Math. Z. 121, 111–140 (1971)

Produkte von Kongruenzklassengeometrien universeller Algebren

Heinrich Werner*

In [15] stellt Wille einen Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie her, indem er zu einer universellen Algebra die Kongruenzklassengeometrie betrachtet. Eine Geometrie, die sich als Kongruenzklassengeometrie einer geeigneten Algebra beschreiben läßt, wird affin koordinatisierbar genannt. Wesentliche Eigenschaft einer affin koordinatisierbaren Geometrie ist, daß sie hinreichend viele Dilatationen besitzt (s. [15], Satz 3.5). Die koordinatisierende Algebra zu einer affin koordinatisierbaren Geometrie erhält man, indem man die Dilatationen als fundamentale Operationen wählt; umgekehrt sind die Dilatationen der Kongruenzklassengeometrie einer Algebra **A** gerade die zulässigen Operationen auf **A**. Geometrisch sind daher solche Algebren von besonderem Interesse, in denen sich alle Dilatationen „algebraisch beschreiben" lassen, was etwa der Fall ist, wenn alle zulässigen Operationen schon algebraische Funktionen sind. Algebren mit dieser Eigenschaft werden affin vollständig genannt (Definition 5.4).

Diese Arbeit stellt einen ersten Versuch dar, affin vollständige Algebren zu untersuchen. Es ist für diese Untersuchungen zweckmäßig, einen Geometriebegriff zu wählen, der spezieller ist als der in Wille [15], aber die Kongruenzklassengeometrien noch umfaßt. Da der Geometriebegriff mit Hilfe von Äquivalenzrelationen eingeführt wird, werden im ersten Abschnitt einige grundlegende Eigenschaften von Äquivalenzrelationen untersucht. Die Untersuchungen sind rein mengentheoretischer Natur.

Im zweiten Kapitel werden Äquivalenzklassengeometrien definiert. Die Definition entspricht der Definition der Kongruenzklassengeometrie in Wille [15] mit dem Unterschied, daß an Stelle des Kongruenzrelationenverbandes einer Algebra ein induktives Hüllensystem von Äquivalenzrelationen zugrunde liegt. Ein einfaches Axiomensystem für Äquivalenzklassengeometrien liefert das Korollar 2.4. Satz 2.6 zeigt dann, daß Äquivalenzklassengeometrien spezielle Geometrien mit schwachem Parallelismus im Sinne von Wille [15] sind, und rechtfertigt damit den Namen Geometrie. Das dritte Kapitel behandelt den zugehörigen Morphismenbegriff, die in [15] eingeführten Geomorphismen. In der Kategorie der Geometrien mit ihren Geomorphismen existieren Bilder und Produkte, die in Satz 3.3 und Satz 3.8 beschrieben werden.

* Wesentliche Teile dieser Arbeit entstanden, als der Autor Stipendiat des Cusanuswerks war. Ich möchte dem Cusanuswerk an dieser Stelle für seine großzügige Förderung meinen Dank aussprechen.

Diese Ergebnisse werden im vierten Abschnitt speziell auf Kongruenzklassengeometrien angewandt. Es wird gezeigt, daß ein geomorphes Bild einer Kongruenzklassengeometrie $\Gamma(\mathbf{A})$ wieder eine Kongruenzklassengeometrie ist und von einem homomorphen Bild der zugehörigen Algebra $\mathbf{A}$ affin koordinatisiert wird. Für jede Familie von Algebren wird ein „Diagonalprodukt" definiert (Definition 4.4), das gerade das Produkt der zugehörigen Familie von Kongruenzklassengeometrien affin koordinatisiert (Satz 4.5). Es folgt daraus, daß jedes Produkt von Kongruenzklassengeometrien wieder eine Kongruenzklassengeometrie ist (Satz 4.6).

Im fünften Abschnitt werden die Ergebnisse der ersten vier Abschnitte auf affin vollständige Algebren angewandt. Das wichtigste Ergebnis ist der Satz 5.6, der besagt, daß endliche Diagonalprodukte affin vollständiger Algebren wieder affin vollständig sind. Damit hat man eine Methode, aus bereits bekannten affin vollständigen Algebren neue zu gewinnen.

Die Ergebnisse des fünften Kapitels werden im sechsten Abschnitt dazu benützt, Beispiele affin vollständiger Algebren anzugeben, wie z. B. funktional vollständige Algebren (6.2), Vektorräume (6.5), halbeinfache endliche Ringe (6.7) und endliche Post-Algebren (6.8) (also auch endliche Boolesche Algebren).

Herrn Prof. Dr. R. Wille danke ich sehr herzlich für seine zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit. Meinen Dank möchte ich auch Frau A. Mitschke, Herrn Dr. P. Burmeister und Herrn B. Ganter aussprechen, durch deren Diskussionsbeiträge diese Arbeit wesentlich gefördert wurde.

1. Äquivalenzrelationen

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß Abbildungen, die Äquivalenzrelation auf Äquivalenzrelation abbilden, eng mit der 3-Vertauschbarkeit von Äquivalenzrelationen zusammenhängen (1.2 (a)) und Abbildungen, die Äquivalenzklasse auf Äquivalenzklasse abbilden, mit der 2-Vertauschbarkeit (1.2 (b)). Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird auf Zerlegungen von Mengen in direkte Produkte eingegangen, insbesondere der von Płonka entdeckte Zusammenhang mit Diagonaloperationen näher untersucht (1.6) und auf Produkte mit beliebig vielen Faktoren erweitert.

1.1. *Definitionen und Bezeichnungen.* Zu einer Menge G bezeichnet $\mathscr{E}(G)$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf G. Für $R \subseteq G \times G$ und $x \in G$ definiert man $[x]R := \{y \mid (x, y) \in R\}$. Für $\Theta \in \mathscr{E}(G)$ ist dann $[x]\Theta$ die Äquivalenzklasse von Θ, die x enthält. $\mathrm{Id}_G := \{(x, x) \mid x \in G\}$ bzw. $\mathrm{O}_G := \{(x, y) \mid x, y \in G\}$ bezeichnen das kleinste bzw. größte Element von $\mathscr{E}(G)$ bezüglich der mengentheoretischen Inklusion.

Für eine Abbildung $\varphi: G \to G'$, $\Theta \in \mathscr{E}(G)$ und $\Theta' \in \mathscr{E}(G')$ wird definiert:

$$(\varphi \times \varphi)\,\Theta := \{(\varphi x, \varphi y) \mid (x, y) \in \Theta\}$$

und

$$(\varphi \times \varphi)^{-1}\,\Theta' := \{(x, y) \mid (\varphi x, \varphi y) \in \Theta'\}.$$

$(\varphi \times \varphi)\,\Theta$ is genau dann eine Äquivalenzrelation auf G', wenn φ surjektiv und $(\varphi \times \varphi)\,\Theta$ transitiv ist. Im allgemeinen ist jedoch $(\varphi \times \varphi)\,\Theta$ nicht transitiv.

$(\varphi\times\varphi)^{-1}\Theta'$ ist immer eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzrelation $\operatorname{Ker}\varphi:=(\varphi\times\varphi)^{-1}\operatorname{Id}_{G'}$ heißt der Kern von φ. Für Relationen R und S wird das Relationenprodukt $\circ$ definiert durch

$$R\circ S:=\{(x,z)\,|\,\exists\, y((x,y)\in R\wedge(y,z)\in S)\}.$$

1.2. Hilfssatz. *Für eine surjektive Abbildung φ: $G\to G'$ und $\Theta\in\mathscr{E}(G)$ gilt:*

(a) $(\varphi\times\varphi)\,\Theta\in\mathscr{E}(G')\Leftrightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\subseteq\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi$,

(b) $\varphi[x]\,\Theta=[\varphi x]\,(\varphi\times\varphi)\,\Theta\Leftrightarrow\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta=\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi$.

Beweis. (a) $(\varphi\times\varphi)\,\Theta\in\mathscr{E}(G')\Leftrightarrow(\varphi\times\varphi)\,\Theta$ transitiv

$$\Leftrightarrow\forall(x,y),(u,v)\in\Theta\,(\varphi y=\varphi u\Rightarrow\exists(\bar{x},\bar{v})\in\Theta\,(\varphi x=\varphi\bar{x}\wedge\varphi\bar{v}=\varphi v))$$

$$\Leftrightarrow\forall(x,v)\in\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\,((x,v)\in\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi)$$

$$\Leftrightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\subseteq\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi,$$

(b)
$$\begin{aligned}\varphi y\in\varphi[x]\,\Theta&\Leftrightarrow\exists z((x,z)\in\Theta\wedge\varphi z=\varphi y)\\&\Leftrightarrow(x,y)\in\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi y\in\varphi[x]\,(\varphi\times\varphi)\,\Theta&\Leftrightarrow(\varphi x,\varphi y)\in(\varphi\times\varphi)\,\Theta\\&\Leftrightarrow\exists(\bar{x},\bar{y})\in\Theta\,(\varphi x=\varphi\bar{x}\wedge\varphi\bar{y}=\varphi y)\\&\Leftrightarrow(x,y)\in\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi.\end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen folgt:

$$\varphi[x]\,\Theta=[\varphi x]\,(\varphi\times\varphi)\,\Theta\Leftrightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi.$$

Da Θ und $\operatorname{Ker}\varphi$ Äquivalenzrelationen sind, gilt

$$\begin{aligned}\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi&\Rightarrow\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\subseteq\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi,\\&\quad\text{da }\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\subseteq\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\\&\Rightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=(\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta)^{-1}\subseteq(\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi)^{-1}\\&\quad=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\\&\Rightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta=\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi\Rightarrow\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi.$$

Es folgt also

$$\varphi[x]\,\Theta=[\varphi x]\,(\varphi\times\varphi)\,\Theta\Leftrightarrow\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta=\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi.$$

Wenn $\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta=\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi$ gilt, so folgt nach (a), daß $(\varphi\times\varphi)\,\Theta$ eine Äquivalenzrelation ist, also bildet φ Äquivalenzklassen auf Äquivalenzklassen ab. Da für $\Theta\supseteq\operatorname{Ker}\varphi$ stets $\Theta\circ\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\varphi\circ\Theta$ gilt, gilt für solche Θ stets $(\varphi\times\varphi)\,\Theta\in\mathscr{E}(G')$ und $\varphi[x]\,\Theta=[\varphi x]\,(\varphi\times\varphi)\,\Theta$.

1.3. Hilfssatz. *Für eine Abbildung φ: $G\to G'$ und $\Theta'\in\mathscr{E}(G')$ gilt*

$$[x]\,(\varphi\times\varphi)^{-1}\,\Theta'=\varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta'.$$

Beweis. $y \in [x](\varphi \times \varphi)^{-1}\Theta' \Leftrightarrow (x, y) \in (\varphi \times \varphi)^{-1}\Theta'$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\varphi x, \varphi y) \in \Theta' \\ &\Leftrightarrow \varphi y \in [\varphi x]\,\Theta' \\ &\Leftrightarrow y \in \varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta'. \end{aligned}$$

In dieser Arbeit spielen Systeme von Äquivalenzrelationen, die eine Zerlegung der zugrundeliegenden Menge in ein Produkt definieren, eine entscheidende Rolle. Es werden daher einige aus der Literatur bekannte Sätze zitiert und die für diese Arbeit wichtigen Aspekte herausgearbeitet. Eine Charakterisierung der Produkte durch die Kerne ihrer Projektionen findet man für den Fall endlich vieler Faktoren in Birkhoff [2] und Grätzer [4] und für unendlich viele Faktoren in Hashimoto [5] und Wenzel [14]. Eine andere Charakterisierung der Produkte durch Diagonaloperationen stammt von Płonka, der in [10] und [11] beweist, daß die Diagonaloperationen auf einer Menge G eineindeutig den Zerlegungen von G in ein nichttriviales Produkt mit endlich vielen Faktoren entsprechen. Dabei heißt ein Produkt nichttrivial, wenn kein Faktor nur ein Element besitzt.

1.4. Satz (Birkhoff). *Für Äquivalenzrelationen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ auf G sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ G &\to \mathop{\times}_{i=1}^{n} G/\Theta_i \\ x &\mapsto ([x]\,\Theta_1, \ldots, [x]\,\Theta_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv, d.h. G ist das Produkt der G/Θ_i $(i=1, \ldots, n)$ und die Θ_i sind die Kerne der Projektionen.

(2) $(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ *bildet eine duale Basis, d.h. $\Theta_1 \cap \cdots \cap \Theta_n = \mathrm{Id}_G$ und für $i=1, \ldots, n$ gilt $\Theta_i \circ \bigcap_{j \neq i} \Theta_j = O_G$.*

1.5. Definition. Eine n-stellige Operation d auf der Menge G $(n \geqq 2)$ heißt *Diagonaloperation*, wenn gilt

(D0) d ist wesentlich, d.h. d hängt von allen n Stellen ab.

(D1) $d(x, \ldots, x) = x$.

(D2) $d\big(d(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, d(x_{n1}, \ldots, x_{nn})\big) = d(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn})$.

1.6. Satz (Płonka). *Für jede Menge G gilt: Die Abbildung K, die jeder n-stelligen Diagonaloperation d das n-Tupel $K(d) := (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ zuordnet, wo $\Theta_i := \{(x, y) | x = d(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x), y$ an der i-ten Stelle$\}$ definiert ist, ist eine bijektive Abbildung von den Diagonaloperationen auf die dualen Basen von G, die Id_G nicht enthalten. (Nach* 1.4 *entsprechen diese dualen Basen genau den Zerlegungen von G in ein nichttriviales Produkt.) Für die Projektionen $p_1, \ldots, p_n$ der zugehörigen Produktzerlegung von G gilt $p_i\, d(x_1, \ldots, x_n) = p_i\, x_i$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Die Elemente von $K(d)$ werden die *Kerne von d* genannt.

1.7. Definition. Sei G das Produkt der Mengen G_i mit den Projektionen $p_i\colon G \to G_i$ $(i \in I)$.

Für Äquivalenzrelationen Θ_i auf G_i $(i \in I)$ definiert man durch

$$\mathop{\times}_{i\in I} \Theta_i := \{(x, y) \mid \forall i \in I((p_i x, p_i y) \in \Theta_i)\}$$

eine Äquivalenzrelation auf G. Für k-stellige Operationen f_i auf G_i $(i \in I)$ definiert man durch

$$f = \mathop{\times}_{i\in I} f_i \Leftrightarrow \forall x_1, \ldots, x_k \in G \,\forall i \in I\big(p_i f(x_1, \ldots, x_k) = f_i(p_i x_1, \ldots, p_i x_k)\big)$$

eine k-stellige Operation auf G.

