REIFFEN, H.-J.
Math. Zeitschr. 101, 269–284 (1967)

Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen

HANS-JÖRG REIFFEN

Eingegangen am 15. April 1967

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Poincarésche Lemma für holomorphe Differentialformen auf reduzierten komplexen Räumen, d.h. die Frage der Exaktheit der Sequenz

$$(*)\qquad 0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \longrightarrow \cdots$$

studiert, wobei Ω^p die Garbe der holomorphen Differentialformen vom Grade p und d der Ableitungsoperator ist. Wir gehen dabei von einem Differentialformenbegriff aus, wie er in der Algebra üblich ist (vgl. [*6*, *1*, *2*]). Es zeigt sich (§ 3), daß die Sequenz $(*)$ keineswegs in allen Punkten eines Serreschen Raumes X exakt ist, so daß man zusätzliche Forderungen an X stellen muß, um die Exaktheit der Sequenz $(*)$ von einer Stelle k ab zu gewährleisten. In diese Richtung geht der in § 2 eingeführte Begriff der holomorphen Kontrahierbarkeit. Unter Benutzung der Schlußweise, welche man in der reellen Analysis zum Beweis des Poincaréschen Lemmas üblicherweise verwendet, ergibt sich folgender Satz:

X sei ein Serrescher Raum, $O \in X$, und Y sei eine analytische Menge in einer Umgebung von O mit $O \in Y$. Ist X_o auf Y_o holomorph kontrahierbar und die Einbettungsdimension von Y in O gleich k, so gilt in O:

$$\Omega_o^{k-1} \longrightarrow \Omega_o^k \longrightarrow \cdots \quad \textit{ist exakt}.$$

(Im Falle $k=0$ sei $\Omega_o^{-1} := \boldsymbol{C}$.)

Daß für gewisse Serresche Räume das Poincarésche Lemma nicht gilt, bedeutet somit, daß diese nicht auf niederdimensionale Teile kontrahierbar sind.

In [*9*] wird gezeigt, daß die Forderung der Kontrahierbarkeit für irreduzible Punkte von Hyperflächen in Gebieten des $\boldsymbol{C}^2$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist.

Die vorliegende Arbeit stellt den ersten Teil von [7] dar.

Bezeichnungen

$\boldsymbol{N}$	Menge der positiven ganzen Zahlen.
$\tilde{\Omega}^p(X)$	Garbe der Keime holomorpher alternierender Differentialformen vom Grade p über der komplexen Mannigfaltigkeit X.

d, d^p Ableitungsoperator, welcher $\tilde{\Omega}^p(X)$ in $\tilde{\Omega}^{p+1}(X)$ abbildet.
$\operatorname{emdim}_x X$ Einbettungsdimension des Serreschen Raumes X im Punkte x.
X_{sg} Singularitätenmenge des Serreschen Raumes X.

§ 1. Holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen

Wir beginnen mit einer von GRAUERT und KERNER in [*1*, *2*] gegebenen Definition für holomorphe Differentialformen.

A sei eine analytische Menge in einem Gebiet im $\boldsymbol{C}^N$, und $\mathscr{I}$ sei eine kohärente analytische Idealgarbe in G, deren genaues Nullstellengebilde A ist. Dann definieren wir: für $y \in G$ gehört $\omega_y \in \tilde{\Omega}_y^p (p \in N)$ genau dann zu $\mathscr{K}_y^p$, wenn Elemente $f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_r \in \mathscr{I}_y$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \tilde{\Omega}_y^p$, $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \tilde{\Omega}_y^{p-1}$ existieren mit:

$$\omega = \sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma + \sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge \beta_\rho .$$

Für $p=0$ sei $\mathscr{K}_y^0 := \mathscr{I}_y$.

Die Kollektion der $\mathscr{K}_y^p$, $y \in G$, definiert eine kohärente analytische Garbe $\mathscr{K}^p(G)$ über G.

Definition 1 (vgl. Def. 1.2. in [*2*]). *A sei eine analytische Menge in einem Gebiet G des $\boldsymbol{C}^N$, und $\mathscr{I}$ sei eine kohärente analytische Idealgarbe auf G, deren genaue Nullstellenmenge A ist. Es sei $\mathscr{H} := \mathscr{O}(G)/\mathscr{I} \,|\, A$ die Strukturgarbe von A. Dann heißt*

$$\Omega^p(A) := \tilde{\Omega}^p(G)/\mathscr{K}^p(G) \,|\, A$$

Garbe der Keime holomorpher Differentialformen des Grades p auf dem komplexen Raum $(A, \mathscr{H})$.

Analog zu den Ausführungen in [*2*] zeigt man: Die Definition von $\Omega^p(A)$ ist einbettungsunabhängig. Es gilt nämlich mit den Bezeichnungen von [*2*], S. 239:

$$\begin{aligned}
2\big({}_*\psi(a\, d w_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d w_{\nu_p}) - {}_*\tau(a\, d w_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d w_{\nu_p})\big) \\
= (a \circ \psi - a \circ \tau)\, d\psi_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d\psi_{\nu_p} + a \circ \psi (d\psi_{\nu_1} - d\tau_{\nu_1}) \wedge d\psi_{\nu_2} \wedge \cdots \wedge d\psi_{\nu_p} \\
+ a \circ \tau (d\psi_{\nu_1} - d\tau_{\nu_1}) \wedge d\psi_{\nu_2} \wedge \cdots \wedge d\psi_{\nu_p} + \cdots + a \circ \psi\; d\tau_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge (d\psi_{\nu_p} - d\tau_{\nu_p}) \\
+ a \circ \tau\, d\tau_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge (d\psi_{\nu_p} - d\tau_{\nu_p}) + (a \circ \psi - a \circ \tau)\, d\tau_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d\tau_{\nu_p} \in \mathscr{K}_y^p .
\end{aligned}$$

Also kann man die Definition auf komplexe Räume erweitern. $X \to H^0(X, \Omega^p(X))$ ist ein kontravarianter Funktor, und $\Omega^p(X)$ ist eine kohärente analytische Garbe. Es gilt

$$\Omega^p(X - X_{sg}) = \tilde{\Omega}^p(X - X_{sg}), \quad \Omega^0(X) = \mathscr{H}(X), \quad \Omega^p(X) = \overset{p}{\wedge} \Omega^1(X),$$

und für $x \in X$ ist $\Omega^1(X)_x$ der Differentialmodul von $\mathscr{H}(X)_x$ über $\boldsymbol{C}$. $\Omega^p(X)$ gestattet für jeden komplexen Raum X einen kanonischen Ableitungsoperator d, der in den Mannigfaltigkeitspunkten mit dem klassischen übereinstimmt. Sei A nämlich wieder, wie oben, eine analytische Menge in einem Gebiet G des $\boldsymbol{C}^N$ und $\mathscr{I}$ eine kohärente analytische Idealgarbe mit A als genauer Nullstellenmenge. Für

$$\omega=\sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma+\sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge \beta_\rho, \quad f_\sigma,\ g_\rho \in \mathscr{I}_y,\ \alpha_\sigma \in \tilde{\Omega}_y^p,\ \beta_\rho \in \tilde{\Omega}_y^{p-1},\ y \in G,$$

gilt offenbar $d\omega \in \mathscr{K}_y^{p+1}$. Also ist $d(\mathscr{K}^p(G)) \subset \mathscr{K}^{p+1}(G)$, und wir haben in kanonischer Weise einen Garbenhomomorphismus d^p: $\Omega^p(A) \to \Omega^{p+1}(A)$. Man prüft leicht nach, daß d^p einbettungsunabhängig definiert ist, also für alle komplexen Räume X einen Homomorphismus d^p: $\Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ definiert.

