder Translation aus T ist. Ist $h = g$, so ist $g^\Delta = g$, da Δ von Σ und T erzeugt wird, und Δ hat folglich ein universelles Fixelement. Sei also $h \neq g$. Der Punkt $g \cap h$ ist Fixpunkt sowohl von Σ als auch von T, da ja Σ und T als elementarabelsche 2-Gruppen nur Translationen mit der Achse g bzw. h enthalten. Da Δ von Σ und T erzeugt wird, ist $g \cap h$ auch universeller Fixpunkt von Δ. Damit ist (1) bewiesen.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Δ einen universellen Fixpunkt P hat. Es gilt dann

(2) Δ ist auf den Geraden durch P transitiv.

Wäre nämlich Δ auf den Geraden durch P nicht transitiv, so ließe Δ wegen $q \neq 5, 7, 9, 11$ nach DICKSON [9], § 262 alle Geraden durch P fest. Δ bestünde also nur aus Perspektivitäten mit dem Zentrum P. Dann wäre aber $o(\Delta) = q(q^2-1)$ ein Teiler von $q^2(q-1)$: ein Widerspruch. Daher gilt (2).

Da die $SL(2, 2^r)$ nur eine Darstellung als Permutationsgruppe vom Grade $2^r + 1$ hat, folgt nach DICKSON [9], §§ 239, 240 die Gültigkeit von

(3) Δ ist auf den Geraden durch P scharf dreifach transitiv.

g und h seien zwei verschiedene Geraden durch P. Ferner sei $\Delta_{g,h}$ die Standuntergruppe dieser beiden Geraden. Aus (3) und $o(\Delta) = q(q^2-1)$ folgt, daß $o(\Delta_{g,h}) = q-1$ ist. Nach DICKSON [9] § 260 sind alle Untergruppen der Ordnung $q-1$ zyklisch. Folglich ist auch $\Delta_{g,h}$ zyklisch. Es seien $Q, R \in g - \{P\}$ und $Q \neq R$. Ferner sei $\delta \in \Delta_{g,h}$ mit $Q^\delta = Q$ und $R^\delta = R$. Die von δ erzeugte Gruppe werde mit H bezeichnet. Dann ist natürlich $Q^{\mathrm{H}} = Q$ und $R^{\mathrm{H}} = R$. Nach (3) gibt es ein $\sigma \in \Delta$ mit $g^\sigma = h$ und $h^\sigma = g$. Dann ist $\sigma^{-1} \Delta_{g,h} \sigma = \Delta_{g,h}$ und da H wegen der Zyklizität von $\Delta_{g,h}$ in $\Delta_{g,h}$ charakteristisch ist, ist also auch $\sigma^{-1} \mathrm{H} \sigma = \mathrm{H}$. Die Punkte Q^σ und R^σ sind Fixpunkte von $\sigma^{-1} \mathrm{H} \sigma$, d.h. von H und damit von δ. Ferner ist $Q^\sigma, R^\sigma \in h - \{P\}$. Folglich bilden die Punkte Q, R, Q^σ, R^σ ein nicht ausgeartetes Viereck. Hieraus folgt, daß δ eine nicht ausgeartete Teilebene $\mathscr{F}$ von $\mathscr{E}$ elementweise festläßt. Wegen $P^\delta = P$ ist P ein Punkt von $\mathscr{F}$. Folglich gehen durch P mindestens drei Fixgeraden von δ. Aus (3) folgt dann, daß $\delta = 1$ ist. Ein von der Identität verschiedenes Element aus $\Delta_{g,h}$ hat also auf $g - \{P\}$ höchstens einen Fixpunkt. Sei nun δ ein Element von Primzahlordnung aus $\Delta_{g,h}$. Da q und $q-1$ teilerfremd sind, hat δ mindestens einen und damit genau einen Fixpunkt Q auf $g - \{P\}$. Weil $\Delta_{g,h}$ abelsch ist, ist daher Q ein universeller Fixpunkt von $\Delta_{g,h}$. Folglich operiert $\Delta_{g,h}$ auf $g-\{P,Q\}$ regulär. Wegen $o(\Delta_{g,h})=q-1$ gilt daher, wenn $q>2$ ist

(4) $\Delta_{g,h}$ hat auf g genau zwei Fixpunkte, von denen einer gleich P ist. Die restlichen Punkte von g bilden ein Transitivitätsgebiet von $\Delta_{g,h}$.

Angenommen, P wäre Zentrum einer involutorischen Translation aus Δ. Dann ist P, da alle Involutionen in Δ konjugiert sind, Zentrum jeder involutorischen Translation aus Δ. Nun können nicht alle involutorischen Translationen aus Δ die gleiche Achse haben, da dann Δ, das ja von seinen Involutionen erzeugt wird, eine Gerade punktweise festließe, was nach der zu (2) dualen Aussage nicht möglich ist. Nach GLEASON [*12*], Lemma 1.2 sind daher alle Involutionen aus Δ miteinander vertauschbar: ein Widerspruch.

(5) P ist niemals Zentrum einer involutorischen Translation aus Δ.

Sei nun Σ eine 2-Sylow-Gruppe von Δ. Dann läßt Σ eine Gerade g durch P fest. Ist $1 \neq \sigma \in \Sigma$, so ist σ eine involutorische Translation mit $g^{\sigma}=g$. Hieraus folgt, daß das Zentrum von σ auf g liegt. Da P nach (5) nicht das Zentrum von σ ist, andererseits P unter σ festbleibt, muß g die Achse von σ sein, d.h. g ist Achse jeder Translation aus Σ.

1. Fall. Es gibt zwei nicht triviale Translationen in Σ, die verschiedene Zentren haben. Hieraus folgt zunächst, daß $q>2$ ist. Q und R seien zwei verschiedene Punkte auf g, die Zentren von nicht trivialen Translationen aus Σ sind. Aus (5) folgt, daß $Q, R \in g-\{P\}$ ist. Nach (4) können daher wegen $q>2$ nicht beide Punkte unter $\Delta_{g,h}$ festbleiben. Nun gibt es in Σ genau $q-1$ nicht triviale Translationen. Daraus folgt dann, daß es auf g genau $q-1$ Punkte gibt, die Zentren nicht trivialer Translationen aus Σ sind. Da alle 2-Sylow-Gruppen miteinander konjugiert sind, gilt

(6) Ist T eine 2-Sylow-Gruppe von Δ und g die Gerade durch P, die von T festgelassen wird, so gibt es einen Punkt $F \in g-\{P\}$, der nicht Zentrum einer nicht trivialen Translation aus T ist, während jeder Punkt von $g-\{F, P\}$ Zentrum von genau einer nicht trivialen Translation aus T ist. Ferner ist g die Achse aller Translationen aus T.

Der Punkt $F \in g$ ist also dadurch gekennzeichnet, daß er der einzige von P verschiedene Punkt auf g ist, der nicht Zentrum einer involutorischen Translation aus Δ ist. Daraus und aus (2) folgt, daß $|F^{\Delta}|=q+1$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß keine drei Punkte von F^{Δ} kollinear sind, d.h.

(7) F^{Δ} ist ein Oval.

Da Δ transitiv auf F^{Δ} operiert, genügt es zu zeigen, daß F mit keinen zwei weiteren Punkten von F^{Δ} kollinear ist. Nun ist T auf den von g verschiedenen Geraden durch F transitiv, da F ja niemals Zentrum einer nicht trivialen Translation aus T ist. Folglich liegt auf jeder Geraden durch F, die von g verschieden ist, mindestens ein Punkt von $F^{\Delta}-\{F\}$ und damit wegen $|F^{\Delta}|=q+1$ genau einer. Also gilt (7).

(8) Δ zerlegt die Menge der Punkte von $\mathscr{E}$ in genau drei Transitivitätsgebiete, nämlich $\mathscr{P}_1=\{P\}$, $\mathscr{P}_2=F^{\Delta}$ und $\mathscr{P}_3=$Menge aller übrigen Punkte.

Es ist daher $|\mathcal{P}_1|=1$, $|\mathcal{P}_2|=q+1$ und $|\mathcal{P}_3|=q^2-1$. Nach (2) bilden die Geraden durch P ein Transitivitätsgebiet $\mathcal{R}_1$ von Δ. Nun folgt aus (3), daß Δ auf F^Δ dreifach transitiv ist. Daher bilden die Geraden, die F^Δ in zwei verschiedenen Punkten treffen, da F^Δ nach (7) ein Oval ist, ebenfalls ein Transitivitätsgebiet $\mathcal{R}_2$ von Δ. Nun folgt aus (8) nach DEMBOWSKI [8] Satz 1 und Satz 2, daß die Anzahl der Geradentransitivitätsgebiete von Δ ebenfalls gleich drei ist. Es gibt also nur noch ein weiteres Transitivitätsgebiet $\mathcal{R}_3$ und es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{R}_3$ gerade aus den Geraden besteht, die keinen Punkt von F^Δ enthalten. Es ist $|\mathcal{R}_1|=q+1$, $|\mathcal{R}_2|=\frac{1}{2}q(q+1)$ und $|\mathcal{R}_3|=\frac{1}{2}q(q-1)$.

Wir können nun $\mathcal{E}$ folgendermaßen innerhalb von Δ darstellen:

1° Dem Punkt P ordnen wir die Menge $\Pi=\{\mathcal{N}\mathrm{T} \mid \mathrm{T}$ ist 2-Sylow-Gruppe von $\Delta\}$ zu.

2° Ist $X\in\mathcal{P}_2$, so ordnen wir X die Gruppe Δ_X zu. Da Δ nach (3) auf $\mathcal{P}_2$ primitiv operiert, ist die Zuordnung $X\to\Delta_X$ eineindeutig. Ferner ist $o(\Delta_X)=q(q-1)$. Folglich ist $\Delta_X=\mathcal{N}\mathrm{T}$, wobei T eine geeignete 2-Sylow-Gruppe von Δ ist.

3° Ist $X\in\mathcal{P}_3$, so ordnen wir X die eindeutig bestimmte involutorische Translation $\sigma_X\in\Delta$ zu, deren Zentrum X ist. Die Abbildung $X\to\sigma_X$ mit $X\in\mathcal{P}_3$ ist ebenfalls eineindeutig.

4° Ist y eine Gerade, so ordnen wir y die Gruppe Δ_y zu. Die Zuordnung $y\to\Delta_y$ ist für $y\in\mathcal{R}_1$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathcal{R}_1$ auf die Menge der Normalisatoren der 2-Sylow-Gruppen von Δ, für $y\in\mathcal{R}_2$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathcal{R}_2$ auf die Menge der Dieder-Gruppen der Ordnung $2(q-1)$ aus Δ und für $y\in\mathcal{R}_3$ eine eineindeutige Abbildung von $\mathcal{R}_3$ auf die Menge der Dieder-Gruppen der Ordnung $2(q+1)$ aus Δ.

Wir müssen nun nur noch die Inzidenzen beschreiben. Es ist $P\in y$ genau dann, wenn $\Delta_y\in\Pi$ ist. Ist $X\in\mathcal{P}_2$, so ist $X\in y$ genau dann, wenn entweder $\Delta_X=\Delta_y$ oder $o(\Delta_X\cap\Delta_y)=q-1$ ist. Ist $X\in\mathcal{P}_3$, so ist $X\in y$ genau dann, wenn $\sigma_X\in\Delta_y$ ist. Man verifiziert mühelos, daß dies richtig ist.

Um zu zeigen, daß die Ebene $\mathcal{E}$ desarguessch ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß man eine desarguessche Ebene der Ordnung $q=2^r$ auf die gleiche Weise innerhalb der $SL(2, q)$ darstellen kann.

Sei also $\mathcal{F}$ eine desarguessche projektive Ebene der Ordnung $q=2^r$. Da $\mathcal{F}$ desarguessch ist, können wir $\mathcal{F}$ mit Hilfe eines 3-dimensionalen Vektorraumes V über $K=GF(q)$ darstellen (s. BAER [4], Theorem S. 302). Die Punkte von $\mathcal{F}$ sind dann die 1-dimensionalen Unterräume $K(x, y, z)$ von V, wobei $x, y, z\in K$ und $(x, y, z)\neq(0, 0, 0)$ ist. Man rechnet leicht nach, daß die Punktmenge $\mathcal{C}=\{K(0, 1, 0), K(k, k^2, 1) \mid k\in K\}$ ein Oval in $\mathcal{F}$ ist. Man überzeugt sich ebenso leicht, daß die von

$$s=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

und

$$S_0=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ b & b^2 & 1\end{pmatrix} \middle| a, b\in K, a\neq 0\right\}$$

erzeugte Gruppe S von linearen Abbildungen von V eine Kollineationsgruppe Σ von $\mathscr{F}$ induziert, die einmal $\mathscr{C}$ invariant läßt[2]) und die zum andern zur $SL(2, q)$ isomorph ist. Hieraus folgt schließlich, daß $\mathscr{E}$ und $\mathscr{F}$ sich auf die gleiche Weise innerhalb der $SL(2, q)$ darstellen lassen, so daß also $\mathscr{E}$ und $\mathscr{F}$ isomorph sind: $\mathscr{E}$ ist desarguessch. Ferner sieht man noch, daß F^Δ und $\mathscr{C}$ projektiv äquivalent sind. F^Δ ist somit ein Kegelschnitt, da ja die Koordinaten der Punkte von $\mathscr{C}$ der Gleichung $x^2+yz=0$ genügen.

