Potential Analysis 3: 61–87, 1994.

Perturbation semi-linéaire des résolvantes et des semi-groupes*

HABIB MAAGLI
Departement de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie.

(Reçu: 13 décembre 1991; accepté: 30 octobre 1992)

Abstract. We are concerned with nonlinear resolvents and semi-groups. They are obtained by perturbing linear ones. Properties of these nonlinear operators are investigated, particularly supermedian and excessive functions.

Résumé. La perturbation semi-linéaire des résolvantes et des semi-groupes linéaires, nous donne des résolvantes et des semi-groupes non linéaires. Nous étudions alors les propriétés de ces opérateurs non linéaires et en particulier les fonctions surmédianes et excessives associées.

Mathematics Subject Classifications (1991). 31C45, 31D05, 35J60, 47H15, 47H20, 60J35, 60J45.

Key words. Resolvents, semi-groups, Markov processes, complete maximum principle, supermedian functions, excessive functions.

Introduction

Le but de ce travail est l'étude de la perturbation semi-linéaire des résolvantes et des semi-groupes linéaires.

Les résultats obtenus constituent une généralisation de ceux de [1] et [13] concernant la perturbation linéaire des résolvantes et de ceux de [9] et [10] concernant la perturbation linéaire des semi-groupes.

D'autre part, ce travail fait suite aux travaux de Dellacherie [5] et [6], lequel a étudié les résolvantes non linéaires et a établi une version non linéaire du théorème de Hunt, et de Maeda [12], lequel a étudié la perturbation semi-linéaire des espaces harmoniques, et De La Pradelle et Feyel [4], lesquels ont construit la solution du problème de Dirichlet correspondant à l'opérateur elliptique non linéaire $Lu = 1/2\Delta u + F(\cdot, u)u' + G(\cdot, u)$, en utilisant des méthodes probabilistes.

Dans le premier paragraphe, on considère un espace (X, B) mesurable sur lequel est définie une résolvante linéaire $\mathbb{V} = (V_\alpha)_{\alpha>0}$ sous-markovienne. On se donne une fonction $\phi: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurable telle que l'application $r \to r\phi(x, r)$ soit croissante et localement lipschitzienne uniformément par rapport à x. On montre alors que

* Ce travail est soutenu par la fondation nationale pour la recherche scientifique. Projet MA4-89-FST.

pour tous f mesurable bornée et $\alpha > 0$, il existe une fonction mesurable bornée ${}^{\phi}V_{\alpha}f$ unique vérifiant:

$$V_{\alpha}f = {}^{\phi}V_{\alpha}f + V_{\alpha}(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f){}^{\phi}V_{\alpha}f).$$

La fonction ${}^{\phi}V_{\alpha}f$ est alors une solution de l'équation semi-linéaire:

$$Au - \alpha u - u\phi(\cdot, u) = -f, \quad \text{où } (\alpha I - A)^{-1} = V_{\alpha}.$$

On obtient ainsi une famille résolvante $({}^{\phi}V_{\alpha})_{\alpha>0}$ d'opérateurs non linéaires (i.e.: $\forall \alpha, \beta > 0$, ${}^{\phi}V_{\alpha} = {}^{\phi}V_{\beta}(I + (\beta - \alpha){}^{\phi}V_{\alpha})$), subordonnée à $(V_{\alpha})_{\alpha>0}$. On étudie ensuite les propriétés de cette résolvante. En particulier, on montre que ${}^{\phi}V_{\alpha}$ est un opérateur croissant et que pour tous f, g mesurables bornées et tout $\alpha > 0$:

$$|{}^{\phi}V_{\alpha}f - {}^{\phi}V_{\alpha}g| \leqslant V_{\alpha}(|f - g|).$$

On en déduit que si $V_0 1$ est borné, alors $({}^{\phi}V_{\alpha})_{\alpha>0}$ est achevée par un opérateur ${}^{\phi}V$ qui vérifie le principe complet du maximum. On achève ce paragraphe par l'étude des fonctions surmédianes et excessives de la résolvante perturbée $({}^{\phi}V_{\alpha})_{\alpha>0}$. En particulier, on donne une caractérisation des fonctions ${}^{\phi}\mathbb{V}$-surmédianes (analogue à celle du cas linéaire) à savoir: Pour qu'une fonction v soit ${}^{\phi}\mathbb{V}$-surmédiane il faut et il suffit que pour toute fonction h mesurable bornée, la relation:

$${}^{\phi}Vh(x) \leqslant v(x) \quad \text{pour tout } x \in [h > 0]$$

entraine: ${}^{\phi}Vh(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in X$.