1.8. *Folgerung.* Sei G das Produkt der Mengen G_i mit den Projektionen $p_i\colon G \to G_i$ $(i \in I)$. Dann gilt:

(a) Für $\Theta_i \in \mathscr{E}(G_i)$ $(i \in I)$ und $\Theta = \mathop{\times}_{i\in I} \Theta_i$ ist

(a 1) $\Theta_i = (p_i \times p_i)\,\Theta$,

(a 2) $\forall x \in G\big([x]\,\Theta = \mathop{\times}_{i\in I} [p_i x]\,\Theta_i\big)$.

(b) Für $\Phi \in \mathscr{E}(G)$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

(b 1) $\forall i \in I \,\exists \Phi_i \in \mathscr{E}(G_i)\big(\Phi = \mathop{\times}_{i\in I} \Phi_i\big)$,

(b 2) $\forall i \in I$ $(\Phi \circ \operatorname{Ker} p_i = \operatorname{Ker} p_i \circ \Phi)$ und $\Phi = \bigcap_{i\in I} \Phi \circ \operatorname{Ker} p_i$.

Beweis. (a) läßt sich unmittelbar aus den Definitionen ableiten.

(b 1)$\Rightarrow$(b 2): $[p_i x]\,(p_i \times p_i)\,\Phi = [p_i x]\,\Phi_i$, wegen (b 1) und (a 1)
$= p_i [x]\,\Phi$, wegen (a 2).

Daraus folgt nach Hilfssatz 1.2 (b) $\Phi \circ \operatorname{Ker} p_i = \operatorname{Ker} p_i \circ \Phi$. $\Phi \subseteq \bigcap_{i\in I} \Phi \circ \operatorname{Ker} p_i$ folgt unmittelbar aus $\Phi \subseteq \Phi \circ \operatorname{Ker} p_i$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \bigcap_{i\in I} \Phi \circ \operatorname{Ker} p_i &\Rightarrow \forall i \in I \,\exists z_i \in G\big((x, z_i) \in \Phi \wedge p_i z_i = p_i y\big)\\ &\Rightarrow \forall i \in I\big((p_i x, p_i y) \in (p_i \times p_i)\,\Phi\big)\\ &\Rightarrow (x, y) \in \Phi, \quad \text{wegen (b 1)}.\end{aligned}$$

(b 2)$\Rightarrow$(b 1): Aus $\Phi \circ \operatorname{Ker} p_i = \operatorname{Ker} p_i \circ \Phi$ folgt nach Hilfssatz 1.2 $\Phi_i := (p_i \times p_i)\,\Phi \in \mathscr{E}(G_i)$ und $[p_i x]\,\Phi_i = p_i [x]\,\Phi$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \Phi &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap_{i\in I} \Phi \circ \operatorname{Ker} p_i, \quad \text{wegen (b 2)}\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \,\exists z_i \in G\big((x, z_i) \in \Phi \wedge p_i z_i = p_i y\big)\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I\,(p_i y \in p_i [x]\,\Phi)\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I\,(p_i y \in [p_i x]\,\Phi_i)\\ &\Leftrightarrow \forall i \in I\big((p_i x, p_i y) \in \Phi_i\big)\\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \mathop{\times}_{i\in I} \Phi_i.\end{aligned}$$

1.9. Hilfssatz. *Ist d eine Diagonaloperation auf G mit den Kernen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ und ist $\Phi \in \mathscr{E}(G)$, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *Φ ist verträglich mit d, d.h. für $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \Phi$ gilt auch*

$$\big(d(x_1, \ldots, x_n), d(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Phi .$$

(2) $\Phi = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i$ *und für* $i = 1, \ldots, n$ *gilt* $\Phi \circ \Theta_i = \Theta_i \circ \Phi$.

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2):

$$\begin{aligned}(x, y) \in \Phi \circ \Theta_i &\Rightarrow \exists z\big((x, z) \in \Phi \wedge (z, y) \in \Theta_i\big)\\ &\Rightarrow \exists z\big((x, z) \in \Phi \wedge y = d(y, \ldots, y, z, y, \ldots, y)\big)\\ &\Rightarrow \big(d(y, \ldots, y, x, y, \ldots, y), y\big) \in \Phi\\ &\qquad \wedge\ d\big(x, \ldots, x, d(y, \ldots, y, x, y, \ldots, y), x, \ldots, x\big) = x\\ &\Rightarrow (x, y) \in \Theta_i \circ \Phi .\end{aligned}$$

Es folgt $\Phi \circ \Theta_i \subseteq \Theta_i \circ \Phi$ und daraus, wie in 1.2(b), $\Phi \circ \Theta_i = \Theta_i \circ \Phi$.

$$\begin{aligned}(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i &\Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \exists z_i\big((x, z_i) \in \Phi \wedge (z_i, y) \in \Theta_i\big)\\ &\Rightarrow \big(x, d(z_1, \ldots, z_n)\big) \in \Phi \wedge p_i\, d(z_1, \ldots, z_n) = p_i\, z_i = p_i\, y\\ &\Rightarrow d(z_1, \ldots, z_n) = y \wedge (x, y) \in \Phi .\end{aligned}$$

Es gilt also $\bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i \subseteq \Phi$. Da für alle $i = 1, \ldots, n$ stets $\Phi \subseteq \Phi \circ \Theta_i$ gilt, folgt daraus $\bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i = \Phi$.

(2)$\Rightarrow$(1): Ist $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \Phi$, dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$\big(d(x_1, \ldots, x_n), x_i\big) \in \Theta_i, \qquad (x_i, y_i) \in \Phi \quad \text{und} \quad \big(y_i, d(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Theta_i .$$

Daraus folgt

$$\big(d(x_1, \ldots, x_n), d(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Theta_i \circ \Phi \circ \Theta_i = \Phi \circ \Theta_i ,$$

was

$$\big(d(x_1, \ldots, x_n), d(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i = \Phi$$

zur Folge hat.

1.10. Hilfssatz. *Sei G das Produkt der G_i mit den Projektionen p_i: $G \to G_i$ und $\Theta_i = \operatorname{Ker} p_i$ $(i \in I)$. Für verschiedene $i_1, \ldots, i_n \in I$ wird die $n+1$-stellige Operation $d_{i_1 \ldots i_n}$ auf G definiert durch*

$$p_j\, d_{i_1 \ldots i_n}(x_0, \ldots, x_n) := \begin{cases} p_j\, x_0 & \textit{falls } j \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\\ p_j\, x_k & \textit{falls } j = i_k \quad \textit{und} \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $d_{i_1 \dots i_n}$ *ist eine Diagonaloperation mit den Kernen*

$$\Theta_{i_1}, \dots, \Theta_{i_n} \quad \text{und} \quad \bigcap_{j \in I \setminus \{i_1, \dots, i_n\}} \Theta_j.$$

(b) *Für alle* $n \geqq 2$ *gilt*

$$d_{i_1 \dots i_n}(x_0, \dots, x_n) = d_{i_n}(d_{i_1 \dots i_{n-1}}(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n),$$

d.h. alle $d_{i_1 \dots i_n}$ *lassen sich durch ineinander Einsetzen aus den* d_i $(i \in I)$ *gewinnen.*

Beweis. (a) Sei $J = I \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$, $G_J := \bigtimes_{j \in J} G_j$ und $d = d_{i_1 \dots i_n}$. G ist das Produkt der $G_{i_1}, \dots, G_{i_n}, G_J$ mit den Projektionen p_{i_k}: $G \to G_{i_k}$ $(k = 1, \dots, n)$ und p_J: $G \to G_J$, die durch $p_J x := (p_j x \mid j \in J)$ definiert ist. Für $k = 1, \dots, n$ gilt $p_{i_k} d(x_0, \dots, x_n) = p_{i_k} x_k$, und für p_J gilt

$$p_J d(x_0, \dots, x_n) = (p_j d(x_0, \dots, x_n) \mid j \in J) = (p_j x_0 \mid j \in J) = p_J x_0.$$

Nach dem Satz von Płonka (1.6) ist d die zu diesem Produkt gehörige Diagonaloperation und besitzt die Kerne

$$\Theta_{i_1}, \dots, \Theta_{i_n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Ker} p_J = \bigcap_{j \in J} \Theta_j.$$

(b) folgt unmittelbar aus der Definition.

1.11. Hilfssatz. *Ist* G *das Produkt der* G_i *mit den Projektionen* p_i: $G \to G_i$ *und* $\Theta_i = \operatorname{Ker} p_i$ $(i \in I)$, *dann sind für jede* k*-stellige Operation* f *auf* G *folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) f *ist verträglich mit allen* Θ_i $(i \in I)$.

(2) *Für alle* $i \in I$ *gibt es eine* k*-stellige Operation* f_i *auf* G_i *mit* $f = \bigtimes_{i \in I} f_i$.

(3) *Für verschiedene* $i_1, \dots, i_k \in I$, $x_{10}, \dots, x_{kn} \in G$ *und* $d = d_{i_1 \dots i_n}$ *gilt*

$$f(d(x_{10}, \dots, x_{1n}), \dots, d(x_{k0}, \dots, x_{kn})) = d(f(x_{10}, \dots, x_{k0}), \dots, f(x_{1n}, \dots, x_{kn})).$$

(4) *Für* $i \in I$ *und* $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in G$ *gilt*

$$f(d_i(x_1, y_1), \dots, d_i(x_k, y_k)) = d_i(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)).$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Da f mit Θ_i verträglich ist, wird durch $f_i(p_i x_1, \dots, p_i x_k) := p_i f(x_1, \dots, x_k)$ eine k-stellige Operation f_i auf G_i definiert und nach Definition 1.7 gilt $f = \bigtimes_{i \in I} f_i$.

(2) $\Rightarrow$ (3): J, G_J und p_J seien definiert wie in 1.10. Setzt man $p_{i_0} := p_J$, so gilt für $r \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} p_{i_r} f(d(x_{10}, \dots, x_{1n}), \dots, d(x_{k0}, \dots, x_{kn})) &= f_{i_r}(p_{i_r} x_{1r}, \dots, p_{i_r} x_{kr}) \\ &= p_{i_r} f(x_{1r}, \dots, x_{kr}) \\ &= p_{i_r} d(f(x_{10}, \dots, x_{k0}), \dots, f(x_{1n}, \dots, x_{kn})). \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): (4) ist eine Abschwächung von (3).

(4) $\Rightarrow$ (1): Sei $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Theta_i$ für ein $i \in I$. Dann gilt $d_i(x_r, y_r) = d_i(x_r, x_r) = x_r$ für $r \in \{1, \ldots, k\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_i\big(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)\big) &= f\big(d_i(x_1, y_1), \ldots, d_i(x_n, y_n)\big) \\ &= f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

und das hat $\big(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Theta_i$ zur Folge.

2. Äquivalenzklassengeometrien

Wille zeigt in [15], daß die Kongruenzrelationen auf einer Algebra eine Geometrie auf der Grundmenge der Algebra beschreiben, die sog. Kongruenzklassengeometrie der Algebra. Betrachtet man diesen Beweis in [15], so zeigt sich, daß von den Eigenschaften der Kongruenzrelationen lediglich benützt wurde, daß die Kongruenzrelationen ein induktives (algebraisches) Hüllensystem von Äquivalenzrelationen auf einer Menge A bilden, das Id_A enthält. Jedes induktive Hüllensystem von Äquivalenzrelationen auf einer Menge A, das Id_A enthält, beschreibt also ganz entsprechend eine Geometrie auf der Menge A, die Äquivalenzklassengeometrie auf A genannt wird. Wenn Verwechselungen ausgeschlossen sind, wird auch kurz Geometrie geschrieben. Ein Satz von Burmeister zeigt, daß die Äquivalenzklassengeometrien genau die Kongruenzklassengeometrien endlichstelliger partieller Algebren sind.

2.1. Definition. Sei $\mathscr{L}$ eine Menge von Äquivalenzrelationen auf G. $\mathscr{L}$ heißt *Hüllensystem*, wenn für alle $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}$ stets $\bigcap \mathscr{B} \in \mathscr{L}$ gilt. $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}$ heißt *gerichtet*, wenn es zu $\Theta, \Phi \in \mathscr{B}$ stets ein $\Psi \in \mathscr{B}$ gibt, das $\Theta \subseteq \Psi$ und $\Phi \subseteq \Psi$ erfüllt, und $\mathscr{B} \neq \emptyset$ ist. $\mathscr{L}$ heißt *induktiv*, wenn für alle gerichteten $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{L}$ stets $\bigcup \mathscr{B} \in \mathscr{L}$ gilt. Für ein Hüllensystem $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}(G)$ und $M \subseteq G$ gibt es stets die kleinste Äquivalenzrelation in $\mathscr{L}$, für die M ganz in einer Klasse liegt. Sie wird mit $\Theta^{\mathscr{L}}(M)$ bezeichnet und es gilt $\Theta^{\mathscr{L}}(M) = \bigcap \{\Theta \in \mathscr{L} \mid M \times M \subseteq \Theta\}$.

Man definiert einen Operator $\Pi_{\mathscr{L}}$: $G \times \mathfrak{P}(G) \to \mathfrak{P}(G)$ $\big(\mathfrak{P}(G) = \{M \mid M \subseteq G\}\big)$ durch $\Pi_{\mathscr{L}}(x|M) := [x]\, \Theta^{\mathscr{L}}(M)$. Für ein induktives Hüllensystem $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}(G)$ mit $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{L}$ heißt das Paar $(G, \Pi_{\mathscr{L}})$ *Äquivalenzklassengeometrie* auf G und wird mit $\mathscr{G}(\mathscr{L})$ bezeichnet. Die Elemente $x \in G$ heißen *Punkte* der Geometrie $\mathscr{G}(\mathscr{L})$ und $\Pi_{\mathscr{L}}(x|M)$ heißt *Parallele durch x zu M*. Für $\Pi_{\mathscr{L}}(x|\{y_1, \ldots, y_n\})$ schreibt man kurz $\Pi_{\mathscr{L}}(x|y_1, \ldots, y_n)$.