Ist X ein komplexer Raum und $x \in X$, so haben wir offenbar immer eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}(X)_x \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X)_x \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow \Omega^{\operatorname{emdim}_x X}(X)_x \longrightarrow 0,$$

wobei ε die kanonische Injektion und $\mathcal{O}$ die Strukturgarbe bezeichnen. Die Sequenz ist an der letzten Stelle stets exakt, weil dies für die entsprechenden Differentialformgarben im Einbettungsraum gilt. Exaktheit bei $\mathcal{O}(X)_x$ ist im nichtreduzierten Fall nicht immer gegeben, wie ein Beispiel in [*2*] lehrt. Im reduzierten Fall liegt jedoch immer bei $\mathcal{O}(X)_x$ Exaktheit vor, wie man sofort sieht.

In [*10*] wurden vier verschiedene Typen von Pfaffschen Formen auf komplexen Räumen definiert. Es sei bemerkt, daß es in natürlicher Weise möglich ist, diese Differentialformgarben ebenfalls für den Fall $p>1$ einzuführen. Die Garben $\Omega_h^p(X)$ lassen dabei auch einen kanonisch definierten Ableitungsoperator zu. Bezüglich der Garben Ω_g^p gilt jedoch, daß d den Kern $\mathscr{K}'^1 := \mathscr{K}'$ im allgemeinen nicht in den (analog definierten) Kern $\mathscr{K}'^2$ abbildet.

§ 2. Das Lemma von Poincaré

X sei ein komplexer Raum und $x \in X$. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \longrightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{d} \Omega_x^1 \xrightarrow{d} \cdots.$$

Daß die Sequenz für komplexe Mannigfaltigkeiten stets exakt ist, ist genau die Aussage des klassischen Poincaréschen Lemmas.

Wir bringen zunächst den folgenden

Hilfssatz 1.

$$G_1 \xrightarrow{d_1} G_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

sei eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ sei H_n Untergruppe von G_n.

Ist für alle $n \in \boldsymbol{N}$ $d_n(H_n) \subset H_{n+1}$, so gilt für die induzierte Sequenz

$$(*) \qquad G_1/H_1 \xrightarrow{\hat{d}_1} G_2/H_2 \xrightarrow{\hat{d}_2} \cdots:$$

(*) *ist genau dann an der p-ten Stelle* ($p \geqq 2$) *exakt, wenn die Sequenz*

$$H_1 \xrightarrow{d_1} H_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

an der $(p+1)$*-ten Stelle exakt ist.*

Der einfache Beweis sei dem Leser überlassen.

Aus Hilfssatz 1 folgt sofort mit Hilfe des klassischen Poincaréschen Lemmas:

Korollar 1. *A sei eine analytische Menge in einem Gebiet G eines* $\boldsymbol{C}^N$, $x \in A$, *und* $\mathscr{K}_x^p$ *sei wie in* §1 *definiert, wobei A mit einer komplexen Struktur versehen sei. Dann gilt für alle* $p \in \boldsymbol{N}$:

$$\Omega_x^{p-1} \xrightarrow{d} \Omega_x^p \xrightarrow{d} \Omega_x^{p+1}$$

ist genau dann exakt, wenn

$$\mathscr{K}_x^p \xrightarrow{d} \mathscr{K}_x^{p+1} \xrightarrow{d} \mathscr{K}_x^{p+2}$$

exakt ist.

In der Theorie der Mannigfaltigkeiten wird der Poincarésche Satz bewiesen, indem man die lokale Kontrahierbarkeit in den Punkten der Mannigfaltigkeit ausnutzt. Im Fall von komplexen Räumen muß die Kontrahierbarkeit gefordert werden. Der folgende Satz entspricht dem Poincaréschen Lemma für zusammenziehbare Bereiche; der aus der Infinitesimalrechnung bekannte Beweis überträgt sich. Zunächst noch eine Bezeichnung: G_1, G_2 seien Gebiete im $\boldsymbol{C}^N$ bzw. $\boldsymbol{C}^M$. φ: $G_1 \to G_2$ sei eine holomorphe Abbildung. Dann bezeichne φ_* die durch $\varphi_*(z,f) := f \circ \varphi$ definierte Abbildung von $G_1 \oplus_{G_2} \mathcal{O}(G_2)$ nach $\mathcal{O}(G_1)$.

Hilfssatz 2. *H, G seien Gebiete im* $\boldsymbol{C}^N$, *H sei Holomorphiegebiet, und W sei ein Gebiet im* $\boldsymbol{C}^1$, *welches* 0 *und* 1 *enthält.* $\mathscr{I}$ *sei eine kohärente analytische Idealgarbe auf G mit einer Kohärenzbasis* $f_1, \ldots, f_m \in H^0(G, \mathcal{O})$ *auf G. Es existiere eine holomorphe Abbildung* $\Phi: H \times W \to G$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\Phi(z, 1) = z$ *für alle z aus H,*

(2) $\Phi(z, 0) \in \{(w_1, \ldots, w_N) \in \boldsymbol{C}^N;\ w_{k+1} = \cdots = \cdots w_N = 0\}$ *für alle* $z \in H$,

(3) *es ist* $\Phi_*((H \times W) \oplus_G \mathscr{I}) \subset \pi_*((H \times W) \oplus_H \mathscr{I} \mid H) \cdot \mathcal{O}(H \times W)$, *wobei* π: $H \times W \to H$ *die Projektion auf die erste Komponente bedeutet.*

Dann gilt für alle $p \geqq k+1$ *(mit den Bezeichnungen von* §1*): zu jeder Differentialform*

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{m} (f_\mu \alpha_\mu + d f_\mu \wedge \beta_\mu), \qquad \alpha_\mu \in H^0(G, \Omega^p),\ \beta_\mu \in H^0(G, \Omega^{p-1}),$$

mit: $d\omega = 0$ *existiert eine Differentialform* $\eta \in H^0(H, \mathscr{K}^{p-1}(H))$ *mit:* $d\eta = \omega \mid H$.