Dans le deuxième paragraphe, on considère un espace (X, B) mesurable sur lequel est défini un semi-groupe linéaire $(P_t)_{t>0}$ relativement borné. On se donne une fonction $\phi: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable tell que ϕ^{-} soit bornée et l'application $r \to r\phi(x, r)$ soit localement lipschitzienne uniformément par rapport à x. On montre alors qu'il existe un semi-groupe non linéaire $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ unique vérifiant pour tous f mesurable bornée et $t > 0$:

$$P_t f = {}^{\phi}P_t f + \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_s f){}^{\phi}P_s f)\,ds.$$

Si $\chi = (\Omega, X_t, F, F_t, \theta_t, P^x)$ est un processus de Markov associé à $(P_t)_{t>0}$, alors le semi-groupe $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ vérifie pour tous f mesurable bornée, $x \in X$ et $t > 0$, l'équation:

$${}^{\phi}P_t f(x) = E^x(e^{-\int_0^t \phi(X_s, {}^{\phi}P_{t-s}f(X_s))\,ds} f(X_t)).$$

On étudie ensuite les propriétès de ce semi-groupe $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$. En particulier, on montre que ${}^{\phi}P_t$ est un opérateur croissant et que pour tous f et g mesurables bornées et $t > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$|{}^{\phi}P_t f - {}^{\phi}P_t g| \leqslant c \cdot P_t(|f - g|).$$

On achève ce travail par l'étude des fonctions surmédianes et excessives par rapport au semi-groupe $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$. En particulier, si $(P_t)_{t>0}$ est sous-markovien et si ϕ est comme dans le premier paragraphe, on montre alors que $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ a les mêmes fonctions excessives que la résolvante $({}^{\phi}V_\alpha)_{\alpha>0}$ où $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ est la résolvante du semi-groupe $(P_t)_{t>0}$.

NOTATIONS ET RAPPELS. Soit (X, B) un espace mesurable. Dans la suite $B(X)$(resp. $B_b(X)$) désigne l'ensemble des fonctions mesurables (resp. mesurables bornées) sur X. L'exposant + affecté à ces espaces indique que seules les fonctions positives sont considérées.

On rappelle que si U est un noyau sur X vérifiant le principe complet du maximum et $U1 < +\infty$ et si $\theta \in B_b^+(X)$ alors U_θ désigne le noyau perturbé de U par θ (cf. [1] ou [13]). De plus on a la relation fondamentale suivante:

$$[I - U_\theta(\theta\,\cdot)][I + U(\theta\,\cdot)] = [I + U(\theta\,\cdot)][I - U_\theta(\theta\,\cdot) = I.$$

De même si $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe relativement borné, associé à un processus de Markov $(X_t)_{t>0}$ et si $h \in B_b(X)$ alors $({}^hP_t)_{t>0}$ désigne le semi-groupe défini par la formule de Feymann–Kac:

$${}^hP_tf(x) = E^x\left(f(X_t)\exp\left(-\int_0^t h(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\right)$$

et vérifie pour tout $t > 0$ (cf. [10]):

$${}^hP_tf(x) = P_tf(x) - \int_0^t P_{t-s}(h{}^hP_sf)(x)\,\mathrm{d}x = P_tf(x) - \int_0^t {}^hP_{t-s}(hP_sf)(x)\,\mathrm{d}s.$$

I. Perturbation semi-linéaire des résolvantes

Dans cette partie, on considère une résolvante linéaire $\mathbb{V} = (V_\alpha)_{\alpha>0}$ sous-markovienne sur un espace mesurable (X, B). On note par:

* L l'ensemble des fonctions $\phi: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurables telles que l'application $r \to r\phi(x, r)$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et localement lipschitzienne uniformément par rapport à x.

* $\mathcal{J} = \{f \in B(X): V_\alpha(|f|) \in B_b^+(X);\ \forall \alpha > 0\}$.

Remarquons que $B_b(X) \subset \mathcal{J}$ et que si $V_{\alpha_0}(|f|)$ est bornée pour un certain $\alpha_0 > 0$, alors $V_\alpha(|f|)$ est bornée pour tout $\alpha > 0$.

D'autre part si $\phi \in L$ alors la fonction $r \to \phi(x, r)$ est localement bornée uniformément par rapport à x.

