SCHNEIDER, R.
Math. Zeitschr. 102, 1–8 (1967)

Zur affinen Differentialgeometrie im Großen II. Über eine Abschätzung der Pickschen Invariante auf Affinsphären*

ROLF SCHNEIDER

Eingegangen am 10. Mai 1967

1. Einleitung und Formulierung des Ergebnisses

CALABI [7][1] hat bewiesen, daß jede elliptisch gekrümmte, affin-vollständige[2] uneigentliche Affinsphäre im $(n+1)$-dimensionalen affinen Raum $\mathscr{A}_{n+1}$ $(n \geqq 2)$ ein elliptisches Paraboloid ist. Dieser Satz folgt bei CALABI aus einer schärferen, quantitativen Aussage, nämlich einer Abschätzung der Pickschen Invariante auf nicht notwendig affin-vollständigen uneigentlichen Affinsphären (genaue Formulierung s. unten). In I, Satz 7.1, wurde in Verallgemeinerung des Satzes von BLASCHKE und DEICKE gezeigt, daß eine elliptisch gekrümmte, affin-vollständige eigentliche Affinsphäre erster Art im $\mathscr{A}_{n+1}$ notwendig ein Ellipsoid ist. Auch zu diesem Satz läßt sich nach der Methode von CALABI in gewissem Sinne ein quantitatives Gegenstück angeben; dies soll im folgenden geschehen.

$\mathscr{M}$ bezeichne stets eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik der Klasse C^3. Ist von einer Affinsphäre $(\mathscr{M}, \mathrm{x})$ im $\mathscr{A}_{n+1}$ die Rede, so wird mit $\mathscr{M}$ stets auch der Riemannsche Raum bezeichnet, der aus der Parametermannigfaltigkeit zusammen mit der durch den äquiaffinen metrischen Tensor der Fläche gegebenen Riemannschen Metrik besteht.

Der Riemannsche Raum $\mathscr{M}$ sei zunächst nicht vollständig (im Sinne von HOPF und RINOW). Erklärt man in üblicher Weise für $p, q \in \mathscr{M}$ die Abstandsfunktion $d(p, q)$ durch das Infimum der Riemannschen Längen aller rektifizierbaren Kurven, die p und q verbinden, so wird $\mathscr{M}$ (d.h. die zugrunde liegende Menge zusammen mit der Abstandsfunktion) ein metrischer Raum. $\hat{\mathscr{M}}$ entstehe aus $\mathscr{M}$ durch Vervollständigung. Nach Voraussetzung ist die Menge $\hat{\mathscr{M}} - \mathscr{M}$ nicht leer. Für $p \in \mathscr{M}$ sei

$$\gamma(p) = d(p, \hat{\mathscr{M}} - \mathscr{M}),$$

das ist der Abstand des Punktes p von der Menge $\hat{\mathscr{M}} - \mathscr{M}$. $\gamma(p)$ kann auch erklärt werden (vgl. CALABI [6], Theorem 2) als die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit folgender Eigenschaft: Auf jedem von p ausgehenden geodätischen Strahl der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathscr{M}$ kann man jede Länge $< \gamma(p)$

* Diese Arbeit schließt sich an die im folgenden mit I zitierte Arbeit „*Zur affinen Differentialgeometrie im Großen. I*“, diese Math. Z., an, aus der Begriffe, Bezeichnungen und einige Formeln übernommen werden.

[1] Literaturhinweise beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in I.

[2] Definition im 7. Abschnitt von I.

abtragen, aber es gibt ein von p ausgehendes geodätisches Segment der Länge $\gamma(p)$ ohne Endpunkt in $\mathcal{M}$. – Ist der Riemannsche Raum $\mathcal{M}$ vollständig, so wird $\gamma(p)=\infty$ gesetzt für alle $p\in\mathcal{M}$. $\gamma(p)$ wird auch bezeichnet als *geodätischer Abstand* des Punktes p vom idealen Rand der Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Satz 1.1. *Sei* $(\mathcal{M}, \mathrm{x})$ *eine elliptisch gekrümmte uneigentliche Affinsphäre im* $\mathcal{A}_{n+1}$. *Dann gilt in jedem Punkt* $p\in\mathcal{M}$ *für die Picksche Invariante* J