Beweis. Die Halme der kohärenten Garbe $\mathscr{A} := \pi_*((H \times W) \oplus_H \mathscr{I} \mid H) \cdot \mathcal{O}(H \times W)$ werden offenbar von den Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ (als Funktionen in (z, t) aufgefaßt) erzeugt. Nach Theorem 15, S. 244 in [3] sind, weil $H \times W$ Steinsch ist, $f_1, \ldots, f_m$ ein Erzeugendensystem von $H^0(H \times W, \mathscr{A})$. Aus (3) folgt dann:

$$f_\mu \circ \Phi = \sum_{\lambda=1}^{m} \varphi_\lambda^{(\mu)} f_\lambda$$

mit gewissen $\varphi_\lambda^{(\mu)} \in H^0(H \times W, \mathcal{O})$,

$$d(f_\mu \circ \Phi) = \sum_{\lambda=1}^{m} (f_\lambda \, d\varphi_\lambda^{(\mu)} + df_\lambda \, \varphi_\lambda^{(\mu)}).$$

Bezeichnen wir mit Φ^* die zu Φ gehörige Abbildung in den Differentialbündeln, so hat man:

$$\Phi^* \omega = \sum_{\lambda=1}^{m} \left\{ f_\lambda \cdot \sum_{\mu=1}^{m} [\varphi_\lambda^{(\mu)}(\Phi^* \alpha_\mu) + d\varphi_\lambda^{(\mu)} \wedge (\Phi^* \beta_\mu)] + df_\lambda \wedge \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_\lambda^{(\mu)}(\Phi^* \beta_\mu) \right\}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} \{ f_\lambda \cdot (\alpha_\lambda^{(1)} + dt \wedge \beta_\lambda^{(1)}) + df_\lambda \wedge (\alpha_\lambda^{(2)} + dt \wedge \beta_\lambda^{(2)}) \},$$

wobei das Differential dt in $\alpha_\lambda^{(1)}, \alpha_\lambda^{(2)}, \beta_\lambda^{(1)}, \beta_\lambda^{(2)}$ nicht auftritt. Also hat man mit:

$$\alpha := \sum_{\lambda=1}^{m} (f_\lambda \, \alpha_\lambda^{(1)} + df_\lambda \wedge \alpha_\lambda^{(2)}),$$

$$\beta := \sum_{\lambda=1}^{m} (f_\lambda \, \beta_\lambda^{(1)} - df_\lambda \wedge \beta_\lambda^{(2)}): \quad \Phi^* \omega = \alpha + dt \wedge \beta.$$

Nun bedeute: d_z Ableitungsbildung nur nach den Variablen $z_1, \ldots, z_N$; $(\partial \alpha / \partial t)$ partielle Differentiation der Koeffizienten von α nach t; $\int \beta \, dt$ Integration der Koeffizienten von β nach t; $\alpha(t)$ die Differentialform, welche entsteht, wenn man in den Koeffizienten von α die Variable t festhält. Es gilt (wie beim Beweis in der reellen Analysis):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = d_z \beta, \qquad \alpha(1) - \alpha(0) = \int_{\substack{0 \\ (C)}}^{1} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \, dt = d \int_{\substack{0 \\ (C)}}^{1} \beta \, dt = d\eta,$$

wobei C eine rektifizierbare Kurve ist, welche in W von 0 nach 1 läuft, und

$$\eta := \int_{\substack{0 \\ (C)}}^{1} \beta \, dt = \sum_{\lambda=1}^{m} \left\{ f_\lambda \left(\int_{\substack{0 \\ (C)}}^{1} \beta_\lambda^{(1)} \, dt \right) - df_\lambda \wedge \left(\int_{\substack{0 \\ (C)}}^{1} \beta_\lambda^{(2)} \, dt \right) \right\}$$

zu $H^0(H, \mathcal{K}^{p-1}(H))$ gehört.

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß $\alpha(0) = 0$ ist. Φ werde beschrieben durch die holomorphen Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_N$, und es sei

$$\omega = \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq N} \omega_{\nu_1 \ldots \nu_p} \, dz_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\nu_p}.$$

Dann ist α der Anteil von

$$\Phi^* \omega = \sum_{1 \leqq \nu_1 < \cdots < \nu_p \leqq N} \omega_{\nu_1 \ldots \nu_p} \circ \Phi \, d\Phi_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{\nu_p},$$

welcher dt nicht enthält. Wegen (2) gilt: $\Phi_\kappa(z, t) = t \Psi_\kappa(z, t)$, $\kappa = k+1, \ldots, N$, wobei Ψ_κ holomorph in $H \times W$ ist. Wir betrachten ein festes p-Tupel $(\nu_1', \ldots, \nu_p')$,

$1 \leqq \nu'_1 < \cdots < \nu'_p \leqq N$. Wegen $p \geqq k+1$ gilt $\nu'_p > k$, und es existiert ein kleinster Index $j \leqq p$ mit $: \nu'_j > k$. Dann gilt:

$$\omega_{\nu'_1 \ldots \nu'_p} \circ \Phi \, d\Phi_{\nu'_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{\nu'_p}$$

$$= \omega_{\nu'_1 \ldots \nu'_p} \circ \Phi \, d\Phi_{\nu'_1} \wedge \cdots \wedge d\Phi_{\nu'_{j-1}} \wedge (dt \, \Psi_{\nu'_j} + t \, d\Psi_{\nu'_j}) \wedge \cdots \wedge (dt \, \Psi_{\nu'_p} + t \, d\Psi_{\nu'_p}).$$

Da dt in α nicht vorkommt, ist dann in jedem Summanden des von $\omega_{\nu'_1 \ldots \nu'_p} \circ \Phi \, d\Phi_{\nu'_1} \wedge \ldots \wedge d\Phi_{\nu'_p}$ herrührenden Anteils für α der Faktor t enthalten. D.f.: $\alpha(0) = 0$.

In den folgenden Ausführungen versuchen wir, Hilfssatz 2 eine übersichtlichere Form zu geben. Dabei beschränken wir uns auf den Fall von Serreschen Räumen.

Definition 2. *A, B seien analytische Mengen im Gebiet G des $\boldsymbol{C}^N$, und es sei O ein Punkt aus $A \cap B$. B sei in O gewöhnlich. Der analytische Mengenkeim A_o heißt genau dann auf den analytischen Mengenkeim B_o holomorph $-\boldsymbol{C}^N-$ kontrahierbar, wenn folgendes gilt:*
zu jeder offenen $\boldsymbol{C}^N$-Umgebung $U \subset G$ von O gibt es eine offene $\boldsymbol{C}^N$-Umgebung V von O, ein Gebiet W im $\boldsymbol{C}^1$, welches 0 *und* 1 *enthält und eine hollomorphe Abbildung Φ: $V \times W \to U$ Kontraktionsabbildung genannt, mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\Phi(z, 1) = z$ für alle $z \in V$,*

(2) *$\Phi(z, 0) \in B$ für alle $z \in V$,*

(3) *$\Phi((A \cap V) \times W) \subset A$.*

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich:

Satz 1. *A, B seien analytische Mengen in einem Gebiet G des $\boldsymbol{C}^N$, es sei $0 \in A \cap B$, und B sei in* 0 *gewöhnlich. Ist A_0 auf B_0 holomorph $-\boldsymbol{C}^N-$ kontrahierbar, so gilt (mit den Bezeichnungen von* §1, *wobei $\mathscr{I}$ nun die Idealgarbe von A in G sei):*

$$\mathscr{K}_0^k \to \mathscr{K}_0^{k+1} \to \cdots \quad \text{ist für } k = \dim_0 B \text{ exakt}.$$

Beweis. $\tilde{U} \subset G$ sei eine beliebige offene Umgebung von 0. Es existiert dann eine offene Umgebung U von 0 mit folgenden Eigenschaften:

(1) $U \subset \tilde{U}$,

(2) nach einer geeigneten Transformation von U hat $U \cap B$ die Gestalt $\{(w_1, \ldots, w_N) \in B;\ w_{k+1} = \cdots = w_N = 0\}$,

(3) die Idealgarbe $\mathscr{I}$ besitzt in U eine Kohärenzbasis $f_1, \ldots, f_m$.