A. CONSTRUCTION DE LA RÉSOLVANTE NON LINÉAIRE

LEMME 1. *Soient* $\phi \in L$ *et* $\alpha > 0$. *Alors l'opérateur* $U: B_b(X) \to B_b(X)$, *qui à* u *associe* $u + V_\alpha(\phi(\cdot, u)u)$, *est injectif.*

Preuve. Soient u et $v \in B_b(X)$ tels que $u + V_\alpha(\phi(\cdot, u)u) = v + V_\alpha(\phi(\cdot, v)v)$. On pose

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\phi(x, u(x)) - v(x)\phi(x, v(x))}{u(x) - v(x)} & \text{si } u(x) \neq v(x) \\ 0 & \text{si } u(x) = v(x) \end{cases};$$

alors $h \in B_b^+(X)$ et $u - v + V_\alpha(h(u - v)) = 0$. Or $\mathrm{Id} + V_\alpha(h\,\cdot)$ est bijectif, donc on a $u = v$.

THÉORÈME 1. *Soit* $\phi \in L$. *Alors pour tous* $f \in \mathscr{J}$ *et* $\alpha > 0$, *il existe une fonction mesurable* ${}^\phi V_\alpha f$ *unique, vérifiant:*

$$\text{(i)}\quad V_\alpha f = {}^\phi V_\alpha f + V_\alpha(\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f)\,{}^\phi V_\alpha f).$$
$$\text{(ii)}\quad -V_\alpha f^- \leqslant {}^\phi V_\alpha f \leqslant V_\alpha f^+.$$

Preuve. Soient $\phi \in L$, $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha > 0$. On considère le convexe $C = \{u \in B_b(X): -V_\alpha f^- \leqslant \mathbf{u} \leqslant V_\alpha f^+)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $x \in X$, $u \in C: 0 \leqslant \phi(x, u(x)) \leqslant \lambda$, et soit T l'opérateur défini sur C par:

$$Tu = V_{\alpha+\lambda} f + V_{\alpha+\lambda}((\lambda - \phi(\cdot, u))u).$$

Alors on a $T(C) \subset C$; de plus tous $u, v \in C$ on a:

$$Tu - Tv = V_{\alpha+\lambda}((\lambda - h)(v - u))$$

où

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{v(x)\phi(x, v(x)) - u(x)\phi(x, u(x))}{v(x) - u(x)} & \text{si } v(x) \neq u(x) \\ 0 & \text{si } v(x) = u(x) \end{cases};$$

est une fonction dans $B_b^+(X)$.

Choisissons alors λ assez grand ($\lambda \geqslant \|h\|_\infty$); nous obtenons

$$\|Tv - Tu\|_\infty \leqslant \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}\|v - u\|_\infty.$$

C étant fermé dans $B_b(X)$ et T est une contraction stricte de C dans C, il en résulte, d'après le théorème du point fixe de Banach, qu'il existe un élément w de C unique vérifiant: $Tw = w$. Cela donne:

$$w = V_{\alpha+\lambda} f + \lambda V_{\alpha+\lambda} w - V_{\alpha+\lambda}(\phi(\cdot, w)w).$$

D'où

$$(I - \lambda V_{\alpha+\lambda})w = V_{\alpha+\lambda}(f - \phi(\cdot, w)w).$$

Donc on a:

$$w = (I + \lambda V_\alpha)V_{\alpha+\lambda}(f - \phi(\cdot, w)w) = V_\alpha(f - \phi(\cdot, w)w).$$

Ainsi d'après le Lemme 1, la fonction w ne dépend que de f, α et ϕ. On la note par ${}^\phi V_\alpha f$, qui vérifie bien le résultat cherché.

REMARQUE 1. (1) La fonction ${}^\phi V_\alpha f$ est la limite de deux suites adjacentes $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définies par: $u_0 = V_\alpha f^+$; $u_{n+1} = Tu_n$ et $v_0 = -V_\alpha f^-$; $v_{n+1} = Tv_n$. De plus on a: $-V_\alpha f^- \leqslant {}^\phi V_\alpha f \leqslant V_\alpha f^+$. Ce qui prouve que si $f \in \mathscr{J}^+$, alors ${}^\phi V_\alpha f \in B_b^+(X)$.