$$J(p)\leqq\left(\frac{2n}{n+1}\right)\frac{1}{\gamma(p)^2}. \tag{1.1}$$

Dieser Satz stammt von CALABI [7] (mit einer für $n=2$, 3 etwas ungünstigeren Schranke). Ist die Affinsphäre affin-vollständig, so ist also $J(p)=0$ für alle $p\in\mathcal{M}$, daher ist die Fläche eine Quadrik. Diese Aussage wird durch die Ungleichung (1.1) quantitativ verschärft: Je größer der geodätische Abstand eines Punktes vom idealen Rand der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist, um so weniger weicht die Fläche in diesem Punkt von einer Quadrik ab (die mit dem Darbouxschen Tensor gebildete kubische Fundamentalform und damit die Picksche Invariante mißt ja in gewissem Sinne die Abweichung der Fläche von einer Quadrik[3]).

Satz 1.2. *Sei* $(\mathcal{M}, \mathrm{x})$ *eine elliptisch gekrümmte eigentliche Affinsphäre erster Art im* $\mathcal{A}_{n+1}$. *Dann gilt für alle* $p\in\mathcal{M}$

$$J(p)\leqq\frac{nH}{2(n+1)}\cot\mathrm{g}^2\varphi \qquad \text{mit } \varphi=\tfrac{1}{2}\operatorname{Min}\{\pi, \sqrt{H}\,\gamma(p)\}. \tag{1.2}$$

Für eine nicht geschlossene eigentliche Affinsphäre erster Art mit der (positiven, konstanten) mittleren Affinkrümmung H folgt aus der Ungleichung I(7.1) (mit $\delta=H$) in Verbindung mit einem Lemma von MYERS [19], daß für alle $p\in\mathcal{M}$ überhaupt schon, unabhängig von der Größe der Pickschen Invariante, $\gamma(p)\leqq\pi/\sqrt{H}$ sein muß. Ist also $\sqrt{H}\,\gamma(p)>\pi$, so ist die Affinsphäre geschlossen und nach dem Satz von BLASCHKE und DEICKE ein Ellipsoid. Die Ungleichung (1.2) drückt aus, daß $\gamma(p)$ der Schranke $\pi/\sqrt{H}$ nur nahe kommen kann, wenn $J(p)$ klein ist, die Fläche also in p nur wenig von einer Quadrik abweicht. Und andererseits müssen Punkte mit großem J „nahe am Rand" liegen.

Die Sätze 1.1 und 1.2 werden im 4. Abschnitt bewiesen; der Beweis für Satz 1.1 ist gegenüber dem von CALABI etwas vereinfacht und liefert für $n=2$, 3 eine etwas schärfere Schranke. Die nächsten beiden Abschnitte enthalten die erforderlichen Vorbereitungen.

2. Eine Differentialungleichung für die Picksche Invariante auf Affinsphären

Die Picksche Invariante J genügt auf Affinsphären einer später wichtigen Differentialungleichung (für $n=2$ vgl. BLASCHKE [3], S. 211, P.A. und A.P.

[3] Für eine Präzisierung dieser Aussage vgl. LAUGWITZ [15], S. 39.

SCHIROKOW [*22*], S. 180), die für uneigentliche Affinsphären von CALABI aufgestellt worden ist und sich analog für beliebige Affinsphären herleiten läßt:

Zunächst bemerken wir, daß sich der durch I(2.18) gegebene Krümmungstensor der Affinmetrik für Affinsphären wegen I(5.4) und I(5.1) vereinfacht zu

$$R_{ijkl}=A_{il}{}^{r}A_{rjk}-A_{ik}{}^{r}A_{rjl}+H(G_{ik}G_{jl}-G_{il}G_{jk});$$

der Ricci-Tensor lautet

$$R_{ij}=A_i{}^{rs}A_{jrs}+(n-1)H\,G_{ij}. \tag{2.1}$$

Für die Quadrate der Beträge dieser Tensoren erhält man

$$\begin{aligned} R_{ijkl}R^{ijkl}=2[&A^{ijk}A^{abc}A_{abi}A_{cjk}\\ &-A^{ijk}A^{a}{}_{ib}A^{b}{}_{jc}A^{c}{}_{ka}+n(n-1)H(2J+H)], \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$R_{ij}R^{ij}=A^{ijk}A^{abc}A_{abi}A_{cjk}+n(n-1)^2H(2J+H). \tag{2.3}$$