2. Fall. Alle nicht trivialen Translationen aus Σ haben das gleiche Zentrum. Das Zentrum aller nicht trivialen Translationen aus Σ sei Q. Ferner sei T eine von Σ verschiedene 2-Sylow-Gruppe von Δ und R sei das Zentrum aller nicht trivialen Translationen aus T. Nach (5) ist $P\neq Q, R$ und da Σ von T verschieden ist, folgt aus (2), daß $Q\neq R$ und $P\notin QR$ ist. Da Q das Zentrum aller Translationen aus Σ ist und R das Zentrum aller Translationen aus T, so folgt, daß QR sowohl Fixgerade von Σ als auch Fixgerade von T ist. Nun ist Δ das Erzeugnis von Σ und T. Folglich ist QR auch Fixgerade von Δ. Es gilt also

(9) Δ besitzt einen universellen Fixpunkt P und eine universelle Fixgerade g mit $P\notin g$.

Als nächstes zeigen wir nun, daß (9) auch dann gilt, wenn q ungerade ist. Sei also $\mathscr{E}$ eine projektive Ebene der Ordnung $q=p^r$, wobei p eine von 2 verschiedene Primzahl sei. Ferner sei Δ eine zur $SL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$. Da q ungerade ist, ist $o(\mathscr{Z}\Delta)=2$. Ist nun $1\neq\sigma\in\mathscr{Z}\Delta$ und ist σ keine Streckung, so läßt σ nach Baer [3] eine Unterebene $\mathscr{F}$ von $\mathscr{E}$ der Ordnung s mit $s^2=q$ elementweise fest. Ließe Δ die Ebene $\mathscr{F}$ punktweise fest, so müßte Δ, da $\mathscr{F}$ eine maximale Unterebene von $\mathscr{E}$ ist, auf den Punkten einer Geraden von $\mathscr{F}$, die nicht zu $\mathscr{F}$ gehören, regulär operieren. Dann wäre aber $q(q^2-1)=o(\Delta)$ ein Teiler von $q-s$: ein Widerspruch. Folglich operiert $\mathrm{H}=\Delta/\mathscr{Z}\Delta$ auf $\mathscr{F}$ effektiv, da H einfach ist. Die Punkteanzahl von $\mathscr{F}$ ist gleich $s^2+s+1=q+1+s$. Ist nun $q\neq 9$, so hat, da q als Quadratzahl von 5, 7 und 11 verschieden ist, jedes nicht triviale Transitivitätsgebiet von H mindestens die Länge $q+1$ (Dickson [9], § 263). Ferner ist s^2+s+1 kein Teiler von $\frac{1}{2}s^2(s^4-1)=o(\mathrm{H})$. Folglich ist H intransitiv auf $\mathscr{F}$. Da die Anzahl der Geraden von $\mathscr{F}$ gleich $q+1+s$ ist und $s<q$ ist, folgt, daß H mindestens eine Fixgerade g in $\mathscr{F}$ besitzt. Nun ist $s+1<q+1$. Daraus folgt, daß H auf g die

---

[2]) Man beachte, daß die Matrizen als Rechtsfaktoren zu schreiben sind. So ist z.B.

$$K(0,1,0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=K(1,1,1).$$

Identität induziert. Daraus folgt wiederum, daß $g \cap t = \emptyset$ ist, falls t ein nicht triviales Punkttransitivitätsgebiet von H (in $\mathscr{F}$) ist. Daher ist $q+1 \leqq |t| \leqq s^2 = q$: ein Widerspruch. Also ist $q=9$. Dann ist aber $o(\mathrm{H}) = 5 \cdot 9 \cdot 8$ ein Teiler der Ordnung der Kollineationsgruppe von $\mathscr{F}$. Andrerseits ist die Ordnung der Kollineationsgruppe von $\mathscr{F}$ gleich $27 \cdot 16 \cdot 13$. Nun ist 5 kein Teiler von $27 \cdot 16 \cdot 13$ und folglich auch dieser Fall zum Widerspruch geführt. Somit ist σ eine Streckung. Ist P das Zentrum und g die Achse von σ, so ist $P \notin g$ und $P^\Delta = P$ und $g^\Delta = g$, da σ ja im Zentrum von Δ liegt.

Um Satz 2 zu beweisen, brauchen wir daher nur noch zu zeigen, daß eine projektive Ebene der Ordnung $q = p^r$, die eine Kollineationsgruppe besitzt, die zur $SL(2, q)$ isomorph ist, und die außerdem ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar invariant läßt, desarguessch ist.

Sei also $\mathscr{E}$ eine projektive Ebene der Ordnung $q = p^r$, p eine Primzahl. Ferner sei Δ eine zur $SL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$. Schließlich sei (P, g) ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar von $\mathscr{E}$ mit $P^\Delta = P$ und $g^\Delta = g$. Würde Δ auf g die Identität induzieren, so bestünde Δ nur aus (P, g)-Streckungen. Dann wäre aber bekanntlich $q(q^2-1) = o(\Delta)$ ein Teiler von $q-1$, was wegen $q \geqq 2$ nicht möglich ist. Es gibt also ein Transitivitätsgebiet t von Δ mit $t \subseteq g$ und $|t| \geqq 2$. Dann ist $q(q^2-1) = o(\Delta) = |t| \cdot o(\Delta_Q)$, falls $Q \in t$ ist. Wegen $2 \leqq |t| \leqq q+1$ ist dann

$$(10) \quad q(q^2-1) > o(\Delta_Q) \geqq q(q-1).$$

Sei zunächst $q \neq 5, 7, 9, 11$. Aus (10) folgt dann nach DICKSON [9], § 262, daß $o(\Delta_Q) = q(q-1)$ ist. Folglich ist $|t| = q+1$, also $t = g$. Sei nun $q = 5, 7$ oder 11. Aus (10) folgt dann nach [9], § 262, daß $q+1 \geqq |t| \geqq q$ ist. Sei $|t| = q$. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in g$ mit $Q^\Delta = Q$. Ist $h = PQ$, so ist also $h^\Delta = h$. Da Δ auf h zwei Fixpunkte hat, enthält jedes Transitivitätsgebiet t' von Δ mit $t' \subseteq h$ höchstens $q-1$ Punkte. Folglich ist nach [9] § 262 $|t'| = 1$, d.h. Δ induziert auf h die Identität. Somit besteht Δ nur aus Perspektivitäten mit der Achse h. Hieraus folgt, daß $q(q^2-1)$ ein Teiler von $q^2(q-1)$ ist: ein Widerspruch. Also ist auch in diesen Fällen $|t| = q+1$, d.h. $t = g$. Sei schließlich $q = 9$. Ist $|t| < 10$, so ist wegen (10) und [9] § 262 dann $|t| = 6$. Folglich läßt Δ auf g vier verschiedene Punkte fest. Q, R, S, T seien diese Punkte. Dann sind aber auch die Geraden PQ, PR, PS und PT unter Δ invariant. Da Δ auf jeder dieser Geraden zwei Fixpunkte hat, läßt Δ auf jeder dieser Geraden mindestens vier Punkte fest. Daraus folgt, daß Δ eine echte Unterebene $\mathscr{F}$ von $\mathscr{E}$ der Ordnung $s \geqq 3$ elementweise festläßt. Nun ist nach BRUCK [6] Lemma 3.1 stets $s^2 \leqq q$, falls q die Ordnung einer projektiven Ebene $\mathscr{E}$ und s die Ordnung einer echten Unterebene von $\mathscr{E}$ ist. In unserem Falle ist also $s^2 \leqq 9$, d.h. $s \leqq 3$. Andrerseits war $s \geqq 3$. Folglich ist $s = 3$. Ist nun h eine Gerade von $\mathscr{F}$, so operiert Δ auf den Punkten von h, die nicht zu $\mathscr{F}$ gehören, regulär, da $\mathscr{F}$ eine maximale Unterebene von $\mathscr{E}$ ist. Folglich ist $10 \cdot 9 \cdot 8 = o(\Delta)$ ein Teiler von $10 - 4 = 6$: ein Widerspruch. Also ist auch in diesem Falle $t = g$. Wir haben also

(11) Δ induziert auf g eine transitive Permutationsgruppe.

N sei der Normalteiler von Δ, der auf g die Identität induziert. Da $\Delta/\mathscr{Z}\Delta$ einfach ist, andrerseits aus (11) folgt, daß $\mathrm{N} \neq \Delta$ ist, ist $\mathrm{N} \subseteq \mathscr{Z}\Delta$. Da ferner $o(\mathscr{Z}\Delta) < p$ ist, muß jede p-Sylow-Gruppe von Δ auf g effektiv operieren. Aus $q+1 \equiv 1 \mod p$ folgt, daß jede p-Sylow-Gruppe von Δ mindestens einen Fixpunkt auf g hat. Zwei verschiedene p-Sylow-Gruppen erzeugen Δ und können daher wegen (11) auf g keinen gemeinsamen Fixpunkt haben. Da nun die Anzahl der p-Sylow-Gruppen von Δ nach DICKSON [9] § 260 gleich $q+1$ ist, folgt, daß jede p-Sylow-Gruppe von Δ genau einen Fixpunkt auf g hat. Ferner folgt, daß auch jeder Punkt von g Fixpunkt einer p-Sylow-Gruppe ist. Da die Gruppe der inneren Automorphismen von Δ auf den p-Sylow-Gruppen von Δ zweifach transitiv ist, ist Δ auch auf den Punkten von g zweifach transitiv. Nun ist $o(\mathscr{Z}\Delta) \leqq 2 < q+1$. Aus der zweifachen Transitivität von Δ auf g folgt daher, daß $\mathscr{Z}\Delta$ auf g die Identität induziert. Folglich ist $\mathrm{N} = \mathscr{Z}\Delta$. Die von Δ auf g induzierte Permutationsgruppe ist also zur $PSL(2, q)$ isomorph. Daraus folgt schließlich noch, daß eine Kollineation aus Δ, die auf g drei verschiedene Fixpunkte hat, in $\mathscr{Z}\Delta$ liegt. Es gilt also

(12) Die von Δ auf g induzierte Permutationsgruppe Δ^* ist auf den Punkten von g zweifach transitiv und nur die Identität aus Δ^* läßt drei verschiedene Punkte von g fest. Ferner ist $\Delta^* \cong \Delta/\mathscr{Z}\Delta$ und $o(\mathscr{Z}\Delta) = 2$, falls q ungerade ist, und $\mathscr{Z}\Delta = 1$, falls q gerade ist.

Q und R seien zwei verschiedene Punkte von t. Ferner sei $\Delta_{Q,R}$ die Standuntergruppe dieser beiden Punkte. Es ist $o(\Delta_{Q,R}) = q-1$ und $\mathscr{Z}\Delta \subseteq \Delta_{Q,R}$. Nach DICKSON [9] § 260 ist $\Delta_{Q,R}/\mathscr{Z}\Delta$ zyklisch. Nach ZASSENHAUS [30] S. 140 unten ist daher $\Delta_{Q,R}$ abelsch. Die Sylow-Gruppen ungerader Ordnung von $\Delta_{Q,R}$ sind wegen $o(\mathscr{Z}\Delta) \leqq 2$ zyklisch. Ist $\mathscr{Z}\Delta = 1$, so ist also $\Delta_{Q,R}$ selbst zyklisch, da ja in diesem Falle $q-1$ ungerade ist. Ist $\mathscr{Z}\Delta \neq 1$, so ist $\mathscr{Z}\Delta$ die einzige Untergruppe der Ordnung 2 in Δ. Da $\Delta_{Q,R}$ abelsch ist, ist auch die 2-Sylow-Gruppe von $\Delta_{Q,R}$ abelsch. Da die 2-Sylow-Gruppe aber nur ein Element der Ordnung 2 enthält, ist sie zyklisch. Also ist auch $\Delta_{Q,R}$ zyklisch.

Sei $Q \in g$ und $S \in PQ - \{P, Q\}$ und $\delta \in \Delta_{Q,R}$ mit $S^\sigma = S$. Sei H die von δ erzeugte Gruppe. Dann ist auch $S^{\mathrm{H}} = S$. Schließlich sei $\sigma \in \Delta$ und $Q^\sigma = R$ und $R^\sigma = Q$ (ein solches σ gibt es nach (12)). Dann ist $\sigma^{-1}\Delta_{Q,R}\,\sigma = \Delta_{Q,R}$ und folglich, da $\Delta_{Q,R}$ zyklisch ist, $\sigma^{-1}\mathrm{H}\,\sigma = \mathrm{H}$. Hieraus folgt, daß $S^\sigma \in PR - \{P, R\}$ ein Fixpunkt von H und damit von δ ist. Von den vier Punkten Q, R, S und S^σ sind keine drei kollinear. Daraus folgt, daß δ eine nicht ausgeartete Teilebene von $\mathscr{E}$ elementweise festläßt. Dann hat aber δ mindestens drei Fixpunkte auf g und somit induziert δ nach (12) auf g die Identität. Da δ außerhalb g die Fixpunkte P und S hat, ist daher $\delta = 1$. Daraus folgt, daß $\Delta_{Q,R}$ auf $PQ - \{P, Q\}$ regulär und wegen $o(\Delta_{Q,R}) = q-1$ auch transitiv ist.