(2) Soit $\phi_0(x,r) = 1_{[0,+\infty]}(r)\phi(x,r)$, alors ${}^\phi V_\alpha f = {}^{\phi_0}V_\alpha f$ pour $f \in \mathscr{J}^+$ et ${}^{\phi_0}V_\alpha f = V_\alpha f$ si f est négative.

(3) Si ϕ ne dépend pas de r (i.e. $\phi(x,r) = h(x) \in B_b^+(X)$) alors ${}^\phi V_\alpha f$ n'est autre que $V_{\alpha+h}f$ définie par Neveu dans [13].

EXEMPLE. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $V_\alpha = (\alpha I - \Delta)^{-1}$ pour $\alpha > 0$ et soit $\phi(x,r) = h(x)|r|^p$ où $h \in B_b^+(\mathbb{R}^n)$ et $p \geqslant 0$. Alors pour tout $f \in B_b(X)$, ${}^\phi V_\alpha f$ est l'unique solution bornée de l'équation semi-linéaire: $\Delta u - hu|u|^p - \alpha u = -f$.

PROPOSITION 1. *Soit $\phi \in L$; la famille d'opérateurs $({}^\phi V_\alpha)_{\alpha>0}$ de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{J}$ vérifie l'équation "résolvante": ${}^\phi V_\alpha = {}^\phi V_\beta(I + (\beta - \alpha){}^\phi V_\alpha)$; $\forall\, \alpha, \beta > 0$.*

Preuve. Soient $\phi \in L$, $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha, \beta > 0$. On a:

$$V_\alpha f = {}^\phi V_\alpha f + V_\alpha(\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f).$$

Or, $V_\alpha f = V_\beta f + (\beta - \alpha)V_\beta V_\alpha f$, donc on a:

$$V_\beta(f - \phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f) = {}^\phi V_\alpha f + (\alpha - \beta)V_\beta[V_\alpha f - V_\alpha(\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f)].$$

D'où:

$${}^\phi V_\alpha f + V_\beta(\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f) = V_\beta(f + (\beta - \alpha){}^\phi V_\alpha f).$$

Mais pour $g = f + (\beta - \alpha){}^\phi V_\alpha f$, on a:

$$V_\beta g = {}^\phi V_\beta g + V_\beta(\phi(\cdot, {}^\phi V_\beta g){}^\phi V_\beta g).$$

Il en résulte alors d'après le Lemme 1, que: ${}^\phi V_\alpha f = {}^\phi V_\beta g = {}^\phi V_\beta(f + (\beta - \alpha){}^\phi V_\alpha f)$.

* $({}^\phi V_\alpha)_{\alpha>0}$ est dite résolvante perturbée de $(V_\alpha)_{\alpha>0}$ par ϕ.

THÉORÈME 2. *Soient ϕ, Ψ dans L. Alors pour tous $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha > 0$*

$$^{\phi}V_{\alpha}f = {}^{\Psi}V_{\alpha}(f + (\Psi - \phi)(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f).$$

Preuve. Soit $v = {}^{\Psi}V_{\alpha}(f + (\Psi - \phi)(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f) = V_{\alpha}(f + \Psi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f) - V_{\alpha}(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f) - V_{\alpha}(\Psi(\cdot, v)v)$.

Alors on a: $v + V_{\alpha}(\Psi(\cdot, v)v) = {}^{\phi}V_{\alpha}f + V_{\alpha}(\Psi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f)$. Ce qui donne d'après le Lemme 1: $v = {}^{\phi}V_{\alpha}f$.

COROLLAIRE 1. *Soit $\phi \in L$. Alors pour tous $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha > 0$:*

$$V_{\alpha}f = {}^{\phi}V_{\alpha}(f + \phi(\cdot, V_{\alpha}f)V_{\alpha}f) = {}^{\phi}V_{\alpha}f + V_{\alpha}(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f).$$

REMARQUE 2. Soient $u \in B_b(X)$, $f \in \mathscr{J}$ *et* $\alpha > 0$. Alors on a:

$$u = V_{\alpha + \phi(\cdot, u)}(f) \Leftrightarrow u + V_{\alpha}(\phi(\cdot, u)u) = V_{\alpha}f \Leftrightarrow u = {}^{\phi}V_{\alpha}f.$$

En particulier si $\phi \in L$, $h \in B_b^+(X)$, $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha > 0$; ${}^{\phi}V_{\alpha+h}f := {}^{\phi}(V_h)_{\alpha}(f) = {}^{\phi+h}V_{\alpha}f$.