Nach Voraussetzung existieren eine offene Umgebung V von 0, die wir als Holomorphiegebiet voraussetzen dürfen, ein Gebiet W im $\boldsymbol{C}^1$, welches 0 und 1 enthält, und eine Kontraktionsbildung Φ: $V \times W \to U$.

U, V, W, $\mathscr{I}$ und Φ erfüllen dann bis auf (3) alle Forderungen von Hilfssatz 2.

Es sei $z^{(0)} \in A \cap V$ und $t^{(0)} \in W$ fest. Für ein Element $f \in \mathscr{I}_{\Phi(z^{(0)}, t^{(0)})}$ gilt dann: es existiert ein Polyzylinder

$$Z := Z' \times Z'',$$

$$Z' = \{z \in \boldsymbol{C}^N;\ |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \varepsilon\}, \qquad Z'' = \{t \in \boldsymbol{C}^1;\ |t - t^{(0)}| < \varepsilon\}, \qquad Z \subset V \times W,$$

so daß $f \circ \Phi$ in eine in Z konvergente Potenzreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z)(t - t^{(0)})^\nu$$

entwickelbar ist und $f \circ \Phi(z, t)$ für jedes feste $t \in Z''$ auf $Z' \cap A$ verschwindet. Also haben wir $a_\nu(z) \in H^0(Z', \mathscr{I})$ für alle ν. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$a_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t - t^{(0)}| = \varepsilon/2} \frac{f \circ \Phi(z, t)}{(t - t^{(0)})^{\nu+1}}\, dt \qquad \text{für alle } z \in Z'.$$

Daraus folgt die Existenz einer Konstanten M, so daß für alle $z \in Z''' := \{(z_1, \ldots, z_N);\ |z_\nu - z_\nu^{(0)}| < \varepsilon/2,\ 1 \leqq \nu \leqq N\}$

$$|a_\nu(z)| \leqq \frac{M}{(\varepsilon/2)^\nu}$$

gilt. Nach dem Idealbasissatz von CARTAN-RÜCKERT (Theorem 2, S. 82 in [3]) existieren eine Konstante k und holomorphe Funktionen $\alpha_\lambda^{(\nu)}$, $1 \leqq \lambda \leqq m$, $\nu = 1, 2, \ldots$, in einer Umgebung $Y \subset Z'''$ von $z^{(0)}$ mit:

$$a_\nu(z) = \sum_{\lambda=1}^{m} \alpha_\lambda^{(\nu)} f_\lambda, \qquad |\alpha_\lambda^{(\nu)}(z)| \leqq k \frac{M}{(\varepsilon/2)^\nu} \qquad \text{für alle } z \in Y.$$

Daraus folgt:

$$f \circ \Phi = \sum_{\lambda=1}^{m} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\lambda^{(\nu)} (t - t^{(0)})^\nu \right) f_\lambda$$

in einer gewissen Umgebung von $(z^{(0)}, t^{(0)})$. Das heißt: $f \circ \Phi \in \pi_*((z^{(0)}, t^{(0)}) \times \mathscr{I}_{z^{(0)}}) \cdot \mathcal{O}(H \times W)_{(z^{(0)}, t^{(0)})}$, womit Punkt (3) von Hilfssatz 2 als erfüllt nachgewiesen ist.

Ist also $\omega \in \mathscr{K}_0^{p+1}$, $p \geqq k$, mit $d\omega = 0$, so findet man eine Umgebung $\tilde{U}$ von 0, in denen $\mathscr{I}$ eine Kohärenzbasis $f_1, \ldots, f_m$ und ω die Darstellung

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{m} (f_\mu \alpha_\mu + df_\mu \wedge \beta_\mu), \qquad \alpha_\mu \in H^0(\tilde{U}, \tilde{\Omega}^{p+1}), \quad \beta_\mu \in H^0(\tilde{U}, \tilde{\Omega}^p)$$

hat. Gemäß unseren Betrachtungen konstruiert man U und V und findet ein $\eta \in H^0(V, \mathscr{K}^p)$ mit $d\eta = \omega \mid V$, q.e.d.

Definition 3. *X sei ein Serrescher Raum, und Y sei eine analytische Untermenge von X. O sei ein fester Punkt von Y. Der analytische Mengenkeim X_o heißt genau dann auf den analytischen Mengenkeim Y_o holomorph kontrahierbar, wenn es zu jedem $U \in \mathfrak{U}$, wobei $\mathfrak{U}$ das System der offenen Umgebungen von O ist,* *ein $V \in \mathfrak{U}$, ein Gebiet W im $\boldsymbol{C}^1$, welches 0 und 1 enthält, und eine holomorphe Abbildung φ: $V \times W \to U$, Kontraktionsabbildung genannt, gibt mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\varphi(x, 1) = x$ für alle $x \in V$,*

(2) *$\varphi(x, 0) \in Y$ für alle $x \in V$.*

Das System $\mathfrak{K}$ aller Quadrupel (U, V, W, φ) heißt die Kontraktion von X_o auf Y_o.

Wir werden in § 3 zeigen, daß die Kontrahierbarkeit in der Tat eine besondere Eigenschaft ist.

Bevor wir das Hauptergebnis dieses Paragraphen ableiten, beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 3. *A sei eine nicht-leere analytische Menge in einem Gebiet G eines $\boldsymbol{C}^N$, und W sei ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^1$ mit $a \in W$. Nun sei $f \in H^0(G \times \{a\}, \mathcal{O})$, $g \in H^0(A \times W, \mathcal{O})$ und $f \mid A \times \{a\} = g \mid A \times \{a\}$. Dann definieren f und g eine holomorphe Funktion auf $G \times \{a\} \cup A \times W$.*

Beweis. Es sei $z' = (z'_1, \ldots, z'_N, a) \in A \times \{a\}$ beliebig. Dann ist g in einer Umgebung $Z = Z' \times Z''$, $Z' = \{z \in \boldsymbol{C}^N; |z_\nu - z'_\nu| < \varepsilon\}$, $Z'' = \{t \in \boldsymbol{C}^1; |t - a| < \varepsilon\}$, Beschränkung einer dort konvergenten Reihe

$$\tilde{g}(z, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(z)(t-a)^\nu.$$

Für $t = a$ gilt: $\tilde{g}(z, a) = g_0(z)$, und es ist $g_0(z) = f(z, a)$ für alle $z \in A \cap Z'$. Daraus folgt: $h(z) := g_0(z) - f(z, a)$ ist eine auf $A \cap Z'$ verschwindende Funktion. $\tilde{g} - h$ ist ebenfalls Fortsetzung von g in Z, weil für $(z, t) \in (A \cap Z') \times Z''$ gilt: $\tilde{g}(z, t) - h(z) = \tilde{g}(z, t) = g(z, t)$. Für $z \in Z'$ gilt andererseits aber auch: $\tilde{g}(z, a) - h(z) = g_0(z) - h(z) = f(z, a)$, womit $\tilde{g} - h$ ebenfalls als Fortsetzung von f in Z nachgewiesen ist.