Nun ist

$$n(n-1)\Delta J=2(G^{rs}A_{ijk\|r\|s}A^{ijk}+A_{ijk\|r}A^{ijk\|r})$$

mit

$$\begin{aligned} G^{rs}A_{ijk\|r\|s}&=G^{rs}A_{rjk\|i\|s} &&\text{wegen I}(5.4)\\ &=G^{rs}(A_{rjk\|i\|s}-A_{rjk\|s\|i}) &&\text{wegen I}(5.5)\\ &=G^{rs}(A_{hjk}R^{h}{}_{ris}+A_{rhk}R^{h}{}_{jis}+A_{rjh}R^{h}{}_{kis})\\ &=A^{abc}(A_{abi}A_{cjk}+A_{abj}A_{cki}+A_{abk}A_{cij})\\ &\quad-2A^{a}{}_{ib}A^{b}{}_{jc}A^{c}{}_{ka}+(n+1)HA_{ijk}. \end{aligned}$$

Überschieben mit A^{ijk} liefert

$$\begin{aligned} G^{rs}A_{ijk\|r\|s}A^{ijk}=3&A^{ijk}A^{abc}A_{abi}A_{cjk}\\ &-2A^{ijk}A^{a}{}_{ib}A^{b}{}_{jc}A^{c}{}_{ka}+n(n^2-1)HJ. \end{aligned}$$

Mit (2.2) und (2.3) erhält man also

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)\Delta J=R_{ijkl}R^{ijkl}+R_{ij}R^{ij}+A_{ijk\|l}A^{ijk\|l}-n(n^2-1)H(J+H). \tag{2.4}$$

Da auf jeder n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit die Ungleichungen (CALABI [*7*], S. 110)

$$R_{ijkl}R^{ijkl}\geqq\frac{2}{n-1}R_{ij}R^{ij}\geqq\frac{2}{n(n-1)}R^2$$

gelten, folgt wegen I(2.23) aus (2.4) die Differentialungleichung

$$\Delta J\geqq 2(n+1)J(J+H)+A_{ijk\|l}A^{ijk\|l}. \tag{2.5}$$

Aus dieser Ungleichung läßt sich übrigens mit Benutzung des Maximumprinzips ein neuer Beweis (für $n=2$ siehe BLASCHKE [*3*], § 77) des Satzes von

BLASCHKE und DEICKE gewinnen; auch I, Satz 6.2, läßt sich für eigentliche Affinsphären erster Art und analog für uneigentliche Affinsphären folgern.

Sei $J \neq 0$. Wegen der allgemein gültigen Ungleichung (CALABI [7], S. 113, mit anderen Bezeichnungen)

$$J A_{ijk\|l} A^{ijk\|l} \geqq \frac{n(n-1)}{4} G^{ij} J_i J_j$$

ergibt sich für die Funktion

$$u = \log J$$

aus (2.5) für $n \geqq 3$ die Differentialungleichung

$$\Delta u \geqq 2(n+1)(e^u + H). \tag{2.6}$$

Für $n=2$ gilt (2.6) mit dem Gleichheitszeichen (s. P.A. und A.P. SCHIROKOW [22], S. 180).

3. Hilfsmittel der Methode von Calabi

Wir stellen nun die wichtigsten Hilfsmittel der Beweismethode von CALABI [6, 7] zusammen. Sie beruht im wesentlichen auf der Differentialungleichung (2.5) und einer Anwendung des Maximumprinzips. Hierzu ist es erforderlich, der Aussage, eine Funktion u genüge auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Differentialungleichung $\Delta u \geqq v$, auch für nicht notwendig differenzierbare Funktionen einen Sinn zu geben:

Definition 3.1 (CALABI). *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathcal{M}$. Seien u und v reelle Funktionen auf U; u sei nach oben halbstetig. Wir schreiben*

$$\Delta u \geqq v \qquad \text{in } U$$

genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem Punkt $p \in U$ und jeder Konstanten $\varepsilon > 0$ existieren eine Umgebung $V_{p,\varepsilon} \subset U$ von p und eine reelle Funktion $u_{p,\varepsilon}$ der Klasse C^2 in $V_{p,\varepsilon}$ mit den Eigenschaften

(a) *die Funktion $u - u_{p,\varepsilon}$ nimmt in p ihr Minimum (über $V_{p,\varepsilon}$) an;*

(b) *im Punkt p gilt*

$$\Delta u_{p,\varepsilon} \geqq v - \varepsilon$$

im gewöhnlichen Sinne.