PROPOSITION 2. *Soient $\phi \in L$ et $\alpha > 0$. Alors pour tous $f, g \in \mathscr{J}$ on a*:

$$(1)\ f \leqslant g \Rightarrow 0 \leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f \leqslant V_{\alpha}g - V_{\alpha}f.$$
$$(2)\ |{}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant V_{\alpha}(|g - f|).$$

En particulier la résolvante $({}^{\phi}V_{\alpha})_{\alpha>0}$ est sous-markovienne.

Preuve. Soient $f, g \in \mathscr{J}$ et $\alpha > 0$. On a:

$${}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f = V_{\alpha}g - V_{\alpha}f + V_{\alpha}(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f - \phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}g)^{\phi}V_{\alpha}g).$$

Il existe alors une fonction $h \in B_b^+(X)$ telle que:

$${}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f = V_{\alpha}g - V_{\alpha}f + V_{\alpha}(h({}^{\phi}V_{\alpha}f - {}^{\phi}V_{\alpha}g)).$$

D'où

$$(I + V_{\alpha}(h\ \cdot))({}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f) = V_{\alpha}g - V_{\alpha}f.$$

Ce qui donne:

$${}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f = V_{\alpha+h}g - V_{\alpha+h}f = V_{\alpha}g - V_{\alpha}f - V_{\alpha+h}(h(V_{\alpha}g - V_{\alpha}f)).$$

Donc

(1) Si $f \leqslant g$ alors $V_{\alpha+h}f \leqslant V_{\alpha+h}g$ et par suite: $0 \leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f \leqslant V_{\alpha}g - V_{\alpha}f$.

(2) $|{}^{\phi}V_{\alpha}g - {}^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant V_{\alpha+h}(|g - f|) \leqslant V_{\alpha}(|g - f|)$.

Soient $f, g \in B_b(X)$, on a: $|\alpha^{\phi}V_{\alpha}g - \alpha^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant \alpha V_{\alpha}(|g - f|) \leqslant (\alpha V_{\alpha}1)\|g - f\|$. Donc ${}^{\phi}(V_{\alpha})_{\alpha>0}$ est sous-markovienne.

COROLLAIRE 2. *Soit $f \in \mathscr{J}^+$. Alors l'application $\alpha \to {}^{\phi}V_\alpha f$ est décroissante sur* $]0, \infty[$ *et $\phi \to {}^{\phi}V_\alpha f$ est décroissante sur L.*

Preuve. Soient $f \in \mathscr{J}^+$ et $0 < \alpha \leqslant \beta$. Alors on a: $0 \leqslant f \leqslant f + (\beta - \alpha)^{\phi}V_\alpha f$. Ce qui donne d'après les propositions (1) et (2): $0 \leqslant {}^{\phi}V_\beta f \leqslant {}^{\phi}V_\beta(f + (\beta - \alpha)^{\phi}V_\alpha f) = {}^{\phi}V_\alpha f$. Ce qui prouve que $\alpha \to {}^{\phi}V_\alpha f$ est décroissante sur $]0, \infty[$.

D'autre part, soient ϕ et $\psi \in L$ tels que $\phi \leqslant \psi$. Alors on a d'après le théorème 2 et la proposition (2): ${}^{\phi}V_\alpha f = {}^{\psi}V_\alpha(f + (\psi - \phi)(\cdot, {}^{\phi}V_\alpha f)^{\phi}V_\alpha f) \geqslant {}^{\psi}V_\alpha f$. Ce qui prouve que $\phi \to {}^{\phi}V_\alpha f$ est décroissante sur L.

COROLLAIRE 3. *Soient $\phi \in L$ et $f \in \mathscr{J}$. Alors pour tous $\alpha, \beta > 0$:*

$$|{}^{\phi}V_\alpha f - {}^{\phi}V_\beta f| \leqslant |V_\alpha(|f|) - V_\beta(|f|)|.$$

Prueve. Soient $\phi \in L$, $f \in \mathscr{J}$ et $\alpha, \beta > 0$. On a d'après l'équation résolvante:

$${}^{\phi}V_\alpha f - {}^{\phi}V_\beta f = {}^{\phi}V_\alpha f - {}^{\phi}V_\alpha(f + (\alpha - \beta)^{\phi}V_\beta f).$$