Sei nun T eine p-Sylow-Gruppe von Δ. Es gibt dann, wie wir gesehen haben, genau einen Punkt $Q \in g$ mit $Q^{\mathrm{T}} = Q$. Daraus folgt, daß $(PQ)^{\mathrm{T}} = PQ$ ist. Nun hat T auf $PQ - \{P, Q\}$ mindestens einen Fixpunkt, da p kein Teiler von $q-1$ ist. Da andrerseits $\Delta_{Q,R}$ im Normalisator von T enthalten ist, folgt, daß T die Gerade PQ punktweise festläßt. T besteht also nur aus Perspektivitäten mit der Achse PQ. Da nun $g^{\mathrm{T}}=g$ ist und T auf $g-\{Q\}$ regulär operiert, folgt, daß $\mathrm{T}=\Gamma(Q, PQ)$ ist.

Wir entfernen nun aus $\mathscr{E}$ den Punkt P, die Gerade g und alle mit diesen inzidierenden Elemente. Die Inzidenzstruktur, die wir auf diese Weise erhalten, bezeichnen wir mit $\mathscr{E}^*$. Die Gruppe Δ induziert in $\mathscr{E}^*$ eine Kollineationsgruppe, die wir, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, wieder mit Δ bezeichnen. Wir zeigen nun

(13) Ist $\mathscr{F}$ eine projektive Ebene und ist (P, g) ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar von $\mathscr{F}$, so daß $\mathscr{F}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$, so ist die Gruppe $\mathrm{E}=\langle\Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g\rangle$ auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren von $\mathscr{F}^*$ transitiv. Insbesondere ist also Δ auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren von $\mathscr{E}^*$ transitiv.

Ist nämlich X ein Punkt von $\mathscr{F}^*$, so ist $\Gamma(PX \cap g, PX)$ auf den Geraden durch X, die zu $\mathscr{F}^*$ gehören, transitiv. Es bleibt also nur zu zeigen, daß E auf den Punkten von $\mathscr{F}^*$ transitiv ist. Sind X und Y zwei in $\mathscr{F}^*$ verbindbare Punkte, so sind P, X und Y in $\mathscr{F}$ nicht kollinear. Folglich gibt es ein $\tau \in \Gamma(XY \cap g, P(XY \cap g))$ mit $X^\tau = Y$. Sind X und Y nicht verbindbar, so gibt es einen Punkt Z in $\mathscr{F}^*$, der sowohl mit X als auch mit Y verbindbar ist. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es $\sigma, \tau \in \mathrm{E}$ mit $X^\sigma = Z$ und $Z^\tau = Y$. Damit ist (13) bewiesen.

Es sei $\Pi=\Delta_Q$ und $\Lambda=\Delta_h$, wobei Q, h ein inzidentes Punkt-Geradenpaar von $\mathscr{E}^*$ ist. Die Anzahl der Punkte von $\mathscr{E}^*$ wie die Anzahl der Geraden ist gleich q^2-1. Da $o(\Delta)=q(q^2-1)$ ist, folgt daher aus (13), daß $o(\Pi)=q=o(\Lambda)$ ist. Π und Λ sind also p-Sylow-Gruppen von Δ. Überdies ist $\Pi \neq \Lambda$. Wäre nämlich $\Pi=\Lambda$, so wäre, da die p-Sylow-Gruppen von Δ Translationsgruppen sind, $PQ \cap g \in h$ und folglich $PQ \cap g = h \cap g = Q$: ein Widerspruch. Ist R ein Punkt von $\mathscr{E}^*$, so definieren wir die Abbildung φ durch $\varphi(R)=\Pi\delta$ genau dann, wenn $Q^\delta=R$ ist. Ist k eine Gerade von $\mathscr{E}^*$, so definieren wir die Abbildung ψ durch $\psi(k)=\Lambda\eta$ genau dann, wenn $h^\eta=k$ ist. φ ist eine eineindeutige Abbildung der Punkte von $\mathscr{E}^*$ auf die Rechtsrestklassen nach Π und ψ ist eine eineindeutige Abbildung der Geraden von $\mathscr{E}^*$ auf die Rechtsrestklassen nach Λ. Nach HIGMAN und MCLAUGHLIN [*14*] Prop. 1 folgt dann aus (13), daß $R \in k$ genau dann gilt, wenn $\varphi(R) \cap \psi(k) \neq \emptyset$ ist. Wir haben also gezeigt, daß sich $\mathscr{E}^*$ vollständig innerhalb Δ beschreiben läßt. Da nun $\mathscr{E}$ durch $\mathscr{E}^*$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, genügt es, um nachzuweisen, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist, zu zeigen, daß, falls $\mathscr{F}$ eine desarguessche Ebene der Ordnung q ist, $\mathscr{E}^*$ und $\mathscr{F}^*$ isomorph sind.

Sei also $\mathscr{F}$ eine desarguessche projektive Ebene der Ordnung q. Sie werde wieder mit Hilfe eines 3-dimensionalen Verktorraumes V über $K=GF(q)$ dargestellt. g sei die Gerade mit der Gleichung $z=0$ und P der Punkt $K(0, 0, 1)$. Dann ist $P \notin g$. Ferner sei Γ die von der Gruppe

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in K, ad-bc \neq 0\right\}$$

induzierte Kollineationsgruppe von $\mathscr{F}$. Es ist $P^\Gamma = P$ und $g^\Gamma = g$[3]. Überdies ist $\Gamma \cong GL(2, q)$. Folglich ist $o(\Gamma) = q(q-1)(q^2-1)$. Es sei $Q = K(1, 0, 0)$. Man rechnet leicht nach, daß $\Gamma(Q, PQ)$ durch die Gruppe

$$G(Q, PQ) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in K \right\}$$

treu induziert wird. Ferner ist $G(Q, PQ) \subset G$ und $o(G(Q, PQ)) = q$, so daß $\Gamma(Q, PQ)$ wegen $o(\Gamma) = q(q-1)(q^2-1)$ eine p-Sylow-Gruppe von Γ ist. Nun erzeugen die p-Sylow-Gruppen von $GL(2, q)$ gerade die $SL(2, q)$, d.h. $\Delta = \langle \Gamma(Q^\gamma, (PQ)^\gamma) \mid \gamma \in \Gamma \rangle$ ist isomorph zur $SL(2, q)$. Hieraus folgt, daß sich $\mathscr{F}^*$ mit Hilfe zweier p-Sylow-Gruppen in der oben beschriebenen Weise darstellen läßt. Da die Automorphismengruppe von Δ auf den p-Sylow-Gruppen von Δ zweifach transitiv operiert, folgt daher, daß $\mathscr{E}^*$ und $\mathscr{F}^*$ isomorph sind. Folglich ist $\mathscr{E}$ desarguessch und somit ist Satz 2 bewiesen.

Korollar 1. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche desarguessche projektive Ebene der Ordnung $q = p^r$ und ist Δ eine zur $SL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$, so operiert Δ auf folgende Weise auf $\mathscr{E}$:*

(a) *Entweder läßt Δ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) fest und die p-Sylow-Gruppen von Δ sind genau die Translationsgruppen $\Gamma(Q, PQ)$ mit $Q \in g$,*

(b) *oder aber es ist $p = 2$ und Δ läßt einen Kegelschnitt $\mathscr{C}$ und dessen Knoten P invariant und jeder Punkt von $\mathscr{E}$, der von P verschieden ist und nicht auf $\mathscr{C}$ liegt, ist Zentrum genau einer involutorischen Translation aus Δ,*

(c) *oder aber es ist $p = 2$ und Δ operiert auf die zu* (b) *duale Weise auf $\mathscr{E}$.*

Alle drei Fälle kommen vor.

Beweis. Ist $p > 2$, so haben wir bereits gesehen, daß Δ wie unter (a) beschrieben auf $\mathscr{E}$ operiert. Sei also $p = 2$. Es genügt dann, wie der Beweis von Satz2 zeigt, zu zeigen, daß jede Involution aus Δ eine Perspektivität ist. Ist $q = 2$, so ist jede involutorische Kollineation von $\mathscr{E}$ eine Perspektivität. Sei also $q > 2$. Dann ist $PSL(2, q)$ einfach. Da $p = 2$ ist, ist ferner $SL(2, q) \cong PSL(2, q)$. Folglich ist Δ einfach. Nun ist die $PSL(3, q)$ einfach, während $P\Gamma L(3, q)/PSL(3, q)$ auflösbar ist.

Da nach Baer [*4*] First Fundamental Theorem S. 44 die Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ zur $P\Gamma L(3, q)$ isomorph ist, folgt, daß Δ in einer zur $PSL(3, q)$ isomorphen Untergruppe der Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ und damit in der projektiven Gruppe von $\mathscr{E}$ enthalten ist. Nun folgt aus der Kommutativität von $GF(q)$, daß eine Involution aus der projektiven Gruppe von $\mathscr{E}$ keine Unterebene elementweise festlassen kann (Baer [*4*] Second Fundamental Theorem S. 68). Folglich sind alle Involutionen aus Δ Perspektivitäten, q.e.d.

Satz 3. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q = p^r$, p eine Primzahl, ist Δ eine zur $PSL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ und hat Δ ein (Punkt- oder Geraden-) Transitivitätsgebiet der Länge $q+1$, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch.*

[3]) Siehe Fußnote 2.

Beweis. Aus Dualitätsgründen können wir annehmen, daß Δ ein Punkttransitivitätsgebiet der Länge $q+1$ besitzt. Bezeichnen wir dieses Transitivitätsgebiet mit $\mathscr{P}$, so gilt nach DICKSON [9] §§ 263, 260

(1) Δ ist auf $\mathscr{P}$ zweifach transitiv und nur die Identität läßt drei verschiedene Punkte von $\mathscr{P}$ fest.

Als nächstes beweisen wir

(2) $\mathscr{P}$ ist ein Oval oder aber es ist $p=2$ und $\mathscr{P}$ ist eine Gerade.

Sei $\mathscr{P}$ eine Gerade g. Hieraus folgt zunächst, daß jede Involution aus Δ eine Perspektivität ist. Ist nämlich $\sigma\in\Delta$ und $\sigma \neq 1=\sigma^2$, so hat σ nach (1) höchstens zwei Fixpunkte auf g. Daher kann σ keine Teilebene von $\mathscr{E}$ festlassen, da sonst wegen $g^\sigma=g$ die Kollineation σ auf g mindestens drei Fixpunkte hätte. Da also σ eine Perspektivität ist und g wegen (1) nicht die Achse von σ sein kann, muß g, da ja $g^\sigma=g$ ist, durch das Zentrum von σ gehen. σ hat also auf g einen Fixpunkt. Wäre nun $p>2$, so hätte σ zwei Fixpunkte auf g. Diese Fixpunkte seien P und Q. Einer dieser Punkte, etwa P, ist das Zentrum von σ. Dann geht die Achse h von σ durch Q. Nach (1) gibt es nun ein $\delta\in\Delta$ mit $P^\delta=Q$ und $Q^\delta=P$. Dann ist $\delta^{-1}\,\sigma\,\delta$ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum Q und der Achse h^δ. Nach OSTROM [20] Lemma 6 ist dann $\sigma\,\delta^{-1}\,\sigma\,\delta$ eine nicht triviale involutorische Streckung mit der Achse g und dem Zentrum $h\cap h^\sigma$ im Widerspruch zu (1). Ist also $\mathscr{P}$ eine Gerade, so ist $p=2$. Ferner ist in diesem Falle $PSL(2,q)\cong SL(2,q)$ und daher, da ja alle Involutionen Perspektivitäten sind, $\mathscr{E}$ nach Satz 2 desarguessch.

Sei nun $\mathscr{P}$ keine Gerade. Dann gibt es drei nicht kollineare Punkte P, Q, R in $\mathscr{P}$. Ist nun $p=2$, so ist Δ auf $\mathscr{P}$ sogar dreifach transitiv. Folglich gibt es keine drei kollineare Punkte in $\mathscr{P}$, d.h. $\mathscr{P}$ ist ein Oval. Ist K der Knoten des Ovals $\mathscr{P}$, so ist $K^\Delta=K$. Ist nun σ eine Involution aus Δ, so hat σ genau einen Fixpunkt in $\mathscr{P}$ und daher auch nur eine Fixgerade durch K. Folglich ist σ eine Perspektivität. Daher ist die Ebene $\mathscr{E}$ wegen $PSL(2,2^r)\cong SL(2,2^r)$ nach Satz 2 desarguesch.