Ist u eine nach unten halbstetige Funktion auf U, so schreibt man $\Delta u \leqq v$, wenn $\Delta(-u) \geqq -v$ gilt.

Die Definition ist sinnvoll insofern, als für eine Funktion u aus der Klasse C^2 die angegebene definierende Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn $\Delta u \geqq v$ im gewöhnlichen Sinne gilt. Die Bedeutung der Definition liegt darin, daß sie folgende Verallgemeinerung des Maximumprinzips gestattet:

Lemma 3.1 (CALABI). *Gilt für die in dem offenen zusammenhängenden Gebiet $U \subset \mathcal{M}$ nach oben halbstetige Funktion u*

$$\Delta u \geqq 0 \qquad \text{in } U$$

und nimmt u in einem Punkt von U ein relatives Maximum an, so ist u konstant in U.

Die Methode von CALABI erfordert, auf bestimmten Teilmengen der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ Funktionen zu konstruieren, die gewissen vorgeschriebenen Differentialungleichungen genügen. Solche Funktionen werden erhalten als geeignete Funktionen des Abstandes von einem festen Punkt $p_0 \in \mathcal{M}$. Diese Konstruktion wird ermöglicht durch das folgende Lemma. Darin ist mit einer positiven reellen Zahl a

$$\Sigma(p_0, a) = \{p \in \mathcal{M} \mid d(p_0, p) < a\}$$

gesetzt. Ferner setzen wir für $0 < r < \infty$ und konstantes δ

$$f_\delta(r) = \begin{cases} \sqrt{\delta}\,\operatorname{cotg}(\sqrt{\delta}\, r) & \text{für } \delta > 0 \\ \dfrac{1}{r} & \text{für } \delta = 0 \\ \sqrt{-\delta}\,\operatorname{Cotg}(\sqrt{-\delta}\, r) & \text{für } \delta < 0. \end{cases}$$

Lemma 3.2. *Vor.: Für den Ricci-Tensor R_{ij} der Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gelte in jedem Punkt für jeden Vektor λ^i*

$$R_{ij}\,\lambda^i \lambda^j \geqq (n-1)\,\delta G_{ij}\,\lambda^i \lambda^j$$

mit $\delta = \text{const}$[4]. *Sei $p_0 \in \mathcal{M}$. Sei $\Phi(t)$ für*

$$0 \leqq t < T < \gamma(p_0)$$

eine reelle Funktion der Klasse C^2 mit $\Phi'(0) = 0$ und $\Phi'(t) \geqq 0$. Für $p \in \Sigma(p_0, T)$ sei

$$v(p) = \Phi\big(d(p_0, p)\big).$$

Beh.: Es gilt (im Sinne von Definition 3.1*)*

$$\Delta v \leqq \Phi''(r) + (n-1)\, f_\delta(r)\, \Phi'(r) \qquad \text{in } \Sigma(p_0, T) \tag{3.1}$$

mit $r = d(p_0, p)$. (Für $p = p_0$ ist dabei für den in der Ungleichung (3.1) *rechts stehenden Ausdruck der (wegen $\Phi'(0) = 0$ vorhandene) Grenzwert für $p \to p_0$ zu setzen.)*

Das Lemma 3.2 findet sich für $\delta = 0$ bei CALABI [*6*, *7*]. Für $\delta > 0$ verläuft der Beweis analog; dabei hat man zu benutzen, daß eine für $r > 0$ erklärte Funktion $h(r)$ der Klasse C^1, die

$$\frac{dh}{dr} \geqq h^2 + c^2 \qquad \text{für } r > 0 \text{ mit } 0 < c = \text{const}$$

und

$$\lim_{r \to 0} h(r) = -\infty$$

erfüllt, der Ungleichung

$$h(r) > -c \operatorname{cotg} c\, r \qquad \text{für } r > 0$$

genügt. Entsprechendes gilt im Fall $\delta < 0$.

