GIESECKE, B.
Math. Zeitschr. 83, 177—213 (1964)

Simpliziale Zerlegung abzählbarer analytischer Räume

Von
BURGHART GIESECKE

Einleitung

In der komplexen Funktionentheorie, besonders in der mehrdimensionalen, spielen topologische Begriffe eine große Rolle. Es ist daher wichtig, Aussagen über die topologische Struktur der Definitionsbereiche holomorpher Funktionen, also der komplexen Räume zu machen. In dieser Arbeit soll die Frage behandelt werden, ob komplexe Räume eine simpliziale Zerlegung gestatten. Zunächst wird man analytische Mengen auf ihre Triangulierbarkeit hin untersuchen. Das haben sowohl B. O. KOOPMAN und A. B. BROWN [5] als auch S. LEFSCHETZ und J. H. C. WHITEHEAD [9] getan. Die Ergebnisse von KOOPMAN-BROWN seien kurz formuliert: G sei eine offene Teilmenge eines reellen Zahlenraumes und $F_1, \ldots, F_m$ reell-analytische Funktionen in G. Ist P ein Punkt von G, so gibt es eine kompakte Umgebung $M \subseteq G$ von P, die so simplizial zerlegt werden kann, daß für jedes $i = 1, \ldots, m$ die Menge der in M gelegenen Nullstellen von F_i Träger eines Unterkomplexes ist (Theorem 4.II, p. 242). Ein späterer Satz (Theorem 6.I, p. 245) besagt bei gleicher Voraussetzung: Ist K eine kompakte Teilmenge von G, so kann eine zweite kompakte Teilmenge M mit $K \subseteq M$ so simplizial zerlegt werden, daß die Menge der in M gelegenen Nullstellen jeder der Funktionen F_i Träger eines Unterkomplexes ist.

Von dem ersten Resultat, aus dem bereits die lokale Triangulierbarkeit der komplexen Räume folgt, wird in der vorliegenden Arbeit ausgegangen. Der Beweis wird noch einmal dargestellt, einmal der Vollständigkeit halber, zum anderen weil gewisse Einzelheiten, die in [5] nicht notiert sind, später benötigt werden. Es erweist sich als zweckmäßig, anstelle der komplexen Räume die allgemeineren reell-analytischen Räume (kurz: „reelle Räume") zu betrachten und zuerst Zerlegungen in Zellen vorzunehmen, die man dann, falls erforderlich, simplizial unterteilen kann.

Um zu einer Zellenzerlegung eines reellen Raumes zu kommen, ist es naheliegend, den Raum durch zerlegbare Teilmengen zu überdecken und die Komplexe dann zu verschmelzen. Die bei der lokalen Zerlegung nach KOOPMAN-BROWN auftretenden Zellen haben eine Eigenschaft, die einen entsprechenden Verschmelzungssatz ermöglicht: Sie sind „A-Zellen" (Def. (1.7)). Der Verschmelzungssatz (Satz 3) lautet dann: Sind endlich viele endliche Komplexe von A-Zellen in einem reellen Zahlenraum gegeben, so gibt es einen alle

Komplexe umfassenden Komplex, in dem gewisse Unterteilungen der gegebenen Komplexe Unterkomplexe sind. Mit diesem Satz, zu dessen Beweis ein weiterer Satz von KOOPMAN-BROWN ([5], Theorem 5.I, p. 242; hier Satz 2) herangezogen wird, ist es dann möglich, reelle Räume mit abzählbarer Topologie in Zellen zu zerlegen (Satz 4). Die Zerlegung kann man darüber hinaus so vornehmen, daß vorgegebene analytische Mengen, die einem lokal-endlichen System $\mathfrak{A}$ angehören, Träger von Unterkomplexen werden. Die Mengen aus $\mathfrak{A}$ dürfen sogar „pseudoanalytische" Mengen sein, das sind Mengen, die lokal durch Ungleichungen definiert sind (Def. (4.4); Beispiele sind analytische Polyeder).

Zum Schluß (§6) werden einige Anwendungen des Zerlegungssatzes auf komplexe Räume gebracht. Satz 5 besagt, daß ein abzählbarer komplexer Raum so in Zellen zerlegt werden kann, daß die Zellen dieser Zerlegung sich zu analytischen Polyedern zusammenfassen lassen, von denen je zwei höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Die Sätze 6 und 7 behandeln Überlagerungsabbildungen. Sind X und Y abzählbare normale komplexe Räume und ist $f: X \to Y$ eine Überlagerungsabbildung, so können X und Y so trianguliert werden, daß f eine simpliziale Abbildung wird. Als Folgerung ergibt sich, daß die Divisionshomologiegruppe von Y zu einer Untergruppe der Divisionshomologiegruppe von X isomorph ist (vgl. REMMERT-STEIN [10], Satz 5, p. 170). Zum Schluß wird gezeigt (Satz 8): Ist X ein irreduzibler komplexer Raum der komplexen Dimension n, so ist die $2n$-te Homologiegruppe frei zyklisch, falls X kompakt ist, und enthält nur das Nullelement, falls X nicht kompakt ist. Diese Aussage wurde von A. BOREL und A. HAEFLIGER ([11], p. 476) ohne simpliziale Zerlegung bewiesen.

§ 1. Definitionen und Hilfssätze

(1.1) *Definition* (*Zelle*). *X sei ein Hausdorffscher Raum und b die k-dimensionale offene Einheitsvollkugel im R^k ($k > 0$)*[1]. *Eine Teilmenge a von X heißt eine k-dimensionale Zelle (k-Zelle), wenn es eine topologische Abbildung φ von $\bar{b}$ auf $\bar{a}$ gibt, so daß $\varphi(b) = a$ gilt. Eine nulldimensionale Zelle ist ein Punkt von X. $\bar{a} - a$ heißt der Rand von a; er wird mit ∂a bezeichnet.*

(1.2) *Definition* (*Zellenkomplex*). *$\mathfrak{K}$ sei eine Menge von Zellen im Hausdorffschen Raum X. Es gelte:*

1) *Jeder Punkt von X ist in einer Zelle aus $\mathfrak{K}$ enthalten.*
2) *Für jedes $a \in \mathfrak{K}$ ist ∂a Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$*[2].
3) *Je zwei verschiedene Zellen aus $\mathfrak{K}$ sind punktfremd.*
4) *Jeder Punkt von X besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Zellen aus $\mathfrak{K}$ trifft.*

---

[1]) R^k bezeichnet den k-dimensionalen reellen Zahlenraum; falls die Variablen besonders gekennzeichnet werden sollen, wird z.B. $R^k(x_1, \ldots, x_k)$ geschrieben. Analog ist unter C^k bzw. $C^k(z_1, \ldots, z_k)$ der k-dimensionale komplexe Zahlenraum zu verstehen.

[2]) Die Dimensionen der in ∂a enthaltenen Zellen sind nach dem Satz von der Invarianz der Dimension (vgl. z.B. [1], p. 325) kleiner als die von a.

Dann heißt das Paar $(X, \mathfrak{K})$ *ein Zellenkomplex mit dem Träger* X. *Ist ferner* X' *ein Unterraum von* X *und* $\mathfrak{K}'$ *eine Teilmenge von* $\mathfrak{K}$ *und ist für jede Zelle* a *aus* $\mathfrak{K}'$ *die abgeschlossene Hülle* $\bar{a}$ *von* a *in* X' *enthalten, so heißt* $(X', \mathfrak{K}')$ *ein Unterkomplex von* $(X, \mathfrak{K})$, *wenn* $(X', \mathfrak{K}')$ *ein Komplex ist.*

$(X, \mathfrak{K})$ sei ein Zellenkomplex. Ist $\mathfrak{K}'$ eine Teilmenge von $\mathfrak{K}$ und ist die Vereinigungsmenge X' der Zellen aus $\mathfrak{K}'$ abgeschlossen, so ist $(X', \mathfrak{K}')$ ein Unterkomplex von $(X, \mathfrak{K})$. Insbesondere ist $(\bar{a}, \mathfrak{K}')$ ein Unterkomplex, wobei a eine Zelle aus $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Menge der in $\bar{a}$ enthaltenen Zellen aus $\mathfrak{K}$ ist. Sind $(X_i, \mathfrak{K}_i)$, $i \in I$, Unterkomplexe von $(X, \mathfrak{K})$, so auch $(\bigcup X_i, \bigcup \mathfrak{K}_i)$ und $(\bigcap X_i, \bigcap \mathfrak{K}_i)$.

(1.3) Man kann aus einem Zellenkomplex $(X, \mathfrak{K})$ folgendermaßen einen simplizialen Komplex gewinnen: Die nulldimensionalen Zellen können als nulldimensionale Simplexe aufgefaßt werden. $\mathfrak{K}^p$ sei die Menge der Zellen aus $\mathfrak{K}$, deren Dimension nicht größer als p ist und K^p ihre Vereinigungsmenge. Nach Induktionsvoraussetzung sei K^p so simplizial zerlegt, daß für jedes a aus $\mathfrak{K}^p$ die abgeschlossene Hülle $\bar{a}$ Träger eines simplizialen Unterkomplexes ist. Es sei c eine $(p+1)$-Zelle aus $\mathfrak{K}$. Bezeichnet b die $(p+1)$-dimensionale offene Einheitsvollkugel im R^{p+1}, so gibt es nach Definition (1.1) eine topologische Abbildung von $\bar{b}$ auf $\bar{c}$, die b auf c abbildet. Da ∂c Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}^p$ ist, ist ∂c und damit auch ∂b simplizial zerlegt. Vom Mittelpunkt von b aus wird nun auf den zerlegten Rand projiziert und $\bar{b}$ dadurch in Simplexe zerlegt. Die Zerlegung wird auf $\bar{c}$ übertragen. Auf diese Weise kann K^{p+1} simplizial zerlegt werden, wobei für jedes c aus $\mathfrak{K}^{p+1}$ die abgeschlossene Hülle von c Träger eines Unterkomplexes wird. Die Menge der Simplexe, die man im Laufe dieses Verfahrens erhält, bestimmt eine simpliziale Zerlegung von X. Dabei gehen Zellenunterkomplexe in simpliziale Unterkomplexe über.

(1.4) **Hilfssatz.** *Es sei* a *eine* k*-dimensionale Zelle im* $R^n(x_1, \ldots, x_n)$. Z_1 *und* Z_2 *seien stetige Funktionen in* $\bar{a}$. *In* a *gelte* $Z_1 < Z_2$. *Dann ist*

$$b := \{(x_1, \ldots, x_n, y) : (x_1, \ldots, x_n) \in a, Z_1(x_1, \ldots, x_n) < y < Z_2(x_1, \ldots, x_n)\}$$

eine $(k+1)$*-dimensionale Zelle im* $R^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Beweis. Es genügt, den Beweis für den Fall zu führen, daß $n = k$ und a die k-dimensionale Einheitskugel im $R^k(x_1, \ldots, x_k)$ ist. Es bezeichne $|x|$ den Abstand des Punktes $x = (x_1, \ldots, x_k)$ vom Mittelpunkt von a (Nullpunkt). Für $x \neq 0$ sei $\hat{x}$ der Projektionspunkt von x vom Nullpunkt aus auf ∂a. q sei eine reelle Zahl mit $q > \max\{Z_2(x) - Z_1(x) : x \in \bar{a}\}$. Dann sei $Z(x) := (1 - |x|)q + |x|\big(Z_2(\hat{x}) - Z_1(\hat{x})\big)$ für $x \in \bar{a}$, $x \neq 0$, und $Z(0) := q$. $Z(x)$ ist in $\bar{a}$ stetig, und für $x \in a$ gilt $Z(x) > 0$. Es sei $b' := \{(x, y) : x \in a, 0 < y < Z(x)\}$. Durch die Abbildung

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \left(x, \dfrac{y - Z_1(x)}{Z_2(x) - Z_1(x)} \cdot Z(x)\right) & \text{für} \quad Z_2(x) \neq Z_1(x) \\ (x, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

wird $\bar{b}$ topologisch auf $\bar{b}'$ abgebildet, und es gilt $\varphi(b) = b'$. b' hat die Eigenschaft, daß jede Halbgerade vom Punkt $(0, \frac{1}{2}q)$ aus den Rand von b' in genau einem Punkt trifft, denn jede Ebene, die von der y-Achse und der Halbgeraden aufgespannt wird, schneidet b' in einer konvexen Figur. Daraus folgt leicht (vgl. [1], p. 601), daß b' und damit auch b eine $(k+1)$-dimensionale Zelle ist.

(1.5) Der Term *analytisch* wird im folgenden (§§ 1—5) stets im Sinn von *reell-analytisch* verwendet. Eine in der offenen Menge $G \subseteq R^n(x_1, \ldots, x_n)$ analytische Funktion F heißt im Punkt $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in G$ *ausgezeichnet bezüglich* x_n, wenn $F(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n)$ als Funktion von x_n in der Umgebung von x_n^0 nicht identisch verschwindet. Eine Abbildung einer offenen Menge $G \subseteq R^n$ in den R^m wird analytisch genannt, wenn sie komponentenweise durch analytische Funktionen gegeben wird.

(1.6) *Definition (analytische Zelle). Es sei a eine k-Zelle im R^n. a heißt eine analytische Zelle, wenn es eine k-Zelle a^* im R^k gibt und eine topologische Abbildung φ_a von $\overline{a^*}$ auf $\bar{a}$, so daß folgendes gilt:*

1. *φ_a bildet a^* analytisch auf a ab*[3].

2. *Ist G eine offene Teilmenge eines R^m und $\varphi\colon G \to R^n$ eine analytische Abbildung mit $\varphi(G) \subseteq \bar{a}$, so ist $\varphi_a^{-1} \circ \varphi\colon G \to R^k$ analytisch.*

Der Sinn der zweiten Bedingung ergibt sich aus folgendem: $(M, \mathfrak{K})$, $M \subseteq R^n$, sei ein Komplex, dessen Zellen analytisch sind. a, b seien zwei Zellen aus $\mathfrak{K}$ mit $b \subseteq \partial a$. Zwischen den zugeordneten Zellen a^*, b^* und den Abbildungen φ_a, φ_b kann man dann eine Beziehung finden. Es gibt nämlich eine topologische Abbildung ψ von $\overline{b^*}$ auf $\varphi_a^{-1}(\bar{b})$, die b^* analytisch auf $\varphi_a^{-1}(b)$ abbildet und für die $\varphi_b = \varphi_a \circ \psi$ gilt; man braucht nur $\psi = \varphi_a^{-1} \circ \varphi_b$ zu setzen.

(1.7) *Definition (A-Zelle). Eine Zelle a im R^n heißt eine A-Zelle, wenn es eine offene Umgebung U von $\bar{a}$ gibt und eine in U analytische Menge A, so daß gilt: Für jeden Punkt aus a gibt es eine in U enthaltene Umgebung V mit $V \cap a = V \cap A$. A heißt eine A-Menge von a. Kann man U und A speziell so wählen, daß A die Nullstellenmenge einer in U analytischen Funktion ist, so heißt a eine A_1-Zelle.*

(1.8) Für die späteren Anwendungen wird nun ein Verfahren zur Konstruktion eines Komplexes angegeben. M sei eine kompakte Teilmenge des $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $(M, \mathfrak{K})$ ein Zellenkomplex. Jedem a aus $\mathfrak{K}$ sei eine endliche (eventuell leere) Menge $\mathfrak{Z}(a)$ von in $\bar{a}$ stetigen reellwertigen Funktionen zugeordnet. Es gelte:

(α) Zwei Funktionen Z_1, Z_2 aus $\mathfrak{Z}(a)$, die in einem Punkt von a übereinstimmen, sind gleich.

(β) Ist $a' \subseteq \partial a$ und $Z \in \mathfrak{Z}(a)$, so ist die Einschränkung $Z|\overline{a'}$ in $\mathfrak{Z}(a')$ enthalten.

Es sei q eine positive reelle Zahl mit $q > \max\{|Z(x)| : x \in \bar{a},\ Z \in \mathfrak{Z}(a),\ a \in \mathfrak{K}\}$. Dann kann $\hat{M} := M \times [-q, +q] \subseteq R^n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ auf die folgende Weise in Zellen zerlegt werden. Es sei a eine Zelle aus $\mathfrak{K}$. Die Funktionen aus $\mathfrak{Z}(a)$ können wegen (α) unter Hinzunahme von $\pm q$ der Größe nach geordnet

[3]) a^* ist nach dem Satz von der Invarianz des Gebietes (vgl. [1], p. 396) offen in R^k.

werden, so daß in a

$$Z_0 := -q < Z_1 < \cdots < Z_s < Z_{s+1} := +q$$

gilt. Es werden in $\hat{M}$ die folgenden Teilmengen $\hat{a}$ gebildet:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in a,\ x_n = Z_i(x_1, \ldots, x_{n-1})\} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, s+1,$$

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in a,\ Z_{i-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) < x_n < Z_i(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$
$$\text{für} \quad i = 1, \ldots, s+1.$$

Die ersten Mengen sind offensichtlich Zellen im $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ und heißen *Zellen erster Art über* a. Sie haben die gleiche Dimension wie a. Die zweiten Mengen sind nach Hilfssatz (1.4) ebenfalls Zellen im $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ mit einer um 1 größeren Dimension. Sie heißen *Zellen zweiter Art über* a. $\hat{\mathfrak{K}}$ sei die Menge der so für jedes a aus $\mathfrak{K}$ gebildeten Zellen $\hat{a}$. Dann ist $(\hat{M}, \hat{\mathfrak{K}})$ ein Zellenkomplex, denn die Bedingungen 1), 3), 4) von Definition (1.2) sind offensichtlich erfüllt, und 2) folgt aus (β).

(1.9) Mit den Bezeichnungen von (1.8) und Definition (1.6) gilt: Sind die Zellen a aus $\mathfrak{K}$ analytisch und ist $Z \circ \varphi_a$ für jedes $Z \in \mathfrak{Z}(a)$ eine in a^* analytische Funktion, so besteht $\hat{\mathfrak{K}}$ ebenfalls aus analytischen Zellen. Dabei werden die den Zellen $\hat{a} \in \hat{\mathfrak{K}}$ gemäß Definition (1.6) zuzuordnenden Zellen $\hat{a}^*$ und Abbildungen $\varphi_{\hat{a}}$ wie folgt festgelegt:

Ist $\hat{a}$ eine Zelle erster Art über $a \in \mathfrak{K}$, die mit $Z \in \mathfrak{Z}(a)$ bzw. mit $Z = \pm q$ gebildet sei, so soll $\hat{a}^* = a^*$ sein und $\varphi_{\hat{a}}$ aus φ_a durch Hinzufügen von $x_n = Z \circ \varphi_a$ entstehen.

Ist $\hat{a}$ eine Zelle zweiter Art über a, die mit Z_{i-1}, Z_i gebildet sei, und ist a^* im $R^k(t_1, \ldots, t_k)$ gelegen, wobei k die Dimension von a ist, so wird über a^* mit den Funktionen $Z_{i-1} \circ \varphi_a, Z_i \circ \varphi_a$ eine Zelle zweiter Art im $R^{k+1}(t_1, \ldots, t_k, x_n)$ gebildet und diese gleich $\hat{a}^*$ gesetzt. $\varphi_{\hat{a}}$ sei dann die Abbildung von $\overline{\hat{a}^*}$ auf $\overline{\hat{a}}$, die entsteht, wenn man auf die ersten k Koordinaten φ_a anwendet und die letzte unverändert läßt.

(1.10) Mit den Bezeichnungen von (1.8) gilt: Besteht $\mathfrak{K}$ aus A_1-Zellen (bezüglich $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$) und gibt es eine in einer offenen Umgebung von $\hat{M}$ analytische Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$, so daß die über einer Zelle $a \in \mathfrak{K}$ gelegenen reellen Nullstellen von F genau die Punkte $(x_1, \ldots, x_{n-1}, Z(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ mit $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in a$, $Z \in \mathfrak{Z}(a)$ sind, dann besteht auch $\hat{\mathfrak{K}}$ aus A_1-Zellen. Es gibt dann also für jedes $\hat{a}$ aus $\hat{\mathfrak{K}}$ eine in einer Umgebung von $\overline{\hat{a}}$ analytische Funktion $K(x_1, \ldots, x_n)$, deren Nullstellenmenge A-Menge von $\hat{a}$ ist. Für Zellen $\hat{a}$ erster Art aus $\hat{\mathfrak{K}}$ kann die zugehörige Funktion K darüber hinaus so gewählt werden, daß K in jedem Punkt von $\overline{\hat{a}}$ bezüglich x_n ausgezeichnet ist[4]).