Wir können daher im folgenden annehmen, daß $p>2$ ist. Dann ist $o(\Delta_{P,Q})=\frac{1}{2}(q-1)$ und aus (1) folgt, daß $\Delta_{P,Q}$ die Menge $\mathscr{P}-\{P,Q\}$ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}(q-1)$ teilt. Wäre nun $S\in(PQ-\{P,Q\})\cap\mathscr{P}$, so wäre, da R nicht auf PQ liegt, $|(PQ-\{P\})\cap\mathscr{P}|=\frac{1}{2}(q+1)$. Sei Π eine p-Sylow-Gruppe von Δ_P. Die Gruppe Π ist dann transitiv auf $\mathscr{P}-\{P\}$. Daraus folgt, daß Π_{PQ} auf $(PQ-\{P\})\cap\mathscr{P}$ transitiv ist. Daher ist p ein Teiler von $\frac{1}{2}(q+1)$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $PQ\cap\mathscr{P}=\{P,Q\}$ ist. Da Δ nach (1) auf $\mathscr{P}$ zweifach transitiv ist, ist folglich $\mathscr{P}$ ein Oval.

Sei t_X die Tangente an $\mathscr{P}$ im Punkte X. Dann ist für $X\neq P$ die Abbildung $t_X\to t_X\cap t_P$ eine eineindeutige Abbildung der Tangenten t_X mit $X\neq P$ auf die Punkte von $t_P-\{P\}$. Da $\Delta_{P,Q}$, wie wir bereits wissen, die Menge $\mathscr{P}-\{P,Q\}$ in genau zwei Transitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}(q-1)$ zerlegt, folgt, daß $\Delta_{P,Q}$ die Menge der Tangenten $\{t_X\,|\,X\in\mathscr{P}-\{P,Q\}\}$ in zwei Transitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}(q-1)$ zerlegt. Folglich besitzt $\Delta_{P,Q}$ auf t_P die beiden Fixpunkte P und $t_P\cap t_Q$ und zwei Transitivitätsgebiete der Länge $\frac{1}{2}(q-1)$. Aus Ordnungsgründen folgt, daß $\Delta_{P,Q}$ auf diesen beiden Transitivitätsgebieten scharf transitiv operiert.

Ist also σ eine Involution aus $\Delta_{P,Q}$, so ist σ, da σ auf t_P genau zwei Fixpunkte hat, eine zentrale Involution. Man sieht nun leicht, daß PQ die Achse und $t_P \cap t_Q$ das Zentrum von σ ist.

Ist nun σ eine Involution aus Δ, so liegt σ nach DICKSON [9] § 244 entweder in einer Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(q+1)$ oder in einer Gruppe der Ordnung $\frac{1}{2}(q-1)$. Ist nun $\frac{1}{2}(q-1)$ ungerade, so ist q kein Quadrat. Nach BAER [3] ist dann σ zentral. Ist $\frac{1}{2}(q-1)$ gerade, dann ist $\frac{1}{2}(q+1)$ ungerade. Folglich liegt σ in einer Gruppe $\Delta_{P,Q}$ und ist also nach dem weiter oben Bewiesenen zentral. Es gilt also

(3) Alle Involutionen aus Δ sind zentral.

Ferner gilt

(4) Jeder Punkt von $\mathscr{E}$ ist Zentrum höchstens einer Involution aus Δ. Ist $q \equiv 1 \bmod 4$, so ist P genau dann Zentrum einer Involution aus Δ, wenn P ein äußerer Punkt von $\mathscr{P}$ ist. Ist $q \equiv 3 \bmod 4$, so ist P genau dann Zentrum einer Involution aus Δ, wenn P ein innerer Punkt von $\mathscr{P}$ ist.

Es ist klar, daß Punkte von $\mathscr{P}$ niemals Zentren von Involutionen aus Δ sind. Sind nun σ und τ zwei Involutionen aus Δ und ist P sowohl Zentrum von σ als auch Zentrum von τ, so liegt also P nicht in $\mathscr{P}$. Ist $Q \in \mathscr{P}$ und ist $|PQ \cap \mathscr{P}| = 2$, so ist $Q^\sigma = PQ \cap (\mathscr{P} - \{Q\}) = Q^\tau$. Ist $PQ \cap \mathscr{P} = \{Q\}$, so ist $Q^\sigma = Q = Q^\tau$. Es ist also $Q^\sigma = Q^\tau$ für alle $Q \in \mathscr{P}$. Daher ist $\sigma = \tau$.

Ist nun $q \equiv 1 \bmod 4$, so gibt es genau $\frac{1}{2}q(q+1)$ Involutionen in Δ. Ferner ist $\frac{1}{2}(q-1) = o(\Delta_{P,Q})$ gerade und folglich jeder äußere Punkt Zentrum einer Involution. Da es genau $\frac{1}{2}q(q+1)$ äußere Punkte gibt, ist auch die zweite Aussage von (4) bewiesen.

Ist $q \equiv 3 \bmod 4$, so ist $\frac{1}{2}(q-1) = o(\Delta_{P,Q})$ ungerade. Folglich ist kein äußerer Punkt Zentrum einer Involution. Daher ist das Zentrum einer Involution aus Δ stets ein innerer Punkt. Nun ist in diesem Falle die Anzahl der Involutionen in Δ gleich $\frac{1}{2}q(q-1)$, d.h. sie ist gleich der Anzahl der inneren Punkte. Da verschiedene Involutionen verschiedene Zentren haben, folgt, daß jeder innere Punkt Zentrum genau einer Involution aus Δ ist.

1. Fall. $q \equiv 1 \bmod 4$. Dann beweisen wir

(5) Δ ist auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren (P, g), wobei P ein innerer Punkt und g eine Passante ist, transitiv.

σ und τ seien zwei verschiedene, vertauschbare Involutionen aus Δ. Die Geraden g und h seien ihre Achsen. Da $g \cap h$ das Zentrum der Involution $\sigma\tau$ ist, ist $g \cap h$ nach (4) ein äußerer Punkt. Ist P ein innerer Punkt, so gehen durch P genau $\frac{1}{2}(q+1)$ Sekanten. In Δ_P gibt es folglich $\frac{1}{2}(q+1)$ Involutionen. Nach dem eben Bemerkten sind keine zwei dieser Involutionen vertauschbar. Daraus folgt, daß jede Involution genau eine Sekante durch P, nämlich ihre Achse festläßt. Da andrerseits jede Sekante durch P Achse einer Involution ist, folgt nach GLEASON [12] Lemma 1.7, daß Δ_P auf den Sekanten durch P transitiv ist. Folglich ist $\frac{1}{2}(q+1)$, und da diese Zahl ungerade ist, sogar $q+1$ ein Teiler von $o(\Delta_P)$ und es folgt nach DICKSON [9] § 260, daß Δ_P eine Dieder-Gruppe der

Ordnung $q+1$ ist. Hieraus folgt daß das Transitivitätsgebiet von Δ, zu dem P gehört, die Länge $\frac{1}{2}q(q-1)$ hat. Da die inneren Punkte unter Δ in sich permutiert werden, ist daher Δ auf den inneren Punkten transitiv.

σ und τ seien zwei verschiedene Involutionen aus Δ_P. Die Punkte S und T seien die Zentren dieser beiden Involutionen. Nach (4) ist dann $S \neq T$. Sei $P \in ST$. Da σ und τ dann auch in Δ_{ST} liegen, ist $o(\Delta_P \cap \Delta_{ST}) \geqq 3$. Aus DICKSON [*9*] § 243 folgt dann, daß $\Delta_P = \Delta_{ST}$ ist. Ist Q ein von P verschiedener innerer Punkt auf ST, so ist $o(\Delta_P \cap \Delta_Q) \leqq 2$. Wäre $o(\Delta_P \cap \Delta_Q) = 2$, so gäbe es eine Involution ρ mit $P^\rho = P$ und $Q^\rho = Q$. Da P und Q innere Punkte sind, liegen P und Q nach (4) auf der Achse von ρ, d.h. ST ist eine Sekante. Dann ist aber $o(\Delta_{ST}) = q-1$: ein Widerspruch. Also ist $\Delta_P \cap \Delta_Q = 1$. Folglich ist Δ_P auf den von P verschiedenen inneren Punkten auf ST regulär. Deren Anzahl ist aber gleich $\frac{1}{2}(q+1)$, da ST keine Sekante ist. Somit ist $q+1$ ein Teiler von $\frac{1}{2}(q+1)$: ein Widerspruch. Folglich ist $P \notin ST$ und hieraus folgt, daß jede Passante durch P von höchstens einer Involution aus Δ_P festgelassen wird. Da $\frac{1}{2}(q+1)$, die Anzahl der Passanten durch P, ungerade ist, wird daher jede Passante durch P von genau einer Involution aus Δ_P festgelassen. Ferner werden verschiedene Passanten durch P von verschiedenen Involutionen aus Δ_P festgelassen. Wiederum nach GLEASON [*12*] Lemma 1.7 folgt daher, daß Δ_P auf den Passanten durch P transitiv ist. Damit ist (5) bewiesen.

Wir können nun $\mathscr{E}$ folgendermaßen innerhalb Δ beschreiben. Ist P ein äußerer Punkt von $\mathscr{P}$, so ordnen wir P diejenige Involution σ_P zu, deren Zentrum P ist. Ist g eine Sekante von $\mathscr{P}$, so ordnen wir g diejenige Involution σ_g zu, deren Achse g ist. Nach (4) und der zu (4) dualen Aussage sind diese beiden Abbildungen eineindeutige Abbildungen der äußeren Punkte bzw. der Sekanten von $\mathscr{P}$ auf die Involutionen von Δ. Ist $P \in \mathscr{P}$, so ordnen wir P die Gruppe Δ_P zu. Ist g eine Tangente an $\mathscr{P}$, so ordnen wir g die Gruppe Δ_g zu. Diese beiden Abbildungen sind eineindeutige Abbildungen der Punkte von $\mathscr{P}$ bzw. der Tangenten an $\mathscr{P}$ auf die Menge der Normalisatoren der p-Sylow-Gruppen von Δ. Schließlich sei P_0 ein innerer Punkt und g_0 eine Passante von $\mathscr{P}$ mit $P_0 \in g_0$. Ferner sei $\Pi = \Delta_{P_0}$ und $\Lambda = \Delta_{g_0}$. Wir ordnen nun jedem inneren Punkt P von $\mathscr{P}$ einmal die Gruppe Δ_P und zum andern die Restklasse $\Pi\,\delta$ mit $P_0^\delta = P$ zu. Jeder Passanten g von $\mathscr{P}$ ordnen wir einmal die Gruppe Δ_g und weiterhin die Restklasse $\Lambda\eta$ mit $g_0^\eta = g$ zu. Diese Abbildungen sind wiederum eineindeutige Abbildungen auf die Menge der Dieder-Gruppen der Ordnung $q+1$ von Δ bzw. die Mengen der Restklassen $\{\Pi\,\delta \mid \delta \in \Delta\}$ bzw. $\{\Lambda\,\eta \mid \eta \in \Delta\}$. Man verifiziert nun leicht, daß die Inzidenzrelation in $\mathscr{E}$ sich folgendermaßen in Δ beschreiben läßt: Ist P ein äußerer Punkt und g eine Passante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_P \in \Delta_g$ ist; ist g eine Tangente, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_P \in \Delta_g$ ist; ist g eine Sekante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_P \neq \sigma_g$ und $\sigma_P\,\sigma_g = \sigma_g\,\sigma_P$ ist. Ist $P \in \mathscr{P}$ und g eine Passante, so ist $P \notin g$; ist g eine Tangente, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\Delta_P = \Delta_g$ ist; ist g eine Sekante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_g \in \Delta_P$ ist. Ist P ein innerer Punkt und g eine Passante, so ist nach (5) und HIGMAN und MCLAUGHLIN [*14*] Prop. 1 $P \in g$ genau dann, wenn $\Pi\,\delta \cap \Lambda\eta \neq \emptyset$ ist; ist g eine Tangente, so ist $P \notin g$; ist g eine Sekante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_g \in \Delta_P$ ist.

Ein Vergleich mit der desarguesschen Ebene der Ordnung q zeigt nun, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist.

2. Fall. $q \equiv 3 \bmod 4$. In diesem Fall gilt

(6) Δ ist auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren (P, g), wobei P ein äußerer Punkt und g eine Sekante ist, transitiv.

Sind σ und τ zwei verschiedene vertauschbare Involutionen aus Δ und g und h ihre Achsen, so ist, da $g \cap h$ das Zentrum der Involution $\sigma\tau$ ist, $g \cap h$ nach (4) ein innerer Punkt. Ist P ein äußerer Punkt, so gehen durch P genau $\frac{1}{2}(q-1)$ Passanten. In Δ_P gibt es folglich nach (4) genau $\frac{1}{2}(q-1)$ Involutionen. Da P ein äußerer Punkt ist, sind nach dem oben Bemerkten keine zwei Involutionen aus Δ_P vertauschbar. Folglich wird jede Passante durch P von genau einer Involution festgelassen und zwei verschiedene Passanten werden niemals von der gleichen Involution festgelassen. Nach GLEASON [*12*] Lemma 1.7 ist daher Δ_P auf den Passanten durch P transitiv. Folglich ist $\frac{1}{2}(q-1)$, und da diese Zahl ungerade ist, sogar $q-1$ ein Teiler von $o(\Delta_P)$. Nach DICKSON [*9*] § 260 ist daher Δ_P eine Dieder-Gruppe der Ordnung $q-1$. Folglich ist Δ auf den äußeren Punkten von $\mathscr{P}$ transitiv. σ und τ seien zwei Involutionen aus Δ_P und g sei eine Sekante durch P mit $g^\sigma = g = g^\tau$. Ferner seien h und k die beiden Tangenten durch P an $\mathscr{P}$ und $h \cap \mathscr{P} = \{Q\}$ und $k \cap \mathscr{P} = \{R\}$. Dann ist $QR \cap g$ das Zentrum sowohl von σ als auch von τ. Nach (4) ist daher $\sigma = \tau$. Da P nicht das Zentrum von σ ist, kann σ höchstens eine Sekante durch P festlassen. Hieraus folgt, da $\frac{1}{2}(q-1)$ ungerade ist, daß σ genau eine Sekante durch P festläßt. Aus Anzahlgründen folgt dann wieder, daß jede Sekante durch P von genau einer Involution aus Δ_P festgelassen wird. Nach GLEASON [*12*] Lemma 1.7 folgt daher die Transitivität von Δ_P auf den Sekanten durch P und damit (6).