Bevor der Name Geometrie in Satz 2.5 gerechtfertigt wird, sollen die Eigenschaften des Operators $\Pi_{\mathscr{L}}$ bei einer Äquivalenzklassengeometrie untersucht werden. Diese Untersuchung führt dann zu einer Axiomatisierung der Äquivalenzklassengeometrien in Satz 2.4.

2.2. Hilfssatz. *Sei $\Gamma = (G, \Pi)$ eine Äquivalenzklassengeometrie ($\Pi = \Pi_{\mathscr{L}}$). Dann gilt für alle $x, y \in G$ und $M, N \subseteq G$ stets*

(Π 1) $\Pi(x|\emptyset) = \{x\}$,

(Π 2) $\Pi(x|\Pi(y|M)) \subseteq \Pi(x|M)$,

(Π 3) $y \in \Pi(x|x, y)$,

$(\Pi\,4)$ $\Pi(x|M)=\bigcup\{\Pi(x|E)|E\subseteq M \textit{ endlich}\}$,

$(\Pi\,5)$ $M\subseteq N\Rightarrow \Pi(x|M)\subseteq\Pi(x|N)$,

$(\Pi\,6)$ $x\in M\Rightarrow M\subseteq\Pi(x|M)$,

$(\Pi\,7)$ $x\in\Pi(x|M)$,

$(\Pi\,8)$ $\Pi(x|y)=\{x\}$,

$(\Pi\,9)$ $x\in\Pi(y|M)\Leftrightarrow\Pi(x|M)=\Pi(y|M)$,

$(\Pi\,10)$ $\Pi(x|\Pi(x|M))=\Pi(x|M)$.

Für jeden Operator Π: $G\times\mathfrak{P}(G)\to\mathfrak{P}(G)$ folgen $(\Pi\,5)-(\Pi\,10)$ schon aus $(\Pi\,1)-(\Pi\,4)$.

Beweis. $(\Pi\,1)$: $\mathrm{Id}_G\in\mathscr{L}\Rightarrow\Theta^{\mathscr{L}}(\emptyset)=\mathrm{Id}_G\Rightarrow\Pi(x|\emptyset)=[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(\emptyset)=[x]\;\mathrm{Id}_G=\{x\}$.

$(\Pi\,2)$: $\Theta^{\mathscr{L}}(M)$ hat $\Pi(y|M)$ als Äquivalenzklasse. $\Theta^{\mathscr{L}}(\Pi(y|M))$ ist die kleinste Relation in $\mathscr{L}$ mit dieser Eigenschaft; also gilt $\Theta^{\mathscr{L}}(\Pi(y|M))\subseteq\Theta^{\mathscr{L}}(M)$. Für $x\in G$ folgt daher

$$\Pi(x|\Pi(y|M))=[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(\Pi(y|M))\subseteq[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(M)=\Pi(x|M).$$

$(\Pi\,3)$: $y\in[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(x,y)=\Pi(x|x,y)$.

$(\Pi\,4)$: $\{\Theta^{\mathscr{L}}(E)|E\subseteq M$ endlich$\}$ ist gerichtet; also liegt die Vereinigungsrelation in $\mathscr{L}$, da $\mathscr{L}$ induktiv ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\Theta^{\mathscr{L}}(M)&=\bigcup\{\Theta^{\mathscr{L}}(E)|E\subseteq M \text{ endlich}\}.\\ \Pi(x|M)&=[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(M)\\ &=[x]\bigcup\{\Theta^{\mathscr{L}}(E)|E\subseteq M \text{ endlich}\}\\ &=\bigcup\{[x]\;\Theta^{\mathscr{L}}(E)|E\subseteq M \text{ endlich}\}\\ &=\bigcup\{\Pi(x|E)|E\subseteq M \text{ endlich}\}.\end{aligned}$$

$(\Pi\,5)$ folgt unmittelbar aus $(\Pi\,4)$.

$(\Pi\,6)$: Sei $x, y\in M$. Wegen $(\Pi\,3)$ gilt $y\in\Pi(x|x,y)$, was nach $(\Pi\,5)$ $y\in\Pi(x|M)$ zur Folge hat. Es folgt also $M\subseteq\Pi(x|M)$.

$(\Pi\,7)$ folgt aus $(\Pi\,1)$ und $(\Pi\,5)$, wenn man $\emptyset\subseteq M$ beachtet.

$(\Pi\,8)$: Nach $(\Pi\,7)$ gilt $x\in\Pi(x|y)$, also folgt wegen $(\Pi\,1)$ und $(\Pi\,2)$

$$\{x\}\subseteq\Pi(x|y)=\Pi(x|\Pi(y|\emptyset))\subseteq\Pi(x|\emptyset)=\{x\}.$$

$(\Pi\,9)$: Aus $x\in\Pi(y|M)$ folgt wegen $(\Pi\,6)$ $\Pi(y|M)\subseteq\Pi(x|\Pi(y|M))$ und das ergibt mit $(\Pi\,2)$ auch $\Pi(y|M)\subseteq\Pi(x|M)$. Nach $(\Pi\,7)$ gilt $y\in\Pi(y|M)$ und daher $y\in\Pi(x|M)$. Aus $y\in\Pi(x|M)$ folgt mit dem gleichen Schluß auch $\Pi(x|M)\subseteq\Pi(y|M)$. Es gilt also $x\in\Pi(y|M)\Rightarrow\Pi(x|M)=\Pi(y|M)$. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus $(\Pi\,7)$.

$(\Pi\,10)$ folgt aus $(\Pi\,7)$, $(\Pi\,6)$ und $(\Pi\,2)$:

$$\Pi(x|M)\subseteq\Pi(x|\Pi(x|M))\subseteq\Pi(x|M).$$

2.3. Satz. *Sei Π: $G \times \mathfrak{P}(G) \to \mathfrak{P}(G)$ ein Operator, der $(\Pi 1)-(\Pi 4)$ erfüllt. Für $\Gamma = (G, \Pi)$ sei*

$$\mathscr{V}(\Gamma) := \{\Theta \in \mathscr{E}(G) \mid \forall x, y \in G (\Pi(x \mid [y]\, \Theta) \subseteq [x]\, \Theta)\}.$$

Dann ist $\mathscr{V}(\Gamma) \subseteq \mathscr{E}(G)$ ein induktives Hüllensystem mit $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{V}(\Gamma)$, und es gilt $\Gamma = \mathscr{G}(\mathscr{V}(\Gamma))$. Ist $\mathscr{L}$ ein induktives Hüllensystem, $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}(G)$ und $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{L}$, dann gilt $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}))$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2.2 erfüllt Π mit $(\Pi 1)-(\Pi 4)$ auch $(\Pi 5)-(\Pi 10)$. $\Pi(M) := \{(x, y) \mid y \in \Pi(x \mid M)\}$ ist nach $(\Pi 9)$ eine Äquivalenzrelation, die wegen $(\Pi 2)$ auch in $\mathscr{V}(\Gamma)$ liegt, denn es gilt $\Pi(x \mid M) = [x]\, \Pi(M)$. Nach $(\Pi 1)$ ist $\Pi(\emptyset) = \mathrm{Id}_G$, also gilt $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{V}(\Gamma)$. Ist $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{V}(\Gamma)$ und $\Theta = \bigcap \mathscr{B}$, so ist Θ eine Äquivalenzrelation, da $\mathscr{E}(G)$ ein Hüllensystem ist. Wegen $(\Pi 5)$ gilt für alle $\Phi \in \mathscr{B}$

$$\Pi(y \mid [x]\, \Theta) \subseteq \Pi(y \mid [x]\, \Phi) \subseteq [y]\, \Phi;$$

damit folgt

$$\Pi(y \mid [x]\, \Theta) \subseteq \bigcap_{\Phi \in \mathscr{B}} [y]\, \Phi = [y] \bigcap \mathscr{B} = [y]\, \Theta,$$

also gilt $\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$. Damit ist $\mathscr{V}(\Gamma)$ als Hüllensystem nachgewiesen.

Sei $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{V}(\Gamma)$ gerichtet und $\Theta = \bigcup \mathscr{B}$. Dann ist Θ eine Äquivalenzrelation, da $\mathscr{E}(G)$ induktiv ist. Zu $z \in \Pi(x \mid [y]\, \Theta)$ gibt es wegen $(\Pi 4)$ $y_1, \ldots, y_n \in [y]\, \Theta$ mit $z \in \Pi(x \mid y_1, \ldots, y_n)$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $\Phi_i \in \mathscr{B}$ mit $y_i \in [y]\, \Phi_i$. Da $\mathscr{B}$ gerichtet ist, gibt es ein $\Phi \in \mathscr{B}$ mit $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \subseteq \Phi$. Also gilt $y_1, \ldots, y_n \in [y]\, \Phi$. Da $\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)$ ist, folgt daraus

$$z \in \Pi(x \mid y_1, \ldots, y_n) \subseteq \Pi(x \mid [y]\, \Phi) \subseteq [x]\, \Phi \subseteq [x]\, \Theta.$$

Damit ist $\Pi(x \mid [y]\, \Theta) \subseteq [x]\, \Theta$ gezeigt, was $\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$ zur Folge hat. Das weist $\mathscr{V}(\Gamma)$ als induktives Hüllensystem mit $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{V}(\Gamma)$ aus. Es gibt also die Äquivalenzklassengeometrie $\mathscr{G}(\mathscr{V}(\Gamma))$. Um $\Gamma = \mathscr{G}(\mathscr{V}(\Gamma))$ zu beweisen, muß $\Pi = \Pi_{\mathscr{V}(\Gamma)}$ gezeigt werden oder gleichwertig dazu $\Pi(M) = \Theta^{\mathscr{V}(\Gamma)}(M)$ für alle $M \subseteq G$. Für alle $M \subseteq G$ wurde $\Pi(M) \in \mathscr{V}(\Gamma)$ schon gezeigt. Da M ganz in einer Klasse von $\Pi(M)$ liegt $(\Pi 6)$, gilt $\Theta^{\mathscr{V}(\Gamma)}(M) \subseteq \Pi(M)$. $\Pi(\emptyset) = \mathrm{Id}_G = \Theta^{\mathscr{V}(\Gamma)}(\emptyset)$, da $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{V}(\Gamma)$ ist. Sei nun $M \neq \emptyset$ und $x \in M$. Für alle $\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$ mit $M \subseteq [x]\, \Theta$ und alle $y \in G$ gilt $\Pi(y \mid M) \subseteq \Pi(y \mid [x]\, \Theta) \subseteq [y]\, \Theta$ und daher folgt $\Pi(M) \subseteq \Theta$. Das ergibt $\Pi(M) \subseteq \Theta^{\mathscr{V}(\Gamma)}(M)$, also $\Pi(M) = \Theta^{\mathscr{V}(\Gamma)}(M)$. Ist $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}(G)$ ein induktives Hüllensystem mit $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{L}$, dann erfüllt der Operator $\Pi_{\mathscr{L}}$ nach Hilfssatz 2.2 $(\Pi 1)-(\Pi 4)$.

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L})) &= \{\Phi \in \mathscr{E}(G) \mid \forall x, y \in G (\Pi(x \mid [y]\, \Phi) \subseteq [x]\, \Phi)\} \\ &= \{\Phi \in \mathscr{E}(G) \mid \forall y \in G (\Theta^{\mathscr{L}}([y]\, \Phi) \subseteq \Phi)\}. \end{aligned}$$

Da für alle $\Phi \in \mathscr{L}$ stets $\Theta^{\mathscr{L}}([y]\, \Phi) \subseteq \Phi$ gilt, folgt $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}))$. Im allgemeinen gilt nicht $\mathscr{L} = \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}))$. Als Gegenbeispiel wähle man etwa

$$\mathscr{L} = \{\mathrm{Id}_G \cup (M \times M) \mid M \subseteq G\}.$$

Dann ist $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{E}(G)$ ein induktives Hüllensystem mit $\mathrm{Id}_G \in \mathscr{L}$. Es gilt aber $\mathscr{L} \neq \mathscr{E}(G) = \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}))$.

2.4. Korollar. *Eine Menge G mit einem Operator* Π: $G\times\mathfrak{P}(G)\to\mathfrak{P}(G)$ *ist genau dann eine Äquivalenzklassengeometrie, wenn* Π *die Axiome* $(\Pi 1)-(\Pi 4)$ *erfüllt.*

2.5. Satz (Burmeister). *Die Äquivalenzklassengeometrien sind genau die Kongruenzklassengeometrien endlichstelliger, partieller Algebren.*

Da dieses Ergebnis hier nicht gebraucht wird, soll der Beweis nur angedeutet werden. Für eine endlichstellige, partielle Algebra $\mathbf{A}=(A,F)$ ist der Kongruenzrelationenverband $\mathfrak{C}(\mathbf{A})\subseteq\mathscr{E}(A)$ ein induktives Hüllensystem mit $\mathrm{Id}_A\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})$, also ist $\Gamma(\mathbf{A})=\mathscr{G}(\mathfrak{C}(\mathbf{A}))$ eine Äquivalenzklassengeometrie. Die Umkehrung beweist man mit einer Verallgemeinerung eines Satzes von Lampe (vgl. [8], S. 60–61).

Der folgende Satz soll den Namen Geometrie für die hier definierten Äquivalenzklassengeometrien rechtfertigen.

2.6. Satz. *Jede Äquivalenzklassengeometrie ist eine Geometrie mit schwachem Parallelismus im Sinne von Wille* [15].

Beweis. Sei $\Gamma=(G,\Pi)$ eine Äquivalenzklassengeometrie. Der Operator $[\ ]$: $\mathfrak{P}(G)\to\mathfrak{P}(G)$, der jeder Teilmenge von G den von ihr erzeugten Teilraum der Geometrie Γ zuordnet, wird definiert:

$$[\emptyset]:=\emptyset \quad \text{und} \quad [M]:=\Pi(x|M) \qquad \text{für } x\in M, \text{ falls } M\neq\emptyset \text{ ist.}$$

Wegen $(\Pi 6)$ und $(\Pi 9)$ hängt diese Definition nicht von der Wahl von $x\in M$ ab. Im folgenden werden die Axiome (I)–(IV) aus Wille [15], S. 12 nachgeprüft.

(I) $(\Pi 6)\Rightarrow[M]\supseteq M$, $(\Pi 9)\Rightarrow[M]=[[M]]$.

(II) $[p]=\Pi(p|p)=\{p\}$ für alle $p\in G$ nach $(\Pi 8)$.

(III) $[\emptyset]=\emptyset$ nach Definition.

(IV) Spezialfall von $(\Pi 4)$.