Beweis. Für $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ wird im folgenden x geschrieben; $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ wird mit (x, x_n) abgekürzt. Es sei $G(x, x_n) := F(x, x_n) \cdot (x_n - q) \cdot (x_n + q)$.

[4]) Vgl. (1.5).

$\hat{a}$ sei eine über $a \in \mathfrak{K}$ gelegene Zelle aus $\hat{\mathfrak{K}}$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung von $\bar{a}$ bezüglich $R^{n-1}(x)$ und eine darin analytische Funktion $H(x)$, so daß es für jeden Punkt x^0 aus a eine Umgebung $V(x^0)$ im $R^{n-1}(x)$ gibt, in der a und die Nullstellenmenge von H übereinstimmen.

1. $\hat{a}$ sei eine Zelle erster Art, gebildet mit $Z \in \mathfrak{Z}(a)$ bzw. mit $Z = \pm q$. Dann ist $K(x, x_n) := [G(x, x_n)]^2 + [H(x)]^2$ in einer Umgebung U von $\bar{\hat{a}}$ analytisch und in jedem Punkt von $\bar{\hat{a}}$ bezüglich x_n ausgezeichnet. Ist (x^0, x_n^0) ein Punkt von $\hat{a}$, so gibt es eine Umgebung W von (x^0, x_n^0) mit folgenden Eigenschaften: Es ist $W \subseteq U$; die Projektion von W ist in $V(x^0)$ enthalten; aus $(x, x_n) \in W$, $x \in a$, $G(x, x_n) = 0$ folgt $x_n = Z(x)$. Dann sei (x, x_n) ein Punkt aus W. Aus $K(x, x_n) = 0$ folgt $G(x, x_n) = 0$ und $H(x) = 0$, also $x \in a$ und $x_n = Z(x)$, also $(x, x_n) \in \hat{a}$, und umgekehrt.

2. Es sei $\hat{a}$ eine mit Z_{i-1}, Z_i gebildete Zelle zweiter Art. Die Funktion $K(x, x_n) := H(x)$ ist in einer offenen Umgebung U von $\bar{\hat{a}}$ analytisch. Es sei (x^0, x_n^0) ein Punkt von $\hat{a}$. Dann gibt es eine Umgebung W von (x^0, x_n^0) mit folgenden Eigenschaften: Es ist $W \subseteq U$; die Projektion von W ist in $V(x^0)$ enthalten; aus $(x, x_n) \in W$, $x \in a$ folgt $Z_{i-1}(x) < x_n < Z_i(x)$. Für einen Punkt (x, x_n) aus W folgt dann aus $K(x, x_n) = 0$, daß $x \in a$ und $Z_{i-1}(x) < x_n < Z_i(x)$, also $(x, x_n) \in \hat{a}$ gilt, und umgekehrt.

(1.11) Mit den Bezeichnungen von (1.8) gilt: Es bestehe $\mathfrak{K}$ aus A_1-Zellen (bezüglich $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$). Jede Zelle $\hat{a}$ erster Art aus $\hat{\mathfrak{K}}$ sei in einer A_1-Zelle b (bezüglich $R^n(x_1, \ldots, x_n)$) enthalten, für die $\pi|\bar{b}$ injektiv ist. (π bezeichnet die Projektionsabbildung von $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ auf $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.) Dann besteht auch $\hat{\mathfrak{K}}$ aus A_1-Zellen.

Beweis. Für Zellen zweiter Art folgt die Behauptung wie in (1.10). Es sei $\hat{a}$ eine über $a \in \mathfrak{K}$ gelegene Zelle erster Art. Nach Voraussetzung gibt es eine A_1-Zelle b, die $\hat{a}$ enthält und auf der π eineindeutig ist. Es seien $F(x, x_n)$ bzw. $G(x)$ in offenen Umgebungen $U(\bar{b}) \subseteq R^n(x, x_n)$ bzw. $U(\bar{a}) \subseteq R^{n-1}(x)$ analytische Funktionen, deren Nullstellenmengen A-Mengen von b bzw. a sind. (x steht wieder für $(x_1, \ldots, x_{n-1})$.) Dann ist $H(x, x_n) := [F(x, x_n)]^2 + [G(x)]^2$ in einer offenen Umgebung von $\bar{\hat{a}}$ analytisch. (x^0, x_n^0) sei ein Punkt von $\hat{a}$. Es gibt eine Umgebung $V(x^0, x_n^0) \subseteq U(\bar{b})$, so daß $b \cap V(x^0, x_n^0)$ gleich der Menge der in $V(x^0, x_n^0)$ gelegenen Nullstellen von F ist, und eine Umgebung $V(x^0) \subseteq U(\bar{a})$, so daß $a \cap V(x^0)$ gleich der Menge der in $V(x^0)$ gelegenen Nullstellen von G ist. Dann sei W eine in $V(x^0, x_n^0)$ enthaltene Umgebung von (x^0, x_n^0), deren Projektion in $V(x^0)$ enthalten ist. Für einen Punkt (x, x_n) aus W folgt deshalb aus $H(x, x_n) = 0$, daß $F(x, x_n) = 0$ und $G(x) = 0$, also $(x, x_n) \in b$ und $x \in a$, also $(x, x_n) \in \hat{a}$ gilt. Umgekehrt folgt aus $(x, x_n) \in \hat{a} \cap W$, daß $F(x, x_n) = 0$ und $G(x) = 0$, also $H(x, x_n) = 0$ ist.

§ 2. Lokale Zerlegung

(2.1) Es sei $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ein Punkt des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes $C^n(z_1, \ldots, z_n)$. Mit $\mathfrak{H}^n(c)$ wird der Integritätsring der in c

konvergenten Potenzreihen

$$\sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n} (z_1 - c_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (z_n - c_n)^{\nu_n}$$

mit komplexen Koeffizienten $a_{\nu_1 \dots \nu_n}$ bezeichnet. Eine in c konvergente Potenzreihe stellt in einer Umgebung von c eine holomorphe Funktion dar. Einheiten in $\mathfrak{H}^n(c)$ sind die Potenzreihen, die in c nicht verschwinden. Elemente aus $\mathfrak{H}^n(c)$, die in bezug auf $(z_n - c_n)$ Polynome sind, heißen *Pseudopolynome*. Der Ring der Pseudopolynome wird mit $\mathfrak{H}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[z_n]$ bezeichnet. Ein Pseudopolynom positiven Grades heißt in c *ausgezeichnet*, wenn es die Form

$$(z_n - c_n)^N + A_1(z_1, \dots, z_{n-1})(z_n - c_n)^{N-1} + \dots + A_N(z_1, \dots, z_{n-1})$$

mit $A_r \in \mathfrak{H}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})$, $A_r(c_1, \dots, c_{n-1}) = 0$ $(r = 1, \dots, N)$ hat.

Ist c ein Punkt des $R^n(x_1, \dots, x_n)$, so bezeichnet $\mathfrak{R}^n(c)$ den Ring der in c konvergenten Potenzreihen

$$\sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n} (x_1 - c_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (x_n - c_n)^{\nu_n}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{\nu_1 \dots \nu_n}$ und $\mathfrak{R}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[x_n]$ den Unterring der Pseudopolynome. Ausgezeichnete Pseudopolynome sind analog zum komplexen Fall definiert.

In allen 4 Ringen gilt der Satz von der bis auf Einheiten eindeutigen Zerlegung in irreduzible Elemente. Das ist im wesentlichen eine Folge des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes (vgl. [2], Chap. IX, §1), der im reellen Fall folgendermaßen lautet:

Jede Potenzreihe aus $\mathfrak{R}^n(c)$, die, betrachtet als eine in einer Umgebung von c analytische Funktion, in c bezüglich x_n ausgezeichnet[5]) ist und in c verschwindet, ist Produkt einer Einheit aus $\mathfrak{R}^n(c)$ mit einem ausgezeichneten Pseudopolynom aus $\mathfrak{R}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[x_n]$.

Für einen Punkt c des R^n können die Potenzreihen aus $\mathfrak{R}^n(c)$ auch als Elemente von $\mathfrak{H}^n(c)$ aufgefaßt werden, indem anstelle der reellen Veränderlichen komplexe Variable eingesetzt werden. In diesem Sinn ist z.B. eine Faktorzerlegung in $\mathfrak{H}^n(c)$ eines Elementes aus $\mathfrak{R}^n(c)$ zu verstehen.

Diskriminanten und Resultanten (vgl. z.B. [3]) von Pseudopolynomen aus $\mathfrak{H}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[z_n]$ bzw. $\mathfrak{R}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[x_n]$ sind Elemente aus $\mathfrak{H}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})$ bzw. $\mathfrak{R}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})$. Aus formalen Gründen wird die Diskriminante eines ausgezeichneten Pseudopolynoms vom Grade 1 gleich 1 gesetzt. Diskriminanten und Resultanten irreduzibler Pseudopolynome aus $\mathfrak{H}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[z_n]$ bzw. $\mathfrak{R}^{n-1}(c_1, \dots, c_{n-1})[x_n]$ verschwinden nicht identisch (betrachtet als holomorphe bzw. analytische Funktionen). Sind F, G ausgezeichnete Pseudopolynome, so sind die Nullstellen der Diskriminante von F bzw. der Resultante von F und G in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(c_1, \dots, c_{n-1})$ genau die Punkte, über denen mehrfache komplexe Wurzeln von F bzw. gemeinsame Wurzeln von F und G liegen.

[5]) Vgl. (1.5).

(2.2) **Hilfssatz.** *G sei eine offene Teilmenge des $R^n(x_1, \ldots, x_n)$. Für jeden Randpunkt von G gebe es eine offene Umgebungsbasis $(U_s,\ s=1, 2, \ldots)$, so daß $U_s \cap G$ zusammenhängend ist. $F(x_1, \ldots, x_n, y) = F(x, y) = y^m + A_1(x)\, y^{m-1} + \cdots + A_m(x)$ sei ein Polynom in y mit in $\overline{G}$ stetigen Koeffizienten $A_i(x)$. Gibt es in G komplexwertige stetige Funktionen $Z_j(x)$, $j=1, \ldots, m$, und gilt für jedes x aus G identisch in y*

$$F(x, y) = \prod_{j=1}^{m} \big(y - Z_j(x)\big), \tag{2.21}$$

so lassen sich die Z_j stetig auf $\overline{G}$ fortsetzen und (2.21) gilt für alle x aus $\overline{G}$.

Beweis. Es genügt, die Stetigkeit von Z_j in $\overline{G}$ zu zeigen. Es sei (x^ν) eine gegen einen Randpunkt x^0 von G konvergierende Folge von Punkten aus G. Bliebe $Z_j(x^\nu)$ nicht beschränkt, so hätte man $\big($o.B.d.A. sei $Z_j(x^\nu) \neq 0\big)$:

$$0 = \frac{F(x^\nu, Z_j(x^\nu))}{[Z_j(x^\nu)]^m} = 1 + \frac{A_1(x^\nu)}{Z_j(x^\nu)} + \cdots + \frac{A_m(x^\nu)}{[Z_j(x^\nu)]^m},$$

wobei die rechte Seite für eine geeignete Teilfolge gegen 1 konvergieren würde.

Es sei nun angenommen, $\big(Z_j(x^\nu)\big)$ hätte zwei verschiedene Häufungspunkte $'z$ und $''z$, die sich etwa im Realteil unterschieden. Es gäbe Teilfolgen $('x^\mu)$ und $(''x^\mu)$ von (x^ν), so daß $\big(Z_j('x^\mu)\big)$ bzw. $\big(Z_j(''x^\mu)\big)$ gegen $'z$ bzw. $''z$ konvergierte. (U_s) sei eine Umgebungsbasis von x^0 mit der vorausgesetzten Eigenschaft. Dabei sei $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$. Sind die Punkte $'x^\mu$ und $''x^\mu$ in U_s enthalten, so kann man sie durch eine Kurve in $U_s \cap G$ verbinden, auf der $\operatorname{Re} Z_j$ jeden Wert zwischen $\operatorname{Re} Z_j('x^\mu)$ und $\operatorname{Re} Z_j(''x^\mu)$ annimmt. So fände man eine gegen x^0 konvergierende Folge $(\hat{x}^s)$ von Punkten aus G, für die $\operatorname{Re} Z_j(\hat{x}^s)$ gegen einen beliebig zwischen $\operatorname{Re} 'z$ und $\operatorname{Re} ''z$ vorgegebenen Wert konvergierte. $F(x^0, y)$ hat aber nur endlich viele Wurzeln.

(2.3) **Hilfssatz.** *Es sei $F(x_1, \ldots, x_n, y, z) = F(x, y, z) = z^m + A_1(x, y)\, z^{m-1} + \cdots + A_m(x, y)$ ein irreduzibles Pseudopolynom vom Grade $m \geqq 2$ aus $\mathfrak{H}^{n+1}(0, \ldots, 0, 0)[z]$. Die Diskriminante von F verschwinde in genau den Punkten $(x, 0)$. Dann ist $F(x, 0, z) = \big(z - Z(x)\big)^m$ mit einer Funktion Z aus $\mathfrak{H}^n(0, \ldots, 0)$.*

Beweis. Es wird gezeigt, daß alle Wurzeln von $F(x, 0, z)$ gleich sind. Damit ist dann eine Funktion $Z(x)$ mit $F(x, 0, z) = \big(z - Z(x)\big)^m$ gegeben, die wegen $-mZ(x) = A_1(x, 0)$ aus $\mathfrak{H}^n(0, \ldots, 0)$ ist. U sei eine Polyzylinderumgebung von $(0, \ldots, 0, 0)$ in $C^{n+1}(x, y)$, in der die Koeffizienten $A_i(x, y)$ holomorphe Funktionen sind. $(x^0, 0)$ sei ein Punkt aus U und V eine Polyzylinderumgebung von $(x^0, 0)$, die in U enthalten ist. Nach [2], Chap. IX, §3 lassen sich je zwei über Punkten von $V \cap \{y \neq 0\}$ gelegene Wurzeln von F längs einer in $U \cap \{y \neq 0\}$ enthaltenen Kurve analytisch ineinander fortsetzen. Die Kurve kann in $U \cap \{y \neq 0\}$ so deformiert werden, daß sie nach der Deformation ganz in $V \cap \{y \neq 0\}$ liegt, d.h. die analytische Fortsetzung kann in $V \cap \{y \neq 0\}$ erfolgen. Nun erhält man nach Hilfssatz (2.2) die über $(x^0, 0)$ gelegenen Wurzeln von F durch stetige Fortsetzung der über Punkten aus $V \cap \{y \neq 0\}$ gelegenen Wurzeln. Die Annahme, $F(x^0, 0, z) = 0$ hätte zwei verschiedene Lösungen, kann man dann genau wie in (2.2) zum Widerspruch führen, indem man V sich auf $(x^0, 0)$ zusammenziehen läßt.

(2.4) **Satz 1** (KOOPMAN-BROWN [5], p. 242). *G sei eine offene Teilmenge des $R^n(x_1, \ldots, x_n)$, x^0 sei ein Punkt von G. Für $i = 1, \ldots, s$ sei F_i eine in G analytische Funktion, die in x^0 bezüglich x_n ausgezeichnet*[6]) *ist. B_i sei die Nullstellenmenge von F_i in G. Dann gibt es für jede Umgebung U von x^0 einen Komplex $(M, \mathfrak{K})$ von analytischen A_1-Zellen, wobei M eine in U enthaltene kompakte Umgebung von x^0 ist, und Unterkomplexe $(M_i, \mathfrak{K}_i)$, für die $M_i = M \cap B_i$ gilt.*

Zusatz. a) *Es bezeichne π die Projektionsabbildung von $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ auf $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dann gilt für jede Zelle a aus $\bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{K}_i$: π ist auf $\bar{a}$ injektiv, und $\pi(a) =: a_0$ ist eine analytische A_1-Zelle. Für die den Zellen a, a_0 gemäß Definition* (1.6) *zugeordneten Zellen a^*, a_0^* und Abbildungen φ_a, φ_{a_0} ist $a_0^* = a^*$ und $\varphi_{a_0} = \pi \circ \varphi_a$.*

b) *Für jede Zelle a aus $\bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{K}_i$ gibt es eine in einer Umgebung von $\bar{a}$ analytische Funktion, deren Nullstellenmenge A-Menge von a ist, und die in jedem Punkt von $\bar{a}$ bezüglich x_n ausgezeichnet ist.*

Anmerkung. Setzt man nur voraus, daß die Funktionen F_i in der x^0 enthaltenden Zusammenhangskomponente von G nicht identisch verschwinden, so kann man durch Einführen eines geeigneten Koordinatensystems stets erreichen, daß die Voraussetzung von Satz 1 erfüllt ist. Der Fall einer identisch verschwindenden Funktion ist trivial.

Beweis von Satz 1. Man kann annehmen, daß x^0 der Nullpunkt ist. $\mathfrak{F}^n$ sei die Menge der Funktionen F_i $(i = 1, \ldots, s)$, die in x^0 verschwinden. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz und dem Satz von der Zerlegung in irreduzible Faktoren gilt für jedes F aus $\mathfrak{F}^n$ eine Darstellung

$$F = E \cdot \prod_j P_j,$$

wobei E eine Einheit in $\mathfrak{R}^n(0)$ ist und die P_j irreduzible Pseudopolynome aus $\mathfrak{R}^{n-1}(0)[x_n]$ sind, die man als im Nullpunkt ausgezeichnet annehmen kann. $\mathfrak{P}^n$ sei die Menge dieser so für alle F aus $\mathfrak{F}^n$ gebildeten Pseudopolynome P_j. Zu jedem Element aus $\mathfrak{P}^n$ wird die Diskriminante und zu je zwei Elementen aus $\mathfrak{P}^n$ die Resultante gebildet. Diejenigen unter diesen Diskriminanten und Resultanten, die im Nullpunkt des $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ verschwinden, seien zur Menge $\mathfrak{F}^{n-1}$ zusammengefaßt. Da die Funktionen aus $\mathfrak{F}^{n-1}$ nicht identisch verschwinden, kann eine Koordinatentransformation von der Art

$$x'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_{\varkappa\lambda} x_\lambda, \quad \varkappa = 1, \ldots, n-1,$$
$$x'_n = x_n$$

gefunden werden, so daß die transformierten Funktionen aus $\mathfrak{F}^{n-1}$ im Nullpunkt des $R^{n-1}(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$ bezüglich x'_{n-1} ausgezeichnet sind. Da nur die ersten $n-1$ Variablen transformiert werden, sind die transformierten $F \in \mathfrak{F}^{n-1}$

[6]) Vgl. (1.5).

Resultanten bzw. Diskriminanten der transformierten $P \in \mathfrak{P}^n$, denn diese bestimmen sich aus den Koeffizienten der Polynome. Durch die Transformation werden Voraussetzung und Behauptung von Satz 1 nicht berührt. Man kann also von vornherein ein Koordinatensystem annehmen, in dem die $F \in \mathfrak{F}^{n-1}$ im Nullpunkt des $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ bezüglich x_{n-1} ausgezeichnet sind. Dann gibt es für jedes $F \in \mathfrak{F}^{n-1}$ eine Einheit E aus $\mathfrak{R}^{n-1}(0)$ und irreduzible, im Nullpunkt des $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ ausgezeichnete Pseudopolynome P_j aus $\mathfrak{R}^{n-2}(0)[x_{n-1}]$, so daß $F = E \cdot \prod_j P_j$ gilt. $\mathfrak{P}^{n-1}$ sei dann die Menge der so für alle F aus $\mathfrak{F}^{n-1}$ gebildeten P_j. Das Verfahren wird allgemein wie folgt durchgeführt: Ist $\mathfrak{P}^{r+1}$ $(1 \leqq r \leqq n-1)$ eine endliche (eventuell leere) Menge irreduzibler, im Nullpunkt des $R^{r+1}(x_1, \ldots, x_{r+1})$ ausgezeichneter Pseudopolynome aus $\mathfrak{R}^r(0)[x_{r+1}]$, so bildet man die Diskriminanten der $P \in \mathfrak{P}^{r+1}$ und zu je zwei Elementen aus $\mathfrak{P}^{r+1}$ die Resultante. $\mathfrak{F}^r$ sei dann die Menge derjenigen Diskriminanten und Resultanten, die im Nullpunkt des $R^r(x_1, \ldots, x_r)$ verschwinden. Indem man notfalls eine Koordinatentransformation der Form

$$x'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} a_{\varkappa\lambda}\, x_\lambda, \qquad \varkappa = 1, \ldots, r,$$
$$x'_\varkappa = x_\varkappa, \qquad \varkappa = r+1, \ldots, n,$$

ausführt, die die Ergebnisse der vorangegangenen Schritte bestehen läßt, kann man erreichen, daß alle F aus $\mathfrak{F}^r$ im Nullpunkt des $R^r(x_1, \ldots, x_r)$ bezüglich x_r ausgezeichnet sind. Also gilt für jedes F aus $\mathfrak{F}^r$ eine Darstellung

$$F = E \cdot \prod_j P_j, \tag{2.41}$$

wobei E eine Einheit in $\mathfrak{R}^r(0)$ ist und die P_j irreduzible, im Nullpunkt des $R^r(x_1, \ldots, x_r)$ ausgezeichnete Pseudopolynome aus $\mathfrak{R}^{r-1}(0)[x_r]$ sind. $\mathfrak{P}^r$ sei dann die Menge dieser so für alle F aus $\mathfrak{F}^r$ gebildeten Pseudopolynome P_j. Das Verfahren endet bei $r = 1$. $\mathfrak{P}^1$ ist entweder leer oder besteht aus dem Polynom x_1.