Wir können nun $\mathscr{E}$ folgendermaßen innerhalb Δ darstellen. Ist P ein innerer Punkt von $\mathscr{P}$, so ordnen wir P die eindeutig bestimmte Involution σ_P zu, deren Zentrum P ist. Ist g eine Passante von $\mathscr{P}$, so ordnen wir g die eindeutig bestimmte Involution σ_g zu, deren Achse g ist. Nach (4) und der zu (4) dualen Aussage sind diese beiden Abbildungen eineindeutige Abbildungen der inneren Punkte bzw. der Passanten auf die Menge der Involutionen von Δ. Ist $P \in \mathscr{P}$, so ordnen wir P die Gruppe Δ_P zu. Ist g eine Tangente an $\mathscr{P}$, so ordnen wir g die Gruppe Δ_g zu. Diese beiden Abbildungen sind eineindeutige Abbildungen der Punkte von $\mathscr{P}$ bzw. der Tangenten an $\mathscr{P}$ auf die Menge der Normalisatoren der p-Sylow-Gruppen von Δ. Schließlich sei P_0 ein äußerer Punkt von $\mathscr{P}$ und g_0 eine Sekante mit $P_0 \in g_0$. Ferner sei $\Pi = \Delta_{P_0}$ und $\Lambda = \Delta_{g_0}$. Wir ordnen nun jedem äußeren Punkt P einmal die Gruppe Δ_P und zum andern die Restklasse $\Pi\,\delta$ mit $P_0^\delta = P$ zu. Jeder Sekanten g ordnen wir die Gruppe Δ_g und die Restklasse $\Lambda\eta$ mit $g_0^\eta = g$ zu. Diese Abbildungen sind wiederum eineindeutige Abbildungen auf die Menge der Dieder-Gruppen der Ordnung $q-1$ von Δ bzw. die Restklassenmengen $\{\Pi\,\delta \mid \delta \in \Delta\}$ und $\{\Lambda\,\eta \mid \eta \in \Delta\}$. Die Inzidenzrelation in $\mathscr{E}$ läßt sich dann folgendermaßen beschreiben. Ist P ein äußerer Punkt und g eine Passante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_g \in \Delta_P$ ist; ist g eine Tangente, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $o(\Delta_P \cap \Delta_g) = \frac{1}{2}(q-1)$ ist; ist g eine Sekante, so ist nach

(6) und HIGMAN und MCLAUGHLIN [*14*] Prop. 1 $P \in g$ genau dann, wenn $\Pi\ \delta \cap \Delta\ \eta \neq 0$ ist. Ist $P \in \mathscr{P}$ und g eine Passante, so ist $P \notin g$; ist g eine Tangente, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\Delta_P = \Delta_g$ ist; ist g eine Sekante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $o(\Delta_P \cap \Delta_g) = \frac{1}{2}(q-1)$ ist. Ist P ein innerer Punkt und g eine Passante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_P \neq \sigma_g$ und $\sigma_P\, \sigma_g = \sigma_g\, \sigma_P$ ist; ist g eine Tangente, so ist $P \notin g$; ist g eine Sekante, so ist $P \in g$ genau dann, wenn $\sigma_P \in \Delta_g$ ist.

Ein Vergleich mit der desarguesschen Ebene der Ordnung q zeigt nun, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist. Somit ist Satz 3 bewiesen.

Da nach (3) alle Involutionen aus Δ zentral sind und im Falle $p=2$ die Gruppen $PSL(2, q)$ und $SL(2, q)$ isomorph sind, so wissen wir nach Korollar 1, wie Δ in diesem Fall auf $\mathscr{E}$ operiert. Für $p>2$ gilt nun das

Korollar 2. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q=p^r$, p eine von 2 verschiedene Primzahl, und ist Δ eine zur $PSL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ und besitzt Δ ein (Punkt- oder Geraden-) Transitivitätsgebiet der Länge $q+1$, so besitzt Δ genau drei Punkt- und drei Geradentransitivitätsgebiete. Eines der Punkttransitivitätsgebiete ist ein Oval $\mathscr{P}$, während die andern beiden Punkttransitivitätsgebiete aus den inneren bzw. den äußeren Punkten von $\mathscr{P}$ bestehen. Die Geradentransitivitätsgebiete bestehen aus den Tangenten bzw. den Sekanten bzw. den Passanten von $\mathscr{P}$.*

Eine einfache Folgerung aus den Sätzen 2 und 3 ist der

Satz 4. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q=p^r$, p eine Primzahl, und ist Δ eine zur $PGL(2, q)$ isomorphe Kollineationsgruppe von $\mathscr{E}$ und ist jede Involution aus Δ zentral, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch.*

Beweis. Ist $p=2$, so sind die Gruppen $PGL(2, q)$ und $SL(2, q)$ isomorph. Aus Satz 2 folgt daher in diesem Fall die Behauptung. Sei also $p>2$. In diesem Falle enthält Δ zwei Konjugiertenklassen von Involutionen. Eine dieser Klassen enthält $\frac{1}{2}q(q+1)$ Involutionen, während die andere aus $\frac{1}{2}q(q-1)$ Involutionen besteht. $\mathscr{I}_a$ sei die Klasse der Involutionen mit $|\mathscr{I}_a| = \frac{1}{2}q(q+1)$ und $\mathscr{I}_i$ sei die andere Klasse. Ist $\sigma \in \mathscr{I}_a \cup \mathscr{I}_i$ und ist C das Zentrum von σ, so ist $\mathscr{N}\sigma \subseteq \Delta_C$. Nun ist $\mathscr{N}\sigma$ eine Dieder-Gruppe der Ordnung $2(q+1)$ bzw. $2(q-1)$, die, wie aus DICKSON [*9*] § 262 leicht folgt, in Δ maximal sind. Folglich ist $\mathscr{N}\sigma = \Delta_C$. Daher ist wegen $o(\Delta) = |C^\Delta| \cdot o(\Delta_C)$ die Länge von C^Δ gleich $\frac{1}{2}q(q+1)$ resp. $\frac{1}{2}q(q-1)$. Es bleiben daher noch $q+1$ Punkte übrig, die in keinem dieser beiden Transitivitätsgebiete liegen. Die Menge dieser Punkte sei $\mathscr{P}$. Da das, was wir über die Zentren der Involutionen sagten, auch für deren Achsen gilt, gibt es also insgesamt q^2 solcher Achsen. Gäbe es nun in $\mathscr{P}$ einen universellen Fixpunkt von Δ, so gingen diese Achsen alle durch diesen Punkt, da ein Punkt aus $\mathscr{P}$ ja niemals Zentrum einer Involution aus Δ ist. Folglich wäre $q^2 \leqq q+1$: ein Widerspruch. Δ enthält einen Normalteiler Δ_0 mit $\Delta_0 \cong PSL(2, q)$. Eine der beiden Klassen $\mathscr{I}_a$ und $\mathscr{I}_i$ liegt in Δ_0. Daraus folgt, daß durch jeden universellen Fixpunkt $P \in \mathscr{P}$ von Δ_0 mindestens $\frac{1}{2}q(q-1)$ Achsen von Involutionen gehen. Wegen $q \geqq 3$ gibt es also höchstens einen universellen Fixpunkt von Δ_0 in $\mathscr{P}$. Da Δ_0 in Δ normal ist, wäre ein solcher Fixpunkt auch Fixpunkt von Δ. Folglich liegt jeder Punkt von $\mathscr{P}$ in einem nicht trivialen Transitivitätsgebiet von Δ_0. Nun hat nach DICKSON [9] § 263 jedes nicht triviale Transitivitätsgebiet von Δ_0 eine Länge größer als $\frac{1}{2}(q+1)$. Daraus folgt, daß $\mathcal{P}$ ein Transitivitätsgebiet von Δ_0 ist. Aus Satz 3 folgt daher die Behauptung.

3. Eine Charakterisierung der endlichen desarguesschen Ebenen gerader Ordnung

In diesem und dem nächsten Abschnitt betrachten wir endliche projektive Ebenen $\mathcal{E}$, in denen es ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathcal{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$. Die von allen Gruppen $\Gamma(Q, PQ)$ mit $Q \in g$ erzeugte Kollineationsgruppe heiße Δ. Die von Δ auf g induzierte Permutationsgruppe werde mit Δ^* bezeichnet. $\mathcal{E}^*$ sei wieder diejenige Inzidenzstruktur, die aus $\mathcal{E}$ entsteht, indem man aus $\mathcal{E}$ den Punkt P, die Gerade g und alle mit diesen inzidierenden Elemente entfernt. Es gilt dann nach (13) in Abschnitt 2

a) Δ ist auf den inzidenten Punkt-Geradenpaaren von $\mathcal{E}^*$ transitiv.

Da die Anzahl der inzidenten Punkt-Geradenpaare in $\mathcal{E}^*$ gleich $q(q^2-1)$ ist, falls q die Ordnung von $\mathcal{E}$ ist, so folgt aus a) die Eigenschaft

b) Es ist $o(\Delta) = q(q^2-1)\,k$.

Ferner gilt

c) Δ^* ist auf g zweifach transitiv.

Es gilt sogar die schärfere Aussage

d) $\Gamma^*(Q, PQ)$ ist ein Normalteiler von Δ_Q^*, der auf $g - \{Q\}$ transitiv und regulär ist.

Dies folgt aus den entsprechenden Eigenschaften von $\Gamma(Q, PQ)$.

e) Ist N der Kern des Homorphismus von Δ auf Δ^*, so ist $\mathrm{N} = \mathcal{Z}\Delta =$ Menge der (P, g)-Streckungen aus Δ.

N besteht aus all den Kollineationen aus Δ, die g punktweise festlassen, d.h. N besteht aus allen (P, g)-Streckungen von Δ. Da Δ von allen Translationen mit dem Zentrum auf g und der Achse durch P erzeugt wird, ist $\mathrm{N} \subseteq \mathcal{Z}\Delta$. Da andrerseits ein Zentrumselement mit allen Translationen aus Δ vertauschbar ist, muß ein Zentrumselement alle Punkte auf g, die ja alle Zentren von nicht trivialen Translationen aus Δ sind, festlassen. Also ist $\mathcal{Z}\Delta \subseteq \mathrm{N}$. Damit ist e) bewiesen.

Satz 5. *Ist $\mathcal{E}$ eine endliche projektive Ebene gerader Ordnung, so ist $\mathcal{E}$ genau dann desarguessch, wenn es in $\mathcal{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathcal{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$, und wenn jede Involution aus $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ zentral ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen sind wohlbekannt. Wir brauchen daher nur zu zeigen, daß sie auch hinreichend sind. Hierzu zeigen wir zunächst die Gültigkeit von

f) $o(\Delta_Q^*/\Gamma^*(Q, PQ))$ ist ungerade.

Nach d) ist ja $\Delta_Q^* = \Gamma^*(Q, PQ)\,\Delta_{Q,R}^*$ mit $\Gamma^*(Q, PQ) \cap \Delta_{Q,R}^* = 1$. Wäre nun f) falsch, so wäre wegen $o(\Delta_{Q,R}^*) = o(\Delta_Q^*/\Gamma^*(Q, PQ))$ die Ordnung von $\Delta_{Q,R}$

gerade. Es gibt dann also eine Involution $\sigma \in \Delta_{Q,R}$. Nach Voraussetzung ist σ zentral und folglich, da die Ordnung von $\mathscr{E}$ gerade ist, eine Translation. Wegen $Q, R \in g$ und $Q^\sigma = Q$ und $R^\sigma = R$ und $Q \neq R$ ist also g die Achse von σ. Da σ eine Translation ist, ist daher $P^\sigma \neq P$: ein Widerspruch. Damit ist f) bewiesen.

Ist q die Ordnung von $\mathscr{E}$, so gilt

g) Der Grad von Δ^* ist gleich $q+1$. Ferner ist $q+1$ ungerade.

Dies folgt aus c) und der Voraussetzung, daß q gerade ist. Da Δ^* die Eigenschaften c), d), f) und g) hat, besitzt Δ^* nach SUZUKI [28] einen Normalteiler Δ_0^* mit den folgenden Eigenschaften:

1. Δ^*/Δ_0^* ist zyklisch von ungerader Ordnung.

2. Δ_0^* ist zu einer der folgenden Gruppen isomorph:

   α) $SL(2, 2^r)$ mit $q = 2^r$;

   β) $PSU(3, 2^{2r})$ mit $q = 2^{3r}$;

   γ) $S(2^{2r+1})$ mit $q = 2^{2(2r+1)}$;

   δ) einer scharf zweifach transitiven Gruppe vom Grade $q+1$.