$\mathfrak{B}:=\{[M]\,|\,M\subseteq G\wedge M\neq\emptyset\}$ bezeichnet die Menge der nichtleeren Teilräume von Γ. Auf $\mathfrak{B}$ wird ein schwacher Parallelismus Π erklärt durch: $R\Pi S:\Leftrightarrow S=\Pi(x|R)$ für ein (also alle) $x\in S$. Nun werden diese Axiome (1)–(4) aus Wille [15], S. 14–15 nachgeprüft.

(1) Wegen $(\Pi 10)$ gilt genau dann $R\in\mathfrak{B}$, wenn $R=\Pi(x|R)$ für ein $x\in R$ gilt. Also gilt stets $R\Pi R$.

(2) Für $R\Pi S$, $S\supseteq T$ und $T\Pi U$ hat man $x\in S$ und $y\in U$ mit $S=\Pi(x|R)$ und $U=\Pi(y|T)$. Sei $V:=\Pi(y|R)$. Wegen $(\Pi 10)$ gilt $V=\Pi(y|V)$ und daher $V\in\mathfrak{B}$ und $R\Pi V$. $U=\Pi(y|T)\subseteq\Pi(y|S)=\Pi(y|\Pi(x|R))\subseteq\Pi(y|R)=V$. Es gilt also auch $U\subseteq V$.

(3) $p\in S$, $R\Pi S\Rightarrow S=\Pi(p|R)\subseteq\Pi(p|R,p)=[R,p]$.

(4) Ist $R\in\mathfrak{B}$ und $p\in G$, dann ist wegen $(\Pi 10)$ auch $\Pi(p|R)\in\mathfrak{B}$. Nach der Definition von Π ist $\Pi(p|R)$ die einzige Parallele durch p zu R.

3. Bilder und Produkte von Geometrien

In diesem Paragraphen soll die Kategorie der Geometrien untersucht werden, insbesondere im Hinblick auf Bilder und Produkte. Die Objekte dieser Kategorie sind die Äquivalenzklassengeometrien, und die Morphismen sind die von Wille in [15] eingeführten Geomorphismen.

3.1. Definition. $\Gamma := (G, \Pi)$ und $\Gamma' := (G', \Pi')$ seien Äquivalenzklassengeometrien, und $\varphi\colon G \to G'$ sei eine Abbildung.

φ heißt *Geomorphismus*, wenn für $x \in G$ und $M \subseteq G$ stets $\varphi \Pi(x|M) \subseteq \Pi'(\varphi x | \varphi M)$ gilt.

φ heißt *starker Geomorphismus*, wenn für $x \in G$ und $M \subseteq G$ stets $\varphi \Pi(x|M) = \Pi'(\varphi x | \varphi M)$ gilt.

Wegen $(\Pi 4)$ kann man sich in der Definition auf endliche Teilmengen M von G beschränken.

Ist φ ein Geomorphismus, so schreibt man $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma'$.

Die *Kategorie* $\mathfrak{G}$ *der Geometrien* ist die Kategorie, die als Objektklasse $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) := \{\Gamma | \Gamma \text{ Äquivalenzklassengeometrie}\}$ und für $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$ als Morphismenmenge $\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma') := \{\varphi | \varphi\colon \Gamma \to \Gamma'\}$ besitzt.

Die Monomorphismen (Epimorphismen) in der Kategorie $\mathfrak{G}$ sind genau die injektiven (surjektiven) Geomorphismen. Die Isomorphismen in $\mathfrak{G}$ sind genau die bijektiven, starken (!) Geomorphismen. Die Kategorie $\mathfrak{G}$ ist also nicht ausgewogen (balanced) (ohne Beweis).

Der Begriff Geomorphismus, der oben mit Hilfe des Operators definiert wird, läßt sich auch mit Hilfe der Systeme von Äquivalenzrelationen, die die Geometrien beschreiben, charakterisieren.

3.2. Satz. *$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}(G)$ und $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{E}(G')$ seien induktive Hüllensysteme mit $\mathrm{Id}_G \in \mathcal{L}$ und $\mathrm{Id}_{G'} \in \mathcal{L}'$, und $\varphi\colon G \to G'$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *φ ist ein Geomorphismus von $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ in $\mathcal{G}(\mathcal{L}')$.*

(2) *$(\varphi \times \varphi)^{-1}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}'))$ in $\mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$.*

(3) *$(\varphi \times \varphi)^{-1}$ ist eine Abbildung von $\mathcal{L}'$ in $\mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Ist $\varphi\colon \mathcal{G}(\mathcal{L}) \to \mathcal{G}(\mathcal{L}')$ ein Geomorphismus und $\Theta' \in \mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$, so gilt für $x, y \in G$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{L}}(y|[x](\varphi \times \varphi)^{-1}\Theta') &= \Pi_{\mathcal{L}}(y|\varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta') \quad \text{(Hilfssatz 1.3)}\\
&\subseteq \varphi^{-1}\varphi \Pi_{\mathcal{L}}(y|\varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta')\\
&\subseteq \varphi^{-1}\Pi_{\mathcal{L}'}(\varphi y|\varphi\varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta') \quad (\varphi \text{ Geomorphismus})\\
&\subseteq \varphi^{-1}\Pi_{\mathcal{L}'}(\varphi y|[\varphi x]\,\Theta')\\
&\subseteq \varphi^{-1}[\varphi y]\,\Theta' \quad (\Theta' \in \mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}')))\\
&= [y](\varphi \times \varphi)^{-1}\Theta' \quad \text{(Hilfssatz 1.3)}.
\end{aligned}$$

Es folgt $(\varphi \times \varphi)^{-1}\Theta' \in \mathcal{V}(\mathcal{G}(\mathcal{L}))$.

(2) $\Rightarrow$ (3) folgt unmittelbar aus $\mathscr{L}' \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}'))$ (Satz 2.3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $(\varphi \times \varphi)^{-1}$ eine Abbildung von $\mathscr{L}'$ in $\mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L}))$. Für $N \subseteq G'$ gilt dann

$$(\varphi \times \varphi)^{-1}\,\Theta^{\mathscr{L}'}(N) \in \mathscr{V}(\mathscr{G}(\mathscr{L})) \quad \text{und} \quad (\varphi^{-1}N \times \varphi^{-1}N) \subseteq (\varphi \times \varphi)^{-1}\,\Theta^{\mathscr{L}'}(N).$$

Daraus folgt

$$\Theta^{\mathscr{L}}(\varphi^{-1}N) \subseteq (\varphi \times \varphi)^{-1}\,\Theta^{\mathscr{L}'}(N)\,(*).$$

Nun folgt für $x \in G$ und $M \subseteq G$

$$\begin{aligned}
\varphi\,\Pi_{\mathscr{L}}(x \mid M) &\subseteq \varphi\,\Pi_{\mathscr{L}}(x \mid \varphi^{-1}\varphi M)\\
&= \varphi\,[x]\,\Theta^{\mathscr{L}}(\varphi^{-1}\varphi M)\\
&\subseteq \varphi\,[x](\varphi \times \varphi)^{-1}\,\Theta^{\mathscr{L}'}(\varphi M) \qquad ((*) \text{ mit } N = \varphi M)\\
&= \varphi\,\varphi^{-1}[\varphi x]\,\Theta^{\mathscr{L}'}(\varphi M) \qquad (\text{Hilfssatz 1.3})\\
&\subseteq [\varphi x]\,\Theta^{\mathscr{L}'}(\varphi M)\\
&= \Pi_{\mathscr{L}'}(\varphi x \mid \varphi M).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß φ ein Geomorphismus ist.

Für Äquivalenzklassengeometrien gibt es einen „Geomorphiesatz“: Für $\Gamma \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$ besteht $\mathscr{V}(\Gamma)$ genau aus den Kernen von Geomorphismen.

Dazu betrachtet man folgende Konstruktion: Sei $\Gamma \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$, $\Gamma = (G, \Pi)$ und $\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)$. Man definiert p_Φ: $G \to G/\Phi$ durch $p_\Phi(x) := [x]\,\Phi$ und $[\Phi)_{\mathscr{V}(\Gamma)} := \{\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma) \mid \Phi \subseteq \Theta\}$. Nach Hilfssatz 1.2 ist dann

$$\mathscr{L}' := \{(p_\Phi \times p_\Phi)\,\Theta \mid \Theta \in [\Phi)_{\mathscr{V}(\Gamma)}\} \subseteq \mathscr{E}(G/\Phi).$$

$(p_\Phi \times p_\Phi)$: $[\Phi)_{\mathscr{V}(\Gamma)} \to \mathscr{L}'$ ist ein Isomorphismus; also ist $\mathscr{L}'$ ein induktives Hüllensystem und es gilt $\mathrm{Id}_{G/\Phi} = (p_\Phi \times p_\Phi)\,\Phi \in \mathscr{L}'$. Dann ist $\mathscr{G}(\mathscr{L}')$ eine Geometrie, und nach Satz 3.2 ist p_Φ ein Geomorphismus von Γ in $\mathscr{G}(\mathscr{L}')$. $\mathscr{G}(\mathscr{L}')$ wird mit Γ/Φ bezeichnet.

3.3. Satz (Geomorphiesatz). *Für $\Gamma \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$ gilt*

(a) *$\mathscr{V}(\Gamma)$ besteht genau aus den Kernen von Geomorphismen φ: $\Gamma \to \Gamma'$ mit $\Gamma' \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$.*

(b) *Zu $\Gamma' \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$ und $\varphi \in \mathscr{M}(\Gamma, \Gamma')$ gibt es genau einen Geomorphismus $\bar{\varphi} \in \mathscr{M}(\Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi), \Gamma')$, der das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{Ker}\,\varphi}"'] & & \Gamma' \\
& \Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt. $\bar{\varphi}$ ist injektiv (also ein Monomorphismus).

Beweis. (a) Ist φ: $\Gamma \to \Gamma' = (G', \Pi')$ ein Geomorphismus, so ist nach Satz 3.2 $\mathrm{Ker}\,\varphi = (\varphi \times \varphi)^{-1}\,\mathrm{Id}_{G'} \in \mathscr{V}(\Gamma)$.

Ist umgekehrt $\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)$, dann ist p_Φ: $\Gamma \to \Gamma/\Phi$ ein Geomorphismus mit dem Kern Φ.

(b) Seien $\Gamma = (G, \Pi)$ und $\Gamma' = (G', \Pi')$ Geometrien und sei φ: $\Gamma \to \Gamma'$ ein Geomorphismus. Dann gibt es genau eine Abbildung $\bar{\varphi}$: $G/\mathrm{Ker}\,\varphi \to G'$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{Ker}\,\varphi}"'] & & G' \\ & G/\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt. $\bar{\varphi}$ ist überdies injektiv.

Für $\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma')$ gilt $(\varphi \times \varphi)^{-1} \Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)$ (Satz 3.2) und $(\varphi \times \varphi)^{-1} \Phi \supseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Daraus folgt $(p_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \times p_{\mathrm{Ker}\,\varphi})(\varphi \times \varphi)^{-1} \Phi \in \mathscr{V}(\Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi)$. Wegen $(\bar{\varphi} \times \bar{\varphi})^{-1} = (p_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \times p_{\mathrm{Ker}\,\varphi})(\varphi \times \varphi)^{-1}$ ist $(\bar{\varphi} \times \bar{\varphi})^{-1}$ eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma')$ in $\mathscr{V}(\Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi)$; also ist $\bar{\varphi}$ auch ein Geomorphismus.

Satz 3.3(b) besagt, daß für jeden Geomorphismus φ: $\Gamma \to \Gamma'$ die Geometrie $\Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi$ mit dem Geomorphismus $p_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$: $\Gamma \to \Gamma/\mathrm{Ker}\,\varphi$ ein Bild von φ in der Kategorie $\mathfrak{G}$ ist. Deshalb wird für $\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)$ die Geometrie Γ/Φ ein *geomorphes Bild* von Γ genannt.

Ähnlich wie in Satz 3.2 die Geomorphismen beschrieben wurden, lassen sich auch die starken Geomorphismen charakterisieren.

3.4. Satz. *Seien $\Gamma = (G, \Pi)$ und $\Gamma' = (G', \Pi')$ Geometrien, und sei φ: $\Gamma \to \Gamma'$ ein surjektiver Geomorphismus. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *φ ist ein starker Geomorphismus.*

(2) *Für alle $\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$ gilt $\Theta \circ \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\varphi \circ \Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$, und $(\varphi \times \varphi)$ ist eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma)$ in $\mathscr{V}(\Gamma')$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Für $\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \Theta \circ \mathrm{Ker}\,\varphi &\Leftrightarrow \exists\, z\big((x, z) \in \Theta \wedge (z, y) \in \mathrm{Ker}\,\varphi\big) \\
&\Leftrightarrow \exists\, z(z \in [x]\,\Theta \wedge \varphi z = \varphi y) \\
&\Leftrightarrow \varphi y \in \varphi [x]\,\Theta \\
&\Leftrightarrow \varphi y \in \varphi \Pi(x \mid [x]\,\Theta) \qquad \big(\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)\big) \\
&\Leftrightarrow \varphi y \in \Pi'(\varphi x \mid \varphi [x]\,\Theta) \qquad (1) \\
&\Leftrightarrow \varphi x \in \Pi'(\varphi y \mid \varphi [x]\,\Theta) \\
&\Leftrightarrow \varphi x \in \varphi \Pi(y \mid [x]\,\Theta) \qquad (1) \\
&\Rightarrow \varphi x \in \varphi [y]\,\Theta \\
&\Leftrightarrow (y, x) \in \Theta \circ \mathrm{Ker}\,\varphi \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Ker}\,\varphi \circ \Theta.
\end{aligned}$$

Es gilt also $\Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \circ \Theta$ und, da Θ und $\operatorname{Ker} \varphi$ Äquivalenzrelationen sind, folgt daraus $\Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi \circ \Theta$. $(*)$

$$\begin{aligned}
\Pi(y \mid [x]\, \Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi) &= \Pi(y \mid \varphi^{-1} \varphi [x]\, \Theta) \\
&\qquad \big((x, y) \in \Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi\, y \in \varphi [x]\, \Theta \text{ s.o.}\big) \\
&\subseteq \varphi^{-1} \varphi\, \Pi(y \mid \varphi^{-1} \varphi [x]\, \Theta) \\
&= \varphi^{-1}\, \Pi'(\varphi\, y \mid \varphi\, \varphi^{-1} \varphi [x]\, \Theta) \qquad (1) \\
&= \varphi^{-1}\, \Pi'(\varphi\, y \mid \varphi [x]\, \Theta) \\
&= \varphi^{-1} \varphi\, \Pi(y \mid [x]\, \Theta) \qquad (1) \\
&\subseteq \varphi^{-1} \varphi [y]\, \Theta \qquad \big(\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)\big) \\
&= [y]\, \Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi \qquad \text{(s.o.)}.
\end{aligned}$$

Damit ist auch $\Theta \circ \operatorname{Ker} \varphi \in \mathscr{V}(\Gamma)$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
\Pi'\big(\varphi\, x \mid [\varphi\, y](\varphi \times \varphi)\, \Theta\big) &= \Pi'(\varphi\, x \mid \varphi [y]\, \Theta) \qquad \big((*) \text{ und Hilfssatz 1.2(b)}\big) \\
&= \varphi\, \Pi(x \mid [y]\, \Theta) \qquad (1) \\
&\subseteq \varphi [x]\, \Theta \qquad \big(\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma)\big) \\
&= [\varphi\, x](\varphi \times \varphi)\, \Theta \qquad \big((*) \text{ und Hilfssatz 1.2(b)}\big).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $(\varphi \times \varphi)$ eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma)$ in $\mathscr{V}(\Gamma')$ ist.