Es werden nun für $r = 1, \ldots, n$ positive reelle Zahlen q_r und quaderförmige Mengen

$$Q^r := \{(x_1, \ldots, x_r) : |x_\varrho| \leqq q_\varrho, \ \varrho = 1, \ldots, r\}$$

im $R^r(x_1, \ldots, x_r)$ mit folgenden Eigenschaften bestimmt:

(a) Alle $F \in \mathfrak{F}^r$, $P \in \mathfrak{P}^r$ und die Einheiten E von (2.41) sind in einer offenen Umgebung von Q^r analytisch. Diejenigen der in Satz 1 vorgegebenen Funktionen $F_1, \ldots, F_s$, die nicht zu $\mathfrak{F}^n$ gehören, die also im Nullpunkt nicht verschwinden, sind in Q^n von Null verschieden. Diejenigen Diskriminanten und Resultanten von Pseudopolynomen aus $\mathfrak{P}^{r+1}$ $(r = 1, \ldots, n-1)$, die nicht zu $\mathfrak{F}^r$ gehören, verschwinden in Q^r nicht.

(b) Q^n ist in der in Satz 1 vorgegebenen Umgebung U enthalten.

(c) Ist $(x_1, \ldots, x_r) \in Q^r$ $(r = 1, \ldots, n-1)$ und gilt $P(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) = 0$ für ein P aus $\mathfrak{P}^{r+1}$, so ist $|x_{r+1}| < q_{r+1}$.

Um diese q_r zu finden, wähle man zuerst positive Zahlen $q_1', \ldots, q_n'$, so daß (a) und (b) erfüllt sind und setze $q_n = q_n'$. Dann können Zahlen $q_1'', \ldots, q_{n-1}''$ mit $0 < q_r'' \leqq q_r'$ $(r = 1, \ldots, n-1)$ gefunden werden, so daß in bezug auf $q_1'', \ldots, q_{n-1}'', q_n$ die Bedingung (c) für $r = n-1$ erfüllt wird. (Das ist möglich, da $x_n = 0$ einzige Wurzel von $P(0, \ldots, 0, x_n) = 0$ $(P \in \mathfrak{P}^n)$ ist.) Es wird $q_{n-1} = q_{n-1}''$ gesetzt und das Verfahren in dieser Weise fortgesetzt.

Der Beweis von Satz 1 ergibt sich nun aus der Behauptung (I^n) des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz. *Für $r = 1, \ldots, n$ gibt es Komplexe $(Q^r, \mathfrak{K}^r)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I^r) *$\mathfrak{K}^r$ besteht aus analytischen A_1-Zellen. Ist B_F die Menge der in Q^r gelegenen Nullstellen einer Funktion F aus $\mathfrak{F}^r$, so gibt es einen Unterkomplex $(B_F, \mathfrak{K}_F)$ von $(Q^r, \mathfrak{K}^r)$. Für jede Zelle a aus $\mathfrak{K}_F$ gilt die Aussage der Zusätze* a) *und* b) *von Satz* 1, *worin n durch r zu ersetzen ist.*

(II^r) *Ist der k-Zelle a aus $\mathfrak{K}^r$ gemäß Definition* (1.6) *die k-Zelle a^* im $R^k(t_1, \ldots, t_k)$ zugeordnet und ist die topologische Abbildung φ_a von $\overline{a^*}$ auf $\bar{a}$, für die $\varphi_a(a^*) = a$ gilt, durch*

$$x_i = f_i(t_1, \ldots, t_k), \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{2.42}$$

mit in a^* analytischen, in $\overline{a^*}$ stetigen Funktionen f_i gegeben, so gibt es für jedes P aus $\mathfrak{P}^{r+1}$ (wobei $\mathfrak{P}^{n+1}$ die leere Menge sein soll) eine endliche Menge $\mathfrak{Z}(P; a)$ von in a^* komplex-analytischen Funktionen Z, die je in gewissen Vielfachheiten auftreten, so daß identisch für alle x_{r+1} und $t = (t_1, \ldots, t_k) \in a^*$

$$P(f_1(t), \ldots, f_r(t), x_{r+1}) = \prod_{Z \in \mathfrak{Z}(P; a)} (x_{r+1} - Z(t)) \tag{2.43}$$

gilt. Die Funktionen Z erfüllen dabei die folgende Eindeutigkeitsbedingung: Ist $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}^{r+1}$ und $Z_1 \in \mathfrak{Z}(P_1; a)$, $Z_2 \in \mathfrak{Z}(P_2; a)$ und stimmen Z_1 und Z_2 in einem Punkt aus a^* überein, so gilt $Z_1 = Z_2$ in ganz a^*.

Beweis des Hilfssatzes. Die Komplexe $(Q^r, \mathfrak{K}^r)$ werden durch Induktion über r definiert. Wie oben festgestellt, ist $\mathfrak{P}^1$ entweder leer oder enthält nur das Polynom x_1. $Q^1 = [-q_1, +q_1]$ wird in die A_1-Zellen $\{-q_1\}$, $(-q_1, 0)$, $\{0\}$, $(0, +q_1)$, $\{+q_1\}$ zerlegt, die offensichtlich einen Komplex $(Q^1, \mathfrak{K}^1)$ mit der Eigenschaft (I^1) bilden. Daß auch (II^1) gilt, folgt wie im Induktionsschritt $(r \to r+1$ bei $r < n)$.

Es sei a eine Zelle aus $\mathfrak{K}^r$. Zunächst werden einige Eigenschaften der Funktionen $Z \in \mathfrak{Z}(P; a)$, die nach Induktionsvoraussetzung der Zelle a und einem Pseudopolynom P aus $\mathfrak{P}^{r+1}$ zugeordnet sind, festgestellt. Die Beziehung (2.43) stellt für jeden Punkt $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$ aus a^* eine irreduzible Faktorzerlegung von $P(f_1(t), \ldots, f_r(t), x_{r+1})$ in $\mathfrak{H}^k(t^0)[x_{r+1}]$ dar. Da die Zerlegung eindeutig ist und P eine reelle Funktion ist, folgt, daß die $Z \in \mathfrak{Z}(P; a)$ in konjugiert komplexen Paaren auftreten. Ist also ein Z in einem Punkt aus a^* reell, so gilt $Z = \bar{Z}$ wegen der Eindeutigkeitsbedingung in ganz a^*, d.h. Z ist dann in ganz a^* reell.

Nach Hilfssatz (2.2) lassen sich die Funktionen Z stetig auf $\overline{a^*}$ fortsetzen, und (2.43) gilt für alle t aus $\overline{a^*}$. Für jeden Punkt $x=(x_1, \ldots, x_r)$ aus $\bar{a}$ gilt also identisch in x_{r+1}

$$P(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) = \prod_{Z \in \mathfrak{Z}(P;\,a)} \left(x_{r+1} - Z \circ \varphi_a^{-1}(x)\right).$$

Diese Gleichung ist speziell auch für einen Punkt $'x=('x_1, \ldots, 'x_r)$ einer in ∂a enthaltenen Zelle $'a$ richtig. Nach (II$'$) gilt aber für $'x$ auch eine analoge Gleichung

$$P('x_1, \ldots, 'x_r, x_{r+1}) = \prod_{'Z \in \mathfrak{Z}(P;\,'a)} \left(x_{r+1} - 'Z \circ \varphi_{'a}^{-1}('x)\right).$$

Es sei ein festes Z^0 aus $\mathfrak{Z}(P;a)$ herausgegriffen. Es gibt dann ein $'Z_0$ aus $\mathfrak{Z}(P;'a)$, so daß im Punkte $'x$

$$Z_0 \circ \varphi_a^{-1} = 'Z_0 \circ \varphi_{'a}^{-1} \tag{2.44}$$

gilt. $\widetilde{'a}$ sei die Teilmenge der Punkte von $'a$, in denen (2.44) gilt. $\widetilde{'a}$ ist nicht leer und in $'a$ abgeschlossen. Angenommen, $\widetilde{'a}$ ist in $'a$ nicht offen. Dann gibt es eine Folge von Punkten $'z^m$ $(m=1, 2, \ldots)$ aus $'a$, für die (2.44) nicht gilt, die gegen ein $'z$ aus $\widetilde{'a}$ konvergiert. Für die $'z^m$ müssen zu (2.44) analoge Gleichungen mit anderen $'Z$ aus $\mathfrak{Z}(P;'a)$ gelten. Also gibt es ein von $'Z_0$ verschiedenes $'Z_1$, so daß $Z_0 \circ \varphi_a^{-1}('z) = 'Z_1 \circ \varphi_{'a}^{-1}('z)$ gilt. Da in $'z$ auch (2.44) gilt, ist das ein Widerspruch zur Eindeutigkeitsbedingung. $'a$ ist zusammenhängend, also gilt (2.44) in ganz $'a$. Das bedeutet, daß die stetigen Fortsetzungen der Funktionen $Z \circ \varphi_a^{-1}$ $\left(Z \in \mathfrak{Z}(P;a)\right)$ auf $'a$ unter den Funktionen $'Z \circ \varphi_{'a}^{-1}$ $\left('Z \in \mathfrak{Z}(P;'a)\right)$ vorkommen.

Jetzt kann man in der in (1.8) beschriebenen Weise einen Komplex $(Q^{r+1}, \mathfrak{K}^{r+1})$ bilden. Für $(M, \mathfrak{K})$ ist dabei $(Q^r, \mathfrak{K}^r)$ einzusetzen, q ist hier gleich q_{r+1}, und $\mathfrak{Z}(a)$ ist die Menge der stetigen Fortsetzungen auf $\bar{a}$ der reellen Funktionen unter den $Z \circ \varphi_a^{-1}$ $\left(Z \in \mathfrak{Z}(P;a),\ P \in \mathfrak{P}^{r+1}\right)$. Die Voraussetzung (α) von (1.9) folgt aus der Eindeutigkeitsbedingung der Z, die Voraussetzung (β) wurde gerade nachgewiesen.

Es ist zu zeigen, daß dieser Komplex $(Q^{r+1}, \mathfrak{K}^{r+1})$ die Eigenschaft (I^{r+1}) hat. Zunächst folgt sofort aus (1.9), daß $\mathfrak{K}^{r+1}$ aus analytischen Zellen besteht, die wegen (1.10) auch A_1-Zellen sind, denn das Produkt aller $P \in \mathfrak{P}^{r+1}$ hat die in (1.10) vorausgesetzte Eigenschaft. Es sei nun ein F aus $\mathfrak{F}^{r+1}$ gegeben. Wegen (2.41) und (2.43) zerfällt F über einer Zelle a aus $\mathfrak{K}^r$ bis auf eine nicht verschwindende Funktion in ein Produkt von Linearfaktoren $x_{r+1} - Z \circ \varphi_a^{-1}(x)$. Die Menge der über a gelegenen reellen Nullstellen von F besteht also, soweit sie nicht leer ist, aus Zellen erster Art über a. Jede dieser Zellen bildet zusammen mit ihren Randzellen einen Unterkomplex. Vereinigt man die so für alle a aus $\mathfrak{K}^r$ gebildeten Unterkomplexe, so erhält man einen Unterkomplex, dessen Träger die genaue Nullstellenmenge von F in Q^{r+1} ist. Da die Zellen dieses Unterkomplexes Zellen erster Art sind, folgt aus (1.9) und (1.10), daß die Eigenschaften der Behauptung (I^{r+1}), die den Zusätzen a) und b) von Satz 1 entsprechen, erfüllt sind.

Die Behauptung (II^{r+1}) wird zunächst lokal gezeigt. Die Zelle $a \in \mathfrak{K}^r$ mit der zugehörigen Zelle a^* und der Abbildung (2.42) sei jetzt festgehalten.

1. Fall. $\hat{a} \in \mathfrak{K}^{r+1}$ sei eine Zelle zweiter Art über a, die mit $Z_1 \circ \varphi_a^{-1}$, $Z_2 \circ \varphi_a^{-1}$ gebildet sei, wobei $Z_1 \circ \varphi_a^{-1}$ und $Z_2 \circ \varphi_a^{-1}$ reelle Funktionen sind ($Z_1, Z_2 \in \bigcup \{\mathfrak{Z}(P; a) : P \in \mathfrak{P}^{r+1}\}$ bzw. $Z_1 = -q_{r+1}$ bzw. $Z_2 = +q_{r+1}$), die im Sinn von (1.8) aufeinander folgen. Nach (1.9) ist $\hat{a}^*$ die mit Z_1, Z_2 über a^* im $R^{k+1}(t_1, \ldots, t_k, t_{k+1})$ gebildete Zelle zweiter Art. Die Abbildung $\varphi_{\hat{a}}$ wird durch

$$x_i = f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, r,$$
$$x_{r+1} = t_{k+1}$$

gegeben, wobei $(t_1, \ldots, t_k)$ durch t abgekürzt ist. Man hat also für die Pseudopolynome P aus $\mathfrak{P}^{r+2}$ die verlangte Zerlegung in Linearfaktoren von $P(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2})$ über $\hat{a}^*$, d.h. für $(t, t_{k+1}) \in \hat{a}^*$, zu zeigen. Die Diskriminante von $P(x_1, \ldots, x_{r+1}, x_{r+2})$ ist nun nach Wahl von Q^{r+1} in Q^{r+1} von Null verschieden, oder sie ist eine Funktion F aus $\mathfrak{F}^{r+1}$. Im letzten Fall ist die Diskriminante von $P(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2})$ gleich $F(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1})$. Wegen (2.41) und (2.43) ist sie dann in $\hat{a}^*$ von Null verschieden, was auch im ersten Fall gilt, und man kann lokal auflösen: Für jeden Punkt $\hat{t}^0 = (t^0, t_{k+1}^0)$ von $\hat{a}^*$ gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{Z}(P; \hat{t}^0)$ von Funktionen $\hat{Z}(t, t_{k+1})$ aus $\mathfrak{H}^{k+1}(t^0)$, so daß

$$P(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2}) = \prod_{\hat{Z} \in \mathfrak{Z}(P; \hat{t}^0)} (x_{r+2} - \hat{Z}(t, t_{k+1}))$$

in einer in $\hat{a}^*$ enthaltenen Umgebung von $\hat{t}^0$ gilt. Dabei nehmen zwei Funktionen aus $\mathfrak{Z}(P; \hat{t}^0)$ in keinem Punkt dieser Umgebung den gleichen Wert an. Sind P_1 und P_2 zwei verschiedene Pseudopolynome aus $\mathfrak{P}^{r+2}$, so kann die Resultante von $P_1(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2})$ und $P_2(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2})$ in $\hat{a}^*$ nicht verschwinden. Also nehmen zwei Funktionen $\hat{Z}_1$ bzw. $\hat{Z}_2$ aus $\mathfrak{Z}(P_1; \hat{t}^0)$ bzw. $\mathfrak{Z}(P_2; \hat{t}^0)$ in keinem Punkt einer Umgebung von $\hat{t}^0$ den gleichen Wert an. Damit ist (II^{r+1}) in diesem Fall lokal gezeigt.

2. Fall. $\hat{a}$ sei eine Zelle erster Art über a, die mit der reellen Funktion $Z_0 \circ \varphi_a^{-1}$ ($Z_0 \in \bigcup \{\mathfrak{Z}(P; a) : P \in \mathfrak{P}^{r+1}\}$ bzw. $Z_0 = \pm q_{r+1}$) gebildet sei. Nach (1.9) ist $\hat{a}^*$ gleich a^*, und $\varphi_{\hat{a}}$ wird durch

$$x_i = f_i(t), \qquad i = 1, \ldots, r,$$
$$x_{r+1} = Z_0(t)$$

gegeben. Daher ist für jedes P aus $\mathfrak{P}^{r+2}$ das Zerfallen in Linearfaktoren von $P(f_1(t), \ldots, f_r(t), Z_0(t), x_{r+2})$ über a^*, d.h. für $t \in a^*$, zu zeigen. Für $P \in \mathfrak{P}^{r+2}$ wird

$$\tilde{P}(t, t_{k+1}, x_{r+2}) := P(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1}, x_{r+2})$$

gesetzt. Dabei ist $t \in a^*$ und $|t_{k+1}| < q_{r+1} + \delta$ mit einem geeigneten positiven δ. Nun sei t^0 ein Punkt von a^* und

$$\tilde{P} = \prod_u \tilde{p}_u \tag{2.45}$$

eine irreduzible Faktorzerlegung von $\tilde{P}$ in $\mathfrak{H}^{k+1}(t^0, Z_0(t^0))[x_{r+2}]$, die so normiert ist, daß die höchsten Koeffizienten der $\tilde{p}_u$ gleich 1 sind.

Für Resultanten und Diskriminanten gilt eine Produktformel, die man leicht aus der Darstellung durch die Wurzeln der Polynome (vgl. z.B. [3]) ableitet. Bedeutet $R(f, g)$ die Resultante von f und g und $D(f)$ die Diskriminante von f, so hat man $R(\prod_\nu f_\nu, \prod_\mu g_\mu) = \alpha \cdot \prod_\nu \cdot \prod_\mu R(f_\nu, g_\mu)$ und $D(\prod_\nu f_\nu) = \beta \cdot \prod_\nu D(f_\nu) \prod_{\varkappa \neq \lambda} R(f_\varkappa, f_\lambda)$, wobei α und β Faktoren sind, die von der Anzahl, den Graden und den höchsten Koeffizienten der Polynome abhängen.

Für Pseudopolynome P, P_1, P_2 aus $\mathfrak{P}^{r+2}$ ist $D(\tilde{P})$ bzw. $R(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ entweder überhaupt von Null verschieden oder gleich $F(f_1(t), \ldots, f_r(t), t_{k+1})$ mit einem F aus $\mathfrak{F}^{r+1}$. Wegen (2.41) und (2.43) ist also $D(\tilde{P})$ bzw. $R(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ bis auf eine nicht verschwindende Funktion gleich einem Produkt von Linearfaktoren $t_{k+1} - Z(t)$ mit $Z \in \bigcup\{\mathfrak{Z}(P; a): P \in \mathfrak{P}^{r+1}\}$. Das sind Einheiten in $\mathfrak{H}^{k+1}(t^0, Z_0(t^0))$, falls $Z(t^0) \neq Z_0(t^0)$ ist, und irreduzible Faktoren im andern Fall. Aus $Z(t^0) = Z_0(t^0)$ folgt aber wegen der Eindeutigkeitsbedingung $Z = Z_0$. Also ist $D(\tilde{P})$ bzw. $R(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ bis auf eine Einheit eine Potenz von $t_{k+1} - Z_0(t)$. Aus den angeführten Produktformeln und der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Faktoren folgt dann

$$\left.\begin{array}{l} D(\tilde{p}_u) \\ R(\tilde{p}_{u_1}, \tilde{p}_{u_2}) \\ R(\tilde{p}_{1u}, \tilde{p}_{2v}) \end{array}\right\} = \text{Einheit} \times \text{Potenz von } t_{k+1} - Z_0(t), \tag{2.46}$$

wobei $\tilde{p}_u, \tilde{p}_{1u}, \tilde{p}_{2v}$ die Faktoren von $\tilde{P}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ gemäß (2.45) sind. Speziell folgt hieraus, daß $D(\tilde{p}_u)$ entweder in einer Umgebung von $(t^0, Z_0(t^0))$ von Null verschieden ist oder in genau den Punkten $(t, Z_0(t))$ verschwindet. Wird die Substitution $y = t_{k+1} - Z_0(t)$ gemacht, so ist $\tilde{p}_u(t, y + Z_0(t), x_{r+2}) =: q(t, y, x_{r+2})$ ein irreduzibles Pseudopolynom aus $\mathfrak{H}^{k+1}(t^0, 0)[x_{r+2}]$, dessen Diskriminante entweder in einer Umgebung von $(t^0, 0)$ von Null verschieden ist[6a]) oder in genau den Punkten $(t, 0)$ verschwindet. Nach Hilfssatz (2.3) gibt es eine Funktion $\hat{Z}$ aus $\mathfrak{H}^k(t^0)$, so daß $q(t, 0, x_{r+2}) = \tilde{p}_u(t, Z_0(t), x_{r+2}) = (x_{r+2} - \hat{Z}(t))^L$ mit ganzem positivem L gilt. Die so für alle Faktoren $\tilde{p}_u$ von $\tilde{P}$ gebildeten Funktionen $\hat{Z}$ seien mit den entsprechenden Vielfachheiten L zur Menge $\mathfrak{Z}(P; t^0)$ zusammengefaßt. Es gilt also

$$\tilde{P}(t, Z_0(t), x_{r+2}) = \prod_{\hat{Z} \in \mathfrak{Z}(P; t^0)} (x_{r+2} - \hat{Z}(t))$$

in einer Umgebung von t^0. Sind P_1, P_2 Pseudopolynome aus $\mathfrak{P}^{r+2}$ und ist $\hat{Z}_1 \in \mathfrak{Z}(P_1; t^0)$, $\hat{Z}_2 \in \mathfrak{Z}(P_2; t^0)$ und gilt $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ in einem Punkt t^1 einer hinreichend kleinen Umgebung von t^0, so haben zwei Faktoren $\tilde{p}_{1u}$ bzw. $\tilde{p}_{2v}$ von $\tilde{P}_1$ bzw. $\tilde{P}_2$

[6a]) In diesem Fall hat q den Grad 1.

eine gemeinsame Wurzel über $(t^1, Z_0(t^1))$. Wegen (2.46) müssen sie dann über jedem Punkt $(t, Z_0(t))$ eine gemeinsame Wurzel haben, woraus $\hat{Z}_1(t)=\hat{Z}_2(t)$ folgt. Damit ist die Behauptung (II^{r+1}) auch in diesem Fall für eine Umgebung eines beliebig gewählten Punktes t^0 aus a^* gezeigt.