Sei nun Δ_0^* scharf zweifach transitiv auf g. Ferner sei $\Delta_0 \subseteq \Delta$ mit $\Delta_0/\mathscr{Z}\Delta \cong \Delta_0^*$. Dann ist $o(\Delta_0) = q(q+1)d$ und nach e) ist d ein Teiler von $q-1$. Da q gerade ist, ist daher $(d, q(q+1)) = 1$. Nach einem Satz von SCHUR (s. z.B. ZASSENHAUS [30], Theorem 25 S. 162) zerfällt daher Δ_0 über $\mathscr{Z}\Delta$, d.h. es gibt eine Gruppe Δ_1 mit $\Delta_0 = \Delta_1 \mathscr{Z}\Delta$ und $\mathscr{Z}\Delta \cap \Delta_1 = 1$. Das Komplement Δ_1 von $\mathscr{Z}\Delta$ ist sogar ein Normalteiler von Δ_0. Nun ist $\Delta_1 \cong \Delta_0^*$ und daher ebenfalls eine Frobenius-Gruppe. Der Frobenius-Kern K von Δ_1 ist charakteristisch in Δ_1 und somit normal in Δ_0. Ferner ist $o(\mathrm{K}) = q+1$ eine Potenz einer Primzahl p, da ja Δ_0^* scharf zweifach transitiv ist. Wegen $(q+1, q(q-1)) = 1$ ist K also eine p-Sylow-Gruppe von Δ_0 und folglich als Normalteiler sogar eine charakteristische Untergruppe von Δ_0. Also ist K normal in Δ. Nun ist K auf den Punkten von g transitiv. Daraus folgt, daß die Gruppe $\mathrm{K}\Gamma(Q, PQ)$ alle Translationsgruppen von Δ enthält. Somit ist $\Delta = \mathrm{K}\Gamma(Q, PQ)$. Nach b) ist dann $q(q^2-1)k = o(\Delta) = q(q+1)$. Hieraus folgt, daß $(q-1)k = 1$ ist. Folglich ist $k = 1$ und $q = 2$: $\mathscr{E}$ ist desarguessch.

Sei nun Δ_0^* einer der drei Gruppen unter α), β), γ) isomorph. Da $o(\Delta^*/\Delta_0^*)$ ungerade ist und $q = 2^s$ ist, sind die Gruppen $\Gamma^*(Q, PQ)$ die 2-Sylow-Gruppen von Δ^*, die wegen $o(\Delta^*/\Delta_0^*) \equiv 1 \bmod 2$ bereits in Δ_0^* liegen. Folglich ist $\Delta^* = \Delta_0^*$. Ist $q \leqq 4$, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch. Sei also $q > 4$. Nach DICKSON [9], S. 138 und § 261 ist dann Δ^* einfach. Es gibt daher in Δ einen perfekten Normalteiler[4]) N mit $\mathrm{N} \nsubseteq \mathscr{Z}\Delta$. Dann ist aber $1 \neq \mathrm{N}/(\mathrm{N} \cap \mathscr{Z}\Delta) \cong \mathrm{N}\mathscr{Z}\Delta/\mathscr{Z}\Delta \trianglelefteq \Delta/\mathscr{Z}\Delta \cong \Delta^*$. Aus der Einfachheit von Δ^* folgt daher, daß $\mathrm{N}\mathscr{Z}\Delta/\mathscr{Z}\Delta = \Delta/\mathscr{Z}\Delta$ d.h. $\mathrm{N}/(\mathrm{N} \cap \mathscr{Z}\Delta) \cong \Delta/\mathscr{Z}\Delta$ ist. Folglich ist q ein Teiler von $o(\mathrm{N})$ und daher enthält N alle $\Gamma(Q, PQ)$. Also ist $\mathrm{N} = \Delta$ und Δ somit perfekt. Insbesondere liegt also $\mathscr{Z}\Delta$ in der Kommutatorgruppe von Δ. Nach SCHUR [25] Satz III gilt daher

(*) $\mathscr{Z}\Delta$ ist homomorphes Bild des Multiplikators[5]) von Δ^*.

---

[4]) Eine Gruppe G heißt perfekt, wenn G gleich der Kommutatorgruppe G' von G ist.

[5]) Zur Definition des Multiplikators einer Gruppe s. SCHUR [24] S. 23.

Sei nun $\Delta^* \cong PSU(3, 2^{2r})$. Nach Dickson [9] S. 138 und S. 134 ist dann $o(\Delta^*) = d^{-1}(s^3+1)\, s^3(s^2-1)$, falls $2^r = s$ gesetzt wird und $d = (3, s+1)$ ist. Folglich ist nach e) und b), da ja $s^3 = q$ ist, $o(\mathscr{Z}\Delta) = (s^2+s+1)\,k\,d(s+1)^{-1}$. Nach Schur [24] S. 27 oben ist jeder Primteiler der Ordnung des Multiplikators von Δ^* und damit nach $(*)$ jeder Primteiler von $o(\mathscr{Z}\Delta)$ ein Teiler von $o(\Delta^*)$. Es muß also jeder Primteiler von s^2+s+1 in $(s^3+1)\, s^3(s^2-1)$ aufgehen. Nun ist $(s^2+s+1, s) = 1$. Ist p ein Teiler von s^3+1 und s^2+s+1, so ist wegen $s^3+1 = (s+1)\,(s^2-s+1)$ und $(s^2+s+1, s+1) = 1$ sogar p ein Teiler von s^2-s+1 und damit von $s^2+s+1-(s^2-s+1) = 2s$. Wegen $(s^2+s+1, s) = 1$ ist daher $p = 2$: ein Widerspruch, da s^2+s+1 ungerade ist. Also muß jeder Primteiler von s^2+s+1 ein Teiler von s^2-1 und damit von $s-1$ sein. Daraus folgt weiter, daß p ein Teiler von $s^2+s+1+s-1 = s(s+2)$ und damit von $s+2$ ist. Aus p teilt $s-1$ und $s+2$ folgt daher, daß $p = 3$ ist. Es ist also $s^2+s+1 = 3^t$ eine Potenz von 3. Nun erinnern wir uns, daß $s = 2^r$ ist. Sei also $2^{2r}+2^r+1 = m^t$, wobei m eine natürliche Zahl ist. Dann ist $t = 2n+1$ ungerade, da $2^{2r}+2^r+1$ wegen $2^{2r} < 2^{2r}+2^r+1 < (2^r+1)^2$ kein Quadrat sein kann. Daraus folgt wiederum, daß $\sum_{i=0}^{2n} m^i$ ungerade ist. Aus $2^r(2^r+1) = m^{2n+1}-1 = (m-1)\sum_{i=0}^{2n} m^i$ folgt also, daß 2^r ein Teiler von $m-1$ ist. Also ist $2^r+1 \leqq m$ und folglich $m^t < (2^r+1)^2 \leqq m^2$. Hieraus folgt, daß $t = 1$ ist. In unserem speziellen Fall ist also $s^2+s+1 = 3$: ein Widerspruch.

Es kann also nur noch sein, daß $\Delta^* \cong SL(2, 2^r)$ oder $\Delta^* \cong S(2^{2r+1})$ ist. $o(\mathscr{Z}\Delta)$ ist ein Teiler von $q-1$ also ungerade. Ferner sind nach Dickson [9] § 260 und Suzuki [27], Theorem 9 alle Sylow-Gruppen ungerader Ordnung von Δ^* zyklisch. Nach Schur [25] Satz III und Schur [24] Satz X und S. 50 ist daher $\mathscr{Z}\Delta = 1$. Folglich ist $\Delta \cong \Delta^*$. Wäre nun $\Delta \cong S(2^{2r+1})$, so wäre nach b), falls man $s = 2^{2r+1}$ setzt, $s^2(s^4-1)\,k = o(\Delta) = (s^2+1)\, s^2(s-1)$: ein Widerspruch. Also ist $\Delta \cong SL(2, 2^r)$ und $\mathscr{E}$ folglich nach Satz 2 desarguessch.

Wir beweisen nun noch zwei einfache Folgerungen aus Satz 5.

Korollar 3. *Eine endliche projektive Ebene $\mathscr{E}$ gerader Ordnung ist genau dann desarguessch, wenn es in $\mathscr{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathscr{E}$ sowohl (P, g)- als auch (Q, PQ)-transitiv ist für alle $Q \in g$.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen ist wieder klar. Wir brauchen daher nur zu zeigen, daß sie auch hinreichen. Nach Satz 5 genügt es dazu zu zeigen, daß alle Involutionen aus $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ zentral sind, und dies folgt nach Lingenberg [17] Satz 12 aus der (P, g)-Transitivität von $\mathscr{E}$.

Da nach Baer [3] eine involutorische Kollineation einer projektiven Ebene, deren Ordnung kein Quadrat ist, stets zentral ist, gilt auch das

Korollar 4. *Eine endliche projektive Ebene $\mathscr{E}$, deren Ordnung gerade, jedoch kein Quadrat ist, ist genau dann desarguessch, wenn es in $\mathscr{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathscr{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$.*

4. Eine Charakterisierung der endlichen desarguesschen Ebenen ungerader Ordnung

In diesem Abschnitt beweisen wir den

Satz 6. *Ist $\mathcal{E}$ eine endliche projektive Ebene ungerader Ordnung, so ist $\mathcal{E}$ genau dann desarguessch, wenn es in $\mathcal{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) gibt, so daß $\mathcal{E}$ einmal (Q, PQ)-transitiv ist für alle $Q \in g$ und daß zum andern die Gruppe $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ höchstens eine Involution enthält.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingungen wurden bereits beim Beweise von Satz 2 gezeigt. Sei daher $\mathcal{E}$ eine endliche projektive Ebene der ungeraden Ordnung n. Ferner sei (P, g) ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar von $\mathcal{E}$, so daß einmal $\mathcal{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$ und daß zum andern $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ höchstens eine Involution enthält. $\mathcal{U}\Delta$ sei der größte Normalteiler ungerader Ordnung von Δ. Dann gilt

(i) $\mathcal{U}\Delta \subseteq \mathcal{Z}\Delta$.

Wäre nämlich $\mathcal{U}\Delta \nsubseteq \mathcal{Z}\Delta$, so wäre $(\mathcal{U}\Delta)^*$ nach c) von Abschnitt 3 transitiv auf g. Nach FEIT und THOMPSON [*11*] ist $(\mathcal{U}\Delta)^*$ auflösbar und enthält folglich einen elementarabelschen Normalteiler A^*, der sogar charakteristisch in $(\mathcal{U}\Delta)^*$ und somit normal in Δ^* ist. A^* ist daher nach c) von Abschnitt 3 auf g transitiv und als abelsche Gruppe folglich scharf transitiv. Folglich ist $n+1 = o(\mathrm{A}^*) \equiv 1 \bmod 2$: ein Widerspruch. Also gilt (i).

(ii) Die 2-Sylow-Gruppen von Δ sind verallgemeinerte Quaternionengruppen.

Nach b) von Abschnitt 3 ist $o(\Delta) = n(n^2-1)\,k$. Folglich gibt es mindestens eine und daher nach Voraussetzung genau eine Involution in Δ. Folglich enthält jede 2-Sylow-Gruppe von Δ genau eine Involution. Ist Σ eine 2-Sylow-Gruppe von Δ, so ist daher Σ nach BURNSIDE [7] Theorem VI S. 132 entweder zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Ist Σ zyklisch, so gibt es nach BURNSIDE [7] S. 327 einen Normalteiler K von Δ mit $\Delta = \Sigma\mathrm{K}$ und $\Sigma \cap \mathrm{K} = 1$. Also ist $o(\mathrm{K})$ ungerade und $[\Delta:\mathrm{K}] = o(\Sigma)$. Hieraus, aus (i) und aus e) von Abschnitt 3 folgt, daß die Ordnung von Δ^* eine Potenz von 2 ist im Widerspruch zu c) von Abschnitt 3. Also gilt (ii).

Ist Δ auflösbar, so ist auch Δ^* auflösbar. Folglich enthält Δ^* einen elementarabelschen Normalteiler A^*, der wegen der zweifachen Transitivität von Δ^* auf g transitiv und damit scharf transitiv ist. Da folglich $n+1 = o(\mathrm{A}^*)$ ist, ist A^* eine elementarabelsche 2-Gruppe. Aus (ii) folgt, daß A^* ein homomorphes Bild einer verallgemeinerten Quaternionengruppe ist. Folglich ist $o(\mathrm{A}^*) = 4$, d.h. $n = 3$ und $\mathcal{E}$ ist daher desarguessch.

Wir können daher im folgenden annehmen, daß Δ^* nicht auflösbar ist. Sei σ die Involution aus Δ und $\mathrm{N} = \mathcal{U}\Delta\,\langle\sigma\rangle$. Dann ist $\mathcal{U}(\Delta/\mathrm{N}) = 1$. Ferner sind die 2-Sylow-Gruppen von Δ/N Dieder-Gruppen. Nach GORENSTEIN und WALTER (s. GORENSTEIN [*13*] Theorem 1) ist daher entweder

1° Δ/N isomorph einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, q)$, die die $PSL(2, q)$ enthält. Überdies ist q ungerade.

oder

2° $\Delta/\mathrm{N} \cong \mathscr{A}_7$.

oder

3° $\Delta/\mathrm{N} \cong \Sigma/\langle\sigma\rangle$.