Hilfssatz 4. *X und Y seien analytische Mengen im Gebiet G des $\boldsymbol{C}^N$, und Y habe die Darstellung $Y = \{w \in \boldsymbol{C}^N;\ w_{k+1} = \cdots = w_N = 0\} \cap G$. H sei ein in G enthaltenes Holomorphiegebiet mit $V := H \cap X \neq \emptyset$. W sei ein 0 und 1 enthaltendes Gebiet im $\boldsymbol{C}^1$, und φ: $V \times W \to X$ sei eine holomorphe Abbildung mit:*

(1) *$\varphi(x, 1) = x$ für alle $x \in V$.*

(2) *$\varphi(x, 0) \in Y$ für alle $x \in V$.*

Dann gilt:

Zu jedem X-Teilgebiet $V' \Subset V$ gibt es ein 0 und 1 enthaltendes Teilgebiet W' von W und eine holomorphe Abbildung Φ: $G' \times W' \to G$, wobei G' ein $\boldsymbol{C}^N$-Teilgebiet von G ist mit: $V \supset X \cap G' \supset V'$, so daß folgendes gilt:

(1) *$\Phi(z, 1) = z$ für alle $z \in G'$,*

(2) *$\Phi(z, 0) \in Y$ für alle $z \in G'$,*

(3) *$\Phi \mid (X \cap G') \times W' = \varphi \mid (X \cap G') \times W'$.*

Beweis. Es sei $B:=(H\times\{1\})\cup(V\times W)\cup(H\times\{0\})$. B ist analytische Teilmenge des Holomorphiegebietes $H\times W$. $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ seien die Komponenten von φ, und $\tau\colon V\to\boldsymbol{C}^k$ sei die durch $\tau(x):=(\varphi_1(x,0),\ldots,\varphi_k(x,0))$ für $x\in V$ definierte holomorphe Abbildung. τ besitzt eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{\tau}\colon H\to\boldsymbol{C}^k$ (Theorem 16, S. 145 in [3]). $\sigma\colon H\to\boldsymbol{C}^N$ werde definiert durch $\sigma(z):=(\tilde{\tau}(z),0,\ldots,0)$. Dann konstruieren wir eine Abbildung $\psi\colon B\to\boldsymbol{C}^N$, wie folgt:

$$\psi(z,t):=\begin{cases} z & \text{für alle } z\in H,\ t=1,\\ \varphi(z,t) & \text{für alle } (z,t)\in V\times W,\\ \sigma(z) & \text{für alle } z\in H,\ t=0.\end{cases}$$

ψ ist wohl definiert auf B und holomorph jeweils auf $H\times\{1\}$, $V\times W$ und $H\times\{0\}$. Nach Hilfssatz 3 ist dann ψ auch holomorph auf B. Nach dem oben zitierten Theorem existiert eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{\psi}\colon H\times W\to\boldsymbol{C}^N$, und eine einfache topologische Überlegung liefert die Existenz von Gebieten $G'\subset H$ und $W'\subset W$ mit: $V\supset X\cap G'\supset V'$, $0,1\in W'$ und $\tilde{\psi}(G'\times W')\subset G$. Es sei $\Phi:=\tilde{\psi}\,|\,G'\times W'$. Φ besitzt die gewünschten Eigenschaften.

Wir beweisen nun den Hauptsatz dieses Paragraphen.

Lemma von Poincaré. *X sei ein Serrescher Raum und $O\in X$. Existiert in einer Umgebung U von O eine O enthaltende analytische Menge Y mit der Einbettungsdimension k in O, derart daß X_o auf Y_o holomorph kontrahierbar ist, so gilt:*

$$\Omega_o^{k-1}\xrightarrow{d}\Omega_o^{k}\xrightarrow{d}\cdots$$

ist exakt (wobei im Falle $k=0$ $\Omega_o^{-1}:=\boldsymbol{C}$ sei).

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß U vermöge einer Abbildung φ äquivalent zu einer analytischen Menge A in einem Gebiet $\tilde{G}$ eines $\boldsymbol{C}^N$ ist, und daß Y dort in die analytische Menge

$$B:=\{(w_1,\ldots,w_N);\quad w_{k+1}=\cdots=w_N=0\}\cap\tilde{G}$$

abgebildet wird (vgl. Lemma 2.4. in [11]). Der Bildpunkt von O in $\tilde{G}$ sei der Nullpunkt des $\boldsymbol{C}^N$, und $\mathfrak{K}$ sei die von X induzierte Kontraktion von A_0 auf $\varphi(Y)_0$.

A_0 ist dann auf B_0 holomorph $-\boldsymbol{C}^N-$kontrahierbar. Sei nämlich G ein beliebiges Teilgebiet von G mit $0\in G$. Dann gibt es ein in G enthaltenes Holomorphiegebiet H mit $0\in H$, ein 0 und 1 enthaltendes Teilgebiet W des $\boldsymbol{C}^1$ und eine holomorphe Abbildung $\varphi\colon V\times W\to A$, $V:=H\cap A$, so daß $(A\cap G, V, W, \varphi)\in\mathfrak{K}$. Insbesondere gilt: $\varphi(x,0)\in B$ für alle $x\in V$. Nach Hilfssatz 4 existiert eine offene $\boldsymbol{C}^N$-Umgebung G' von 0, ein Gebiet W' im $\boldsymbol{C}^1$, welches 0 und 1 enthält, und eine holomorphe Kontraktionsabbildung $\Phi\colon G'\times W'\to G$ mit den in Def. 2 geforderten Eigenschaften. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus Satz 1 folgt dann: $\mathscr{K}_0^k\to\mathscr{K}_0^{k+1}\to\cdots$ ist exakt, und Korollar 1 liefert die Behauptung des Lemmas.

Definition 4. *X sei ein Serrescher Raum mit einer analytischen Untermenge Y. U sei eine offene Teilmenge von X, W ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^1$, welches* 0 *und* 1 *enthält, und φ: $U \times W \to X$ eine holomorphe Abbildung mit den Eigenschaften:*

(1) *$\varphi(x, 1) = x$ für alle $x \in U$,*

(2) *$\varphi(x, 0) \in Y$ für alle $x \in U$.*

Dann definieren wir:

(a) *Ist $U \cap Y \neq \emptyset$ und $\varphi(x, t) = x$ für alle $x \in U \cap Y$ und alle $t \in W$, so heißt (U, W, φ) eine retraktartige Kontraktion des Raumes X auf den Raum Y.*

(b) *Ist $O \in U \cap Y$ und $\varphi(O, t) = O$ für alle $t \in W$, so heißt (U, W, φ) eine O-fixe Kontraktion.*

Eine retraktartige Kontraktion ist insbesondere x-fix für jedes $x \in Y \cap U$. Eine einfache topologische Betrachtung liefert folgenden Satz:

Satz 2. *X sei ein Serrescher Raum, und Y sei eine analytische Menge in X mit $O \in Y$. Existiert eine O-fixe Kontraktion (U, W, φ), so ist X_o in kanonischer Weise auf Y_o holomorph kontrahierbar.*

Aus Satz 2 folgt insbesondere das folgende Korollar.

Korollar 3. *X sei ein Serrescher Raum mit der offenen Teilmenge U und der analytischen Untermenge Y. (U, W, φ) sei eine retraktartige Kontraktion des Raumes X auf Y. Dann gilt für alle $x \in Y \cap U$ mit $Y_x \neq X_x$:*

$$\Omega_x^{k_x - 2} \xrightarrow{d} \Omega_x^{k_x - 1} \xrightarrow{d} \cdots$$

ist exakt, wobei $k_x := \mathrm{emdim}_x X$ ist.