Bildet man die lokalen Zerlegungen für jeden Punkt aus $\hat{a}^*$ (im 1. Fall) bzw. aus a^* (im 2. Fall), so folgt aus der Eindeutigkeit der irreduziblen Faktorzerlegung, daß die Zerlegungen im Durchschnitt ihrer Gültigkeitsbereiche gleich sind. Die $\hat{Z}$ gehen also durch analytische Fortsetzung auseinander hervor. Da $\hat{a}^*$ und a^* einfach zusammenhängend sind, erhält man in ganz $\hat{a}^*$ bzw. a^* analytische Funktionen $\hat{Z}$. Stimmen zwei $\hat{Z}$ in einem Punkt überein, so in einer Umgebung, also in ganz $\hat{a}^*$ bzw. a^*.

Damit ist der Hilfssatz und mit ihm Satz 1 bewiesen.

§ 3. Gemeinsame Verfeinerung von Zellenkomplexen

(3.1) **Satz 2** (Koopman-Brown [5], p. 242). *G sei eine offene und zusammenhängende Teilmenge des $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ und M eine kompakte Teilmenge von G. F sei eine in G nicht identisch verschwindende analytische Funktion. Dann ist die Menge der Punkte $(y_1, \ldots, y_n)$ des $R^n(y_1, \ldots, y_n)$, für die es ein $(x_1, \ldots, x_n)$ aus M gibt, so daß $F(x_1+t y_1, \ldots, x_n+t y_n)$ für alle reellen t aus einer Umgebung von $t=0$ identisch verschwindet, in $R^n(y_1, \ldots, y_n)$ abgeschlossen und nirgends dicht.*

Folgerung. Für $i=1, \ldots, m$ sei G_i eine offene und zusammenhängende Teilmenge des R^n, M_i eine kompakte Teilmenge von G_i und F_i eine in G_i nicht identisch verschwindende analytische Funktion. Dann gibt es ein Koordinatensystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$, so daß für $i=1, \ldots, m$ die Funktion F_i in jedem Punkt von M_i bezüglich x_n ausgezeichnet ist.

Beweis der Folgerung. Eine endliche Vereinigung nirgends dichter Mengen ist ebenfalls nirgends dicht. Daher gibt es eine Richtung, so daß F_i auf den Geraden durch Punkte aus M_i, parallel zu dieser Richtung, nicht identisch verschwindet. Wird die x_n-Achse parallel zu dieser Richtung gewählt, so folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 2. In $G \times R^n(y_1, \ldots, y_n)$ sei T die Teilmenge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)=(x, y)$, für die $F(x_1+t y_1, \ldots, x_n+t y_n)$ für alle t aus einer Umgebung von $t=0$ verschwindet. Es mögen π_x bzw. π_y die Projektionen auf $R^n(x)$ bzw. $R^n(y)$ bezeichnen. Zu zeigen ist, daß $S:=\pi_y(T \cap (M \times R^n(y)))$ abgeschlossen und nirgends dicht ist.

Die Abgeschlossenheit von S ist folgendermaßen einzusehen: Ist (y^m) eine gegen y^0 konvergierende Folge von Punkten aus S, so gibt es Punkte x^m aus M, so daß $(x^m, y^m) \in T$ gilt. Da M kompakt ist, kann man annehmen, daß (x^m) gegen einen Punkt x^0 aus M konvergiert. Es gibt ein $t_1>0$, so daß für alle t mit $|t|<t_1$ und für alle $m=0, 1, 2, \ldots$ die Punkte $(x_1^m+t y_1^m, \ldots, x_n^m+t y_n^m)$ in G liegen. Für $m=1, 2, \ldots$ und alle diese t ist dann $F(x_1^m+t y_1^m, \ldots, x_n^m+y_n^m)$ gleich Null. Daraus folgt $(x^0, y^0) \in T$, also $y^0 \in S$.

Es wird nun gezeigt, daß T eine analytische Menge in $G \times R^n(y)$ ist. Für jeden Punkt (x, y) aus $G \times R^n(y)$ läßt F sich um x in eine Potenzreihe entwickeln, so daß $F(x_1 + t y_1, \ldots, x_n + t y_n)$ in der Form $\sum\limits_{\nu_1 \ldots \nu_n} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} (t y_1)^{\nu_1} \cdot \cdots \cdot (t y_n)^{\nu_n}$ dargestellt werden kann. Also ist $(x, y) \in T$ genau dann, wenn für $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_n = i} a_{\nu_1 \ldots \nu_n} y_1^{\nu_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{\nu_n} =: C_i(x, y) = 0$$

ist. Sei $(x^0, y^0) \in G \times R^n(y)$. Die Entwicklungskoeffizienten $a_{\nu_1 \ldots \nu_n} = a_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x)$ für Punkte x aus einer genügend kleinen Umgebung U von x^0 lassen sich durch Potenzreihen in $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ darstellen, die alle in U konvergieren. Also sind die $C_i(x, y)$ analytische Funktionen in $G \times R^n(y)$, und ihre Potenzreihenentwicklungen um einen Punkt (x^0, y^0) konvergieren in einer von i unabhängigen Umgebung. Läßt man für x, y auch komplexe Werte zu, so stellen die $C_i(x, y)$ holomorphe Funktionen in einer von i unabhängigen komplexen Umgebung von (x^0, y^0) dar. Ist V eine darin relativ kompakte Umgebung und bezeichnet M_i das Maximum von $|C_i|^2$ in $\overline{V}$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(C_i(x, y))^2}{M_i \cdot 2^i} =: H(x, y)$$

in V gleichmäßig und stellt deshalb eine in V holomorphe Funktion dar. Mithin ist H in einer reellen Umgebung von (x^0, y^0) analytisch, und die Nullstellen von H sind genau die Punkte, in denen alle C_i verschwinden. T ist also eine analytische Menge in $G \times R^n(y)$.

Es sei $N \subseteq R^n(y)$ die Menge der y mit $1 \leqq y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqq 2$. Dann genügt es zu zeigen, daß $S \cap N = \pi_y\big(T \cap (M \times N)\big)$ keine inneren Punkte hat. Nach Satz 1 kann $T \cap (M \times N)$ durch endlich viele Komplexe überdeckt werden, die zusammen aus endlich vielen in T enthaltenen analytischen Zellen $a_1, \ldots, a_r$ bestehen. Aus der Annahme, $S \cap N$ habe innere Punkte, folgt dann, daß $\pi_y(\bigcup\limits_{i=1}^{r} a_i)$ und damit auch $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \pi_y(\overline{a}_i)$ innere Punkte hat. Da die Mengen $\pi_y(\overline{a}_i)$ abgeschlossen sind, gibt es ein a unter den a_i mit minimaler Dimension, so daß $\pi_y(\overline{a})$ innere Punkte hat. $\pi_y(\partial a)$ hat keine inneren Punkte, ist daher nirgends dicht. Es gibt also einen inneren Punkt y von $\pi_y(\overline{a})$ und eine in $\pi_y(\overline{a})$ enthaltene Umgebung V von y, die $\pi_y(\partial a)$ nicht trifft. $\pi_y(a)$ enthält daher V und hat deshalb innere Punkte. Die Dimension der analytischen Zelle a sei k. Dann gibt es eine k-Zelle b im $R^k(t_1, \ldots, t_k)$ und eine topologische Abbildung

$$\varphi: \begin{cases} x_i = f_i(t_1, \ldots, t_k), & i = 1, \ldots, n \\ y_j = g_j(t_1, \ldots, t_k), & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

von $\overline{b}$ auf $\overline{a}$ mit in b analytischen Funktionen f_i, g_j. $\pi_y \circ \varphi(b) = \pi_y(a)$ hat innere Punkte, also ist $k \geqq n$, und der Rang der Funktionalmatrix $J = \dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)}$ ist gleich n (vgl. [4] oder [12])[7]. t^0 sei ein Punkt aus b, in dem eine n-reihige

[7]) Will man diesen Satz über Abhängigkeit von Funktionen vermeiden, so kann man wie in [5] schließen.

Unterdeterminante von J nicht verschwindet. $y^0 = \pi_y \circ \varphi(t^0)$ ist ein innerer Punkt von $\pi_y \circ \varphi(b)$, und man kann eine analytische Abbildung ψ einer Umgebung von y^0 finden, für die $\pi_y \circ \varphi \circ \psi(y) = y$ gilt. Es gehören also die Punkte $(\pi_x \circ \varphi \circ \psi(y), \pi_y \circ \varphi \circ \psi(y)) = (\pi_x \circ \varphi \circ \psi(y), y)$ zu T, d.h. es gibt eine Umgebung W von y^0 und in W analytische Funktionen $h_i(y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, so daß $F(h_1(y) + t y_1, \ldots, h_n(y) + t y_n)$ identisch für alle y aus W und alle t aus einer Umgebung von $t = 0$ verschwindet. Da nun aber die zugehörige Funktionalmatrix den Rang n hat, folgt, daß die Nullstellenmenge von F innere Punkte hat, was wegen $F \not\equiv 0$ und dem Zusammenhang von G ein Widerspruch ist.

(3.2) Um für das folgende eine bequeme Sprechweise zu haben, sei definiert: *Sind $(K, \mathfrak{K})$ und $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, endliche Zellenkomplexe im R^n, so heißt $(K, \mathfrak{K})$ ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, wenn jede Zelle aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$ Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$ ist.*

Ist $(K, \mathfrak{K})$ ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, und hat eine Zelle a aus $\mathfrak{K}$ mit einer Zelle b aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$ nichtleeren Durchschnitt, so ist $a \subseteq b$. Denn b ist Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$, unter denen a vorkommen muß.

Um nachzuweisen, daß ein Komplex $(K, \mathfrak{K})$ ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, ist, genügt es zu zeigen:

1. $K \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$.

2. Ist $a \in \mathfrak{K}$, $b \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$ und gilt $a \cap b \neq \emptyset$, so folgt $a \subseteq b$.

Denn dann wird jede Zelle b aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$ durch Zellen $a_1, \ldots, a_r$ aus $\mathfrak{K}$ überdeckt, wobei man $a_\varrho \cap b \neq \emptyset$, $\varrho = 1, \ldots, r$, annehmen kann, so daß $\bigcup_{\varrho=1}^{r} a_\varrho \subseteq b$, also $\bigcup_{\varrho=1}^{r} a_\varrho = b$ folgt.

Satz 3. *Es seien $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, $i = 1, \ldots, m$, endliche Komplexe von A-Zellen im R^n. Dann existiert ein Verfeinerungskomplex $(K, \mathfrak{K})$ für sie, der darüber hinaus so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{K}$ aus analytischen A_1-Zellen besteht und daß die Durchmesser der Zellen aus $\mathfrak{K}$, soweit sie $\bigcup_{i=1}^{m} K_i$ treffen, kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ sind.*

Beweis. Die Behauptung über die Durchmesser der Zellen wird dadurch erledigt, daß $\bigcup_{i=1}^{m} K_i$ durch endlich viele endliche Komplexe von A-Zellen überdeckt wird, deren Durchmesser kleiner als ε sind, und daß dann diese Zusatzkomplexe mit unter die gegebenen aufgenommen werden.

Es wird nun Induktion über die Dimension n des Raumes R^n angewandt. Der Fall $n = 1$ ist klar. Der Induktionsschritt $(n-1 \to n)$ wird in mehreren Schritten durchgeführt.

(A) Es bezeichne $\mathfrak{K}_i'$ die Menge der Zellen aus $\mathfrak{K}_i$, deren Dimensionen kleiner als n sind und K_i' ihre Vereinigungsmenge. $(K_i', \mathfrak{K}_i')$ ist ein Unterkomplex von $(K_i, \mathfrak{K}_i)$. *Ist dann* $(K, \mathfrak{K})$ *ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe* $(K_i', \mathfrak{K}_i')$ *und gilt* $K \geqq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$, *so ist* $(K, \mathfrak{K})$ *auch ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe* $(K_i, \mathfrak{K}_i)$.

Beweis. Nach dem Satz von der Gebietsinvarianz (vgl. [1], p. 396) sind die Dimensionen von Zellen im R^n höchstens gleich n, und für n-dimensionale Zellen a ist ∂a der topologische Rand von a. Es sei also a eine n-Zelle aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$ und x ein Punkt von a. x ist in einer Zelle b aus $\mathfrak{K}$ enthalten. Wenn b nicht in a enthalten wäre, müßte $b \frown \partial a$ wegen des Zusammenhanges von b nichtleer sein. b hätte nichtleeren Durchschnitt mit einer Zelle aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i$, die in ∂a enthalten wäre, also zu $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ gehörte. Man hätte daher $b \subseteq \partial a$, im Widerspruch zu $x \in b$. Es ist also $x \in b \subseteq a$, woraus die Behauptung folgt.

(B) Die Zellen a aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ sind nach Voraussetzung A-Zellen. Es bezeichne A_a eine A-Menge von a. Für jeden Punkt von $\bar{a}$ gibt es eine offene, zusammenhängende Umgebung V und eine in V analytische Funktion F, die, da die Dimension von a kleiner als n ist, nicht identisch verschwindet, so daß $V \frown A_a = \{x\colon x \in V, F(x) = 0\}$ gilt. Es gibt endlich viele solcher Umgebungen V_a^σ, $\sigma = 1, \ldots, s_a$, zugehörige Funktionen F_a^σ und kompakte Mengen $M_a^\sigma \subseteq V_a^\sigma$ mit $\bigcup_{\sigma=1}^{s_a} M_a^\sigma \geqq \bar{a}$. Nach der Folgerung von Satz 2 kann ein Koordinatensystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$ des R^n gefunden werden, so daß für alle a aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ und $\sigma = 1, \ldots, s_a$ gilt: F_a^σ ist in jedem Punkt von M_a^σ bezüglich x_n ausgezeichnet. Daraus folgt: Ist x_0 ein Punkt aus $\bar{a}\left(a \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'\right)$, so gibt es ein σ, so daß $x^0 \in M_a^\sigma \subseteq V_a^\sigma$ gilt und F_a^σ in x^0 bezüglich x_n ausgezeichnet ist. Daher gibt es nach Satz 1 eine Umgebung $U \subseteq V_a^\sigma$ von x_0 und einen endlichen Komplex $(L, \mathfrak{L})$ mit $L = U \frown \{F_a^\sigma = 0\} = U \frown A_a \geqq U \frown \bar{a}$. Dabei besteht $\mathfrak{L}$ aus analytischen A_1-Zellen, für die die in den Zusätzen a) und b) von Satz 1 genannten Eigenschaften gelten. $\bar{a}$ wird durch endlich viele derartiger Komplexe $(L, \mathfrak{L})$ überdeckt. Die so für alle $a \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ gebildeten Komplexe seien $(L_j, \mathfrak{L}_j)$, $j = 1, \ldots, p$.

Ist nun $(K, \mathfrak{K})$ *ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe* $(L_j, \mathfrak{L}_j)$, *so auch für die Komplexe* $(K_i', \mathfrak{K}_i')$.

Beweis. Für jede Zelle a aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ ist $a \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} L_j \subseteq K$. Es genügt daher zu zeigen: Ist $a \in \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$, $c \in \mathfrak{K}$ und ist $a \frown c \neq \emptyset$, so ist $c \subseteq a$. Wegen $a \frown c \neq \emptyset$ hat c nichtleeren Durchschnitt mit einer in A_a enthaltenen Zelle aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$, ist also in A_a enthalten. Es sei P ein Punkt von $a \frown c$. Es gibt eine Umgebung V von P mit $V \frown A_a = V \frown a$, woraus $V \frown c \subseteq V \frown A_a = V \frown a$ und damit $V \frown c \subseteq a \frown c$

folgt. Das bedeutet, daß $a \cap c$ in c offen ist. Es ist aber auch $a \cap c$ in c abgeschlossen. Denn sei $P \in \overline{c \cap a} \cap c$. Aus der Annahme $P \in \partial a$ folgt, daß $P \in a'$ für eine in ∂a enthaltene Zelle a' aus $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{K}_i'$ gilt, woraus sich $c \cap a' \neq \emptyset$ und deshalb wie oben $c \subseteq A_{a'}$ ergibt. Dann gibt es eine Umgebung V von P mit $V \cap A_{a'} = V \cap a'$, woraus $V \cap c \subseteq V \cap a'$ und damit $V \cap c \cap a = \emptyset$ folgt. Das ist aber ein Widerspruch zu $P \in \overline{c \cap a}$. Weil c zusammenhängend ist, ergibt sich $c \cap a = c$, also $c \subseteq a$.

(C) Es wird jetzt ein Verfeinerungskomplex $(K, \mathfrak{K})$ von analytischen A_1-Zellen für die Komplexe $(L_j, \mathfrak{L}_j)$ konstruiert, der die Bedingung $K \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ erfüllt. Wegen (A) und (B) ist $(K, \mathfrak{K})$ dann auch ein Verfeinerungskomplex für die Komplexe $(K_i, \mathfrak{K}_i)$, und Satz 3 ist bewiesen.

Für jede Zelle b aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$ gilt die in Zusatz b) von Satz 1 genannte Eigenschaft. Es gibt also eine in einer Umgebung von $\bar{b}$ analytische Funktion G_b, deren Nullstellenmenge A_b eine A-Menge von b ist, und die in jedem Punkt von $\bar{b}$ bezüglich x_n ausgezeichnet ist. Es seien b_1, b_2 zwei Zellen aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$ mit nichtleerem Durchschnitt. Für jeden Punkt $x \in \overline{b_1 \cap b_2}$ gibt es nach Satz 1 eine Umgebung U und einen endlichen Komplex $(M, \mathfrak{M})$, so daß $M = U \cap A_{b_1} \cap A_{b_2} \supseteq U \cap \bar{b}_1 \cap \bar{b}_2$ gilt. Dabei soll für die Zellen aus $\mathfrak{M}$ wieder die Aussage von Zusatz a) des Satzes 1 gelten. $\overline{b_1 \cap b_2}$ wird durch endlich viele solcher Komplexe $(M, \mathfrak{M})$ überdeckt. Die so für je zwei Zellen b_1, b_2 aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$ mit nichtleerem Durchschnitt gebildeten Komplexe seien $(M_k, \mathfrak{M}_k)$, $k = 1, \ldots, q$. Bezeichnet nun π die Projektionsabbildung von $R^n(x_1, \ldots, x_n)$ auf $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, so gilt wegen Zusatz a) von Satz 1 für alle Zellen b aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j \cup \bigcup_{k=1}^{q} \mathfrak{M}_k$: π ist auf $\bar{b}$ injektiv und $\pi(b)$ ist eine A-Zelle. Für jedes b bildet $\bar{b}$ zusammen mit den in $\bar{b}$ enthaltenen Zellen des Komplexes, dem b angehört, einen Unterkomplex. Deshalb lassen sich auch die A-Zellen $\pi(b)$ mit $b \in \bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j \cup \bigcup_{k=1}^{q} \mathfrak{M}_k$ zu Komplexen zusammenfassen. Die Induktionsvoraussetzung ist also anwendbar: Es gibt einen Komplex $(N, \mathfrak{N})$ von analytischen A_1-Zellen im $R^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, so daß jede Zelle $\pi(b)$ mit $b \in \bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j \cup \bigcup_{k=1}^{q} \mathfrak{M}_k$ Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{N}$ ist.