$(2) \Rightarrow (1)$: Für $M \subseteq G$ gilt wegen (2) stets $(\varphi \times \varphi)\, \Pi(M) \in \mathscr{V}(\Gamma')$. Aus $(\varphi M \times \varphi M) \subseteq (\varphi \times \varphi)\, \Pi(M)$ folgt $\Pi'(\varphi M) \subseteq (\varphi \times \varphi)\, \Pi(M)$.

$$\begin{aligned}
\Pi'(\varphi\, x \mid \varphi M) &= [\varphi\, x]\, \Pi'(\varphi M) \\
&\subseteq [\varphi\, x](\varphi \times \varphi)\, \Pi(M) \\
&= \varphi [x]\, \Pi(M) \qquad \big(\text{Hilfssatz 1.2(b)}\big) \\
&= \varphi\, \Pi(x \mid M) \\
&\subseteq \Pi'(\varphi\, x \mid \varphi M) \qquad (\varphi \text{ Geomorphismus}).
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichungskette folgt $\varphi\, \Pi(x \mid M) = \Pi'(\varphi\, x \mid \varphi M)$, also ist φ ein starker Geomorphismus.

3.5. Korollar. *Ist $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma'$ ein starker Geomorphismus, dann liegt* $\operatorname{Ker} \varphi$ *im „Zentrum“ von $\mathscr{V}(\Gamma)$.*

Das Zentrum von $\mathscr{V}(\Gamma)$ ist $\{\Theta \in \mathscr{V}(\Gamma) \mid \forall\, \Phi \in \mathscr{V}(\Gamma)(\Theta \circ \Phi = \Phi \circ \Theta)\}$.

3.6. Korollar. *Sei $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma'$ ein starker surjektiver Geomorphismus. Dann ist Γ' isomorph zu $\Gamma/\operatorname{Ker} \varphi$, d.h. Γ' ist ein geomorphes Bild von Γ.*

Im folgenden wird die Kategorie $\mathfrak{G}$ auf Produkte hin untersucht. Es wird gezeigt, daß es zu jeder Familie von Geometrien ein Produkt in $\mathfrak{G}$ gibt. Eine Beschreibung der Produkte liefert der Satz 3.8.

3.7. Hilfssatz. *Sei $(\Gamma_i \mid i \in I)$ eine Familie von Geometrien $\big(\Gamma_i = (G_i, \Pi_i)\big)$. Sei ferner $G = \bigtimes_{i \in I} G_i$ mit den Projektionen $p_i\colon G \to G_i$ $(i \in I)$.*

Für $x \in G$ und $M \subseteq G$ wird definiert:

$$\Pi(x|M) := \begin{cases} \bigtimes_{i \in I} \Pi_i(p_i x | p_i M) & \text{für endliches } M \\ \bigcup \{\Pi(x|E) | E \subseteq M \text{ endlich}\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\bigtimes_{i \in I} \Gamma_i := (G, \Pi)$ eine Geometrie und die Projektionen p_i: $\bigtimes_{i \in I} \Gamma_i \to \Gamma_i$ $(i \in I)$ sind starke surjektive Geomorphismen.

Beweis. Zuerst werden die Axiome $(\Pi 1)-(\Pi 4)$ für Π nachgeprüft. $(\Pi 1)$ und $(\Pi 3)$ folgen unmittelbar aus der Gültigkeit von $(\Pi 1)$ und $(\Pi 3)$ für alle Π_i $(i \in I)$. Um $(\Pi 2)$ und $(\Pi 4)$ beweisen zu können, wird zunächst $(\Pi 5)$ gezeigt.

$(\Pi 5)$: Sei $N \subseteq M \subseteq G$ und $x \in G$. Ist M unendlich, so folgt $\Pi(x|N) \subseteq \Pi(x|M)$ sofort aus der Definition von Π. Ist M endlich, so ist auch N endlich. In Γ_i gilt

$$\Pi_i(p_i x | p_i N) \subseteq \Pi_i(p_i x | p_i M).$$

Daraus folgt $\Pi(x|N) \subseteq \Pi(x|M)$.

$(\Pi 2)$: Zu $z \in \Pi(x|\Pi(y|M))$ gibt es $y_1, \ldots, y_n \in \Pi(y|M)$ mit $z \in \Pi(x|y_1, \ldots, y_n)$. Zu $y_r \in \Pi(y|M)$ gibt es ein endliches $E_r \subseteq M$ mit $y_r \in \Pi(y|E_r)$. Dann gilt für die endliche Menge

$$E = \bigcup_{r=1}^{n} E_r \quad y_1, \ldots, y_n \in \Pi(y|E)$$

wegen $(\Pi 5)$. Für alle $i \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \Pi_i(p_i x | p_i y_1, \ldots, p_i y_n) &\subseteq \Pi_i(p_i x | p_i \Pi(y|E)) \\ &= \Pi_i(p_i x | \Pi_i(p_i y | p_i E)) \\ &\subseteq \Pi_i(p_i x | p_i E). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\Pi(x|y_1, \ldots, y_n) \subseteq \Pi(x|E) \subseteq \Pi(x|M)$ nach $(\Pi 5)$. Es gilt also $z \in \Pi(x|M)$, was $\Pi(x|\Pi(y|M)) \subseteq \Pi(x|M)$ zur Folge hat.

$(\Pi 4)$: $\Pi(x|M) = \bigcup \{\Pi(x|E) | E \subseteq M \text{ endlich}\}$ gilt für unendliches M nach Definition und für endliches M wegen $(\Pi 5)$.

Damit ist gezeigt, daß $\bigtimes_{i \in I} \Gamma_i$ eine Geometrie ist. Nach der Definition von Π gilt für alle endlichen $M \subseteq G$ und für $i \in I$ stets $p_i \Pi(x|M) = \Pi_i(p_i x | p_i M)$, was p_i als starken Geomorphismus ausweist.

3.8. Satz. *$\Gamma := (G, \Pi)$ und $\Gamma_i := (G_i, \Pi_i)$ $(i \in I)$ seien Geometrien, und p_i: $\Gamma \to \Gamma_i$ seien Geomorphismen.*

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) *$\Gamma = \bigtimes_{i \in I} \Gamma_i$ mit den Projektionen p_i: $\Gamma \to \Gamma_i$ $(i \in I)$.*

(2) *$G = \bigtimes_{i \in I} G_i$ mit den Projektionen p_i: $G \to G_i$ $(i \in I)$, und für alle $i \in I$ ist p_i: $\Gamma \to \Gamma_i$ ein starker Geomorphismus.*

(3) *Γ ist das Produkt der $(\Gamma_i | i \in I)$ mit den Projektionen p_i: $\Gamma \to \Gamma_i$ in der Kategorie $\mathfrak{G}$ der Geometrien.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist Hilfssatz 3.7.

(2) $\Rightarrow$ (3): Seien $\Gamma' = (G', \Pi') \in \mathcal{O}(\mathfrak{G})$ und φ_i: $\Gamma' \to \Gamma_i$ $(i \in I)$ Geomorphismen. Es ist zu zeigen, daß es genau einen Geomorphismus φ: $\Gamma \to \Gamma'$ gibt, der für alle $i \in I$ $\varphi_i = p_i \varphi$ erfüllt. Da G das Produkt der Mengen G_i ist mit den Projektionen p_i: $G \to G_i$, gibt es genau eine Abbildung φ: $G' \to G$, die für alle $i \in I$ $\varphi_i = p_i \varphi$ erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß φ ein Geomorphismus ist. Für die Abbildung φ gilt

$$(\varphi \times \varphi)^{-1} = \bigcap_{i \in I} (\varphi_i \times \varphi_i)^{-1} (p_i \times p_i).$$

Wegen (2) sind alle p_i starke, surjektive Geomorphismen, was zur Folge hat, daß $(p_i \times p_i)$ eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma)$ in $\mathscr{V}(\Gamma_i)$ ist (Satz 3.4). Da alle φ_i Geomorphismen sind, ist $(\varphi_i \times \varphi_i)^{-1}$ eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma_i)$ in $\mathscr{V}(\Gamma')$ (Satz 3.2). $\mathscr{V}(\Gamma')$ ist ein Hüllensystem; also führt die Durchschnittsbildung nicht aus $\mathscr{V}(\Gamma')$ heraus. Daraus folgt, daß $(\varphi \times \varphi)^{-1}$ eine Abbildung von $\mathscr{V}(\Gamma)$ in $\mathscr{V}(\Gamma')$ ist. Das zieht nach sich, daß φ ein Geomorphismus ist (Satz 3.2).

(3) $\Rightarrow$ (1): Da in jeder Kategorie Produkte bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind, und da wegen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\bigtimes_{i \in I} \Gamma_i$ ein Produkt der Γ_i mit den Projektionen p_i: $\bigtimes_{i \in I} \Gamma_i \to \Gamma_i$ ist, muß jedes Produkt der Γ_i mit den Projektionen p_i von dieser Gestalt sein.

3.9. Satz. *$\Gamma_1 := (G_1, \Pi_1), \dots, \Gamma_n := (G_n, \Pi_n)$ seien Geometrien, und $\Gamma := (G, \Pi)$ sei das Produkt der $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ mit den Projektionen p_i: $\Gamma \to \Gamma_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Dann gilt für alle Mengen $M \subseteq G$ stets*

$$\Pi(x|M) = \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | p_i M).$$

Beweis. Nach Satz 3.8 ist

$$\Gamma = \bigtimes_{i=1}^{n} \Gamma_i.$$

Für endliche M ist also nichts zu zeigen. Aus der Definition von Π (Hilfssatz 3.7) folgt

$$\Pi(x|M) \subseteq \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | p_i M) \qquad \text{für alle } M \subseteq G.$$

Ist

$$y \in \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | p_i M), \qquad \text{so folgt } p_i y \in \Pi_i(p_i x | p_i M) \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Es gibt also für $i = 1, \dots, n$ endliche Teilmengen $E_i \subseteq p_i M$, die $p_i y \in \Pi_i(p_i x | E_i)$ erfüllen. Daraus folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge $E \subseteq M$ mit $E_i \subseteq p_i E$ für $i = 1, \dots, n$. Das zieht nach sich

$$y \in \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | E_i) \subseteq \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | p_i E) = \Pi(x|E) \subseteq \Pi(x|M).$$

Es gilt also auch für unendliche M

$$\Pi(x|M) = \bigtimes_{i=1}^{n} \Pi_i(p_i x | p_i M).$$

4. Diagonalprodukte

In diesem Abschnitt werden die affin koordinatisierbaren Geometrien betrachtet. Das sind die Kongruenzklassengeometrien von endlichstelligen vollständigen Algebren. Im Zusammenhang mit dem vorhergehenden Abschnitt treten folgende Fragen auf:

Ist jedes geomorphe Bild einer Kongruenzklassengeometrie wieder eine Kongruenzklassengeometrie?

Ist jedes Produkt von Kongruenzklassengeometrien wieder eine Kongruenzklassengeometrie?

Wenn ja, wie sehen die zugehörigen Algebren aus?

Auf die ersten beiden Fragen erhält man „ja" als Antwort (Satz 4.3 und Satz 4.6). Den geomorphen Bildern von Geometrien entsprechen die homomorphen Bilder der Algebren. Den Produkten von Geometrien entsprechen die „Diagonalprodukte" von Algebren, die in Definition 4.4 eingeführt werden. Ein Diagonalprodukt von Algebren ist im wesentlichen das Produkt der Algebren, dem man die zu dem Produkt gehörigen Diagonaloperationen als neue Operationen hinzufügt. Satz 4.7 untersucht deshalb, für welche Algebren die Produkte bereits Diagonalprodukte sind. Da die Begriffe „algebraische Operation", „algebraische Funktion" usw. in der Literatur nicht einheitlich verwendet werden, sollen diese grundlegenden Begriffe noch kurz erläutert werden.

4.1. Definition. Eine *Operation* auf einer Menge A ist eine Abbildung f: $A^n \to A$; dabei ist n eine natürliche Zahl, und f heißt *n-stellig*.

Auf jeder Menge A hat man gewisse, ausgezeichnete Operationen.

Die *trivialen Operationen* e_k^n sind die Operationen, die für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ die Bedingung $e_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ erfüllen $(1 \leqq k \leqq n)$.

Die *konstanten Operationen* c_a^n sind die Operationen, die für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ die Bedingung $c_a^n(x_1, \ldots, x_n) = a$ erfüllen $(a \in A)$.

Eine *Algebra* $\mathbf{A} = (A, F)$ ist eine Menge A zusammen mit einer Menge F von Operationen auf A. Die Menge A heißt *Grundmenge* der Algebra und die Elemente von F heißen *fundamentale Operationen*.

Die *algebraischen Operationen* auf $\mathbf{A}$ sind die Operationen, die man in endlich vielen Schritten aus den trivialen und fundamentalen Operationen von $\mathbf{A}$ erhält, wenn man bei jedem Schritt schon erzeugte Operationen ineinander einsetzt.

Die *algebraischen Funktionen* auf $\mathbf{A}$ sind die Operationen, die man auf die gleiche Weise aus den trivialen, fundamentalen und konstanten Operationen von $\mathbf{A}$ erhält.