Dabei sei Σ wieder eine 2-Sylow-Gruppe von Δ. Der letzte Fall kann nicht eintreten, da dann Δ^* nach (i) eine 2-Gruppe wäre. Die $\mathscr{A}_7$ ist einfach. Folglich ist, falls $\Delta/\mathrm{N} \cong \mathscr{A}_7$ ist, $\Delta^* \cong \Delta/\mathrm{N}$. Nach c) aus Abschnitt 3 ist daher $n(n+1)$ ein Teiler von $\frac{1}{2} \cdot 7! = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Folglich ist $n < 54$. Ferner folgt aus $n \leqq 7$, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist. Wir können also annehmen, daß $n \geqq 9$ ist. Aus $9 \leqq n \leqq 53$ und $n(n+1)$ teilt $\frac{1}{2} \cdot 7!$ und $n \equiv 1 \bmod 2$ folgt, daß entweder $n=9$ oder $n=35$ ist. Nach d) von Abschnitt 3 enthält Δ_Q^* $(Q \in g)$ einen auf $g - \{Q\}$ transitiven und regulären Normalteiler. Ist $n=9$, so hat dieser Normalteiler die Ordnung 9, ist also eine 3-Sylow-Gruppe von Δ^*. Daraus folgt, daß Δ^* genau zehn 3-Sylow-Gruppen enthält. Andrerseits ist $\Delta^* \cong \mathscr{A}_7$. Hat man $\mathscr{A}_7$ als Permutationsgruppe auf sieben Ziffern dargestellt, so folgt, daß jede 3-Sylow-Gruppe genau eine universelle Fixziffer hat. Wegen der Transitivität der $\mathscr{A}_7$ in dieser Darstellung, wird jede Ziffer von gleichvielen 3-Sylow-Gruppen festgelassen. Folglich ist die Anzahl der 3-Sylow-Gruppen der $\mathscr{A}_7$ durch 7 teilbar. Daher kann ihre Anzahl nicht gleich 10 sein. Also ist $n=35$. Nun ist nach Abschnitt 3b) und e) $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot k = o(\Delta) = o(\Delta^*)\, o(\mathscr{Z}\Delta) = 36 \cdot 35 \cdot 2 \cdot o(\mathscr{Z}\Delta)$. Daraus folgt, daß $o(\mathscr{Z}\Delta) = 17k$ ist. Nun ist $o(\mathscr{Z}\Delta) \leqq 34$ und somit $k \leqq 2$. Andrerseits ist 2 ein Teiler von $o(\mathscr{Z}\Delta)$. Also ist $k=2$. Es gibt eine Untergruppe Σ von $\mathscr{Z}\Delta$ mit $o(\Sigma)=17$. Wegen $(17, 4 \cdot 35 \cdot 36)=1$ zerfällt Δ nach einem Satz von SCHUR (s. ZASSENHAUS [*30*] Theorem 25 S. 162) über Σ, d.h. es ist $\Delta = \Sigma\Delta_0$ und $\Sigma \cap \Delta_0 = 1$. Aus $\Sigma \subseteq \mathscr{Z}\Delta$ folgt, daß Δ_0 in Δ normal ist. Δ_0 enthält also alle 5- und 7-Sylow-Gruppen von Δ. Daraus folgt, daß $\Gamma(Q, PQ) \subseteq \Delta_0$ ist für alle $Q \in g$, da ja $o(\Gamma(Q, PQ) = n = 5 \cdot 7$ ist. Folglich ist $\Delta = \Delta_0$: ein Widerspruch.

Es bleibt also nur noch die Möglichkeit, daß Δ/N isomorph einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, q)$ ist, die ihrerseits die $PSL(2, q)$ enthält. Ferner muß q ungerade sein. Da Δ/N einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, q)$ isomorph ist, die die $PSL(2, q)$ enthält, folgt, daß $\mathscr{Z}(\Delta/\mathrm{N})=1$ ist. Somit ist $\Delta/\mathrm{N} \cong \Delta^*$. Folglich ist Δ^* isomorph einer Untergruppe der $P\Gamma L(2, q)$, die die $PSL(2, q)$ enthält. Ferner ist Δ^* nach Abschnitt 3c) auf den Punkten von g zweifach transitiv. Wir können daher auf Δ^* den Satz 1 anwenden. Wäre nun $q \neq n$, so wäre, da q und n beide ungerade sind, $q=9$ und $n=5$, d.h. $\mathscr{E}$ wäre desarguessch und folglich wäre $\Delta^* \cong PSL(2, 5)$: ein Widerspruch. Also ist $q=n$.

Ist $q=3$, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch. Sei also $q>3$. Dann ist nach DICKSON [*9*] § 261 die $PSL(2, q)$ einfach. Folglich ist Δ nicht auflösbar. Es gibt daher einen minimalen perfekten Normalteiler Δ_0 in Δ. Dieser Normalteiler liegt natürlich nicht im Zentrum von Δ. Folglich induziert Δ_0 auf g nicht die Identität. Als minimaler Normalteiler von Δ^* ist daher Δ_0^* zur $PSL(2, q)$ isomorph. Da die $PSL(2, q)$ mehr als eine Involution enthält, ist 2 ein Teiler von $o(\mathscr{Z}\Delta_0)$. Da Δ_0 perfekt ist, ist daher nach SCHUR [*25*] Satz III und Satz IX entweder $\Delta_0 \cong SL(2, q)$ oder aber $q=9$ und $o(\mathscr{Z}\Delta_0)=6$. Da nun $\mathscr{Z}\Delta_0$ nur aus (P, g)-Streckungen besteht, müßte dann wegen $o(\mathscr{E})=q$ die Zahl 6 ein Teiler von $q-1=8$

sein. Also ist stets $\Delta_0 \cong SL(2, q)$ und $\mathscr{E}$ folglich nach Satz 2 desarguessch, q.e.d.

Korollar 5. *Ist $\mathscr{E}$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q \equiv 3 \bmod 4$ und gibt es in $\mathscr{E}$ ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g), so daß $\mathscr{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$, so ist $\mathscr{E}$ desarguessch.*

Beweis. Nach Satz 6 genügt es zu zeigen, daß $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ höchstens eine Involution enthält. Wegen $q \equiv 3 \bmod 4$ ist q kein Quadrat. Nach BAER [3] ist daher jede Involution σ aus Δ eine Streckung von $\mathscr{E}$. Da $P^\sigma = P$ und $g^\sigma = g$ ist, ist entweder P das Zentrum und g die Achse von σ, oder aber P liegt auf der Achse und g geht durch das Zentrum von σ. Das Zentrum $\mathscr{Z}\Delta$ ist abelsch und besitzt daher nur eine einzige 2-Sylow-Gruppe. Da ferner $o(\mathscr{Z}\Delta)$ ein Teiler von $q-1$ und $q \equiv 3 \bmod 4$ ist, ist die Ordnung der 2-Sylow-Gruppe von $\mathscr{Z}\Delta$ höchstens gleich 2. Folglich gibt es in $\mathscr{Z}\Delta$ höchstens eine Involution. σ und τ seien zwei Involutionen aus Δ, deren Zentren auf g liegen. Die Achse von σ gehe durch das Zentrum von τ und die Achse von τ gehe durch das Zentrum von σ. Da sich die Achsen von σ und τ in P schneiden, ist $\sigma\tau$ nach OSTROM [20] Lemma 6 eine involutorische (P, g)-Streckung und daher nach dem eben Bemerkten die einzige Involution in $\mathscr{Z}\Delta$. Hieraus und aus der zweifachen Transitivität von Δ^* auf g folgt, daß es zu jedem $Q \in g$ und zu jeder Geraden h mit $Q \notin h$ und $P \in h$ höchstens eine involutorische (Q, h)-Streckung gibt.

Angenommen es gäbe eine solche involutorische (Q, h)-Streckung σ. Dann folgt aus der zweifachen Transitivität von Δ^* auf g, daß alle Involutionen aus Δ, die nicht in $\mathscr{Z}\Delta$ liegen und daher keine (P, g)-Streckungen sind, unter Δ konjugiert sind. Nun liegt nach ANDRÉ [1] Satz 3 in der von allen Involutionen mit der Achse h erzeugten Gruppe die Gruppe $\Gamma(h \cap g, h)$. Folglich wird Δ und damit auch Δ^* von einer Klasse konjugierter Involutionen erzeugt. Daher ist $[\Delta^* : (\Delta^*)'] \leqq 2$.

Nun zerlegt $\langle\sigma\rangle^*$ die Menge $g - \{Q, h \cap g\}$ in lauter Zyklen der Länge 2. Die Anzahl dieser Zyklen ist $\frac{1}{2}(q-1)$ und daher wegen $q \equiv 3 \bmod 4$ ungerade. Folglich gibt es in Δ^* einen Normalteiler N vom Index 2. Daraus folgt, daß $(\Delta^*)' \subseteq \mathsf{N}$ ist. Da der Index von $(\Delta^*)'$ in Δ^* höchstens gleich 2 ist, ist er daher genau gleich 2. Nun ist $o(\Gamma^*(Q, PQ)) = q$ und daher ungerade. Also ist $\Gamma^*(Q, PQ) \subseteq (\Delta^*)'$ für alle $Q \in g$. Folglich ist $\Delta^* \subseteq (\Delta^*)'$: ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt, daß jede Involution aus Δ bereits in $\mathscr{Z}\Delta$ liegt. Da es in $\mathscr{Z}\Delta$, wie wir bereits gesehen haben, höchstens eine Involution gibt, folgt nach Satz 6 die Behauptung des Korollares 5.

5. Eine weitere Kennzeichnung aller endlichen desarguesschen projektiven Ebenen

Beim Beweise der letzten Kennzeichnung der endlichen desarguesschen Ebenen benötigen wir den folgenden Hilfssatz, der in der Literatur schon verschiedentlich benutzt wurde, den ich jedoch nirgends explizit formuliert fand.

Hilfssatz. *Ist σ eine Perspektivität oder eine perspektive Dualität einer projektiven Ebene $\mathscr{E}$, ist ferner P das Zentrum und g die Achse von σ, und ist $\mathscr{F}$ eine*

Unterebene von $\mathcal{E}$, die sowohl P als auch g enthält, und gibt es einen Punkt Q von $\mathcal{F}$ mit $P \neq Q \notin g$ und ist Q^σ ein Element von $\mathcal{F}$, so ist $\mathcal{F}^\sigma = \mathcal{F}$ und σ induziert in $\mathcal{F}$ eine Perspektivität bzw. eine perspektive Dualität σ^* mit $o(\sigma) = o(\sigma^*)$.

Beweis. Wir beweisen zunächst, daß jeder Punkt X von $\mathcal{F}$ auf ein Element von $\mathcal{F}$ abgebildet wird. Ist $X = P$ oder $X \in g$, so ist das klar. Sei nun $X \notin PQ$ und $X \notin g$. Sei ferner $PX \cap g = S$ und $QX \cap g = T$. Dann sind $P, Q, S, T, P^\sigma, Q^\sigma, S^\sigma, T^\sigma$ Elemente von $\mathcal{F}$. Folglich ist X^σ, da ja $X^\sigma = (QT \cap PS)^\sigma = Q^\sigma T^\sigma \cap P^\sigma S^\sigma$ bzw. $= (Q^\sigma \cap T^\sigma)(P^\sigma \cap S^\sigma)$ ist je nachdem, ob σ eine Perspektivität bzw. eine perspektive Dualität ist, ein Element von $\mathcal{F}$. Eine zweimalige Anwendung dieses Schlusses zeigt, daß X^σ auch dann ein Element von $\mathcal{F}$ ist, wenn $X \in PQ - \{P, Q\}$ ist. Hieraus folgt, da σ ein Automorphismus von $\mathcal{E}$ ist, daß auch die Geraden von $\mathcal{F}$ auf Elemente von $\mathcal{F}$ abgebildet werden. Folglich induziert σ einen Endomorphismus σ^* von $\mathcal{F}$. Der Automorphismus σ^{-1} von $\mathcal{F}$ ist ebenfalls eine Perspektivität bzw. eine perspektive Dualität mit der Achse g und dem Zentrum P. Ferner sind Q^σ und $Q^{\sigma\sigma^{-1}} = Q$ Punkte von $\mathcal{F}$. Somit induziert auch σ^{-1} einen Endomorphismus $(\sigma^{-1})^*$ von $\mathcal{F}$. Aus $\sigma\,\sigma^{-1} = 1 = \sigma^{-1}\,\sigma$ folgt dann, daß $\sigma^*(\sigma^{-1})^* = (\sigma^{-1})^*\,\sigma^*$ gleich der Identität in $\mathcal{F}$ ist. Folglich ist σ^* eine Perspektivität bzw. eine perspektive Dualität von $\mathcal{F}$. Ist schließlich $(\sigma^*)^n$ in $\mathcal{F}$ die Identität, so gibt es einen Punkt X in $\mathcal{F}$ mit $P \neq X \notin g$ und $X^{\sigma^n} = X$, d.h. σ^n ist eine Perspektivität mit der Achse g, dem Zentrum P und dem Fixpunkt X. Folglich ist $\sigma^n = 1$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Satz 7. *Ist $\mathcal{E}$ eine endliche projektive Ebene, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *$\mathcal{E}$ ist desarguessch.*

b) *Es gibt ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) in $\mathcal{E}$, so daß $\mathcal{E}$ einmal (P, g)-homogen und zum andern (Q, PQ)-transitiv ist für alle $Q \in g$.*

c) *Es gibt ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) in $\mathcal{E}$, so daß $\mathcal{E}$ einmal (P, g)- und (Q, PQ)-transitiv ist für alle $Q \in g$ und daß zum andern nur die Identität aus $\mathrm{K} = \Delta\Gamma(P, g)$ eine nicht ausgeartete Teilebene von $\mathcal{E}$ festläßt. Dabei ist Δ wieder das Erzeugnis aller $\Gamma(Q, PQ)$ mit $Q \in g$.*

d) *Es gibt ein nicht inzidentes Punkt-Geradenpaar (P, g) in $\mathcal{E}$, so daß $\mathcal{E}$ eine (Q, PQ)-transitive Ebene ist für alle $Q \in g$ und daß nur die Identität aus der von $\Delta = \langle \Gamma(Q, PQ) \mid Q \in g \rangle$ auf g induzierten Permutationsgruppe Δ^* auf g drei verschiedene Fixpunkte hat.*