Beweis. Es sei $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x, 0)$ für alle $x \in U$. $\tilde{\varphi}$: $\tilde{\varphi}^{-1}(Y \cap U) \to Y \cap U$ ist offenbar eine holomorphe Retraktion im Sinne von Def. 6 in [*4*]. Dann folgt Korollar 3 aus Theorem 3 in [*4*], Satz 2 und dem Lemma von POINCARÉ.

Beispiele. (1) Die durch $x^2 = y^3$ definierte analytische Menge im $\boldsymbol{C}^2$ ist auf (0, 0) retraktartig kontrahierbar.

(2) X sei ein Serrescher Raum, W ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^1$ und $a \in W$. Dann ist $X \times W$ auf $X \times \{a\}$ retraktartig kontrahierbar und folglich ist

$$\Omega_{(x, a)}^{k-1}(X \times W) \longrightarrow \Omega_{(x, a)}^{k}(X \times W) \longrightarrow \cdots,$$

mit $k = \mathrm{emdim}_x X$, für alle $x \in X$ exakt.

(3) Beispiel (2) läßt sich verschärfen.

Satz 3. *X sei ein Serrescher Raum, $O \in X$. Existieren in einer Umgebung von O n in O linear unabhängige holomorphe Vektorfelder, so gilt in O:*

$$\Omega_o^{k-n-1} \longrightarrow \Omega_o^{k-n} \longrightarrow \cdots,$$

mit $k = \mathrm{emdim}_o X$, ist exakt.

Beweis. Man wende Corollary 3.4 in [*11*] an und führe eine zu (2) analoge Überlegung durch!

(4) Aus dem Korollar 2 in [8] folgt mit den Bezeichnungen von [8]: X sei ein Serrescher Raum, $O \in X$, und es existiere ein holomorphes Vektorfeld v in einer Umgebung von O mit den Eigenschaften:

a) $v(O)=0$.

b) Die Jordansche Normalform des totalen Differentials von v in O ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $n_1, \ldots, n_N$ ($N = \operatorname{emdim}_o X$).

c) Es ist $\operatorname{Max}\{n_\nu; 1 \leqq \nu \leqq N\} < 2 \operatorname{Min}\{n_\nu; 1 \leqq \nu \leqq N\}$.

Dann ist $0 \to \boldsymbol{C} \to \mathcal{O}_o \to \cdots$ exakt.

§ 3. Beispiele nichtkontrahierbarer Räume

In diesem Paragraphen wollen wir Beispiele für Räume angeben, die nicht in jedem Punkt auf eine Menge niedriger Einbettungsdimension kontrahierbar sind.

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

Es sei $x \in \boldsymbol{C}^N$ und $\mathscr{H} \subset \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^N)_x$, $\mathsf{H} \subset \Omega^p(\boldsymbol{C}^N)_x$. Dann definieren wir:

$$\mathscr{H} \cdot \mathsf{H} := \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu \alpha_\mu ; f_\mu \in \mathscr{H}, \alpha_\mu \in \mathsf{H} \right\},$$

$$\mathsf{H} \wedge \Omega^q(\boldsymbol{C}^N)_x := \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \wedge \beta_\mu ; \alpha_\mu \in \mathsf{H}, \beta_\mu \in \Omega^q(\boldsymbol{C}^N)_x \right\},$$

$$d\,\mathsf{H} := \{d\alpha; \alpha \in \mathsf{H}\}.$$

Nun sei A eine analytische Menge in einem Gebiet $G \subset \boldsymbol{C}^N$ mit der Idealgarbe $\mathscr{I}$. Die Garben $\mathscr{K}^p$ seien wie in §1 definiert. Es sei $0 \in A$, $\Omega_0^p := \Omega^p(\boldsymbol{C}^N)_0$. Dann gilt für alle p: $(*)\, d(\mathscr{I}_0\, \Omega_0^p) = d(\mathscr{K}_0^p)$. Denn es sei

$$\omega = \sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma + \sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge \beta_\rho, \quad f_\sigma, \quad g_\rho \in \mathscr{I}_0, \quad \alpha_\sigma \in \Omega_0^p, \quad \beta_\rho \in \Omega_0^{p-1}.$$

Dann ist

$$d\omega = \sum_{\sigma=1}^{s} d f_\sigma \wedge \alpha_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma d\alpha_\sigma - \sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge d\beta_\rho = d\left(\sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma - \sum_{\rho=1}^{r} g_\rho d\beta_\rho \right).$$

Wir behaupten die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $$\mathscr{I}_0 \cdot \Omega_0^N \subset d(\mathscr{I}_0 \cdot \Omega_0^{N-1}),$$

(2) $$\mathscr{I}_0 \cdot \Omega_0^N \subset d\mathscr{K}_0^{N-1},$$

(1′) $$d\mathscr{I}_0 \wedge \Omega_0^{N-1} \subset d(\mathscr{I}_0 \cdot \Omega_0^{N-1}),$$

(2′) $$d\mathscr{I}_0 \wedge \Omega_0^{N-1} \subset d\mathscr{K}_0^{N-1},$$

(3) $$\mathscr{K}_0^N \subset d\mathscr{K}_0^{N-1},$$

(4) $$\Omega^{N-2}(A)_0 \to \Omega^{N-1}(A)_0 \to \Omega^N(A)_0$$

ist exakt.

Beweis. (3)$\Leftrightarrow$(4) nach Korollar 1.

$\left.\begin{array}{l}(1)\Leftrightarrow(2)\\(1')\Leftrightarrow(2')\end{array}\right\}$ nach $(*)$.

Ad (2)$\Rightarrow$(2'):

$$\omega=\sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge \beta_\rho, \qquad g_\rho \in \mathscr{I}_0, \qquad \beta_\rho \in \Omega_0^{N-1}$$

sei vorgegeben. Dann folgt:

$$\sum_{\rho=1}^{r} d g_\rho \wedge \beta_\rho = d\left(\sum_{\rho=1}^{r} g_\rho \wedge \beta_\rho\right) - \sum_{\rho=1}^{r} g_\rho\, d\beta_\rho \in d\mathscr{K}_0^{N-1}.$$

Ad (2')$\Rightarrow$(2):

$$\omega=\sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma, \qquad f_\sigma \in \mathscr{I}_0, \qquad \alpha_\sigma \in \Omega_0^N$$

sei vorgegeben. Zu jedem σ existiert ein $\gamma_\sigma \in \Omega_0^{N-1}$ mit: $d\gamma_\sigma=\alpha_\sigma$. Dann gilt:

$$\sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \alpha_\sigma = d\left(\sum_{\sigma=1}^{s} f_\sigma \gamma_\sigma\right) - \sum_{\sigma=1}^{s} d f_\sigma \wedge \gamma_\sigma \in d\mathscr{K}_0^{N-1}.$$

Ad (2), (2')$\Rightarrow$(3):

$$\mathscr{K}_0^N = \mathscr{I}_0\, \Omega_0^N + d\mathscr{I}_0 \wedge \Omega_0^{N-1} \subset d\mathscr{K}_0^{N-1}.$$

(3)$\Rightarrow$(2) ist trivial.