Offenbar erhält man die algebraischen Funktionen aus den algebraischen Operationen, indem man in den algebraischen Operationen einige Variable durch Konstanten ersetzt.

Eine Äquivalenzrelation Θ auf A heißt *verträglich* mit der n-stelligen Operation f auf A, wenn aus $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \Theta$ stets $\big(f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)\big) \in \Theta$ folgt. Eine Äquivalenzrelation auf A heißt *Kongruenzrelation* auf der Algebra

A, wenn sie mit allen fundamentalen Operationen von **A** verträglich ist. Die zulässigen Operationen auf **A** sind die Operationen, die mit allen Kongruenzrelationen auf **A** verträglich sind. Man sieht sofort, daß man algebraische Operationen (algebraische Funktionen, zulässige Operationen) erhält, wenn man algebraische Operationen (algebraische Funktionen, zulässige Operationen) ineinander einsetzt.

Für eine Algebra **A** bezeichnet $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ die Menge aller Kongruenzrelationen auf **A** und $\Gamma(\mathbf{A})$ die Kongruenzklassengeometrie $\mathscr{G}(\mathfrak{C}(\mathbf{A}))$ von **A**.

4.2. Hilfssatz. *Für jede Algebra* **A** *gilt* $\mathfrak{C}(\mathbf{A})=\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))$.

Beweis. Aus $\Gamma(\mathbf{A})=\mathscr{G}(\mathfrak{C}(\mathbf{A}))$ folgt $\mathfrak{C}(\mathbf{A})\subseteq\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))$ (Satz 2.3). Nach Wille [15] Satz 1.2 ist eine Äquivalenzrelation genau dann eine Kongruenzrelation auf **A**, wenn sie mit allen einstelligen zulässigen Operationen von **A** verträglich ist. Sei $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))$ und $f\colon A\to A$ eine zulässige Operation auf **A**. Dann gilt für alle $x, y\in A$ stets $(fx, fy)\in\Theta^{\mathbf{A}}(x, y)$ und daher $fy\in\Pi(fx|x, y)$. Ist $(x, y)\in\Phi$, dann gilt $\{x, y\}\subseteq[x]\,\Phi$ und weiter

$$fy\in\Pi(fx|x, y)\subseteq\Pi(fx|[x]\,\Phi)\subseteq[fx]\,\Phi,$$

da $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))$ ist. Folglich ist $(fx, fy)\in\Phi$ und daher ist f verträglich mit Φ. Damit folgt auch $\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))\subseteq\mathfrak{C}(\mathbf{A})$.

4.3. Satz. *Sei* **A** *eine Algebra,* $\Gamma=\Gamma(\mathbf{A})$ *und* $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)$. *Dann gilt* $\Gamma/\Phi=\Gamma(\mathbf{A}/\Phi)$.

Insbesondere folgt: Geomorphe Bilder affin koordinatisierbarer Geometrien sind affin koordinatisierbar.

Beweis. Nach Hilfssatz 4.2 ist $\Phi\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})$.

Ist $\varphi\colon \mathbf{A}\to\mathbf{A}/\Phi$ der kanonische Homomorphismus, dann folgt $\mathfrak{C}(\mathbf{A}/\Phi)=(\varphi\times\varphi)[\Phi)_{\mathfrak{C}(\mathbf{A})}$ (vgl. Grätzer [4], § 11, Thm. 3). Das bedeutet aber $\Gamma/\Phi=\Gamma(\mathbf{A}/\Phi)$.

4.4. Definition. $\mathbf{A}=(A, F)$ und $\mathbf{A}_i=(A_i, F_i)$ $(i\in I)$ seien Algebren (nicht notwendig von gleichem Typ). Ferner sei A das Produkt der A_i mit den Projektionen $p_i\colon A\to A_i$. Die Diagonaloperationen d_i und die Äquivalenzrelationen Θ_i $(i\in I)$ auf A seien definiert wie in Hilfssatz 1.10. **A** heißt ein *Diagonalprodukt* der $\mathbf{A}_i$ mit den Projektionen p_i $(i\in I)$, wenn die folgenden Bedingungen (Da), (Db) und (Dc) erfüllt sind:

(Da) Alle d_i $(i\in I)$ sind algebraische Funktionen auf **A**.

(Db) Alle Θ_i $(i\in I)$ sind Kongruenzrelationen auf **A**. Aus (Db) folgt nach Hilfssatz 1.11, daß jede zulässige Operation (insbesondere jede algebraische Funktion) auf **A** von der Gestalt $f=\bigtimes_{i\in I} f_i$ ist. f_i heißt das *i-te Komponente* von f.

(Dc) Ist f eine algebraische Funktion auf **A**, so ist für jedes $i\in I$ die i-te Komponente von f eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}_i$. Ist umgekehrt f_i eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}_i$, so gibt es eine algebraische Funktion f auf $\mathbf{A}$, die f_i als i-te Komponente besitzt.

Es sollte hier noch angemerkt werden, daß man für den Fall $I=\{1,2,\dots,n\}$ die Bedingung (Da) durch die folgende Bedingung (Da′) ersetzen kann.

(Da′) Die n-stellige Diagonaloperation d, die zu dem Produkt $A=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ gehört, ist eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}$.

(Da) $\Rightarrow$ (Da′) erhält man aus Hilfssatz 1.10, da $d=d_{23\dots n}$ ist, und da algebraische Funktionen ineinander eingesetzt wieder algebraische Funktionen sind. Für (Da′) $\Rightarrow$ (Da) beachtet man, daß für $i=1,2,\dots,n$ stets $d_i(x,y)=d(x,\dots,x,y,x\dots x)$ gilt (y an der i-ten Stelle). Mit d sind also auch $d_1,\dots,d_n$ algebraische Funktionen auf $\mathbf{A}$.

4.5. Satz. *$\mathbf{A}:=(A,F)$ sei ein Diagonalprodukt der Algebren $\mathbf{A}_i:=(A,F_i)$ mit den Projektionen p_i ($i\in I$). Dann gilt $\Gamma(\mathbf{A})=\bigtimes_{i\in I}\Gamma(\mathbf{A}_i)$ mit den Projektionen p_i: $\Gamma(\mathbf{A})\to\Gamma(\mathbf{A}_i)$.*

Beweis. Da alle Θ_i Kongruenzrelationen auf $\mathbf{A}$ sind (Db), ist $\mathbf{A}$ das Produkt der Algebren $\mathbf{B}_i:=(A_i,G_i)$ mit den Projektionen p_i: $\mathbf{A}\to\mathbf{B}_i$, wobei G_i genau die i-ten Komponenten der $f\in F$ enthält. Für jedes Produkt von Algebren sind die algebraischen Funktionen auf den Faktoren genau die entsprechenden Komponenten der algebraischen Funktionen auf dem Produkt. Wegen (Dc) folgt, daß $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{B}_i$ dieselben algebraischen Funktionen besitzen. Daraus ergibt sich $\mathfrak{C}(\mathbf{A}_i)=\mathfrak{C}(\mathbf{B}_i)$ und weiter $\Gamma(\mathbf{A}_i)=\Gamma(\mathbf{B}_i)$. Nach Wille [15], Satz 3.11 ist p_i: $\Gamma(\mathbf{A})\to\Gamma(\mathbf{B}_i)$ ein Geomorphismus. Nach (Da) sind alle $\Phi\in\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ verträglich mit allen d_i ($i\in I$). Mit Hilfssatz 1.9 schließt man daraus $\Phi\circ\Theta_i=\Theta_i\circ\Phi$ für alle $i\in I$. Da $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ ein Teilverband von $\mathscr{E}(A)$ ist, ist mit Φ und Θ_i auch deren Verbindung $\Phi\circ\Theta_i$ in $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$. Nach Satz 3.4 ist daher p_i: $\Gamma(\mathbf{A})\to\Gamma(\mathbf{A}_i)$ ein starker Geomorphismus. Wegen Satz 3.8 folgt daraus $\Gamma(\mathbf{A})=\bigtimes_{i\in I}\Gamma(\mathbf{A}_i)$ mit den Projektionen p_i: $\Gamma(\mathbf{A})\to\Gamma(\mathbf{A}_i)$.

Im folgenden Satz wird gezeigt, daß man zu jeder Familie von Algebren ein Diagonalprodukt erhält, wenn man die Algebren zuerst auf gleichen Typ bringt, dann das Produkt bildet und dieser Algebra noch die Diagonaloperationen als neue fundamentale Operationen hinzufügt.

4.6. Satz. *Ein Produkt von Geometrien ist genau dann affin koordinatisierbar, wenn jeder Faktor affin koordinatisierbar ist.*

Beweis. Jeder Faktor eines Produktes von Geometrien ist ein (starkes) geomorphes Bild des Produktes (Satz 3.8 und Korollar 3.6). Jeder Faktor eines affin koordinatisierbaren Produktes von Geometrien ist daher (Satz 4.3) wieder affin koordinatisierbar. Sei $(\mathbf{A}_i|i\in I)$ eine Familie von Algebren ($\mathbf{A}_i:=(A_i,F_i)$). Wenn man zu den F_i triviale Operationen geeigneter Stelligkeit hinzunimmt, so entstehen Algebren $\mathbf{A}'_i=(A_i,F_i\cup E_i)$, die alle von gleichem Typ sind. Sei $\mathbf{A}:=(A,F)$ das Produkt der $\mathbf{A}'_i$ mit den Projektionen p_i: $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'_i$ ($i\in I$). Zu dem Produkt $A=\bigtimes_{i\in I}A_i$ gehört eine Familie von Diagonaloperationen $D=\{d_i|i\in I\}$. Die Algebra $\mathbf{A}^*=(A,F\cup D)$ ist das Produkt der Algebren $\mathbf{A}^*_i=$

$(A_i, F_i \cup E_i \cup E_i^*)$ mit den Projektionen p_i: $\mathbf{A}^* \to \mathbf{A}_i^*$, wobei $E_i^* = \{e_{i_j} | j \in I\}$ und

$$e_{i_j}(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } j \neq i \\ y & \text{für } j = i \end{cases} \quad \text{für alle } x, y \in A_i$$

ist. Das gilt, weil e_{i_j} gerade die i-te Komponente von d_j ist. (Db) und (Dc) gelten für jedes Produkt von Algebren und (Da) gilt in $\mathbf{A}^*$; also ist $\mathbf{A}^*$ ein Diagonalprodukt der $\mathbf{A}_i^*$ mit den Projektionen p_i $(i \in I)$. Da für alle $i \in I$ E_i und E_i^* nur triviale Operationen enthalten, stimmen die algebraischen Funktionen auf $\mathbf{A}_i$ und $\mathbf{A}_i^*$ überein. (Dc) überträgt sich also auch auf die $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$, was $\mathbf{A}^*$ als Diagonalprodukt der $\mathbf{A}_i$ mit den Projektionen p_i $(i \in I)$ ausweist.

4.7. Satz. *Die Algebra* $\mathbf{A}$ *sei das Produkt der Algebren* $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$. $\mathbf{A}$ *ist genau dann ein Diagonalprodukt der* $\mathbf{A}_i$, *wenn alle zugehörigen Diagonaloperationen* d_i $(i \in I)$ *algebraische Funktionen auf* $\mathbf{A}$ *sind.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus der Definition 4.4, wenn man beachtet, daß für jedes Produkt von Algebren (Db) und (Dc) gelten.

4.8. Satz. *Die Algebren* $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ *seien von gleichem Typ mit zwei zweistelligen fundamentalen Operationen* $+$ *und* $\cdot$. *Überdies besitze jedes* $\mathbf{A}_i$ *zwei Elemente* 0_i *und* 1_i, *für die folgende Gleichungen gelten:*

$$x \cdot 0_i = 0_i \wedge x \cdot 1_i = x \wedge 0_i + x = x = x + 0_i.$$

Dann ist das Produkt der $\mathbf{A}_i$ ein Diagonalprodukt.

Beweis. Sei $\mathbf{A} := (A, F)$ das Produkt der $\mathbf{A}_i$ mit den Projektionen p_i: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$. a_i, b_i $(i \in I)$ seien die Elemente von A, die für alle $j \in I$

$$p_j a_i = \begin{cases} 1_j & \text{für } j \neq i \\ 0_j & \text{für } j = i \end{cases} \quad \text{und} \quad p_j b_i = \begin{cases} 0_j & \text{für } j \neq i \\ 1_j & \text{für } j = i \end{cases}$$

erfüllen. Die zweistellige Operation d_i wird definiert:

$$d_i(x, y) := (x \cdot a_i) + (y \cdot b_i).$$

Dann ist d_i eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}$ und es gilt

$$\begin{aligned} p_j d_i(x, y) &= (p_j x \cdot p_j a_i) + (p_j y \cdot p_j b_i) \\ &= \begin{cases} (p_j x \cdot 1_j) + (p_j y \cdot 0_j) = p_j x + 0_j = p_j x & \text{für } j \neq i \\ (p_j x \cdot 0_j) + (p_j y \cdot 1_j) = 0_j + p_j y = p_j y & \text{für } j = i. \end{cases} \end{aligned}$$

d_i ist also die entsprechende Diagonaloperation.

4.9. Korollar. *Produkte von Ringen mit Eins und Produkte von Verbänden mit größtem und kleinstem Element sind Diagonalprodukte.*

5. Affin vollständige Algebren

Bei Betrachtungen über Geometrien mit (schwachem) Parallelismus erweisen sich die Dilatationen als besonders wichtiges Hilfsmittel. Die Dilatationen einer Äquivalenzklassengeometrie Γ sind gerade die einstelligen Operationen, die mit allen $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)$ verträglich sind. Führt man in naheliegender Weise mehrstellige Dilatationen ein, so erhält man eine entsprechende Charakterisierung (Satz 5.2).

Aus geometrischer Sicht sind solche Algebren besonders interessant, in deren Kongruenzklassengeometrie sich jede (mehrstellige) Dilatation „algebraisch beschreiben" läßt. Solche (noch genau zu definierenden) Algebren werden „affin vollständig" genannt. Es wird gezeigt, daß ein Diagonalprodukt endlich vieler affin vollständiger Algebren wieder affin vollständig ist. Mit diesem Satz gewinnt man eine Fülle von Beispielen affin vollständiger Algebren (s. Abschnitt 6).