[4] Das Lemma wird nur für $\delta \geqq 0$ benutzt, ist jedoch der Vollständigkeit halber allgemein formuliert.

4. Beweis der Sätze 1.1 und 1.2

Beim Beweis der Sätze 1.1 und 1.2 können wir $\gamma(p)<\infty$, im zweiten Fall also $\gamma(p)\leqq\pi/\sqrt{H}$ annehmen.

Angenommen, Satz 1.1 wäre falsch. Dann gibt es einen Punkt $p_0\in\mathscr{M}$ und eine reelle Zahl a mit

$$J(p_0)>a>\left(\frac{2n}{n+1}\right)\frac{1}{\gamma(p_0)^2}. \tag{4.1}$$

Setze

$$\Phi(t)=\log\frac{a\,T^4}{(T^2-t^2)^2}, \qquad 0\leqq t<T,$$

wobei T noch geeignet zu bestimmen ist. Es ist

$$\Phi(0)=\log a, \qquad \Phi'(0)=0,$$
$$\Phi'(t)\geqq 0 \qquad \text{für } 0\leqq t<T.$$

Man berechnet

$$\Phi''(t)+\frac{n-1}{t}\,\Phi'(t)-2(n+1)\,e^{\Phi(t)}$$
$$=2(T^2-t^2)^{-2}\left[2(2-n)\,t^2+2n\,T^2-(n+1)\,a\,T^4\right].$$

Damit

$$\Phi''(t)+\frac{n-1}{t}\,\Phi'(t)\leqq 2(n+1)\,e^{\Phi(t)} \tag{4.2}$$

und zugleich

$$T<\gamma(p_0) \tag{4.3}$$

ist, wählen wir

$$T^2=\frac{2n}{a(n+1)}.$$

(4.3) ist dann wegen (4.1) erfüllt. Da die betrachtete Fläche eine uneigentliche Affinsphäre ist, ist $H\equiv 0$, also nach (2.1)

$$R_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j\geqq 0$$

in jedem Punkt aus $\mathscr{M}$ und für jeden Vektor λ^i. Die für $p\in\Sigma(p_0,T)$ durch

$$v(p)=\Phi\big(d(p_0,p)\big)$$

definierte Funktion genügt daher nach Lemma 3.2 und (4.2) der Ungleichung

$$\Delta v\leqq 2(n+1)\,e^v \qquad \text{in } \Sigma(p_0,T) \tag{4.4}$$

(im Sinne von Definition 3.1).

Wegen $\Phi(0)=\log a$ und (4.1) ist $J(p_0)\,e^{-v(p_0)}>1$. Da die abgeschlossene Hülle $\bar{\Sigma}(p_0,T)$ der Menge $\Sigma(p_0,T)$ bezüglich $\mathscr{M}$ wegen $T<\gamma(p_0)$ kompakt ist (vgl. Calabi [*6*], Theorem 2) und da $v(p)$ bei Annäherung von p an den Rand von $\Sigma(p_0,T)$ gegen ∞ geht, nimmt die Funktion $J\,e^{-v}$ in einem Punkt von

$\Sigma(p_0, T)$ ihr Maximum an, dessen Wert >1 ist. In einer Umgebung U (die Menge $\Sigma(p_0, T)$ ist offen) der Maximalstelle gilt $J > e^v > 0$, also gilt für die Funktion $u = \log J$ in U nach (2.6) und (4.4)

$$\Delta u \geqq 2(n+1)\, e^u > 2(n+1)\, e^v \geqq \Delta v$$

und daher[5]

$$\Delta(u-v) \geqq 0 \qquad \text{in } U$$

im Sinne von Definition 3.1. Nach Lemma 3.1 ist $u - v = \text{const}$ in U, also $\Delta u = \Delta v$, was nicht sein kann. Aus dem Widerspruch folgt die behauptete Ungleichung (1.1).

Beweis von Satz 1.2. Die mittlere Affinkrümmung H ist auf der eigentlichen Affinsphäre erster Art konstant und positiv.