Aus der Äquivalenz zwischen (1) und (4) folgt:

Korollar 4. *$f\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^N)_0$ $(N\geqq 2)$ enthalte keine Primelementquadrate. f sei in einer Umgebung U von 0 holomorph, und es sei $X:=\{z\in U; f(z)=0\}$. Dann gilt: $\Omega^{N-2}(X)_0 \to \Omega^{N-1}(X)_0 \to \Omega^N(X)_0$ ist exakt$\Leftrightarrow$zu jedem Element $g\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^N)_0$* existieren *Elemente $v_1, \ldots, v_N \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^N)_0$, welche die partielle Differentialgleichung*

$$f\cdot g=\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial(f v_\nu)}{\partial z_\nu}$$

in einer Umgebung von 0 lösen.

Beweis. Es ist $\mathscr{I}_0=\operatorname{Rad}(f)=f\cdot\mathcal{O}(\mathbf{C}^N)_0$.

(a) *Beispiel einer in 0 irreduziblen Hyperfläche X im $\mathbf{C}^2$, wo $\mathcal{O}(X)_0 \to \Omega^1(X)_0 \to \Omega^2(X)_0$ nicht exakt ist.*

Es sei $f(x,y):=x^q+y^p+y^{p-1}x$, $q\geqq 4$, $p\geqq q+1$, und f sei als irreduzibel in $\mathcal{O}(\mathbf{C}^2)_0$ vorausgesetzt. Gemäß Korollar 4 müssen wir die Differentialgleichung

$$(*)\qquad f\cdot g=\frac{\partial(fA)}{\partial x}+\frac{\partial(fB)}{\partial y}$$

für $g\in\mathcal{O}_0$ studieren. Es sei nun $g=1$, die Differentialgleichung sei als lösbar vorausgesetzt, und

$$A=\sum_{k=0}^{\infty} A_k, \qquad B=\sum_{k=0}^{\infty} B_k$$

seien die homogenen Darstellungen von A bzw. B. Da $df(0,0)=0$ ist, liegt im Punkte $(0,0)$ eine singuläre Stelle des Raumes $X:=\{(x,y)\in \boldsymbol{C}^2; f(x,y)=0\}$ vor, und weil die Beschränkung von (A,B) auf X offenbar ein holomorphes Vektorfeld auf X liefert, muß $A(0)=B(0)=0$ sein (Corollary 3.3. in [*11*]). Aus $(*)$ folgt dann:

$$x^q = \frac{\partial x^q A_1}{\partial x} + \frac{\partial x^q B_1}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} y^p + y^{p-1}x &= \frac{\partial}{\partial x} A_1(y^p + y^{p-1}x) + \frac{\partial}{\partial y} B_1(y^p + y^{p-1}x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} x^q A_{p-q+1} + \frac{\partial}{\partial y} x^q B_{p-q+1}. \end{aligned}$$

Setzt man $A_1 = A_{11}x + A_{12}y$, $B_1 = B_{11}x + B_{12}y$, so liefert eine leichte Rechnung das Gleichungssystem:

$$(**) \qquad \begin{aligned} (q+1)A_{11} + B_{12} &= 1 \\ A_{11} + (p+1)B_{12} &= 1 \\ 2A_{11} + pB_{12} &= 1. \end{aligned}$$

Für die Determinante D der erweiterten Matrix gilt:

$$D = q - p \neq 0.$$

Also ist $(**)$ nicht lösbar.

Daraus folgt, daß $(*)$ nicht lösbar ist.

Damit haben wir:

Satz 4. *Ist* $f(z_1, z_2) := z_1^q + z_2^p + z_2^{p-1}z_1$, $q \geqq 4$, $p \geqq q+1$, *irreduzibel in* $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)_0$: *so ist*

$$\mathcal{O}(X)_0 \to \Omega^1(X)_0 \to \Omega^2(X)_0$$

nicht exakt, wobei $X := \{z \in \boldsymbol{C}^2; f(z)=0\}$ *ist, und es folgt, daß* X_0 *nicht auf* $\{0\}_0$ *holomorph kontrahierbar ist.*

Es gibt irreduzible Funktionen von der in Satz 4 genannten Form. Denn eine leichte Rechnung zeigt, daß z.B. $f(x,y) := x^4 + y^5 + y^4x$ in $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)_0$ irreduzibel ist.

(b) *Beispiel einer in* 0 *normalen Hyperfläche* X *im* $\boldsymbol{C}^3$, *wo* $\Omega^1(X)_0 \to \Omega^2(X)_0 \to \Omega^3(X)_0$ *nicht exakt ist.*

Es sei $f(x,y,z) := z^r + x^q + y^p + y^{p-1}x$, $r \geqq 3$, $q \geqq r+2$, $p \geqq q+2$. f sei als irreduzibel in $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3)_0$ vorausgesetzt. Dann liefert eine einfache Rechnung folgendes Ergebnis: $X := \{(x,y,z) \in \boldsymbol{C}^3;\ f(x,y,z)=0\}$ hat in $(0,0,0)$ eine isolierte Singularität und ist dort also insbesondere normal.

Gemäß Korollar 4 müssen wir wieder die Differentialgleichung

$$(*) \qquad f \cdot g = \frac{\partial (fA)}{\partial x} + \frac{\partial (fB)}{\partial y} + \frac{\partial (fC)}{\partial z}$$

diskutieren. Wir setzen wieder die Lösbarkeit voraus, und es seien $A=\sum A_k$, $B=\sum B_k$, $C=\sum C_k$ die homogenen Entwicklungen der holomorphen Lösungsfunktionen im Falle $g=1$. Ferner sei $A_1=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z$, $B_1=B_{11}x+B_{12}y+B_{13}z$, $C_1=C_{11}x+C_{12}y+C_{13}z$.

Eine Rechnung wie in (a) liefert das Gleichungssystem:

$$(**)\qquad \begin{aligned} A_{11}+\quad B_{12}+(r+1)\,C_{13}&=1\\ (q+1)\,A_{11}+\quad B_{12}+\quad C_{13}&=1\\ A_{11}+(p+1)\,B_{12}+\quad C_{13}&=1\\ 2A_{11}+\quad p\,B_{12}+\quad C_{13}&=1\,. \end{aligned}$$

D sei wieder die Determinante der zum Gleichungssystem gehörigen erweiterten Matrix. Es gilt:

$$D=r(q-p)\neq 0\,.$$

Also ist (**) nicht lösbar. Daraus folgt, daß (*) nicht lösbar ist. Damit haben wir:

Satz 5. *Ist* $f(z_1, z_2, z_3):=z_1^q+z_2^p+z_2^{p-1}z_1+z_3^r$, $r\geqq 3$, $q\geqq r+2$, $p\geqq q+2$, *irreduzibel in* $\mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3)_0$, *so gilt für den in* 0 *normalen Raum* $X:=\{z\in C^3; f(z)=0\}$, *daß*

$$\Omega^1(X)_0\to\Omega^2(X)_0\to\Omega^3(X)_0$$

nicht exakt ist, und es folgt, daß X_0 *auf keinen durch* 0 *verlaufenden analytischen Mengenkeim kleinerer Einbettungsdimension kontrahierbar ist. Darüber hinaus gilt:*

Es gibt keine in einer offenen X*-Umgebung* U *von* 0 *enthaltene analytische Menge* Y *mit* $Y_0\neq X_0$, $0\in Y$, *so daß für eine geeignete offene* X*-Umgebung* V *von* 0 *und für eine geeignete holomorphe Abbildung* φ: $V\times W\to U$, *wo* W *ein* 0 *und* 1 *enthaltendes Gebiet im* C^1 *ist, das Tripel* (V, W, φ) *eine retraktartige Kontraktion des Raumes* U *auf den Raum* Y *wäre.*

Die letzte Bemerkung folgt sofort aus Korollar 3.