5.1. Definition. Sei $\Gamma:=(G,\Pi)$ eine Geometrie. Für Mengen $M_i\subseteq G$ $(i\in I)$ und Elemente $x\in G$ wird definiert:

$$\Pi(M_i|i\in I):=\bigcap\{\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)|\bigcup_{i\in I}\Pi(M_i)\subseteq\Phi\}$$

und

$$\Pi(x\,|M_i|\,i\in I):=[x]\,\Pi(M_i|i\in I).$$

Falls $I=\{1,2,\dots,n\}$ und für $i\in I$ $M_i=\{y_{i_1},\dots,y_{ir_i}\}$ ist, schreibt man für $\Pi(x\,|M_i|\,i\in I)$ auch $\Pi(x|y_{11},\dots,y_{1r_1};\dots;y_{n1},\dots,y_{nr_n})$. Eine n-stellige Operation $\delta\colon G^n\to G$ heißt eine (n-stellige) *Dilatation* auf Γ, wenn für $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in G$ stets

$$\delta(y_1,\dots,y_n)\in\Pi\big(\delta(x_1,\dots,x_n)|x_1,y_1;x_2,y_2;\dots;x_n,y_n\big)$$

gilt. Für den Fall $n=1$ lautet die Definition einer Dilatation also $\delta(y)\in\Pi(\delta(x)|x,y)$, was genau der Definition in Wille [15] entspricht.

5.2. Satz. *Sei $\Gamma:=(G,\Pi)$ eine Geometrie und δ eine Operation auf G. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *δ ist eine Dilatation auf Γ.*

(2) *δ ist verträglich mit allen $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)$.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2): Sei $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)$ und $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\in\Phi$. Dann ist

$$\Pi(x_1,y_1)\subseteq\Phi,\dots,\Pi(x_n,y_n)\subseteq\Phi;$$

also gilt $\Pi(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)\subseteq\Phi$. Da δ eine Dilatation ist, gilt

$$\delta(y_1,\dots,y_n)\in\Pi\big(\delta(x_1,\dots,x_n)|x_1,y_1;\dots;x_n,y_n\big)\subseteq[\delta(x_1,\dots,x_n)]\,\Phi,$$

also $\big(\delta(x_1,\dots,x_n),\delta(y_1,\dots,y_n)\big)\in\Phi$. Folglich ist δ verträglich mit Φ.

(2)$\Rightarrow$(1): Für alle $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in G$ ist die Relation $\Pi(x_1,y_1;\dots;x_n,y_n)$ in $\mathscr{V}(\Gamma)$, da $\mathscr{V}(\Gamma)$ ein Hüllensystem ist. Da δ mit allen $\Phi\in\mathscr{V}(\Gamma)$ verträglich ist, folgt

$$\delta(y_1,\dots,y_n)\in\Pi\big(\delta(x_1,\dots,x_n)|x_1,y_1;\dots;x_n,y_n\big).$$

5.3. Korollar. *Für jede Algebra* **A** *sind die Dilatationen auf $\Gamma(\mathbf{A})$ genau die zulässigen Operationen auf* **A**.

Dieses Korollar ist eine unmittelbare Folge aus Satz 5.2, wenn man beachtet, daß $\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))=\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ ist (Hilfssatz 4.2).

5.4. Definition. Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt *affin vollständig*, wenn alle zulässigen Operationen auf $\mathbf{A}$ schon algebraische Funktionen sind[1].

Da auf jeder Algebra alle algebraischen Funktionen zulässig sind, folgt aus der Definition, daß die Dilatationen auf der Kongruenzklassengeometrie einer affin vollständigen Algebra genau die algebraischen Funktionen sind.

5.5. Hilfssatz. *Die Algebra* $\mathbf{A} := (A, F)$ *sei ein Diagonalprodukt der Algebren* $\mathbf{A}_1 := (A_1, F_1), \ldots, \mathbf{A}_n := (A_n, F_n)$. *Dann gilt:*

(a) *Die algebraischen Funktionen auf* $\mathbf{A}$ *sind genau die Operationen* $f_1 \times \cdots \times f_n$, *wobei die* $f_1, \ldots, f_n$ *algebraische Funktionen auf* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *sind.*

(b) *Die zulässigen Operationen auf* $\mathbf{A}$ *sind genau die Operationen* $f_1 \times \cdots \times f_n$, *wobei die* $f_1, \ldots, f_n$ *zulässige Operationen auf* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *sind.*

Beweis. Wegen (Db) und Hilfssatz 1.11 sind alle zulässigen Operationen, also erst recht alle algebraischen Funktionen auf $\mathbf{A}$ von der Gestalt $f = f_1 \times \cdots \times f_n$.

(a) Wegen (Dc) bleibt zu zeigen, daß es zu algebraischen Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ auf $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ eine algebraische Funktion f auf $\mathbf{A}$ gibt, die $f = f_1 \times \cdots \times f_n$ erfüllt. Nach (Dc) gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine algebraische Funktion f^i auf $\mathbf{A}$, die f_i als i-te Komponente besitzt. Da wegen (Da') auch d eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}$ ist, ist auch $f := d(f^1, \ldots, f^n)$ eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}$. Für $x_1, \ldots, x_k \in A$ folgt:

$$\begin{aligned} p_i f(x_1, \ldots, x_k) &= p_i d\big(f^1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f^n(x_1, \ldots, x_k)\big) \\ &= p_i f^i(x_1, \ldots, x_k) \\ &= f_i(p_i x_1, \ldots, p_i x_k) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nach Definition 1.7 gilt also auch $f = f_1 \times \cdots \times f_n$.

(b) Sei f zulässig auf $\mathbf{A}$; dann gilt $f = f_1 \times \cdots \times f_n$. Um zu zeigen, daß die f_i zulässig auf den $\mathbf{A}_i$ sind, wählt man $\Theta_i \in \mathfrak{C}(\mathbf{A}_i)$ und $(x_{i1}, y_{i1}), \ldots, (x_{ik}, y_{ik}) \in \Theta_i$ und zeigt $\big(f_i(x_{i1}, \ldots, x_{ik}), f_i(y_{i1}, \ldots, y_{ik})\big) \in \Theta_i$. Da $p_i\colon A \to A_i$ surjektiv ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ mit $p_i x_1 = x_{i1}, \ldots, p_i y_k = y_{ik}$. Da $p_i\colon \Gamma(\mathbf{A}) \to \Gamma(\mathbf{A}_i)$ ein Geomorphismus ist, gilt wegen $\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A})) = \mathfrak{C}(\mathbf{A})$, $\mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}_i)) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}_i)$ und Satz 3.2 $(p_i \times p_i)^{-1} \Theta_i \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})$. Nun folgt

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in (p_i \times p_i)^{-1} \Theta_i \\ &\quad \Rightarrow \big(f(x_1, \ldots, x_k), f(y_1, \ldots, y_k)\big) \in (p_i \times p_i)^{-1} \Theta_i \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (f \text{ zulässig auf } \mathbf{A}) \\ &\quad \Rightarrow \big(p_i f(x_1, \ldots, x_k), p_i f(y_1, \ldots, y_k)\big) \in \Theta_i \\ &\quad \Rightarrow \big(f_i(p_i x_1, \ldots, p_i x_k), f_i(p_i y_1, \ldots, p_i y_k)\big) \in \Theta_i \\ &\quad \Rightarrow \big(f_i(x_{i1}, \ldots, x_{ik}), f_i(y_{i1}, \ldots, y_{ik})\big) \in \Theta_i. \end{aligned}$$

[1] Die Frage nach affin vollständigen Algebren ist gerade Problem 6 von Grätzer [4].

Für die Umkehrung wähle man zulässige Operationen $f_1, \ldots, f_n$ auf $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ und zeige $f_1 \times \cdots \times f_n$ ist zulässig auf $\mathbf{A}$. Sei $f = f_1 \times \cdots \times f_n$ und $\Phi \in \mathfrak{C}(\mathbf{A})$. Es ist zu zeigen, daß f mit Φ verträglich ist. Wegen $\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}))$ und Satz 3.4 ist $(p_i \times p_i)\,\Phi \in \mathscr{V}(\Gamma(\mathbf{A}_i)) = \mathfrak{C}(\mathbf{A}_i)$; denn $p_i\colon \Gamma(\mathbf{A}) \to \Gamma(\mathbf{A}_i)$ ist ein starker surjektiver Geomorphismus.

Sei $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k) \in \Phi \circ \Theta_i$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&(p_i x_1, p_i y_1), \ldots, (p_i x_k, p_i y_k) \in (p_i \times p_i)\,\Phi \\
&\quad \Rightarrow \big(f_i(p_i x_1, \ldots, p_i x_k), f_i(p_i y_1, \ldots, p_i y_k)\big) \in (p_i \times p_i)\,\Phi \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f_i \text{ zulässig auf } \mathbf{A}_i) \\
&\quad \Rightarrow \big(p_i f(x_1, \ldots, x_k), p_i f(y_1, \ldots, y_k)\big) \in (p_i \times p_i)\,\Phi \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (f = f_1 \times \cdots \times f_n) \\
&\quad \Rightarrow \big(f(x_1, \ldots, x_k), f(y_1, \ldots, y_k)\big) \in \Phi \circ \Theta_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big(\Phi \circ \Theta_i = (p_i \times p_i)^{-1}(p_i \times p_i)\,\Phi\big).
\end{aligned}$$

f ist also verträglich mit $\Phi \circ \Theta_i$, also auch mit $\bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i$. Da Φ mit d verträglich ist, gilt $\Phi = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi \circ \Theta_i$ (Hilfssatz 1.9). Somit ist f verträglich mit Φ.

5.6. Korollar. *Die Algebra* $\mathbf{A}$ *sei ein Diagonalprodukt der Algebren* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. $\mathbf{A}$ *ist genau dann affin vollständig, wenn die* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *affin vollständig sind.*

6. Beispiele

Pixley definiert in [10] eine dreistellige Operation p mit der Eigenschaft

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{für } y \neq z \\ x & \text{für } y = z. \end{cases}$$

Er beweist, daß gewisse Algebren dieses „Pixley-Polynom" als algebraische Operation besitzen und alle Algebren mit dieser algebraischen Operation einfach sind. In Werner [17] wird gezeigt, daß dieses Polynom die endlichen funktional vollständigen Algebren charakterisiert. Die funktional vollständigen Algebren sind genau die einfachen affin vollständigen Algebren.

6.1. Definition. Eine Algebra $\mathbf{A}$ heißt *funktional vollständig*, wenn jede Operation auf ihrer Grundmenge schon eine algebraische Funktion ist.

Eine Algebra $\mathbf{A} := (A, F)$ heißt *einfach*, wenn sie nur Id_A und O_A als Kongruenzrelationen hat.

6.2. *Folgerung.* Die funktional vollständigen Algebren sind genau die einfachen affin vollständigen Algebren.

Beweis. Pixley zeigt in [10], daß das oben definierte Pixley-Polynom nur mit Id_A und O_A verträglich ist. Daraus folgt sofort, daß jede funktional vollständige Algebra einfach sein muß, da sie das Pixley-Polynom als algebraische

Funktion hat. Da auf einfachen Algebren jede Operation zulässig ist, fallen die Begriffe funktional vollständig und affin vollständig auf einfachen Algebren zusammen.

6.3. *Affin vollständige, triviale Algebren.* Eine triviale Algebra $\mathbf{A}=(A,\emptyset)$ ist genau dann affin vollständig, wenn $|A|\neq 2$ ist.

Die algebraischen Funktionen auf $\mathbf{A}$ sind genau die konstanten und die trivialen Operationen. Außerdem gilt $\mathfrak{C}(\mathbf{A})=\mathscr{E}(A)$. Falls $|A|\leqq 1$ ist, ist die Behauptung trivial.

Für $|A|=2$ ist $\mathbf{A}$ einfach, also jede Operation auf $\mathbf{A}$ zulässig. Da auf A nicht jede Operation konstant oder trivial ist, kann $\mathbf{A}$ nicht affin vollständig sein.

Für $|A|\geqq 3$ gilt

$$\Pi(x|a,b)=\begin{cases}\{x\} & \text{für } x\notin\{a,b\},\\ \{a,b\} & \text{für } x\in\{a,b\}.\end{cases}$$

(a) Ist $f\colon A\to A$ zulässig, so ist f konstant oder $f=\mathrm{Id}_A$.

Sei $f\colon A\to A$ zulässig und $f\neq\mathrm{Id}_A$.

Dann gibt es ein $a\in A$ mit $f(a)\neq a$.

Für $x\neq f(a)$ folgt $f(x)\in\Pi(f(a)|x,a)=\{f(a)\}$, also $f(x)=f(a)$.

Angenommen es gilt $f(f(a))\neq f(a)$.

Für $x\neq f(f(a))$ folgt dann wie oben $f(x)=f(f(a))$. Wegen $|A|\geqq 3$ gibt es ein $c\in A$ mit $f(a)\neq c\neq f(f(a))$. Es folgt $f(a)=f(c)=f(f(a))$, was der Annahme widerspricht. Also gilt für $x=f(a)$ auch $f(x)=f(a)$. Folglich ist f konstant.

(b) Ist $f\colon A^n\to A$ zulässig, so ist f konstant oder trivial.

Sei $f\colon A^n\to A$ zulässig, aber nicht konstant.

Da f wenigstens von einer Stelle abhängt, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß f von der ersten Stelle abhängt. Es gibt also $a_2,\dots,a_n\in A$, für die die Operation $f(x,a_2,\dots,a_n)$ nicht konstant ist. Wegen (a) folgt $f(x,a_2,\dots,a_n)=x$ für alle $x\in A$.

Sei $i\in\{2,\dots,n\}$ und $b_i,c_i\in A$ mit $c_i\notin\{a_i,b_i\}$. Es folgt

$$f(c_i,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)\in\Pi(f(c_i,a_2,\dots,a_n)|a_i,b_i)=\{c_i\}.$$

$f(x,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)$ ist zulässig, also nach (a) konstant oder gleich Id_A.

Angenommen $f(x,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)$ ist konstant.

Wegen $f(c_i,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)=c_i$ gilt $f(x,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)=c_i$.

Damit folgt

$$c_i=f(b_i,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)\in\Pi(f(a_i,a_2,\dots,a_n)|a_i,b_i)=\{a_i,b_i\},$$

was $c_i\notin\{a_i,b_i\}$ widerspricht. Es gilt also auch $f(x,a_2,\dots,b_i,\dots,a_n)=x$. Ersetzt man somit nacheinander $a_2,\dots,a_n$ durch beliebige $b_2,\dots,b_n$, so gilt immer noch $f(x,b_2,\dots,b_n)=x$ für $x\in A$.

f ist demnach trivial.