Der Verfeinerungskomplex $(K, \mathfrak{K})$ soll nun in der in (1.8) beschriebenen Weise konstruiert werden. Hierzu muß für jede Zelle d aus $\mathfrak{N}$ eine Menge $\mathfrak{Z}(d)$ von in $\bar{d}$ stetigen reellwertigen Funktionen angegeben werden. $\mathfrak{B}_d$ sei die Menge derjenigen Zellen b aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$, für die $d \subseteq \pi(b)$ gilt. Sei $b \in \mathfrak{B}_d$. Die Umkehrung von $\pi | \bar{b}$: $\bar{b} \to \pi(\bar{b})$ ist eine stetige Abbildung in $\pi(\bar{b})$. Jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x$ aus $\pi(\bar{b})$ ist also stetig eine reelle Zahl $\xi(x)$ zugeordnet, derart daß $(x, \xi(x)) \in \bar{b}$ ist. Die Einschränkung von ξ auf $\bar{d}$ sei mit Z_b bezeichnet. Dann sei $\mathfrak{Z}(d)$ die Menge der Funktionen Z_b, $b \in \mathfrak{B}_d$.

Ist $b \in \mathfrak{B}_d$, so ist jede Randzelle d' von d in $\pi(\bar{b})$ enthalten. Dann ist entweder $d' \subseteq \pi(b)$ oder es gibt eine Randzelle b' von b, so daß $d' \cap \pi(b') \neq \emptyset$ ist, woraus $d' \subseteq \pi(b')$ folgt. Daraus ergibt sich, daß die Einschränkungen der Funktionen Z aus $\mathfrak{Z}(d)$ auf $\overline{d'}$ in $\mathfrak{Z}(d')$ enthalten sind. Die Voraussetzung (β) von (1.8) ist also erfüllt. Um auch Voraussetzung (α) nachzuweisen, sei $d \in \mathfrak{N}$, $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}_d$, und es sei $Z_{b_1}(x^0) = Z_{b_2}(x^0)$ für einen Punkt $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ aus d angenommen. Zu zeigen ist $Z_{b_1} = Z_{b_2}$. Es sei $\hat{d}_1 := \{(x, x_n): x \in d,\ x_n = Z_{b_1}(x)\}$. Es genügt $\hat{d}_1 \subseteq b_2$ zu zeigen, denn daraus folgt, daß für jedes x aus d der Punkt $(x, Z_{b_1}(x))$ ein Punkt aus b_2 ist, d.h. gleich dem Punkt $(x, Z_{b_2}(x))$ ist. Es ist $\hat{d}_1 \cap b_2 \neq \emptyset$. Ist P ein Punkt von $\overline{\hat{d}_1 \cap b_2} \cap \hat{d}_1$, so folgt $\pi(P) \in d$, also $P \in b_2$. $\hat{d}_1 \cap b_2$ ist daher in $\hat{d}_1$ abgeschlossen. Angenommen, $\hat{d}_1 \cap b_2$ ist in $\hat{d}_1$ nicht offen. Dann gibt es ein P aus $\hat{d}_1 \cap b_2$ und eine gegen P konvergierende Folge (P_m) von Punkten aus $\hat{d}_1 - b_2$. Es sei U eine Umgebung von P, für die $U \cap A_{b_1} = U \cap b_1$ und $U \cap A_{b_2} = U \cap b_2$ gilt. Für fast alle P_m ist daher $P_m \notin A_{b_2}$. Es gibt eine Zelle c aus $\bigcup_{k=1}^{q} \mathfrak{M}_k$, die P enthält und in $A_{b_1} \cap A_{b_2}$ enthalten ist. Wegen $\pi(c) \cap d \neq \emptyset$ ist $\pi(c) \supseteq d$. Also gibt es zu jedem m einen Punkt Q_m aus c mit $\pi(Q_m) = \pi(P_m)$. Da π auf c topologisch ist und die Folge $(\pi(P_m))$ gegen $\pi(P)$ konvergiert, konvergiert auch Q_m gegen P, woraus folgt, daß fast alle Q_m in $U \cap A_{b_1}$ und damit in b_1 enthalten sind. Es muß deshalb $P_m = Q_m$ für fast alle m sein, was aber wegen $Q_m \in c \subseteq A_{b_2}$, $P_m \notin A_{b_2}$ ein Widerspruch ist. Aus dem Zusammenhang von $\hat{d}_1$ folgt dann $\hat{d}_1 \cap b_2 = \hat{d}_1$, also $\hat{d}_1 \subseteq b_2$.

Wie in (1.8) angegeben, wird nun über dem Komplex $(N, \mathfrak{N})$ mit den für jedes d aus $\mathfrak{N}$ gegebenen Funktionenmengen $\mathfrak{Z}(d)$ ein Komplex $(K, \mathfrak{K})$ konstruiert. Dabei ist $K = N \times [-q, +q]$ mit einem hinreichend groß zu wählenden q. Offensichtlich ist jede Zelle b aus $\bigcup_{j=1}^{p} \mathfrak{L}_j$ Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$. Nach (1.11) besteht $\mathfrak{K}$ aus A_1-Zellen. Hinsichtlich der Bedingung $K \supseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ sei festgestellt, daß q beliebig groß gewählt werden kann und daß N ebenfalls als hinreichend umfassend angenommen werden kann; man braucht nur unter die Komplexe, für die $(N, \mathfrak{N})$ als Verfeinerungskomplex gebildet wurde, Zusatzkomplexe mit geeigneten Trägermengen aufzunehmen.

Es muß also nur noch gezeigt werden, daß die Zellen aus $\mathfrak{K}$ analytische Zellen sind. Nach (1.9) genügt es zu zeigen, daß für $d \in \mathfrak{N}$ und $b \in \mathfrak{B}_b$ die Funktion $Z_b \circ \varphi_d$ in d^* analytisch ist. Nun hat b die in Zusatz a) von Satz 1 angegebene Eigenschaft. $\pi(b) =: b_0$ ist also eine analytische Zelle, und es gilt $b_0^* = b^*$ sowie $\varphi_{b_0} = \pi \circ \varphi_b$. $\varphi_d | d^*$ ist eine analytische Abbildung von d^* in b_0. Daher ist $\varphi_{b_0}^{-1} \circ \varphi_d | d^*$ eine analytische Abbildung von d^* in b^*. Wird darauf noch φ_b angewendet und die n-te Komponente dieser analytischen Abbildung von d^* in b genommen, so erhält man gerade $Z_b \circ \varphi_d$. Satz 3 ist damit bewiesen.

Man kann mit Hilfe der Sätze 1 und 3 leicht den Satz von KOOPMAN-BROWN ([5], Theorem 6.1, p. 245) folgern: Sind F_i, $i=1, \ldots, m$, analytische Funktionen in der offenen Teilmenge G des R^n und ist M eine in G enthaltene kompakte Menge, so gibt es einen Zellenkomplex $(K, \mathfrak{K})$ mit $M \subseteq K \subseteq G$, so daß für $i=1, \ldots, m$ die Menge der in K gelegenen Nullstellen von F_i Träger eines Unterkomplexes ist.

§ 4. Reelle Räume

(4.1) Es bedeute im folgenden G stets eine offene Teilmenge eines reellen Zahlenraumes. Ist A eine analytische Menge in G, so heißt eine in A definierte reellwertige Funktion f analytisch, wenn es zu jedem $x \in A$ eine Umgebung $U \subseteq G$ von x und eine in U analytische Funktion g gibt, derart daß $f|A \cap U = g|A \cap U$ gilt. Ist A_i $(i=1, 2)$ eine in $G_i \subseteq R^{n_i}$ analytische Menge und φ eine stetige Abbildung von A_1 in A_2, so wird φ analytisch genannt, wenn φ komponentenweise durch analytische Funktionen dargestellt werden kann. Ist φ eine topologische Abbildung von A_1 auf A_2, so heißt φ bianalytisch, wenn sowohl φ als auch φ^{-1} analytisch sind.

(4.2) *Definition (reeller Raum). X sei ein Hausdorffscher Raum. Ein Paar (U, ψ) heißt eine Karte, wenn U eine offene Teilmenge von X und ψ eine topologische Abbildung von U auf eine in einer offenen Teilmenge eines reellen Zahlenraumes analytische Menge ist. Zwei Karten (U, ψ) und (V, χ) heißen verträglich, wenn entweder $U \cap V$ leer ist oder die Abbildung $\psi \circ \chi^{-1}$: $\chi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ bianalytisch ist. Ein System $\mathfrak{U}$ von paarweise verträglichen Karten heißt vollständig, wenn jede zu allen Karten aus $\mathfrak{U}$ verträgliche Karte zu $\mathfrak{U}$ gehört. Ist $\mathfrak{U} = \{(U_i, \psi_i), i \in I\}$ ein vollständiges System von Karten und gilt $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, so heißt $(X, \mathfrak{U})$ ein reeller Raum mit dem Strukturatlas $\mathfrak{U}$.*

Es sei $(X, \mathfrak{U})$ ein reeller Raum. Dann ist X ein lokal-kompakter, lokal-wegzusammenhängender, regulärer topologischer Raum. (Den lokalen Wegzusammenhang folgert man sofort aus Satz 1.) Die zu Karten (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ gehörenden offenen Mengen U bilden eine Basis der Topologie von X. Ist Y eine offene Teilmenge von X und $\mathfrak{V}$ das Teilsystem aller Karten (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit $U \subseteq Y$, so ist $(Y, \mathfrak{V})$ ein reeller Raum. Beispiele sind analytische Mannigfaltigkeiten, analytische Mengen, komplexe (Serresche) Räume.

(4.3) $(X, \mathfrak{U})$ sei ein reeller Raum, Y eine offene Teilmenge von X und f eine reellwertige Funktion in Y. f heißt analytisch in Y, wenn für jede Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit $U \subseteq Y$ die Funktion $f \circ \psi^{-1}$ in $\psi(U)$ analytisch ist. (Wie man leicht sieht, genügt es zu fordern: Für jedes y aus Y gibt es eine Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit $y \in U \subseteq Y$, so daß $f \circ \psi^{-1}$ in $\psi(U)$ analytisch ist.)

(4.4) *Definition (analytische und pseudoanalytische Menge). Es sei Y eine offene Teilmenge des reellen Raumes X und A eine Teilmenge von Y. A heißt eine analytische Menge in Y, wenn es zu jedem $x \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ von x gibt, so daß $A \cap U$ die Nullstellenmenge einer in U analytischen Funktion ist. A heißt eine pseudoanalytische Menge in Y, wenn es zu jedem*

$x \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ von x gibt, so daß $A \cap U$ endliche Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen der Form $\{y\colon y \in U,\ f(y) \geqq 0\}$ mit einer in U analytischen Funktion f ist.

§ 5. Zerlegung abzählbarer reeller Räume

(5.1) $(X, \mathfrak{U})$ sei ein reeller Raum und G eine offene Teilmenge des R^n. Eine stetige Abbildung φ von G in X heißt analytisch, wenn für jede Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ entweder $\varphi^{-1}(U)$ leer ist oder $\psi \circ \varphi | \varphi^{-1}(U)$ als Abbildung in einen reellen Zahlraum analytisch ist. (Es genügt zu fordern, daß es zu jedem Punkt x aus X eine Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit $x \in U$ gibt, so daß entweder $\varphi^{-1}(U)$ leer ist oder die Abbildung $\psi \circ \varphi | \varphi^{-1}(U)$ analytisch ist.)

(5.2) *Definition (analytische Zelle). X sei ein reeller Raum. Eine k-dimensionale Zelle a in X heißt eine analytische Zelle, wenn ihr eine k-Zelle a^* im R^k und eine topologische Abbildung φ_a von $\overline{a^*}$ auf $\bar{a}$ zugeordnet ist, so daß folgendes gilt:*

1) *φ_a bildet a^* analytisch auf a ab.*

2) *Ist G eine offene Teilmenge eines R^m und $\varphi\colon G \to X$ eine analytische Abbildung mit $\varphi(G) \subseteq \bar{a}$, so ist $\varphi_a^{-1} \circ \varphi\colon G \to R^k$ analytisch*[8]*.*

(5.3) *Definition (A-Zelle). Eine Zelle a in einem reellen Raum heißt eine A-Zelle, wenn es eine in einer offenen Umgebung von $\bar{a}$ analytische Menge A gibt, so daß für jeden Punkt x aus a eine Umgebung existiert, in der A und a übereinstimmen. A heißt eine A-Menge von a.*

(5.4) $(X, \mathfrak{U})$ sei ein reeller Raum und a eine Zelle in X. (U, ψ) sei eine Karte aus $\mathfrak{U}$; $\psi(U)$ sei analytische Menge in $G \subseteq R^n$. Es gelte $\bar{a} \subseteq U$. Ist dann a eine A-Zelle in X, so ist $\psi(a)$ eine A-Zelle in R^n.

Beweis. Zunächst sei festgestellt, daß $\psi(a)$ überhaupt eine Zelle in R^n ist; die Eigenschaft einer Menge, Zelle zu sein, hängt ja auch von ihrer abgeschlossenen Hülle ab. Es ist aber $\overline{\psi(a)} = \psi(\bar{a})$, denn wegen $\psi(\bar{a}) = \overline{\psi(a)} \cap \psi(U)$ ist $\psi(\bar{a}) \subseteq \overline{\psi(a)}$; andererseits ist $\bar{a}$, also auch $\psi(\bar{a})$ kompakt und daher abgeschlossen, woraus $\overline{\psi(a)} \subseteq \psi(\bar{a})$ folgt.

Nun gilt allgemein für eine analytische Menge A in einer offenen Teilmenge G des R^n: Ist B eine analytische Menge im reellen Raum A, so ist B auch in G analytisch. Denn sei x ein Punkt aus G. Im Falle $x \notin A$ gibt es eine zu B fremde Umgebung von x. Ist $x \in A$, so gibt es eine Umgebung V von x und zwei in V analytische Funktionen f, g, so daß $A \cap U = \{y\colon y \in U, f(y) = 0\}$ und $B \cap A \cap U = \{y\colon y \in A \cap U, g(y) = 0\}$ gilt, woraus $B \cap U = \{y\colon y \in U, f(y) = g(y) = 0\}$ folgt.

Von der A-Menge B der A-Zelle a kann man nun o.B.d.A. annehmen, daß sie in U analytisch ist. Dann ist also $\psi(B)$ in G analytisch und offensichtlich eine A-Menge von $\psi(a)$.

(5.5) $(X, \mathfrak{U})$ sei ein reeller Raum und (U, ψ) eine Karte aus $\mathfrak{U}$; $\psi(U)$ sei analytische Menge in $G \subseteq R^n$. Ist dann b eine A-Zelle in R^n und gilt $\bar{b} \subseteq \psi(U)$, so ist $\psi^{-1}(b) =: a$ eine A-Zelle in X.

[8]) Vgl. die Bemerkung im Anschluß an Definition (1.6).

Beweis. Wie in (5.4) folgt $\psi^{-1}(\bar{b}) = \bar{a}$; a ist mithin eine Zelle in X. Es gibt eine offene, o.B.d.A. in G enthaltene Umgebung G' von $\bar{b}$ und eine in G' analytische Menge B, die A-Menge von b ist. Dann ist auch die in G' analytische Menge $B \cap \psi(U)$ eine A-Menge von b. Daraus folgt, daß die in $\psi^{-1}(\psi(U) \cap G')$ analytische Menge $\psi^{-1}(\psi(U) \cap B)$ eine A-Menge von a ist.

(5.6) **Hilfssatz.** *Y sei eine offene Teilmenge des reellen Raumes X und A eine pseudoanalytische Menge in Y. Zu jedem Punkt x aus Y und jeder Umgebung V von x gibt es dann einen Komplex $(M, \mathfrak{M})$ von A-Zellen und einen Unterkomplex $(M', \mathfrak{M}')$, wobei M eine in V enthaltene kompakte Umgebung von x ist und $M \cap A = M'$ gilt.*

Beweis. Es gibt eine Karte (U, ψ) aus dem Strukturatlas von X mit $x \in U \subseteq V \cap Y$; $\psi(U)$ sei analytische Menge in $G \subseteq R^n$. Dann gibt es eine offene Umgebung $G' \subseteq G$ von $\psi(x)$ und in G' analytische Funktionen f, $f_{\sigma\tau}$ ($\sigma = 1, \ldots, s$; $\tau = 1, \ldots, t$), so daß

$$\psi(U) \cap G' = \{y : y \in G',\ f(y) = 0\},$$

$$\psi(A \cap U) \cap G' = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \bigcap_{\tau=1}^{t} \{y : y \in \psi(U) \cap G',\ f_{\sigma\tau}(y) \geqq 0\}$$

gilt. Nach Satz 1 gibt es einen Komplex $(L, \mathfrak{L})$ von A-Zellen und Unterkomplexe $(L_{\sigma\tau}, \mathfrak{L}_{\sigma\tau})$, wobei L eine in $\psi(U) \cap G'$ enthaltene kompakte Umgebung von $\psi(x)$ bezüglich $\psi(U)$ ist und $L_{\sigma\tau} = L \cap \{f_{\sigma\tau} = 0\}$ gilt. Sei dann $\mathfrak{L}'_{\sigma\tau}$ die Menge der in $L'_{\sigma\tau} := L \cap \{f_{\sigma\tau} \geqq 0\}$ enthaltenen Zellen aus $\mathfrak{L}$. Die Vereinigung der Zellen aus $\mathfrak{L}'_{\sigma\tau}$ ist gleich $L'_{\sigma\tau}$; denn jeder Punkt aus $L'_{\sigma\tau}$ liegt in einer Zelle a aus $\mathfrak{L}$, welche in $L'_{\sigma\tau}$ enthalten sein muß, weil aus $a \cap \{f_{\sigma\tau} < 0\} \neq \emptyset$ folgen würde: $a \cap \{f_{\sigma\tau} = 0\} \neq \emptyset$ und damit $a \subseteq L_{\sigma\tau} \subseteq L'_{\sigma\tau}$. $(L'_{\sigma\tau}, \mathfrak{L}'_{\sigma\tau})$ und daher auch $(L', \mathfrak{L}') := \left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} \bigcap_{\tau=1}^{t} L'_{\sigma\tau},\ \bigcup_{\sigma=1}^{s} \bigcap_{\tau=1}^{t} \mathfrak{L}'_{\sigma\tau}\right)$ ist also ein Unterkomplex von $(L, \mathfrak{L})$. Die ψ^{-1}-Bilder von $(L, \mathfrak{L})$ und $(L', \mathfrak{L}')$, die wegen (5.5) aus A-Zellen in X bestehen, leisten dann das Verlangte.

(5.7) **Satz 4.** *X sei ein reeller Raum mit dem Strukturatlas $\mathfrak{U}$. Die Topologie von X sei abzählbar. $\mathfrak{A}$ sei ein System von Mengen A, die in offenen Teilmengen von X pseudoanalytisch sind. Für jedes A aus $\mathfrak{A}$ sei eine in A enthaltene abgeschlossene Menge F_A gegeben. Das System $\{F_A \colon A \in \mathfrak{A}\}$ sei lokal-endlich. Dann gibt es einen Komplex $(X, \mathfrak{K})$ von analytischen A-Zellen, so daß für jedes A aus $\mathfrak{A}$ ein Unterkomplex $(A', \mathfrak{K}_A)$ mit $F_A \subseteq A' \subseteq A$ existiert. Zu jeder Zelle a aus $\mathfrak{K}$ gibt es eine Karte (V, χ) aus $\mathfrak{U}$ mit $\bar{a} \subseteq V$.*

Folgerung 1. X sei ein reeller Raum mit abzählbarer Topologie. $\mathfrak{A}$ sei ein lokal-endliches System von in X analytischen oder pseudoanalytischen Mengen. Dann gibt es einen Komplex $(X, \mathfrak{K})$ von analytischen A-Zellen, so daß für jedes A aus $\mathfrak{A}$ ein Unterkomplex mit dem Träger A existiert.