Beweis. Die Ordnung von $\mathcal{E}$ sei gleich q. Ist $\mathcal{E}$ desarguessch, so ist $\mathcal{E}$ bekanntlich (R, h)-transitiv für alle Punkt-Geradenpaare (R, h). Da nun der Koordinatenkörper $GF(q)$ von $\mathcal{E}$ kommutativ ist, folgt nach Baer [*2*], daß $\mathcal{E}$ für alle nicht inzidenten Punkt-Geradenpaare (P, g) eine (P, g)-homogene Ebene ist. Also folgt b) aus a). Aus der Kommutativität von $GF(q)$ folgt ferner nach Baer [*4*] Second Fundamental Theorem S. 68, daß außer der Identität kein Element aus der projektiven Gruppe von $\mathcal{E}$ eine nicht ausgeartete Teilebene von $\mathcal{E}$ elementweise festläßt. Also folgt aus a) auch c), da ja K in der projektiven Gruppe von $\mathcal{E}$ enthalten ist.

Nun zeigen wir, daß d) aus c) folgt. Es sei $\delta \in \Delta$. Ferner seien R, S, T, drei paarweise verschiedene Fixpunkte von δ auf g. Ist $P \neq Q \in PT - \{T\}$, so gibt es wegen der (P, g)-Transitivität von $\mathscr{E}$ ein $\gamma \in \Gamma(P, g)$ mit $Q^{\delta\gamma} = Q$. Folglich läßt $\delta\gamma$ das Viereck P, Q, R, S punktweise fest. Da wir c) vorausgesetzt haben ist daher $\delta\gamma = 1$ und folglich $\delta^* = 1^*$. Damit ist d) gezeigt.

Aus d) folgt a). Ist $\delta \in \Delta$ und läßt δ eine nicht ausgeartete Teilebene von $\mathscr{E}$ elementweise fest, so hat δ wegen $g^\delta = g$ auf g mindestens drei verschiedene Fixpunkte. Folglich ist δ nach d) eine (P, g)-Streckung und damit die Identität. Insbesondere folgt daraus, daß alle Involutionen aus Δ Perspektivitäten sind. Ist nun q gerade, so folgt also aus Satz 5, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist. Sei also q ungerade. Nach FEIT [*10*] und ITO [*15*] besitzt dann Δ^* entweder einen Normalteiler der Ordnung $q+1$ oder aber einen Normalteiler Δ_0^* vom Index 1 oder 2 mit $\Delta_0^* \cong PSL(2, q)$, so daß also insbesondere q eine Primzahlpotenz ist.

Angenommen Δ^* enthalte einen Normalteiler N^* der Ordnung $q+1$. Da Δ^* zweifach transitiv ist, ist N^* transitiv und damit scharf transitiv auf g. Somit ist $\Delta^* = \mathrm{N}^* \Gamma^*(Q, PQ)$, falls Q ein Punkt aus g ist. Daher ist Δ^* scharf zweifach transitiv auf g. Nach b) von Abschnitt 3 ist daher $o(\mathscr{Z}\Delta) = (q-1)\,k$. Da $o(\mathscr{Z}\Delta)$ nach e) von Abschnitt 3 ein Teiler von $q-1$ ist, ist daher $o(\mathscr{Z}\Delta) = q-1$. Da q ungerade ist, ist $q-1 = 2^s(2t+1)$ mit $s \geqq 1$. Dann enthält $\mathscr{Z}\Delta$ eine Untergruppe Σ der Ordnung $2t+1$, die in Δ normal ist. Ferner ist $(2t+1, 2^s q(q+1)) = 1$. Folglich zerfällt Δ nach einem Satz von SCHUR (vgl. ZASSENHAUS [*30*] Theorem 25 S. 162) über Σ. Es gibt also eine Gruppe Λ in Δ mit $\Delta = \Sigma\, \Lambda$ und $\Sigma \cap \Lambda = 1$. Da $o(\Sigma)$ zu $o(\Lambda)$ teilerfremd ist, da ferner $o(\Sigma)$ ein Teiler von $q-1$ ist, folgt, daß $\Gamma(Q, PQ) \subset \Lambda$ ist für alle $Q \in g$. Daher ist $\Delta = \Lambda$ und $\Sigma = 1$. Da Δ^* scharf zweifach transitiv auf g ist, und da außerdem $q+1$ gerade ist, ist $q+1 = 2^u$. Folglich ist $2^s = q-1 = 2^u - 2$. Hieraus folgt, daß $s = 1$ und daher $q = 3$ ist. Dann ist aber $\mathscr{E}$ desarguessch.

Es bleibt also nur der Fall $q = p^r > 3$ und $\Delta_0^* \cong PSL(2, q)$. Dann ist Δ_0^* einfach. Die Gruppen $\Gamma^*(Q, PQ)$ mit $Q \in g$ sind nun gerade die p-Sylow-Gruppen von Δ_0^*. Folglich ist $\Delta^* = \Delta_0^*$. Da Δ^* daher einfach ist, ist $\Delta^* \cong \Delta / \mathscr{Z}\Delta = (\Delta / \mathscr{Z}\Delta)' = \Delta' \mathscr{Z}\Delta / \mathscr{Z}\Delta \cong \Delta' / (\mathscr{Z}\Delta \cap \Delta')$, wobei der Akzent die jeweilige Kommutatorgruppe bezeichnen soll. Nun ist $o(\mathscr{Z}\Delta)$ ein Teiler von $q-1$. Folglich enthält Δ' alle Gruppen $\Gamma(Q, PQ)$ mit $Q \in g$, die ja die Ordnung q haben. Daher ist $\Delta = \Delta'$ und somit $\mathscr{Z}\Delta \subset \Delta'$. Nun ist $o(\Delta^*) = \frac{1}{2} q(q^2-1)$. Nach b) von Abschnitt 3 ist daher $\mathscr{Z}\Delta \neq 1$. Nach SCHUR [*25*] Satz III und Satz IX ist daher $\Delta \cong SL(2, q)$ oder aber $q = 9$ und $o(\mathscr{Z}\Delta) = 6$. Der letzte Fall kann jedoch nicht eintreten, da 6 kein Teiler von 8 ist. Also ist stets $\Delta \cong SL(2, q)$ und folglich $\mathscr{E}$ nach Satz 2 desarguessch. Aus d) folgt also a).

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß a) aus b) folgt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß $\mathscr{E}$ ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung ist. Da nach BAER [*2*] aus der (P, g)-Homogenität die (P, g)-Transitivität folgt, ist die Ordnung q von $\mathscr{E}$ nach Korollar 3 ungerade. Aus der bereits nachgewiesenen Äquivalenz von a) und c) folgt, daß es ein $\kappa \neq 1$ in $\mathrm{K} = \Delta\Gamma(P, g)$ gibt, welches eine nicht ausgeartete, echte Teilebene $\mathscr{F}$ von $\mathscr{E}$ elementweise festläßt. P und g sind wegen $P^\kappa = P$ und $g^\kappa = g$ Elemente von $\mathscr{F}$. Aus dem Hilfssatz folgt nun, daß $\mathscr{F}$ ebenfalls b) erfüllt. Wegen $o(\mathscr{F})<o(\mathscr{E})$ und der Minimalität von $\mathscr{E}$ ist daher $\mathscr{F}$ desarguessch. Ist nun σ eine Involution aus $\mathscr{Z}\Delta$, so ist, da $\Gamma(P, g)$ und Δ elementweise vertauschbar sind, $\sigma\kappa=\kappa\sigma$. Folglich induziert σ in $\mathscr{F}$ eine involutorische (P, g)-Streckung. Da $\mathscr{F}$ desarguessch ist, gibt es in $\mathscr{F}$ nur eine involutorische (P, g)-Streckung. Hieraus folgt, daß alle Involutionen aus $\mathscr{Z}\Delta$ in $\mathscr{F}$ die gleiche (P, g)-Streckung induzieren. Daraus folgt, daß es in $\mathscr{Z}\Delta$ höchstens eine Involution gibt. Nach LINGENBERG [17] Satz 13 ist ein Element aus Δ, welches einen Fixpunkt hat, der von P verschieden ist und nicht auf g liegt, wegen der (P, g)-Homogenität eine Translation. Folglich ist jede Involution aus Δ, da ja die Ordnung q von $\mathscr{E}$ ungerade ist, eine (P, g)-Streckung, d.h. ein Element aus $\mathscr{Z}\Delta$. In Δ gibt es also höchstens eine Involution. Aus Satz 6 folgt daher, daß $\mathscr{E}$ desarguessch ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch ist. Aus b) folgt also a). Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] ANDRÉ, J.: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen. Arch. Math. **6**, 29—32 (1954).

[2] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Am. J. Math. **64**, 137—152 (1942).

[3] — Projectivities with fixed points on every line of the plane. Bull. Am. Math. Soc. **52**, 273—286 (1946).

[4] — Linear algebra and projective geometry. New York 1952.

[5] BARLOTTI, A.: Le possibili configurazioni dei sistemi delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a)-transitivo. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **12**, 212—226 (1957).

[6] BRUCK, R.H.: Difference sets in a finite group. Trans. Am. Math. Soc. **78**, 464—481 (1955).

[7] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. New York: Dover Publ. 1955.

[8] DEMBOWSKI, P.: Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958).

[9] DICKSON, L.E.: Linear groups. New York: Dover Publ. 1958.

[10] FEIT, W.: On a class of doubly transitive permutation groups. Ill. J. Math. **4**, 170—186 (1960).

[11] —, and J.G. THOMPSON: Solvability of groups of odd order. Pac. J. Math. **13**, 775—1029 (1963).

[12] GLEASON, A.M.: Finite Fano planes. Am. J. Math. **78**, 797—808 (1956).

[13] GORENSTEIN, D.: The classification of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups. Symposium on Group Theory. Harvard 1963, S. 10—15.

[14] HIGMAN, D.G., and J.E. MCLAUGHLIN: Geometric ABA-groups. Ill. J. Math. **5**, 382—397 (1961).

[15] ITO, N.: On a class of doubly transitive permutation groups. Ill. J. Math. **6**, 341—352 (1962).

[16] LENZ, H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. D.M.V. **57**, 20—31 (1954).

[17] LINGENBERG, R.: Über Gruppen projektiver Kollineationen, welche eine perspektive Dualität invariant lassen. Arch. Math. **13**, 385—400 (1962).

[18] MANNING, W.A.: A Theorem concerning simply transitive primitive groups. Bull. Am. Math. Soc. **35**, 330—332 (1929).

[19] MOULTON, F.R.: A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Am. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902).

[20] OSTROM, T.G.: Doubly transitivity in finite projective planes. Can. J. Math. **8**, 563—567 (1956).

[21] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
[22] QVIST, B.: Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Ac. Sci. Fenn. **134**, 5—27 (1952).
[23] SALZMANN, H.: Kompakte Ebenen mit einfacher Kollineationsgruppe. Arch. Math. **13**, 98—109 (1962).
[24] SCHUR, I.: Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. r.a. Math. **127**, 20—50 (1904).
[25] — Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. J. r.a. Math. **132**, 85—137 (1907).
[26] SUZUKI, M.: A new type of simple groups of finite order. Proc. Nat. Acad. Sci. **46**, 868—870 (1960).
[27] — On a class of doubly transitive groups. Ann. Math. **75**, 105—145 (1962).
[28] — A class of doubly transitive permutation groups. Proc. Int. Congress of Math. Stockholm 1962, 285—287.
[29] YAQUB, J.C.D.S.: On projective planes of class III. Arch. Math. **12**, 146—150 (1961).
[30] ZASSENHAUS, H.J.: The theory of groups, 2nd ed. New York 1958.

Mathematisches Institut der Universität Mainz

(Eingegangen am 13. März 1964)