Ce qui donne d'après la Proposition (2):

$$|{}^{\phi}V_\alpha f - {}^{\phi}V_\beta f| \leqslant |\alpha - \beta| V_\alpha(|{}^{\phi}V_\beta(f)|) \leqslant |\beta - \alpha| V_\alpha V_\beta(|f|) = |V_\alpha(|f|) - V_\beta(|f|)|.$$

REMARQUE 3. Il est clair d'après le Corollaire 3, que $\alpha \to {}^{\phi}V_\alpha f$ est continue sur $]0, \infty[$. De plus si $f \in \mathscr{J}$ avec $V_0(|f|) < +\infty$, alors $\lim_{\alpha \to 0} {}^{\phi}V_\alpha f$ existe, qu'on note dans la suite par ${}^{\phi}Vf$. On a alors ${}^{\alpha+\phi}Vf = {}^{\phi}V_\alpha f$, en effet on a d'après la Remarque 2:

$${}^{\alpha+\phi}Vf = \lim_{\beta \to 0} {}^{\alpha+\phi}V_\beta f = \lim_{\beta \to 0} {}^{\phi}V_{\alpha+\beta} f = {}^{\phi}V_\alpha f.$$

PROPOSITION 3. *Soient $\phi \in L$ et $f \in B(X)$ avec $V_0(|f|)$ bornée. Alors on a:*

$${}^{\phi}Vf = {}^{\phi}V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf) \quad et \quad {}^{\phi}V_\alpha f = {}^{\phi}V(f - \alpha^{\phi}V_\alpha f)$$

ou encore $(I - \alpha^{\phi}V_\alpha)(I + \alpha^{\phi}V) = (I + \alpha^{\phi}V)(I - \alpha^{\phi}V_\alpha) = I$ *sur l'ensemble* $\{f \in B(X): V_0(|f|) \in B_b^+(X)\}$.

* *${}^{\phi}V$ achève la résolvante $({}^{\phi}V_\alpha)_{\alpha > 0}$ sur $\{f \in B(X); V_0(|f|) \in B_b^+(X)\}$.*

Preuve. Soit $f \in B(X)$ tel que $V_0(|f|)$ soit bornée, alors $f \in \mathscr{J}$ et $|{}^{\phi}Vf| \leqslant V_0(|f|)$.

Il s'ensuit que $V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf)$ est bornée pour tout $\alpha \geqslant 0$. Soient $\alpha, \beta > 0$; on a:

$$|{}^{\phi}V_\beta f - {}^{\phi}V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf)| = |{}^{\phi}V_\alpha(f + (\alpha - \beta)^{\phi}V_\beta f) - {}^{\phi}V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf)|.$$

Ce qui donne d'après la Proposition 2:

$$|{}^{\phi}V_\beta f - {}^{\phi}V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf)| \leqslant V_\alpha(|(\alpha - \beta)^{\phi}V_\beta f - \alpha^{\phi}Vf|).$$

Maintenant $\lim_{\beta \to 0}(\alpha - \beta)^{\phi}V_\beta f = \alpha^{\phi}Vf$ et pour $\beta < \alpha$, on a:

$$|(\alpha - \beta)^{\phi}V_{\beta}f - \alpha^{\phi}Vf| \leqslant 2\alpha V_0(|f|).$$

Cela donne d'après le théorème de Lebesgue: $\lim_{\beta \to 0} {}^{\phi}V_{\beta}f = {}^{\phi}Vf = {}^{\phi}V_{\alpha}(f + \alpha^{\phi}Vf)$. De même on montre que: ${}^{\phi}V_{\alpha}f = {}^{\phi}V(f - \alpha^{\phi}V_{\alpha}f)$.

PROPOSITION 4. *On suppose que $V_0 1 < +\infty$. Alors pour toute $\phi \in L$ et toute $f \in B(X)$ tel que $V_0(|f|)$ soit bornée on a*:

$$V_0 f = {}^{\phi}Vf + V_0(\phi(\cdot, {}^{\phi}Vf)^{\phi}Vf) = {}^{\phi}V(f + \phi(\cdot, V_0 f)V_0 f).$$

Preuve. Soient $\alpha > 0$ et $f \in B(X)$ tel que $V_0(|f|)$ soit bornée. On a

$$V_{\alpha}f = {}^{\phi}V_{\alpha}f + V_{\alpha}(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f).$$

Ce qui donne:

$$V_0 f = (I + \alpha V_0)^{\phi}V_{\alpha}f + V_0(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f) = {}^{\phi}V_{\alpha}f + \alpha V_0{}^{\phi}V_{\alpha}f + V_0(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f).$$

Or, $|{}^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant V_{\alpha}(|f|)$, donc $\alpha|V_0{}^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant \alpha V_{\alpha}V_0(|f|) = V_0(|f|) - V_{\alpha}(|f|)$, qui tend vers 0 quand α tend vers 0.