Folgerung 2. X sei ein reeller Raum mit abzählbarer Topologie. $(X, \mathfrak{K}_1)$ und $(X, \mathfrak{K}_2)$ seien Komplexe von A-Zellen. Dann gibt es einen Komplex $(X, \mathfrak{K})$

von analytischen A-Zellen, so daß jede Zelle von $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$ *Vereinigung von Zellen aus* $\mathfrak{K}$ *ist.*

Allgemeiner gilt: *Es sei* $\mathfrak{K}_0$ *ein lokal-endliches System von A-Zellen in X. Für jedes a aus* $\mathfrak{K}_0$ *sei* ∂a *Vereinigung von Zellen aus* $\mathfrak{K}_0$. *Dann gibt es einen Komplex* $(X, \mathfrak{K})$ *von analytischen A-Zellen, so daß jede Zelle aus* $\mathfrak{K}_0$ *Vereinigung von Zellen aus* $\mathfrak{K}$ *ist.*

Beweis von Folgerung 1. Man kann in Satz 4 $F_A = A$ setzen.

Beweis von Folgerung 2. Für jede Zelle a aus $\mathfrak{K}_0$ existiert eine in einer offenen Umgebung von $\bar{a}$ analytische Menge A_a, die A-Menge von a ist. Das System $\{\bar{a}\colon a \in \mathfrak{K}_0\}$ ist lokal-endlich, denn für jede in X kompakte Menge M gibt es eine kompakte Umgebung N von M, und aus $M \cap \bar{a} \neq \emptyset$ folgt $N \cap a \neq \emptyset$, was nur für endlich viele a aus $\mathfrak{K}_0$ gelten kann. Daher gibt es einen Komplex $(X, \mathfrak{K})$ von analytischen A-Zellen, so daß für jedes a aus $\mathfrak{K}_0$ ein Unterkomplex $(A'_a, \mathfrak{K}_a)$ mit $\bar{a} \subseteq A'_a \subseteq A_a$ existiert. Um nachzuweisen, daß jedes a aus $\mathfrak{K}_0$ Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$ ist, genügt es zu zeigen, daß jede Zelle c aus $\mathfrak{K}$ mit $c \cap a \neq \emptyset$ in a enthalten ist. Das ist aber wie beim Beweis von Satz 3 (Ende von (B)) einzusehen.

Beweis von Satz 4. Es sei (U, ψ) eine Karte aus $\mathfrak{U}$ und U' eine nichtleere offene Teilmenge von U. *Die Beziehung* $U' \subset\subset (U, \psi)$ *soll folgendes bedeuten: Es gibt eine offene Menge G eines reellen Zahlenraumes* R^n *und eine n-dimensionale offene Kugel* G' *mit* $\overline{G'} \subseteq G$, *so daß* $\psi(U)$ *eine in G analytische Menge ist und* $U' = \psi^{-1}(\psi(U) \cap G')$ *gilt.* Aus $U' \subset\subset (U, \psi)$ folgt $\overline{U'} \subseteq U$. Ist (U, ψ) eine Karte aus $\mathfrak{U}$, so gibt es zu jedem Punkt x aus U ein U' mit $x \in U'$ und $U' \subset\subset (U, \psi)$. Daher bildet das System der U', für die es eine Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit $U' \subset\subset (U, \psi)$ gibt, eine Basis der Topologie von X.

Da X lokal-kompakt ist und eine abzählbare Basis besitzt, kann X durch abzählbar viele offene Mengen V_i, $i = 1, 2, \ldots$, mit kompakten abgeschlossenen Hüllen $\overline{V_i}$ überdeckt werden. Dann gibt es auch eine offene Überdeckung $(Y_j,\ j = 1, 2, \ldots)$ mit der Eigenschaft, daß $\overline{Y_j}$ kompakt und in Y_{j+1} enthalten ist. Denn man nehme etwa $Y_1 := V_1$, $Y_n := V_n \cup \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ mit so großem m, daß $\overline{Y}_{n-1} \subseteq Y_n$ erfüllt ist. Es sei noch $Y_0 = Y_{-1} = \emptyset$ gesetzt. Dann gilt für alle $j = 1, 2, \ldots$: $Y_{j+1} - Y_{j-2}$ ist eine Umgebung der kompakten Menge $\overline{Y_j} - Y_{j-1}$. Für jedes x aus $\overline{Y_j} - Y_{j-1}$ gibt es daher eine Karte (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit kompaktem $\overline{U}$ und ein U' mit $U' \subset\subset (U, \psi)$, so daß $x \in U'$ und $U \subseteq Y_{j+1} - Y_{j-2}$ gilt. $\overline{Y_j} - Y_{j-1}$ kann also mit endlich vielen U' überdeckt werden, für die es ein (U, ψ) aus $\mathfrak{U}$ mit kompaktem $\overline{U}$ gibt, so daß $U' \subset\subset (U, \psi)$ und $U \subseteq Y_{j+1} - Y_{j-1}$ gilt. Weil $\bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{Y_j} - Y_{j-1}) = X$ ist und jede kompakte Menge von einem gewissen Index j ab in Y_{j-2} enthalten ist, ist damit gezeigt:

Es gibt Folgen $((U_i, \psi_i))$, (U'_i), $i = 1, 2, \ldots$ *mit den Eigenschaften*

1) $(U_i, \psi_i) \in \mathfrak{U}$, $U'_i \subset\subset (U_i, \psi_i)$.

2) (U'_i) *überdeckt X.*

3) (U_i) *ist lokal-endlich.*

4) $\overline{U}_i$ *ist kompakt.*

Als regulärer Raum mit abzählbarer Topologie ist X nach URYSOHN metrisierbar. Es sei für das Folgende eine feste Metrik gewählt.

Hilfssatz 1. *(U, ψ) sei eine Karte aus $\mathfrak{U}$ und es sei $U' \subset\subset (U, \psi)$. Für $i = 1, \ldots, m$ seien $(M_i, \mathfrak{M}_i)$ endliche Komplexe von in U enthaltenen A-Zellen. Dann gibt es einen endlichen Komplex $(L, \mathfrak{L})$ von analytischen A-Zellen mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $L = \overline{U'} \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_i$.

(b) *Jede Zelle aus* $\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{M}_i$ *ist Vereinigung von Zellen aus* $\mathfrak{L}$.

(c) $\overline{U'}$ *ist Träger eines Unterkomplexes.*

(d) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man $\mathfrak{L}$ so wählen, daß die Durchmesser der Zellen von $\mathfrak{L}$ kleiner als ε sind.*

Beweis. Wegen (5.4) und (5.5) genügt es, den Fall zu behandeln, daß U eine in einer offenen Teilmenge G des R^n analytische Menge ist und $U' = U \cap G'$ gilt, wobei G' eine n-dimensionale offene Kugel ist, deren abgeschlossene Hülle in G enthalten ist. $\overline{U'}$ wird nach Satz 1 durch endliche Komplexe $(N_j, \mathfrak{N}_j)$, $j = 1, \ldots, l$, von in U enthaltenen A-Zellen überdeckt. $\overline{G'}$ kann in A-Zellen zerlegt werden, die einen Komplex $(\overline{G'}, \mathfrak{G}')$ bilden; dabei soll G' selbst zu $\mathfrak{G}'$ gehören. Nach Satz 3 gibt es dann einen endlichen Komplex $(\tilde{L}, \tilde{\mathfrak{L}})$ von analytischen A-Zellen, so daß $\tilde{L} \supseteq \bigcup_{j=1}^{l} N_j \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_i \cup \overline{G'}$ gilt und jede Zelle aus $\bigcup_{j=1}^{l} \mathfrak{N}_j \cup \bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{M}_i \cup \mathfrak{G}'$ Vereinigung von Zellen aus $\tilde{\mathfrak{L}}$ ist. Die Durchmesser der Zellen aus $\tilde{\mathfrak{L}}$, die $\bigcup_{j=1}^{l} N_j \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_i \cup \overline{G'}$ treffen, können dabei als hinreichend klein angenommen werden. Die Menge der in $\overline{U'}$ enthaltenen Zellen von $\tilde{\mathfrak{L}}$ sei $\mathfrak{L}'$. Für jedes x aus U' gibt es eine Zelle a aus $\tilde{\mathfrak{L}}$ mit $x \in a$. Daraus folgt $a \subseteq G' \cap U = U'$, also $a \in \mathfrak{L}'$. Die Zellen aus $\mathfrak{L}'$ überdecken daher U'. Da mit jeder in $\overline{U'}$ enthaltenen Zelle a auch alle in ∂a enthaltenen Zellen in $\overline{U'}$ liegen, ist die Vereinigungsmenge der Zellen von $\mathfrak{L}'$ abgeschlossen und deshalb gleich $\overline{U'}$. $(\overline{U'}, \mathfrak{L}')$ ist also ein Komplex. Ist nun $\mathfrak{L}$ die Menge der in $\overline{U'} \cup \bigcup_{i=1}^{m} M_i =: L$ enthaltenen Zellen aus $\tilde{\mathfrak{L}}$, so ist $(L, \mathfrak{L})$ ein Komplex, der das Verlangte leistet.

Hilfssatz 2. *Mit der oben angegebenen Folge (U'_i) sei $W_k := \bigcup_{i=1}^{k} U'_i$. Dann gibt es für jedes $k = 1, 2, \ldots$ einen endlichen Komplex $(\overline{W_k}, \mathfrak{K}_k)$ von analytischen A-Zellen, so daß folgendes gilt:*

(1) *Für jedes A aus $\mathfrak{A}$ ist die Menge $F_A \cap \overline{W_k}$ entweder leer oder sie wird durch Zellen a aus $\mathfrak{K}_k$ mit $\bar{a} \subseteq A$ überdeckt.*

(2) *Aus* $a\in\mathfrak{K}_k$, $a\cap\overline{U}'_{k+m}\neq\emptyset$, $m\geqq 1$, *folgt* $\bar a\subseteq U_{k+m}$.

(3) *Es sei* $j<k$ *und* $a\in\mathfrak{K}_j$. *Gilt* $\bar a\nsubseteq U_{j+m}$ *für* $m=1,\ldots,k-j$, *so ist* $a\in\mathfrak{K}_k$, *andernfalls ist a Vereinigung von Zellen aus* $\mathfrak{K}_k$.

(4) *Für jedes a aus* $\mathfrak{K}_k$ *gibt es eine Karte* (V,χ) *aus* $\mathfrak{U}$ *mit* $\bar a\subseteq V$.

Beweis. Die Komplexe $(\overline{W}_k, \mathfrak{K}_k)$ werden durch Induktion über k definiert. Der Anfangsschritt $(k=1)$ ist Spezialfall des Induktionsschrittes. Die Komplexe $(\overline{W}_j, \mathfrak{K}_j)$ mögen für $j=1,\ldots,k-1$ bereits definiert sein und die Behauptungen erfüllen.

Für $m=1, 2, \ldots$ sei ε_m im Fall $\partial U_{k+m}\neq\emptyset$[9]) gleich dem Abstand von $\overline{U}'_{k+m}$ und ∂U_{k+m} und andernfalls gleich 1. Da der Abstand zwischen kompakten Mengen angenommen wird, ist jedes ε_m positiv. Das System (U_i) ist lokal-endlich; daher ist nur für endlich viele m der Durchschnitt $\overline{U}'_k\cap U_{k+m}$ nichtleer. Bezeichnet ε das Minimum der ε_m, erstreckt über diese m, so ist ε also positiv.

Es sei $A\in\mathfrak{A}$ und $F_A\cap\overline{U}'_k\neq\emptyset$. Nach Hilfssatz (5.6) gibt es zu jedem x aus $F_A\cap\overline{U}'_k$ einen Komplex $(M,\mathfrak{M})$ von A-Zellen und einen Unterkomplex $(M',\mathfrak{M}')$, wobei M eine in U_k und in derjenigen offenen Teilmenge von X, in der A pseudoanalytisch ist, enthaltene kompakte Umgebung von x ist und $M'=A\cap M$ gilt. $F_A\cap\overline{U}'_k$ ist kompakt und wird daher durch endlich viele derartiger Komplexe $(M,\mathfrak{M})$ überdeckt, die mit $(M_{A,i},\mathfrak{M}_{A,i})$, $i=1,\ldots,m_A$, bezeichnet seien. Schon die zugehörigen Unterkomplexe $(M'_{A,i},\mathfrak{M}'_{A,i})$ überdecken $F_A\cap\overline{U}'_k$, wie aus $F_A\cap\overline{U}'_k=F_A\cap\overline{U}'_k\cap A\subseteq(\bigcup_{i=1}^{m_A}M_{A,i})\cap A=\bigcup_{i=1}^{m_A}M'_{A,i}$ folgt. Da das System $\{F_A\colon A\in\mathfrak{A}\}$ als lokal-endlich vorausgesetzt wurde, ist $F_A\cap\overline{U}'_k$ nur für endlich viele A aus $\mathfrak{A}$ nichtleer. Man erhält also nur endliche viel Komplexe $(M'_{A,i},\mathfrak{M}'_{A,i})$ von in U_k enthaltenen A-Zellen.

Es sei $\mathfrak{Z}$ die Menge der Zellen aus $\mathfrak{K}_{k-1}$ mit $\bar a\subseteq U_k$ und Z deren Vereinigungsmenge. $(Z,\mathfrak{Z})$ ist ein Unterkomplex von $(\overline{W}_{k-1},\mathfrak{K}_{k-1})$. Nach Hilfssatz 1 gibt es nun einen Komplex $(L,\mathfrak{L})$ von analytischen A-Zellen, für den folgendes gilt:

(a) $L=\overline{U}'_k\cup Z\cup\bigcup\{M'_{A,i}\colon A\in\mathfrak{A},\ F_A\cap\overline{U}'_k\neq\emptyset,\ i=1,\ldots,m_A\}$.

(b) Jede Zelle aus $\mathfrak{Z}\cup\bigcup\{\mathfrak{M}'_{A,i}\colon A\in\mathfrak{A},\ F_A\cap\overline{U}'_k\neq\emptyset,\ i=1,\ldots,m_A\}$ ist Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{L}$.

(c) Es gibt einen Unterkomplex $(\overline{U}'_k,\mathfrak{L}')$.

(d) Die Durchmesser der Zellen aus $\mathfrak{L}$ sind kleiner als ε.

$\mathfrak{Z}_1$ sei die Menge der in Z enthaltenen Zellen aus $\mathfrak{L}$. $(Z,\mathfrak{Z}_1)$ ist ein Unterkomplex von $(L,\mathfrak{L})$. Es wird $\mathfrak{K}_k:=(\mathfrak{K}_{k-1}-\mathfrak{Z})\cup\mathfrak{Z}_1\cup\mathfrak{L}'$ gesetzt und behauptet, daß $(\overline{W}_k,\mathfrak{K}_k)$ ein Komplex ist. Die Bedingungen 1), 2) und 4) von Definition

9) ∂U_{k+m} bezeichnet die Menge der Randpunkte von U_{k+m}.

(1.2) sind klar. Bedingung 3) folgt so: Es seien a, b zwei verschiedene Zellen aus $\mathfrak{K}_k$, deren Durchschnitt nichtleer ist. Dann ist eine der Zellen, etwa a, aus $\mathfrak{K}_{k-1} - \mathfrak{Z}$ und die andere, b, aus $\mathfrak{L}'$. Aus $a \cap b \neq \emptyset$ folgt $a \cap \overline{U}'_k \neq \emptyset$, also nach Induktionsvoraussetzung $\bar{a} \subseteq U_k$. Das bedeutet aber $a \in \mathfrak{Z}$, Widerspruch.

Zur Behauptung (1): Es sei $A \in \mathfrak{A}$ und $F_A \cap \overline{W}_k \neq \emptyset$. Falls die Menge $F_A \cap \overline{W}_{k-1}$ nicht leer ist, wird sie nach Induktionsvoraussetzung durch Zellen a aus $\mathfrak{K}_{k-1}$ mit $\bar{a} \subseteq A$ überdeckt. Da jede Zelle aus $\mathfrak{K}_{k-1}$ entweder in $\mathfrak{K}_k$ vorkommt oder Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}_k$ ist, genügt es zu zeigen, daß $F_A \cap \overline{U}'_k$, falls nichtleer, durch Zellen a aus $\mathfrak{K}_k$ mit $\bar{a} \subseteq A$ überdeckt wird. Nun wird $F_A \cap \overline{U}'_k$ durch die in A enthaltenen Komplexe $(M'_{A,i}, \mathfrak{M}'_{A,i})$, $i = 1, \ldots, m_A$, überdeckt. Für jedes $x \in F_A \cap \overline{U}'_k$ gibt es eine x enthaltende Zelle a aus $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{K}_k$, die also ein $M'_{A,i}$ schneidet, woraus $\bar{a} \subseteq A$ folgt.

Zur Behauptung (2): Es sei a eine Zelle aus $\mathfrak{K}_k$ und $a \cap \overline{U}'_{k+m} \neq \emptyset$, $m \geqq 1$. Ist $a \in (\mathfrak{K}_{k-1} - \mathfrak{Z}) \cup \mathfrak{Z}_1$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung und der Definition von $\mathfrak{Z}_1$, daß $\bar{a} \subseteq U_{k+m}$ gilt. Es sei dann $a \in \mathfrak{L}'$. Wird zunächst $\partial U_{k+m} \neq \emptyset$ vorausgesetzt, so ist der Durchmesser von a kleiner als der Abstand von $\overline{U}'_{k+m}$ und ∂U_{k+m}. Aus $\bar{a} \nsubseteq U_{k+m}$ würde wegen des Zusammenhanges von $\bar{a}$ folgen, daß $\bar{a} \cap \partial U_{k+m}$ nichtleer wäre, was einen Widerspruch ergäbe. Ist ∂U_{k+m} leer, so ist U_{k+m} offen und abgeschlossen und muß deshalb die zusammenhängende Punktmenge $\bar{a}$ enthalten.

Die Behauptungen (3) und (4) sind klar. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Zum Beweis von Satz 4. Es sei $\mathfrak{K}$ die Menge der Zellen a, für die es ein k gibt, so daß $a \in \mathfrak{K}_{k+m}$ für $m = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Sei b eine Zelle aus $\mathfrak{K}_j$. $\bar{b}$ ist kompakt und (U_i) lokalendlich; also gibt es ein $k \geqq j$, so daß für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$ $\bar{b} \nsubseteq U_{k+m}$ gilt. Wegen Behauptung (3) von Hilfssatz 2 ist b entweder in $\mathfrak{K}_k$ enthalten oder Vereinigung von Zellen c aus $\mathfrak{K}_k$, für die dann $\bar{c} \nsubseteq U_{k+m}$ gilt. Also ist b entweder in $\mathfrak{K}$ enthalten oder endliche Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}$. Daraus folgt: 1. Jeder Punkt von X ist in einer Zelle aus $\mathfrak{K}$ enthalten. 2. Ist $a \in \mathfrak{K}$, so gibt es ein j mit $a \in \mathfrak{K}_j$; ∂a ist Vereinigung von Zellen aus $\mathfrak{K}_j$, also auch von Zellen aus $\mathfrak{K}$. 3. Sind a, b zwei verschiedene Zellen aus $\mathfrak{K}$, so gibt es ein j mit $a, b \in \mathfrak{K}_j$, woraus $a \cap b = \emptyset$ folgt. 4. Ist M eine kompakte Teilmenge von X, so gibt es ein j mit $M \subseteq W_j$; M wird also durch endlich viele Zellen aus $\mathfrak{K}_j$, also auch durch endlich viele Zellen aus $\mathfrak{K}$ überdeckt; wegen 3. schneidet M nur endlich viele Zellen aus $\mathfrak{K}$. $(X, \mathfrak{K})$ ist also ein Komplex.

Da jedes $\mathfrak{K}_k$ aus analytischen A-Zellen besteht, gilt dies auch für $\mathfrak{K}$. Für jedes a aus $\mathfrak{K}$ gibt es wegen Behauptung (4) von Hilfssatz 2 eine Karte (V, χ) aus $\mathfrak{U}$ mit $\bar{a} \subseteq V$. Um zu zeigen, daß es für jedes A aus $\mathfrak{A}$ einen Unterkomplex $(A', \mathfrak{K}_A)$ von $(X, \mathfrak{K})$ mit $F_A \subseteq A' \subseteq A$ gibt, genügt es zu zeigen, daß F_A durch Zellen a aus $\mathfrak{K}$ überdeckt wird, für die $\bar{a} \subseteq A$ gilt. Das ist aber wegen $F_A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_A \cap \overline{W}_k)$ und Behauptung (1) von Hilfssatz 2 richtig.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 6. Anwendungen auf komplexe Räume

Unter einem komplexen Raum wird im folgenden stets ein Serrescher komplexer Raum verstanden (vgl. [6], §6). Da reell-analytische Mengen nicht mehr vorkommen, bedeutet eine analytische Menge wie üblich eine komplex-analytische Menge. Mit der Dimension eines komplexen Raumes ist die komplexe Dimension gemeint.