6.4. *Affin vollständige Diagonalalgebren.* Diagonalalgebren sind genau dann affin vollständig, wenn keine Komponente genau zwei Elemente besitzt.

Diagonalalgebren (vgl. Płonka [12]) sind Diagonalprodukte von endlich vielen trivialen Algebren. 6.3 und Satz 4.6 ergeben die Behauptung

6.5. *Affin vollständige Vektorräume.* Vektorräume sind genau dann affin vollständig, wenn ihre Dimension nicht gleich eins ist.

Sei $\mathbf{A} := (A, +, -, 0, (\lambda\cdot)_{\lambda\in K})$ ein Vektorraum über dem Körper K. Die algebraischen Funktionen auf $\mathbf{A}$ sind genau die Operation f, für die es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und $a\in A$ gibt, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n \in A$ stets

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + a$$

gilt.

Die Kongruenzrelationen in Vektorräumen korrespondieren eineindeutig den Untervektorräumen. Insbesondere gilt

$$z\in\Pi(u|x, y) \Leftrightarrow \exists\lambda\in K\big(z-u=\lambda\cdot(x-y)\big).$$

Ist $\dim\mathbf{A}=0$, so ist $|A|=1$. Daher ist $\mathbf{A}$ affin vollständig. Ist $\dim\mathbf{A}=1$, so ist $\mathbf{A}$ einfach und $A=K$. Die Multiplikation in K ist zwar zulässig, aber keine algebraische Funktion. Wäre nämlich $x\cdot y=\lambda x+\mu y+a$, so würde für $x=0$ bzw. $y=0$ folgen: $0=\mu y+a$ und $0=\lambda x+a$ für alle $x, y\in A$. Das würde aber heißen $\lambda=\mu=0$ und $a=0$. Das hätte $x\cdot y=0$ zur Folge, was in K falsch ist. $\mathbf{A}$ ist also nicht affin vollständig.

Sei im folgenden $\dim\mathbf{A}\geqq 2$.

(a) Ist $f\colon A\to A$ zulässig, so ist f eine algebraische Funktion. Ist $f\colon A\to A$ zulässig, so ist f eine Dilatation auf der affinen Geometrie des Vektorraumes $\mathbf{A}$. Nach Artin [1], S. 68 (2.5) ist dann f von der Gestalt $f(x)=\lambda x+a$ für ein $\lambda\in K$, $a\in A$. f ist also eine algebraische Funktion auf $\mathbf{A}$.

(b) Ist $f\colon A^n\to A$ zulässig, so ist f eine algebraische Funktion. Durch Induktion über n wird folgende Aussage bewiesen:

$$\exists\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in K\,\forall x_1, \ldots, x_n\in A \qquad \Big(f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cdot x_k+f(0, \ldots, 0)\Big).$$

Für festes $x_2, \ldots, x_n$ ist f eine zulässige Operation in x_1. Nach (a) gibt es ein $\lambda_{x_2\ldots x_n}\in K$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\lambda_{x_2\ldots x_n}\cdot x_1+f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Nun wird gezeigt, daß $\lambda_{x_2\ldots x_i\ldots x_n}=\lambda_{x_2\ldots y_i\ldots x_n}$ für ein beliebiges $y_i\in A$ ist.

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)\in\Pi\big(f(x_1, \ldots, x_n)|x_i, y_i\big)\\ &\quad\Rightarrow f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)-f(x_1, \ldots, x_n)=\mu_1(x_i-y_i)\\ &\qquad\wedge f(0, x_2, \ldots, y_i, \ldots, x_n)-f(0, x_2, \ldots, x_n)=\mu_2(x_i-y_i)\\ &\quad\Rightarrow (\lambda_{x_2\ldots y_i\ldots x_n}-\lambda_{x_2\ldots x_i\ldots x_n})\cdot x_1=(\mu_1-\mu_2)(x_i-y_i).\end{aligned}$$

Da $\dim \mathbf{A} \geqq 2$ ist, kann man ein x_1 unabhängig von $x_i - y_i$ wählen, falls $x_i - y_i \neq 0$ ist. Dann folgt $\lambda_{x_2 \ldots y_i \ldots x_n} = \lambda_{x_2 \ldots x_i \ldots x_n}$, was bedeutet, daß λ nicht von $x_2, \ldots, x_n$ abhängt. Es gilt also:

$$(*) \qquad \exists \lambda_1 \in K \, \forall x_1, \ldots x_n \in A \qquad \big(f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n)\big).$$

$f(0, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine $(n-1)$-stellige zulässige Operation. Wendet man die Induktionsvoraussetzung an, so erhält man

$$(**) \quad \exists \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \, \forall x_2, \ldots, x_n \in A \qquad \left(f(0, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k + f(0, \ldots, 0)\right).$$

$(*)$ und $(**)$ ergeben die Behauptung.

6.6. *Funktional vollständige Ringe.* Für jeden Ring R mit 1 sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) R ist einfach und endlich.

(2) R ist isomorph zu einem vollen Matrizenring über einem endlichen Körper.

(3) R ist funktional vollständig.

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$: Als endlicher einfacher Ring mit 1 ist R ein einfacher artinscher Ring mit $R^2 \neq (0)$. Nach dem Satz von Wedderburn-Artin (vgl. Kertész [7], Satz 7.15) ist R somit isomorph zu einem vollen Matrizenring über einem Schiefkörper, der wegen der Endlichkeit von R ein endlicher Körper ist.

$(2) \Rightarrow (3)$: Sei K_n der Ring aller $n \times n$-Matrizen über dem endlichen Körper K. Dann gilt für $a \in K$ und $k := |K| - 1$ stets

$$a^k = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 0 \\ 1 & \text{für } a \neq 0. \end{cases}$$

$E_{ij} \in K_n$ sei die Matrix, die an der Stelle (i, j) eine 1 und sonst überall 0 stehen hat. Es gilt dann:

$(*)$ K_n ist ein Vektorraum über K mit der Basis $\{E_{ij} | i, j \leqq n\}$.

$$(**) \qquad E_{ij} \cdot E_{em} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq e \\ E_{im} & \text{für } j = e. \end{cases}$$

$$(***) \qquad E := \sum_{i \leqq n} E_{ii} \text{ ist das Einselement in } K_n.$$

Zu jedem $B \in K_n$ gibt es wegen $(*)$ $\{b_{ij} | i, j \leqq n\} \subseteq K$ mit

$$B = \sum_{i, j \leqq n} b_{ij} E_{ij}.$$

Für $i, j \leqq n$ betrachtet man

$$\begin{aligned} B_{ij} &:= \sum_{e \leqq n} E_{ei} B E_{je} \\ &= \sum_{e \leqq n} b_{ij} E_{ee}, \qquad \text{nach } (**) \\ &= b_{ij} E, \qquad \text{nach } (***). \end{aligned}$$

$$(B_{ij})^k = (b_{ij})^k \cdot E = \begin{cases} E & \text{für } b_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{für } b_{ij} = 0. \end{cases}$$

Nun definiert man für $\{A_i \mid i \leqq n\} \subseteq \{E, 0\}$ rekursiv:

$$\bigvee_{i \leqq 1} A_i := A_1, \qquad \bigvee_{i \leqq r+1} A_i := A_{r+1} + \big(\bigvee_{i \leqq r} A_i\big) - A_{r+1}\big(\bigvee_{i \leqq r} A_i\big).$$

Ein einfacher Induktionsbeweis zeigt

$$\bigvee_{i \leqq n} A_i = \begin{cases} E & \text{für } E \in \{A_i \mid i \leqq n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch folgende Definition erhält man eine algebraische Funktion δ auf K_n:

$$\delta(B) := \bigvee_{i \leqq n} \big(\bigvee_{j \leqq n} (B_{ij})^k\big),$$

und es folgt

$$\delta(B) = \begin{cases} 0 & \text{für } B = 0 \\ E & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun ist es leicht, ein Pixley-Polynom (vgl. Werner [17]) für K_n anzugeben: $p(X, Y, Z) := X + (Z - X) \cdot \delta(Y - Z)$. Nach [17] folgt, daß K_n funktional vollständig ist.

(3) $\Rightarrow$ (1): Daß ein funktional vollständiger Ring einfach sein muß, entnimmt man 6.2. Es bleibt zu zeigen, daß es keinen unendlichen funktional vollständigen Ring R geben kann. Sei $|R| \geqq \aleph_0$. Da R nur endlich viele fundamentale Operationen besitzt, kann es nur abzählbar viele algebraische Operationen geben. Die algebraischen Funktionen entstehen aus den algebraischen Operationen, indem man an andlich vielen Stellen Konstante einsetzt. Es gibt daher höchstens $|R| \cdot \aleph_0 = |R|$ viele algebraische Funktionen auf R. Die Anzahl aller Operationen auf R beträgt aber $|R|^{|R|}$. Wegen $|R| < |R|^{|R|}$ kann R nicht funktional vollständig sein.

6.7. *Halbeinfache Ringe.* Jeder endliche halbeinfache Ring ist affin vollständig. Ein endlicher halbeinfacher Ring **R** ist, da er artinsch ist, nach dem Satz von Wedderburn-Artin (vgl. Kertész [7], Satz 7.17) isomorph zu einem endlichen Produkt voller Matrizenringe über endlichen Körpern. Volle Matrizenringe über endlichen Körpern sind nach 6.6 funktional vollständig, also nach 6.2 auch affin vollständig. Da volle Matrizenringe überdies eine Eins besitzen, ist **R** ein Diagonalprodukt (Korollar 4.9) von endlich vielen affin vollständigen Ringen und daher selbst affin vollständig (Korollar 5.6).

6.8. *Post-Algebren.* Jede endliche Post-Algebra ist affin vollständig.

Die Definition und die Gleichungen der Post-Algebren kann man Katriňák und Mitschke [6] entnehmen.

Als Hilfssatz wird zuerst gezeigt, daß jede endliche Kette, als Post-Algebra aufgefaßt, funktional vollständig ist. Ist $0=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}=1$ eine Kette, so gelten für die Operationen $_*$ und $_+$ folgende Gesetze:

$$x_* y=\begin{cases}1 & \text{für } x\leqq y\\ y & \text{für } x>y\end{cases} \quad \text{und} \quad x_+ y=\begin{cases}0 & \text{für } x\geqq y\\ y & \text{für } x<y.\end{cases}$$

Daraus folgt

$$x_* y\wedge y_* x=\begin{cases}1 & \text{für } y=x\\ x\wedge y & \text{für } y\neq x\end{cases}$$

und

$$x_+ y\vee y_+ x=\begin{cases}0 & \text{für } y=x\\ x\vee y & \text{für } y\neq x.\end{cases}$$

$$\delta(x,y):=y_+(x_* y\wedge y_* x)=\begin{cases}1 & \text{für } y=x\\ 0 & \text{für } y\neq x\end{cases}$$

und

$$\gamma(x,y):=y_*(x_+ y\vee y_+ x)=\begin{cases}0 & \text{für } y=x\\ 1 & \text{für } y\neq x.\end{cases}$$

Das Pixley-Polynom auf der Kette erhält man durch folgende Definition: $p(x,y,z):=\big(x\wedge\delta(y,z)\big)\vee\big(z\wedge\gamma(y,z)\big)$. Damit ist gezeigt, daß jede endliche Kette als Post-Algebra funktional vollständig und daher auch affin vollständig ist. Nach Mitschke [9], Satz 3.9 ist jede endliche Post-Algebra ein direktes Produkt von endlichen Ketten einer Länge n. Da Post-Algebren Verbände mit größtem und kleinstem Element sind, ist jede endliche Post-Algebra ein Diagonalprodukt (4.9) von affin vollständigen Post-Algebren und daher selbst affin vollständig (Korollar 5.6).

6.9. *Boolesche Algebren.* Endliche Boolesche Algebren sind affin vollständig.

Endliche Boolesche Algebren sind spezielle endliche Post-Algebren und daher affin vollständig. Man kann die affine Vollständigkeit auch daraus ableiten, daß endliche Boolesche Algebren rational äquivalent zu endlichen halbeinfachen Ringen sind (vgl. G. Grätzer, Revue de Math. Pure et Appliquées **7**, 693–697 (1962)).

Literatur

1. Artin, E.: Geometric algebra. New York: Interscience Publishers Inc. 1957.
2. Birkhoff, G.: Lattice theory. Amer. Math. Soc. Publ. **25**, 2nd Edition 1961.
3. Foster, A. L.: Generalized "Boolean" theory of universal algebra, I. Math. Z. **58**, 306–336 (1953).
4. Grätzer, G.: Universal algebra. Toronto-London-Melbourne: D. van Nostrand 1968.
5. Hashimoto, J.: Direct, subdirect decompositions and congruence relations. Osaka Math. J. **9**, 87–112 (1967).

6. Katriňák, T., Mitschke, A.: Postalgebren und Stonesche Verbände der Ordnung *n*. Colloquium Math. (erscheint).
7. Kertész, A.: Vorlesungen über Artinsche Ringe. Budapest: Akadémiai Kiadó 1968.
8. Lampe, W. A.: On related structures of a universal algebra. PhD-Thesis, Pennsylvania State University 1969.
9. Mitschke, A.: Postalgebren. Staatsexamensarbeit, Bonn 1970.
10. Pixley, A. F.: Functionally complete algebras generating distributive and permutable classes. Math. Z. **114**, 361–372 (1970).
11. Płonka, J.: Diagonal algebras and algebraic independence. Bull. Acad. Polon. **12**, 729–733 (1964).
12. – Diagonal algebras. Fundamenta Math. **58**, 306–321 (1966).
13. Schmidt, J.: Einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren. Ber Math. Tagung, Berlin 1953, 21–48.
14. Wenzel, G. H.: Note on a subdirect representation of universal algebras. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18**, 329–333 (1967).
15. Wille, P.: Kongruenzklassengeometrien. Lecture Notes in Math. **113**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
16. Werner, H.: A characterization of functionally complete algebras. Notices Amer. Math. Soc. **17**, 430 (1970).
17. – Eine Charakterisierung funktional vollständiger Algebren. Arch. der Math. **21**, 381–385 (1970).

Dr. Heinrich Werner
Mathematisches Institut
Technische Hochschule
BRD-6100 Darmstadt
Deutschland

(Eingegangen am 20. Januar 1971)