Angenommen, Satz 1.2 wäre falsch. Dann gibt es einen Punkt $p_0 \in \mathscr{M}$ und eine reelle Zahl a mit

$$J(p_0) > a > \frac{nH}{2(n+1)} \operatorname{cotg}^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\gamma(p_0)\right). \tag{4.5}$$

Setze

$$\Phi(t) = \log \frac{a(1-\tau)^2}{(\cos\sqrt{H}\,t - \tau)^2}, \qquad 0 \leqq t < T < \pi/\sqrt{H},$$

mit $\tau = \cos\sqrt{H}\,T$, wo T noch geeignet bestimmt wird. Es ist

$$\Phi(0) = \log a, \qquad \Phi'(0) = 0,$$

$$\Phi'(t) \geqq 0 \qquad \text{für } 0 \leqq t < T.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} &\Phi''(t) + (n-1)\sqrt{H}\,\Phi'(t)\operatorname{cotg}\sqrt{H}\,t - 2(n+1)(e^{\Phi(t)} + H) \\ &\quad = 2(\cos\sqrt{H}\,t - \tau)^{-2}\{H[1-(n+1)\tau^2 + (n+2)\tau\cos\sqrt{H}\,t \\ &\qquad - 2\cos^2\sqrt{H}\,t] - (n+1)\,a(1-\tau)^2\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Wegen (4.5) können wir T so wählen, daß

$$T < \gamma(p_0)$$

und

$$a > \frac{nH}{2(n+1)} \operatorname{cotg}^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,T\right)$$

gilt. Aus der letzten Ungleichung folgt unter Beachtung von

$$\operatorname{cotg}^2\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,T\right) = \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

---

[5] Wie man sofort bestätigt, läßt sich mit Differentialungleichungen im Sinne von Definition 3.1 wie üblich rechnen; z.B. gilt mit $\Delta v \geqq w$, $\Delta \bar{v} \geqq \bar{w}$ auch $\Delta(v + \bar{v}) \geqq w + \bar{w}$ (jeweils im Sinne von Definition 3.1).

die Ungleichung

$$-(n+1)\,a(1-\tau)^2 < -\frac{n}{2}\,H(1-\tau^2)\,. \tag{4.7}$$

Die Bestimmung des Maximums der Funktion

$$\psi(t)=(n+2)\,\tau\cos\sqrt{H}\,t-2\cos^2\sqrt{H}\,t$$

im Intervall $[0,\, T/\sqrt{H}\,]$ ergibt, daß für $0\leqq t\leqq T$ gilt

$$\psi(t)\leqq\begin{cases} n\,\tau^2, & \text{wenn } -1<\tau\leqq 0\\ \frac{1}{8}(n+2)^2\,\tau^2, & \text{wenn } 0\leqq\tau\leqq\dfrac{4}{n+2}\\ (n+2)\,\tau-2, & \text{wenn } \dfrac{4}{n+2}\leqq\tau<1. \end{cases}$$

Damit und mit (4.7) bestätigt man unschwer, daß die rechte Seite der Gl. (4.6) nicht positiv ist. Es gilt also

$$\Phi''(t)+(n-1)\sqrt{H}\,\Phi'(t)\operatorname{cotg}\sqrt{H}\,t\leqq 2(n+1)\left(e^{\Phi(t)}+H\right) \tag{4.8}$$

für $0\leqq t<T$.

Da die Fläche eine eigentliche Affinsphäre erster Art ist, gilt nach (2.1)

$$R_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j\geqq(n-1)\,H\,G_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j$$

in jedem Punkt von $\mathcal{M}$ für jeden Vektor λ^i. Die für $p\in\Sigma(p_0,T)$ durch

$$v(p)=\Phi\big(d(p_0\,,p)\big)$$

definierte Funktion genügt also nach Lemma 3.2 und (4.8) der Ungleichung

$$\Delta v\leqq 2(n+1)(e^v+H)\qquad\text{in }\Sigma(p_0\,,T)\,.$$

Der Rest des Beweises erfolgt unter Verwendung von (2.6) analog wie bei Satz 1.1.

Mathematisches Seminar der Universität, 6 Frankfurt/M.