(6.1) Nach Satz 4, Folgerung 1, kann ein abzählbarer komplexer Raum so in Zellen (bzw. Simplexe) zerlegt werden, daß vorgegebene analytische Mengen, die einem lokal-endlichen System angehören, Träger von Unterkomplexen werden. Es werde nun eine $2k$-dimensionale Zelle a in dem komplexen Raum X *holomorph* genannt, wenn a in X offen ist und wenn eine $2k$-Zelle a^* im C^k und eine topologische Abbildung φ_a von $\overline{a^*}$ auf $\bar{a}$ existiert, so daß a^* durch φ_a biholomorph auf a abgebildet wird. Dann läßt sich zeigen: Es gibt einen Zellenkomplex $(X, \mathfrak{K})$, so daß jede Zelle aus $\mathfrak{K}$, die nicht im Rand einer höherdimensionalen Zelle aus $\mathfrak{K}$ enthalten ist, holomorph ist.

Beweisskizze. Zunächst genügt es, den Fall eines reindimensionalen Raumes zu betrachten. Denn kann man jede irreduzible Komponente von X auf die geforderte Art in A-Zellen zerlegen, so braucht man nur noch zu einer gemeinsamen Verfeinerung überzugehen, was wegen Folgerung 2 von Satz 4 möglich ist. Sei also X rein k-dimensional. Man kann sich weiterhin darauf beschränken, nur Umgebungen von Punkten aus X in A-Zellen zu zerlegen, derart daß die $2k$-Zellen holomorph sind. Denn dann braucht man X nur durch ein lokal-endliches System solcher Komplexe zu überdecken und eine gemeinsame Verfeinerung zu bilden. Ist schließlich X eine rein k-dimensionale analytische Menge in $G \subseteq C^n(z_1, \ldots, z_n)$, so wird nun ein Einbettungssatz von REMMERT-STEIN ([7], Satz 1, Zusätze I, II) herangezogen. Dann kann man X lokal so in A-Zellen zerlegen, daß jede $2k$-Zelle a schlicht über einer $2k$-Zelle $a^* \subseteq C^k(z_1, \ldots, z_k)$ liegt und die Umkehrung der Projektionsabbildung von a auf a^* durch die holomorphe Auflösung eines Pseudopolynoms gegeben wird.

(6.2) Eine kompakte Teilmenge P eines komplexen Raumes X heißt ein *analytisches Polyeder*, wenn es in einer offenen Umgebung U von P holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gibt, so daß ein Punkt Q aus U genau dann zu P gehört, wenn $|f_1(Q)| \leqq 1, \ldots, |f_k(Q)| \leqq 1$ gilt.

Satz 5. *X sei ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie. Dann gibt es einen Zellenkomplex $(X, \mathfrak{K})$ und Unterkomplexe $(P_i, \mathfrak{P}_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ deren Träger P_i analytische Polyeder sind, X überdecken, und von denen je zwei keine inneren Punkte gemeinsam haben.*

Beweis. Nach Satz 4 genügt es zu zeigen, daß X auf lokal-endliche Weise durch analytische Polyeder $P_1, P_2, \ldots$ überdeckt werden kann, von denen je zwei höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Das kann man wie folgt einsehen:

Zunächst werde ein analytisches Polyeder P in X *quaderförmig* genannt, wenn folgendes gilt: 1. P ist in einer offenen Menge V enthalten, die zu einer Karte (V, ψ) aus dem komplexen Strukturatlas von X gehört; dabei sei $\psi(V)$ eine in $G \subseteq C^n(z_1, \ldots, z_n)$ analytische Menge. 2. $\psi(P)$ ist Durchschnitt von $\psi(V)$ mit einem abgeschlossenen, in G enthaltenen $2n$-dimensionalen Quader Q, der zu den reellen Koordinatenachsen x_k, y_k $(x_k + i y_k = z_k)$ parallel ist[10]).

X kann durch ein lokal-endliches System $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots$ von quaderförmigen analytischen Polyedern überdeckt werden. Die zugehörigen offenen Mengen seien $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \ldots$. $\tilde{P}_1$ wird nun durch Parallelteilung des zugehörigen Quaders in kleinere quaderförmige Polyeder $P_1', \ldots, P_k'$ zerlegt, so daß $P_\varkappa'$ in $\tilde{V}_j$ $(j > 1$, $\varkappa = 1, \ldots, k)$ enthalten ist, wenn $P_\varkappa' \cap \tilde{P}_j \neq \emptyset$ gilt. Entsprechende Zerlegungen werden für $\tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ usw. vorgenommen. Man erhält eine lokal-endliche Überdeckung von X durch quaderförmige analytische Polyeder $P_1', P_2', \ldots$ mit den zugehörigen offenen Mengen $V_1', V_2', \ldots$, so daß aus $P_i' \cap P_j' \neq \emptyset$ folgt $P_i' \subseteq V_j'$.

Hat nun P_1' mit einem der Polyeder $P_2', P_3', \ldots$, o.B.d.A. mit P_2', einen inneren Punkt gemeinsam, so ersetze man P_1' auf die folgende Weise durch kleinere Polyeder: Es ist $P_1' \subseteq V_2'$. Man fasse V_2' als analytische Menge in $G \subseteq C^n(z_1, \ldots, z_n)$ auf; P_2' ist Durchschnitt eines in G enthaltenen $2n$-dimensionalen koordinatenparallelen Quaders Q_2' mit V_2'. Man wähle weitere $2n$-dimensionale koordinatenparallele Quader $Q_{21}', \ldots, Q_{2s}'$ in G, derart daß die Quader $Q_2', Q_{21}', \ldots, Q_{2s}'$ paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben und $P_2' \cup P_1'$ überdecken. Dann ersetze man P_1' durch die Polyeder $P_{11}' := P_1' \cap Q_{21}', \ldots, P_{1s}' := P_1' \cap Q_{2s}'$. Es gilt $P_{11}' \cup \ldots \cup P_{1s}' \cup P_2' = P_1' \cup P_2'$. Wie sich aus dem weiter unten angeführten Hilfssatz ergibt, ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man sich alle Quader so gewählt denkt, daß je zwei der Polyeder $P_{11}', \ldots, P_{1s}', P_2'$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

Haben nun auch P_1' und P_3' innere Punkte gemeinsam, so verfahre man genau so, ersetze also $P_{11}', \ldots, P_{1s}'$ durch neue Polyeder, die untereinander und mit P_3' paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Nach endlich vielen Schritten hat man P_1' durch Polyeder $P_{11}'', \ldots, P_{1t}''$ ersetzt, derart daß $\bigcup_{\tau=1}^{t} P_{1\tau}'' \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} P_i' = X$ ist und sowohl die $P_{1\tau}''$ untereinander als auch ein $P_{1\tau}''$ und ein P_i' $(i \geq 2)$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

Entsprechend wird mit P_2' verfahren, wenn P_2' mit einem P_k' $(k > 2)$ innere Punkte gemeinsam hat, danach mit P_3', P_4' usw. So erhält man analytische Polyeder $P_1, P_2, \ldots$, die eine lokal-endliche Überdeckung von X bilden und paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

Es muß noch der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz. *A sei eine in $G \subseteq C^n(z_1, \ldots, z_n)$ analytische Menge und R ein Punkt von A. Dann gibt es eine Umgebung $\tilde{G} \subseteq G$ von R und eine beliebig feine Zerlegung des $2n$-dimensionalen reellen Zahlenraumes der $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ $(x_k + i y_k = z_k)$ in achsenparallele Quader, so daß folgendes gilt: Sind Q_1, Q_2*

[10]) Q wird durch Ungleichungen der Form $|e^{a z_k + b}| \leq 1$ gegeben, ist also ein analytisches Polyeder.

zwei in $\tilde{G}$ enthaltene Quader dieser Zerlegung, so haben $Q_1 \cap A$ und $Q_2 \cap A$ keine inneren Punkte im Unterraum A gemeinsam.

Beweis. Haben $Q_1 \cap A$ und $Q_2 \cap A$ einen inneren Punkt gemeinsam, so bedeutet das, daß A lokal in einer reellen Hyperebene enthalten ist. Es genügt daher zu zeigen: Es gibt eine Umgebung $\tilde{G} \subseteq G$ von R mit folgender Eigenschaft: Hat R die x_1-Koordinate c[11]), so enthält der Durchschnitt von $A \cap \tilde{G}$ mit einer Hyperebene $x_1 = c'$ $(c' \neq c)$ keine inneren Punkte in $A \cap \tilde{G}$. Es seien $A_1, \ldots, A_r$ diejenigen irreduziblen Komponenten von A in G, die R enthalten. $\tilde{G}$ wird so gewählt, daß $\tilde{G}$ zu den übrigen Komponenten von A fremd ist. Dann sei H: $x_1 = c'$ irgendeine Hyperebene, deren Durchschnitt mit $A \cap \tilde{G}$ einen inneren Punkt S in $A \cap \tilde{G}$ enthält. Man kann annehmen, daß S gewöhnlicher Punkt von A und daher auch gewöhnlicher Punkt einer gewissen Komponente A_ϱ ist. In einer Umgebung U von S, die so gewählt werden kann, daß $U \cap A_\varrho \subseteq H$ gilt, gestattet A_ϱ eine Darstellung

$$z_{i_{k+\varkappa}} = f_{i_{k+\varkappa}}(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}), \qquad \varkappa = k+1, \ldots, n,$$

mit holomorphen Funktionen $f_{i_{k+\varkappa}}$, wobei k die Dimension von A_ϱ ist und die $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ eine gewisse Umgebung im $C^k(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})$ durchlaufen. z_1 kann nicht unter den $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ vorkommen, und es ist der Realteil von f_1 konstant gleich c', woraus folgt, daß f_1 konstant ist. Also ist $A_\varrho \cap U$ in einer komplexen Hyperebene $z_1 = \text{const}$ enthalten. Aus der Irreduzibilität von A_ϱ folgt dann, daß A_ϱ ganz darin enthalten ist, was wegen $R \in A_\varrho$ nur für $c' = c$ möglich ist.

(6.3) Das Tripel (X, f, Y) heißt eine *analytische Überlagerung*, wenn 1. X und Y normale komplexe Räume sind und Y zusammenhängend ist und 2. $f: X \to Y$ eine eigentliche, nirgends entartete holomorphe Abbildung ist, derart daß das Bild jeder Zusammenhangskomponente von X vermöge f gleich Y ist.

Nach REMMERT-STEIN ([*10*], Satz 3, p. 164) gilt: Ist (X, f, Y) eine analytische Überlagerung, so gibt es eine in Y nirgends dichte analytische Menge B, die *Verzweigungsmenge*, so daß $f^{-1}(B) =: A$ den Raum X nirgends zerlegt und die Abbildung $f|X - A : X - A \to Y - B$ lokal-topologisch ist. Als eine nirgends dichte Menge zerlegt B den normalen Raum Y nirgends. Daraus folgt, daß $Y - B$ zusammenhängend ist. Da f eigentlich und auf $X - A$ lokal-topologisch ist, gibt es zu jedem $y \in Y - B$ eine offene zusammenhängende Umgebung $U \subseteq Y - B$ von y, so daß f die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(U)$ topologisch auf U abbildet. Die Anzahl der Urbilder ist daher für alle $z \in U$ dieselbe. Aus dem Zusammenhang von $Y - B$ folgt, daß sie für alle $z \in Y - B$ übereinstimmt. Sie heißt die *Blätterzahl* der Überlagerung.

Satz 6. *(X, f, Y) sei eine analytische Überlagerung mit der Blätterzahl β und der Verzweigungsmenge B. Y (und damit auch X) habe abzählbare Topologie. Dann gibt es simpliziale Komplexe $(X, \mathfrak{K})$, $(Y, \mathfrak{L})$, so daß folgendes gilt:*

[11]) x_1 steht für irgendein x_k oder y_k.

1. *f ist eine nicht entartete*[12]) *simpliziale Abbildung in bezug auf diese Komplexe.*

2. *B ist Träger eines Unterkomplexes $(B, \mathfrak{M})$ von $(Y, \mathfrak{L})$.*

3. *Jedem Simplex $\tilde{e}$ aus $\mathfrak{K}$ kann eine ganze Zahl $v(\tilde{e})$, $1 \leqq v(\tilde{e}) \leqq \beta$, zugeordnet werden, so daß gilt:* (a) *Sind $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k$ die Urbildsimplexe eines Simplexes e aus $\mathfrak{L}$, so gilt $\sum_{\varkappa=1}^{k} v(\tilde{e}_\varkappa) = \beta$.* (b) *Ist $f(\tilde{e}) \notin \mathfrak{M}$, so ist $v(\tilde{e}) = 1$. Ist $f(\tilde{e}) \in \mathfrak{M}$ und ist $f(\tilde{e})$ Seite des Simplexes $d \in \mathfrak{L} - \mathfrak{M}$, so ist $v(\tilde{e})$ gleich der Anzahl der Urbildsimplexe von d, die $\tilde{e}$ zur Seite haben.*

Dem Beweis von Satz 6 wird der folgende Hilfssatz vorausgeschickt:

Hilfssatz. *A, B seien m-dimensionale komplexe Räume. $f\colon A \to B$ sei eine surjektive, nirgends entartete, eigentliche holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine höchstens $(m-1)$-dimensionale analytische Menge B_1 in B, so daß $f|A - f^{-1}(B_1)\colon A - f^{-1}(B_1) \to B - B_1$ lokal-topologisch ist.*

Beweis. (I) Zurückführung auf den Fall rein m-dimensionaler Räume A, B: A' sei die Vereinigung der m-dimensionalen irreduziblen Komponenten von A, A'' die Vereinigung der Komponenten geringerer Dimension, entsprechend B' und B''. Dann ist $f' = f|A'\colon A' \to B'$ eine surjektive, eigentliche, nirgends entartete holomorphe Abbildung. Es sei nun vorausgesetzt, daß es eine höchstens $(m-1)$-dimensionale analytische Menge B_1' in B' gibt, so daß $f'|A' - f'^{-1}(B_1')\colon A' - f'^{-1}(B_1') \to B' - B_1'$ lokal-topologisch ist. Dann ist $B_1 := B_1' \cup B'' \cup f(A'')$ eine höchstens $(m-1)$-dimensionale analytische Menge in B, für die offensichtlich die Behauptung des Hilfssatzes gilt.

(II) Zurückführung auf den Fall normaler Räume A, B: Nach (I) kann angenommen werden, daß A und B rein m-dimensional sind. Daraus folgt, daß f jede irreduzible Komponente von A auf eine irreduzible Komponente von B abbildet. Bezeichnen A^*, B^* die Normalisierungen von A, B und σ, τ die zugehörigen Projektionsabbildungen, so kann f nach Remmert-Stein ([*10*], Satz 2, p. 162) geliftet werden: Es gibt eine surjektive, eigentliche, nirgends entartete holomorphe Abbildung $f^*\colon A^* \to B^*$, derart daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^* & \xrightarrow{f^*} & B^* \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutativ ist. Es sei nun vorausgesetzt, daß der Hilfssatz für normale Räume richtig ist. Es gibt also eine höchstens $(m-1)$-dimensionale analytische Menge B_1^* in B^*, so daß $f^*|A^* - f^{*-1}(B_1^*)\colon A^* - f^{*-1}(B_1^*) \to B^* - B_1^*$ lokal-topologisch ist. N (bzw. M) sei die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von A (bzw. B). Dann ist $B_1 := M \cup f(N) \cup f \circ \sigma\bigl(f^{*-1}(B_1^*)\bigr)$ eine höchstens

[12]) Eine simpliziale Abbildung heißt nicht entartet, wenn sie kein Simplex auf ein Simplex geringerer Dimension abbildet.

$(m-1)$-dimensionale analytische Menge in B, und man sieht leicht, daß sie die Behauptung des Hilfssatzes erfüllt.

(III) Sind A und B normale Räume, so folgt die Behauptung aus dem bereits oben zitierten Satz von REMMERT-STEIN ([*10*], Satz 3, p. 164).

Beweis von Satz 6. Die Dimension von Y sei gleich n, die Dimension der Verzeigungsmenge B sei gleich m, $m<n$. Auf die Abbildung $f|A:=f^{-1}(B)\colon A\to B$ kann der Hilfssatz angewendet werden: Es gibt eine in B analytische Menge B_1, deren Dimension m_1 kleiner als m ist, so daß $f|A-f^{-1}(B_1)\colon A-f^{-1}(B_1)\to B-B_1$ lokal-topologisch ist. Sei $f^{-1}(B_1)=:A_1$ und $f|A_1=:f_1$. Dann erfüllt die Abbildung $f_1\colon A_1\to B_1$ wiederum die Voraussetzung des Hilfssatzes, und es gibt eine in B_1 analytische Menge B_2 mit einer Dimension $m_2<m_1$, so daß $f_1|A_1-f^{-1}(B_2)\colon A_1-f^{-1}(B_2)\to B_1-B_2$ lokal-topologisch ist. So fortfahrend gewinnt man eine Folge $B_1\supseteq B_2\supseteq\dots\supseteq B_r$ $(r\leqq n-1)$ von in B analytischen Mengen, deren Dimensionen $m_1, m_2, \dots, m_r$ absteigend sind, so daß die Abbildungen $f|f^{-1}(B_i)-f^{-1}(B_{i+1})\colon f^{-1}(B_i)-f^{-1}(B_{i+1})\to B_i-B_{i+1}$ $(i=1,\dots,r-1)$ lokal-topologisch sind.

Nach Satz 4, Folgerung 1, gibt es einen Zellenkomplex $(Y, \mathfrak{Y})$ mit Unterkomplexen $(B, \mathfrak{B})$, $(B_i, \mathfrak{B}_i)$, $i=1,\dots,r$. Die Zellen aus $\mathfrak{Y}$ sollen nun hochgedrückt werden. $\mathfrak{Z}$ sei die Menge der $2n$-dimensionalen Zellen aus $\mathfrak{Y}$. Die Zellen aus $\mathfrak{Z}$ sind offene Mengen in Y und deshalb in $Y-B$ enthalten. Jede Zelle aus $\mathfrak{Y}-\mathfrak{Z}$ ist im Rand einer Zelle aus $\mathfrak{Z}$ enthalten.

Es sei a eine Zelle aus $\mathfrak{Z}$. Wegen des einfachen Zusammenhanges von a zerfällt $f^{-1}(a)$ in Zusammenhangskomponenten $M_1, \dots, M_\beta$, von denen jede durch f topologisch auf a abgebildet wird Darüber hinaus ist $f|\overline{M}_i\colon \overline{M}_i\to\bar{a}$, $i=1,\dots,\beta$, topologisch, und es gilt $f^{-1}(\bar{a})=\bigcup_{i=1}^{\beta}\overline{M}_i$. Beweis: Es ist $\bigcup_{i=1}^{\beta}\overline{M}_i$ in $f^{-1}(\bar{a})$ enthalten. Sei $x\in f^{-1}(\bar{a})$ und U eine Umgebung von x. Da f eine offene Abbildung ist (vgl. [*6*], p. 252, Lemma), ist $f(U)$ eine Umgebung von $f(x)$, enthält also Punkte von a. Daraus folgt $x\in\overline{f^{-1}(a)}=\bigcup_{i=1}^{\beta}\overline{M}_i$. Damit ist $f^{-1}(\bar{a})=\bigcup_{i=1}^{\beta}\overline{M}_i$ gezeigt. Wegen $\overline{M}_i\subseteq f^{-1}(\bar{a})$ und der Eigentlichkeit von f ist $\overline{M}_i$ kompakt. Also ist $f(\overline{M}_i)$ abgeschlossen und enthält deshalb $\bar{a}$. Andererseits gilt $f(\overline{M}_i)\subseteq\bar{a}$, also zusammen $f(\overline{M}_i)=\bar{a}$. Es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß f auf $\overline{M}_i$ injektiv ist. Angenommen, es gibt zwei Punkte x_1, x_2 aus $\overline{M}_i$ mit $f(x_1)=f(x_2)=y$. Dabei kann man $x_1, x_2\in\partial M_i$ und $y\in\partial a$ annehmen. Da $f^{-1}(y)$ diskret ist, gibt es eine offene Umgebung U von x_1 mit kompaktem $\overline{U}$, so daß x_1 der einzige Urbildpunkt von y in $\overline{U}$ ist. Es seien (x_1^n) bzw. (x_2^n) Folgen von Punkten aus M_i, die gegen x_1 bzw. x_2 konvergieren. Dabei sei für alle n: $x_1^n\in U$, $x_2^n\notin\overline{U}$. Die Bildfolgen $(f(x_1^n))$ und $(f(x_2^n))$ konvergieren gegen y. Da $\bar{a}$ topologisches Bild einer abgeschlossenen Kugel ist, kann man $f(x_1^n)$ und $f(x_2^n)$ durch eine solche Kurve k_n in a verbinden, daß jede Folge (z^n), $z^n\in k_n$, gegen y konvergiert. Die Abbildung $(f|M_i)^{-1}$ bildet k_n auf eine x_1^n mit x_2^n in M_i verbindende Kurve $\tilde{k}_n$ ab. Jedes $\tilde{k}_n$ trifft den

Rand ∂U von U. Wählt man $s^n \in \tilde{k}_n \cap \partial U$, so hat (s^n) einen Häufungspunkt in ∂U, der über y liegt. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von U.