De plus, $\lim_{\alpha \to 0} \phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f = \phi(\cdot, {}^{\phi}Vf)^{\phi}Vf$ avec $|\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f| \leqslant cte$ et $V_0 1 < +\infty$. Il en résulte d'après le théorème de Lebesgue, que $\lim_{\alpha \to 0} V_0(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)^{\phi}V_{\alpha}f) = V_0(\phi(\cdot, {}^{\phi}Vf)^{\phi}Vf)$.

THÉORÈME 3. *On suppose que $V_0 1$ est bornée. Alors pour tout $\phi \in L$, l'opérateur*

$$\begin{aligned} {}^{\phi}V: B_b(X) &\to B_b(X) \\ f &\to {}^{\phi}Vf \end{aligned}$$

vérifie le principe complet du maximum.

Preuve. Soient $f, g \in B_b(X)$ et $a \geqslant 0$ tel que ${}^{\phi}\mathrm{V}\,\mathrm{f} \leqslant {}^{\phi}\mathrm{V}\mathrm{g} + \mathrm{a}$ sur $[f > g]$. Alors pour tout $p > 0$: $f + p^{\phi}Vf \leqslant g + p^{\phi}Vg + pa + \|f - g\|$ sur $[f > g]$. Soient $u = f + p^{\phi}Vf$, $v = g + p^{\phi}Vg + pa + \|f - g\|$. On a alors:

$$f = u - p^{\phi}V_p u \quad \text{et} \quad v - p^{\phi}V_p v = g + pa + \|f - g\| + p^{\phi}V_p(g + p^{\phi}Vg) - p^{\phi}V_p v.$$

Ce qui donne d'après le Proposition 2:

$$v - p^{\phi}V_p v \geqslant g + pa + \|f - g\| - pV_p(pa + \|f - g\|) \geqslant g.$$

Il en résulte que $u \leqslant v$ sur $A = \{u - p^{\phi}V_p u > v - p^{\phi}V_p v\}$. Soit $w = (u - v)^+$, alors $w = 0$ sur A et on a sur $\complement A$:

$$u - v \leqslant p^{\phi}V_p u - p^{\phi}V_p v \leqslant pV_p((u - v)^+).$$

Donc $0 \leqslant w \leqslant pV_p w$; ce qui donne: $(I - pV_p)w \leqslant 0 \Rightarrow w \leqslant 0$. Il s'ensuit que $w = (u - v)^+ = 0$, c'est à dire $u \leqslant v$ ou encore

$$\frac{1}{p}f + {}^{\phi}Vf \leqslant \frac{g}{p} + {}^{\phi}Vg + a + \frac{1}{p}\|f - g\|.$$

Faisons tendre p vers $+\infty$, on obtient ${}^{\phi}Vf \leqslant {}^{\phi}Vg + a$.

LEMME 2. *Soit $f \in B_b^+(X)$ et $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset B_b^+(X)$ croissante vers f. Alors on a pour tous $\phi \in L$ et $\alpha > 0$: ${}^{\phi}V_\alpha f = \sup_n {}^{\phi}V_\alpha f_n$.*

Preuve. Soient $\phi \in L$ et $\alpha > 0$. On a pour tout $n \geqslant 0$:

$$V_\alpha f_n = {}^{\phi}V_\alpha f_n + V_\alpha(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_\alpha f_n){}^{\phi}V_\alpha f_n).$$

Posons $u = \sup_n {}^{\phi}V_\alpha f_n$. Alors par passage à la limite ($n \to +\infty$), *on obtient:*

$$V_\alpha f = u + V_\alpha(\phi(\cdot, u)u).$$

Or, $V_\alpha f = {}^{\phi}V_\alpha f + V_\alpha(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_\alpha f){}^{\phi}V_\alpha f)$; il en résulte d'après le Lemme 1, que $u = {}^{\phi}V_\alpha f$.