Daß es auch wirklich irreduzible Funktionen f mit der im Satz 5 beschriebenen Gestalt gibt, zeigt das Beispiel:

$$f(x,y,z):=z^3+x^5+y^7+y^6x\,.$$

(c) *Beispiel eines Serreschen Raumes* X, *wo die Menge der Punkte* $x\in X$, *für welche* $\mathcal{O}(X)_x\to\Omega^1(X)_x\to\Omega^2(X)_x$ *nicht exakt ist, keine abgeschlossene und damit auch keine analytische Menge bilden.*

Es sei $f(x,y):=x^4+y^5+y^4x$ und $g(x,y,t):=y^5+y^4x+x^4t$, und es sei $X:=\{z\in\boldsymbol{C}^3; g(z)=0\}$, $Y:=\{z\in\boldsymbol{C}^2; f(z)=0\}$. Dann ist $\operatorname{Grad} g=(y^4+4x^3t, 5y^4+4y^3x, x^4)$ und X_{sg} enthalten in der analytischen Menge $\{z\in\boldsymbol{C}^3; g(z)=0, \operatorname{Grad} g(z)=0\}=\{z=(x,y,t)\in\boldsymbol{C}^3; x=y=0\}$. Φ: $\boldsymbol{C}^3\to\boldsymbol{C}^3$ sei definiert durch $\Phi(x,y,t):=(xt, yt, t)$. Offenbar ist $\Phi\,|\,\boldsymbol{C}^3-\{z\in\boldsymbol{C}^3; t=0\}$ biholomorph mit der

Umkehrabbildung $\Psi(u, v, t) := (u/t, v/t, t)$. Nun sei $X' := Y \times \boldsymbol{C}_t^1$. Dann liefert eine leichte Rechnung folgendes Ergebnis:

Zu $z = (0, 0, t) \in X - \{0\}$ existiert eine offene X-Umgebung U und eine offene X'-Umgebung V, so daß V vermöge Φ biholomorph äquivalent zu U ist.

Daraus folgt insbesondere, daß $X_{sg} = \{z \in \boldsymbol{C}^3;\ x = y = 0\}$ ist.

Behauptung. In keinem Punkt $z \in X_{sg} - \{0\}$ *ist*

$$\mathcal{O}(X)_z \to \Omega^1(X)_z \to \Omega^2(X)_z$$

exakt.

Beweis. Auf Grund obiger Überlegungen genügt es, folgendes zu zeigen: In keinem Punkt der Gestalt $z = (0, 0, t)$ ist

$$\mathcal{O}(X')_z \to \Omega^1(X')_z \to \Omega^2(X')_z$$

exakt.

Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $a \in \boldsymbol{C}^1$ mit:

$$\mathcal{K}^1_{(0,0,a)} \to \mathcal{K}^2_{(0,0,a)} \to \mathcal{K}^3_{(0,0,a)},$$

wobei $\mathcal{K}^p_{(0,0,a)}$ sich auf die Idealgarbe $\mathcal{I}$ von $Y \times \boldsymbol{C}$ bezieht, ist exakt. Es gilt gemäß (a) $\mathcal{I}_{(0,0,a)} = f \cdot \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3)_{(0,0,a)}$. Dann folgt aus den Bemerkungen im Anfang von § 3: es existiert ein Element $\eta = f \cdot (A\,dx + B\,dy + C\,dt)$, $A, B, C \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^3)_{(0,0,a)}$ mit $d\eta = f(x, y)\,dx \wedge dy$. Daraus folgt:

$$f = \frac{\partial(fB)}{\partial x} + \frac{\partial\big(f(-A)\big)}{\partial y}.$$

Nun sei $D := B(x, y, a) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)_0$, $E := -A(x, y, a) \in \mathcal{O}(\boldsymbol{C}^2)_0$. Dann gilt:

$$f = \frac{\partial(fD)}{\partial x} + \frac{\partial(fE)}{\partial y}$$

im Widerspruch zu den Ausführungen unter (a). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da der Raum X offenbar auf $\{0\}$ retraktartig kontrahierbar ist, gilt in 0:

$$\mathcal{O}(X)_0 \to \Omega^1(X)_0 \to \Omega^2(X)_0$$

ist exakt.

Ergebnis. *Der Raum X hat eine in* 0 *eindimensionale Singularitätenmenge X_{sg}. Für alle $z \in X_{sg}$ gilt:*

$$\mathcal{O}(X)_z \to \Omega^1(X)_z \to \Omega^2(X)_z \qquad \textit{ist exakt} \Leftrightarrow z = 0.$$

Zum Abschluß wollen wir einige Bemerkungen zum Satz von DE RHAM machen. SERRE hat in [*12*] den folgenden Satz bewiesen:

Ist X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so gilt für $Z^q(X) := \text{Kern}\,\{d^q\colon H^0(X, \Omega^q) \to H^0(H, \Omega^{q+1})\}$ und $B^q(X) := d^{q-1}(H^0(X, \Omega^{q-1}))$ $(q \in \boldsymbol{N})$:

$$H^q(X, \boldsymbol{C}) \cong Z^q(X)/B^q(X).$$

Daraus folgt: *Für Steinsche Mannigfaltigkeiten X ist*

$$H^q(X, C) = 0 \quad \textit{für } q > \dim X.$$

In den Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Springer 1965, stellt SERRE die Frage (Problems Submitted 26), ob auch für Steinsche Räume $H^q(X, C) = 0$ für $q > \dim X$ gilt.

Da der auf Grund von Hauptsatz 1 ableitbare de Rhamsche Satz nur für solche Räume gilt, die auf jeden ihrer Punkte holomorph kontrahierbar sind, ist es klar, daß man zur Diskussion der Serreschen Frage andere Methoden benutzen muß. L. KAUP ist es in [5] gelungen, die von SERRE geäußerte Vermutung auf anderem Wege zu beweisen.

Literatur

[1] GRAUERT, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. **146**, 331—368 (1962).

[2] —, u. H., KERNER: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. **153**, 236—260 (1964).

[3] GUNNING, R. C., and H. ROSSI: Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs (N. J.): Prentice-Hall Inc. 1965.

[4] HOLMANN, H.: Local properties of holomorphic mappings. Proceedings of the conference on complex analysis, Minneapolis 1964, p. 94—109. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.

[5] KAUP, L.: Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume. Nachrichten Göttingen 213—224 (1966).

[6] KUNZ, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. Jour. für r. und a. Math. **294**, 165—182 (1960).

[7] REIFFEN, H.-J.: Holomorphe Kontraktionen und das Lemma von Poincaré. Habilitationsschrift Bochum 1967.

[8] — Analytische Kegelmengen (in Vorbereitung).

[9] — Kontrahierbare eindimensionale Hyperflächen (in Vorbereitung).

[10] —, u. U. VETTER: Pfaffsche Formen auf komplexen Räumen. Math. Ann. **167**, 338—350 (1966).

[11] ROSSI, H.: Vector fields on analytic spaces. Ann. of Math. **78**, No. 3, 455—467 (1963).

[12] SERRE, J. P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Coll. fonct. plus. var., Brüssel, 57—68 (1953).

Institut für Math. Univ. Bochum, 463 Bochum, Friederikastr. 11