Es sei nun c eine Zelle aus $\mathfrak{Y} - \mathfrak{B}$. Es gibt eine Zelle a aus $\mathfrak{Z}$ mit $c \subseteq \bar{a}$. $f^{-1}(a)$ zerfalle in die Zusammenhangskomponenten $M_1, \ldots, M_\beta$. Dann sei $(f|\overline{M}_i)^{-1}(c) =: N_i$. Es gilt $f^{-1}(c) = \bigcup_{i=1}^{\beta} (f^{-1}(c) \cap \overline{M}_i) = \bigcup_{i=1}^{\beta} N_i$. Daraus folgt, daß die N_i disjunkt sein müssen, da anderenfalls ein Punkt von c weniger als β Urbildpunkte hätte. Weiterhin ist $f^{-1}(\bar{c}) \cap \overline{M}_i = \overline{N}_i$, woraus $f^{-1}(\bar{c}) = \bigcup_{i=1}^{\beta} (f^{-1}(\bar{c}) \cap \overline{M}_i) = \bigcup_{i=1}^{\beta} \overline{N}_i$ folgt. Damit ist gezeigt:

$f^{-1}(c)$ zerfällt in Zusammenhangskomponenten $N_1, \ldots, N_\beta$; es ist $f^{-1}(\bar{c}) = \bigcup_{i=1}^{\beta} \overline{N}_i$, und die Abbildung $f|\overline{N}_i\colon \overline{N}_i \to \bar{c}$ ist topologisch.

Es sei b eine Zelle aus $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{S}$ sei die Menge der Zellen $c \in \mathfrak{Y}$ mit $b \subseteq \bar{c}$. Zwei Zellen c_1, c_2 aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$ mögen *verbindbar* heißen, wenn es weitere Zellen $a_1, \ldots, a_m, a_1', \ldots, a_{m-1}'$ aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$ gibt, so daß $a_1 = c_1$, $a_m = c_2$ und $a_\mu' \subseteq \bar{a}_\mu \cap \bar{a}_{\mu+1}$ für $\mu = 1, \ldots, m-1$ gilt. Dann wird behauptet:

Je zwei Zellen c_1, c_2 aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$ sind verbindbar.

Beweis. $\mathfrak{S}_1$ sei die Menge der Zellen aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$, die mit c_1 verbindbar sind, und $\mathfrak{S}_2$ die Menge der Zellen aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$, für die das nicht gilt. Es werde $c_2 \in \mathfrak{S}_2$ angenommen. S bzw. S_1 bzw. S_2 seien die abgeschlossenen Hüllen der Trägermengen von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$. Schließlich sei y ein Punkt von b. S ist eine Umgebung von y. Es ist $S_1 \cup S_2 = S$, denn jede Zelle aus $\mathfrak{S}$ ist in der abgeschlossenen Hülle einer Zelle aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$ enthalten. Es gibt eine Umgebung U von y, so daß $U \cap S_1 \cap S_2$ in B enthalten ist. (U bestimmt man so, daß für je zwei Zellen $c_1' \in \mathfrak{S}_1$, $c_2' \in \mathfrak{S}_2$ folgendes gilt: Ist eine Zelle d aus $\mathfrak{Y}$ in $\overline{c_1'} \cap \overline{c_2'}$ enthalten und ist $y \notin \bar{d}$, so ist $\bar{d} \cap U = \emptyset$. Sei dann $x \in S_1 \cap S_2 \cap U$. Es gibt also ein $c_1' \in \mathfrak{S}_1$ und ein $c_2' \in \mathfrak{S}_2$ mit $x \in \overline{c_1'} \cap \overline{c_2'}$ und deshalb ein $d \in \mathfrak{Y}$ mit $x \in d \subseteq \overline{c_1'} \cap \overline{c_2'}$. Daraus folgt $U \cap d \neq \emptyset$, also $y \in \bar{d}$, also $b \subseteq \bar{d}$. Dann muß $d \in \mathfrak{B}$ sein, weil sonst c_1' und c_2' verbindbar wären, mithin $x \in B$.) Da B nirgends zerlegt, gibt es eine Umgebung $V \subseteq U \cap S$ von y, so daß $V - B$ zusammenhängend ist. Andererseits hat man $V - B = (S_1 \cap (V - B)) \cup (S_2 \cap (V - B))$, $(S_1 \cap (V - B)) \cap (S_2 \cap (V - B)) = \emptyset$, $S_1 \cap (V - B) \neq \emptyset$, $S_2 \cap (V - B) \neq \emptyset$, was bedeutet, daß $V - B$ nicht zusammenhängend ist. Die Annahme $c_2 \in \mathfrak{S}_2$ ist also falsch.

Es sei nun c eine Zelle aus $\mathfrak{Y}$. Es gibt eine Zelle $a \in \mathfrak{Y} - \mathfrak{B}$ mit $c \subseteq \bar{a}$. Nach dem Vorangegangenen zerfällt $f^{-1}(a)$ in Zusammenhangskomponenten $N_1, \ldots, N_\beta$; es ist $f^{-1}(\bar{a}) = \bigcup_{i=1}^{\beta} \overline{N}_i$; die Abbildung $f|\overline{N}_i\colon \overline{N}_i \to \bar{a}$ ist topologisch. Daraus folgt, daß die Mengen $(f|\overline{N}_i)^{-1}(c) =: \tilde{c}_i$ Zellen sind, und daß $f|\overline{\tilde{c}}_i\colon \overline{\tilde{c}}_i \to \bar{c}$ topologisch ist. Darüber hinaus gilt, daß die Zellen $\tilde{c}_i$ nur von c und nicht von der Hilfszelle a abhängen. Denn sei a' eine weitere Zelle aus $\mathfrak{Y} - \mathfrak{B}$ mit $c \subseteq \overline{a'}$. Der Fall $c \notin \mathfrak{B}$ ist klar, denn dann kann man c selbst als Hilfszelle benutzen. Ist $c \in \mathfrak{B}$, so kann man sich wegen der oben bewiesenen Verbindbarkeit auf den

Fall beschränken, daß eine weitere Zelle $a'' \in \mathfrak{Y} - \mathfrak{B}$ mit $c \subseteq \overline{a''}$ und $a'' \subseteq \overline{a} \cap \overline{a'}$ existiert, die man dann als Hilfszelle nehmen kann. Damit ist gezeigt: *Jeder Zelle $c \in \mathfrak{Y}$ kann auf eindeutige Weise eine Menge von Zellen $\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_\beta$ in X zugeordnet werden; die Vielfachheit $v(\tilde{c}_i)$, mit der eine Zelle $\tilde{c}_i$ dabei auftritt, kann folgendermaßen charakterisiert werden: Im Fall $c \notin \mathfrak{B}$ ist $v(\tilde{c}_i) = 1$; ist $c \in \mathfrak{B}$ und ist c im Rand einer Zelle $a \in \mathfrak{Y} - \mathfrak{B}$ enthalten, so ist $v(\tilde{c}_i)$ die Anzahl der a zugeordneten Zellen $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\beta$, in deren Rand $\tilde{c}_i$ enthalten ist. Weiterhin ist $\bigcup_{i=1}^{\beta} \tilde{c}_i = f^{-1}(c)$, und die Abbildung $f | \overline{\tilde{c}}_i \colon \overline{\tilde{c}}_i \to c$ ist topologisch.*

Bedeutet nun $\mathfrak{X}$ die Menge der hochgedrückten Zellen, so braucht man, um nachzuweisen, daß $(X, \mathfrak{X})$ ein Komplex ist, nur noch zu zeigen, daß zwei verschiedene Zellen aus $\mathfrak{X}$ punktfremd sind. Dabei müssen neben dem Unterkomplex $(B, \mathfrak{B})$ auch die am Anfang des Beweises fixierten weiteren Verzweigungskomplexe $(B_i, \mathfrak{B}_i)$, $i = 1, \ldots, r$, herangezogen werden. Es genügt, den Fall von zwei über derselben Zelle $c \in \mathfrak{Y}$ gelegenen Zellen $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ zu betrachten. Es sei $\tilde{c}_1 \cap \tilde{c}_2$ nichtleer. Im Fall $c \notin \mathfrak{B}$ folgt sofort $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$. Sei dann $c \in \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1$. Da $f' := f | f^{-1}(B) - f^{-1}(B_1) \colon f^{-1}(B) - f^{-1}(B_1) \to B - B_1$ lokal-topologisch, surjektiv und eigentlich ist, zerfällt $f'^{-1}(c)$ in Zusammenhangskomponenten, die durch f' topologisch auf c abgebildet werden. Daraus folgt aber $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$. Entsprechend schließt man in den weiteren Fällen $c \in \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_2$, $c \in \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_3$ usw.

Aus dem Zellenkomplex $(Y, \mathfrak{Y})$ kann man in der in (1.3) beschriebenen Weise einen simplizialen Komplex $(Y, \mathfrak{L})$ gewinnen, derart daß der Unterkomplex $(B, \mathfrak{B})$ in einen simplizialen Unterkomplex $(B, \mathfrak{M})$ übergeht. Die simpliziale Unterteilung von $\mathfrak{Y}$ kann auf $\mathfrak{X}$ übertragen werden, da ja für jedes $\tilde{c} \in \mathfrak{X}$ die Abbildung $f | \overline{\tilde{c}} \colon \overline{\tilde{c}} \to f(\tilde{c})$ topologisch ist. $(X, \mathfrak{X})$ geht so in einen simplizialen Komplex $(X, \mathfrak{K})$ über, der durch f simplizial auf $(Y, \mathfrak{L})$ abgebildet wird.

Für Simplexe $\tilde{e}$ aus $\mathfrak{K}$ wird nun noch $v(\tilde{e}) := v(\tilde{c})$ gesetzt, wobei $\tilde{c}$ diejenige Zelle aus $\mathfrak{X}$ ist, aus der $\tilde{e}$ bei der simplizialen Unterteilung entstanden ist, d.h. die höchstdimensionale Zelle aus $\mathfrak{X}$, deren Durchschnitt mit $\tilde{e}$ nichtleer ist. Dann folgt aus dem Vorangegangenen, daß auch die letzte Behauptung von Satz 6 erfüllt ist.

Mit Hilfe von Satz 6 kann der folgende, von Remmert-Stein in [*10*] (Satz 5, p. 170) formulierte Satz bewiesen werden:

Satz 7. *(X, f, Y) sei eine analytische Überlagerung mit der Blätterzahl β. Y (und damit auch X) habe abzählbare Topologie. $f_* \colon H(X) \to H(Y)$ bezeichne den von f induzierten Homomorphismus zwischen den ganzzahligen Homologiegruppen von X bzw. Y. Dann gibt es einen dimensionstreuen Umkehrhomomorphismus $g_* \colon H(Y) \to H(X)$, so daß für jedes $h \in H(Y)$ gilt: $f_* \circ g_*(h) = \beta \cdot h$. Der durch g_* erzeugte Homomorphismus zwischen den Divisionshomologiegruppen ist injektiv.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Satz 6 sei $C(X)$ bzw. $C(Y)$ die Gruppe der endlichen Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von orientierten Simplexen aus $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$. e sei ein Simplex aus $\mathfrak{L}$, für das eine Orientierung festgelegt ist. Die Orientierung von e wird auf die Urbildsimplexe $\tilde{e}$ von e vermöge der topologischen Abbildung $f|\tilde{e}: \tilde{e} \to e$ übertragen. Die Summe $\Sigma v(\tilde{e})\,\tilde{e}$, erstreckt über alle Urbildsimplexe von e, ist dann ein Element aus $C(X)$, das mit $g(e)$ bezeichnet sei. Durch lineare Fortsetzung wird g zu einem dimensionstreuen Homomorphismus von $C(Y)$ in $C(X)$. Die Vertauschbarkeit mit dem Randoperator folgt aus der Behauptung 3b von Satz 6. Also induziert g einen dimensionstreuen Homomorphismus $g_*: H(Y) \to H(X)$ zwischen den Homologiegruppen, für den $f_* \circ g_*$ gleich dem β-fachen der Identität ist. Daraus ergibt sich, daß der von g_* induzierte Homomorphismus g'_*: $D(Y) \to D(X)$ zwischen den Divisionshomologiegruppen injektiv ist, denn gilt $g'_*(d) = 0$ für ein Element d aus $D(Y)$, so muß $\beta \cdot d = 0$, also $d = 0$ sein.

Anmerkung. Wird Y nicht als abzählbar vorausgesetzt, so kann man folgendermaßen schließen: z sei ein singulärer Zyklus in Y. Es gibt dann einen offenen, zusammenhängenden normalen komplexen Unterraum Y' von Y, der z enthält und abzählbare Topologie hat. $\left(f^{-1}(Y'), f|f^{-1}(Y'), Y'\right)$ ist eine analytische Überlagerung mit der Blätterzahl β. Daher gibt es einen singulären Zyklus $\tilde{z}$ in X, den man wie oben mit Hilfe einer simplizialen Zerlegung von Y' und einem zu z homologen simplizialen Zyklus bestimmt, so daß $f(\tilde{z})$ zu $\beta \cdot z$ homolog ist. Daraus folgt bereits, daß der Rang der Homologiegruppe von X nicht kleiner als der Rang der Homologiegruppe von Y sein kann. Doch gilt auch die volle Aussage von Satz 7. Dazu muß man feststellen, daß die von $\tilde{z}$ erzeugte Homologieklasse nur von der von z erzeugten Homologieklasse abhängt, d.h. von der Einbettung und der Zerlegung unabhängig ist. Das wiederum kann man durch Benutzung von Zellenketten, die zu einer Zerlegung in A-Zellen gehören, und der Tatsache, daß es nach Satz 4, Folgerung 2, zu je zwei Zerlegungen in A-Zellen eine gemeinsame Verfeinerung gibt, beweisen.

(6.4) Ein simplizialer Komplex $(K, \mathfrak{K})$ heißt eine *m-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit* (vgl. [8], § 24), wenn folgendes gilt:

1. Jedes Simplex aus $\mathfrak{K}$ hat entweder die Dimension m oder ist Seite eines m-Simplexes aus $\mathfrak{K}$.

2. Jedes $(m-1)$-Simplex ist Seite von genau zwei m-Simplexen.

3. Für je zwei m-Simplexe gibt es eine endliche Folge weiterer m-Simplexe, deren erstes bzw. letztes Glied die vorgegebenen sind, so daß je zwei aufeinanderfolgende Simplexe eine gemeinsame $(m-1)$-dimensionale Seite haben.

4. Die m-Simplexe können so orientiert werden, daß auf ein $(m-1)$-Simplex von den zwei m-Simplexen, deren Seite es ist, entgegengesetzte Orientierungen induziert werden.

Ist $(K, \mathfrak{K})$ eine m-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, so ist die m-te Homologiegruppe $H_m(K)$ frei zyklisch, falls K kompakt ist, und enthält nur das Nullelement, falls K nicht kompakt ist.

Satz 8. *X sei ein irreduzibler komplexer Raum der Dimension n. Dann ist die $2n$-te Homologiegruppe $H_{2n}(X)$ frei zyklisch oder enthält nur das*

Nullelement, je nachdem ob X kompakt oder nicht kompakt ist. Hat X abzählbare Topologie, so gibt es einen simplizialen Komplex $(X, \mathfrak{K})$, der eine $2n$-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit ist.

Beweis. N sei die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von X. Die Irreduzibilität von X ist mit dem Zusammenhang von $X-N$ gleichbedeutend. Zunächst werde X als abzählbar vorausgesetzt. Dann gibt es nach Satz 4, Folgerung 1, und der Bemerkung (1.3) einen simplizialen Komplex $(X, \mathfrak{K})$, der einen Unterkomplex $(N, \mathfrak{N})$ enthält. Die Dimension von N ist höchstens gleich $n-1$. Daher gehören die $(2n-1)$-Simplexe von $\mathfrak{K}$ nicht zu $\mathfrak{N}$. $X-N$ ist eine n-dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit. Die Bedingungen 1., 2. und 4. der obigen Definition sind also erfüllt, und es bleibt nur noch 3. zu zeigen. Sei $a' \notin \mathfrak{N}$ gemeinsame Seite der $2n$-Simplexe a_1, a_2. Da $a' - \partial a'$ aus gewöhnlichen Punkten besteht, können a_1 und a_2 durch eine Folge der verlangten Art verbunden werden. Es mögen nun zwei Simplexe b_1, b_2 aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ verbindbar genannt werden, wenn es Simplexe $c_1, \ldots, c_m, c'_1, \ldots, c'_{m-1}$ aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ gibt, so daß $c_1 = b_1$, $c_m = b_2$ gilt und c'_μ eine gemeinsame Seite von c_μ und $c_{\mu+1}$ ist $(\mu = 1, \ldots, m-1)$. Dann genügt es zu zeigen: Je zwei Simplexe b_1, b_2 aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ sind verbindbar. Es sei $\mathfrak{S}_1$ die Menge der mit b_1 verbindbaren Simplexe aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ und es werde $b_2 \in \mathfrak{S}_2 := (\mathfrak{K}-\mathfrak{N}) - \mathfrak{S}_1$ angenommen. S_1 bzw. S_2 seien die Trägermengen von $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$. S_1 und S_2 sind abgeschlossen und es gilt $S_1 \cup S_2 = X$ (weil jedes Simplex aus $\mathfrak{N}$ Seite eines Simplexes aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ ist) und $S_1 \cap S_2 \subseteq N$ (weil sonst zwei Simplexe aus $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ eine gemeinsame Seite aus $\mathfrak{K}-\mathfrak{N}$ hätten). Ferner sind $F_1 := S_1 \cap (X-N)$ und $F_2 := S_2 \cap (X-N)$ nicht leer. Aus $F_1 \cup F_2 = X-N$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ folgt dann ein Widerspruch zum Zusammenhang von $X-N$.

Wenn die Topologie von X nicht abzählbar ist, so ist X notwendig nicht kompakt. Es sei z ein $2n$-dimensionaler singulärer Zyklus in X. X_1 sei eine z enthaltende offene Teilmenge von X mit abzählbarer Topologie. $X_1 - N$ kann als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$ von zusammenhängenden Mengen dargestellt werden. Für jedes m kann Y_m mit Y_{m+1} durch eine in $X-N$ gelegene Kurve verbunden werden, die durch eine zusammenhängende offene Menge $Y'_m \subseteq X-N$ mit abzählbarer Topologie überdeckt werden kann. Der offene Unterraum $X_2 := X_1 \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} Y'_m$ bleibt also bei Herausnahme der nichtgewöhnlichen Punkte zusammenhängend, hat abzählbare Topologie, enthält z und kann wegen des Zusammenhanges von X nicht kompakt sein. Nach dem Vorangegangenen ist z dann nullhomolog.

Anmerkung. Satz 8 wird falsch, wenn X nicht als irreduzibel vorausgesetzt wird. Verheftet man z.B. eine kompakte und eine nicht kompakte Riemannsche Fläche in einem Punkt, so kann man leicht eine komplexe Struktur finden, die diese Verheftung zu einem 1-dimensionalen, nicht kompakten, reduziblen komplexen Raum macht, dessen 2-te Homologiegruppe nicht verschwindet.

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie I. Berlin: Springer 1935.
[2] BOCHNER, S., and W. T. MARTIN: Several complex variables. Princeton: Princeton University Press 1948.
[3] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1950.
[4] SARD, A.: The measure of the critical value of differentiable maps. Bull. Am. Math. Soc. **48**, 883–890 (1942).
[5] KOOPMAN, B. O., and A. B. BROWN: On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Am. Math. Soc. **34**, 231–251 (1932).
[6] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958).
[7] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263–306 (1953).
[8] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner 1934.
[9] LEFSCHETZ, S., and J. H. C. WHITEHEAD: On analytical complexes. Trans. Am. Math. Soc. **35**, 510–517 (1933).
[10] REMMERT, R., u. K. STEIN: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Z. **73**, 159–189 (1960).
[11] BOREL, A., et A. HAEFLIGER: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. Bull. Soc. Math. France **89**, 451–460 (1961).
[12] KNESER, M.: Abhängigkeit von Funktionen. Math. Z. **54**, 34–51 (1951).

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 6. September 1963)