LEMME 3. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset B_b^+(X)$ croissante vers $f \in B^+(X)$. Alors on a pour tous $\phi \in L$ et $\alpha > 0$: $\sup_n {}^{\phi}V_\alpha f_n = \sup_n {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n)$.*

Preuve. On a $\forall m, n \in \mathbb{N}: f_m \wedge n \leqslant f \wedge n$, donc ${}^{\phi}V_\alpha(f_m \wedge n) \leqslant {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n)$. Ce qui donne en faisant tendre n vers $+\infty$: ${}^{\phi}V_\alpha f_m \leqslant \sup_n {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n)$. D'où $\sup_m {}^{\phi}V_\alpha f_m \leqslant \sup_n {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n)$. D'autre part on a pour tous $n, m \in \mathbb{N}$: $f_m \wedge n \leqslant f_m$ implique que ${}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n) \leqslant \sup_m {}^{\phi}V_\alpha f_m$ et $\sup_n {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n) \leqslant \sup_m {}^{\phi}V_\alpha f_m$.

DÉFINITION 1. Soient $\phi \in L$, $\alpha > 0$. On définit pour $f \in B^+(X)$, ${}^{\phi}V_\alpha f$ par:

$${}^{\phi}V_\alpha f := \sup_n {}^{\phi}V_\alpha(f \wedge n).$$

REMARQUE 4. (a) Soient $\phi \in L$, $\alpha > 0$ et $f \in B^+(X)$ tel que $V_\alpha f < \infty$. Alors on a:

$$V_\alpha f = {}^{\phi}V_\alpha f + V_\alpha(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_\alpha f){}^{\phi}V_\alpha f).$$

(b) La Proposition 2 reste valable pour f et g dans $B^+(X)$.

(c) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset B^+(X)$ croissante vers f. Alors pour tous $\phi \in L$ et $\alpha > 0$: ${}^{\phi}V_\alpha f = \sup_n {}^{\phi}V_\alpha f_n$.

PROPOSITION 5. *Soit $\phi \in L$ tel que $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors pour tous $f, g \in B^+(X)$ et $\alpha > 0$, on a:*

$$\text{(i)}\quad {}^{\phi}V_\alpha(f + g) \leqslant {}^{\phi}V_\alpha f + {}^{\phi}V_\alpha g.$$
$$\text{(ii)}\quad {}^{\phi}V_\alpha(tf) \leqslant t\,{}^{\phi}V_\alpha f, \quad si\ t \geqslant 1.$$

Preuve. (i) Soient $f, g \in B_b^+(X)$ et $u = {}^{\phi}V_\alpha f$; $v = {}^{\phi}V_\alpha g$; $w = {}^{\phi}V_\alpha(f + g)$. Alors d'après la Proposition 2, on a: $0 \leqslant \sup(u, v) \leqslant w$. De plus on a:

$$u + v - w = V_\alpha((w - u - v)\phi(\cdot, w)) + V_\alpha(u(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, u))) + V_\alpha(v(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, v))).$$

Posons $\theta = \phi(\cdot, w)$, $h = u(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, u)) + v(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, v))$. Alors θ et h sont dans $B_b^+(X)$ car $u, v, w \in B_b^+(X)$ et $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ est croissante. Donc $u + v - w + V_\alpha(\theta((u + v - w)) = V_\alpha h$, ce qui donne: $u + v - w = V_{\alpha+\theta}(h) \geqslant 0$. C'est à dire pour tous $\alpha > 0$, $f, g \in B_b^+(X)$: ${}^\phi V_\alpha(f + g) \leqslant {}^\phi V_\alpha(f) + {}^\phi V_\alpha g$.

(ii) Conséquence immédiate de (i) et de Proposition 2.

PROPRIÉTÉ 1. *Soit $\phi \in L$ telle que la fonction $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ est paire. Alors pour tous $f, g \in \mathscr{J}$ il existe $h \in B_b^+(X)$ telle que*:

$$^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha g = V_{\alpha+h}(f + g).$$

En particulier on a pour tout $f \in \mathscr{J}$:

$$^\phi V_\alpha(-f) = -{}^\phi V_\alpha f \quad \text{et} \quad |{}^\phi V_\alpha f| \leqslant {}^\phi V_\alpha(|f|).$$

Preuve. Soient f et $g \in \mathscr{J}$ et soit $\alpha > 0$:

$$^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha g = V_\alpha(f + g) - V_\alpha[\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f - \phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha g)(-{}^\phi V_\alpha g)].$$

Il existe alors $h \in B_b^+(X)$ telle que

$$\phi(\cdot, {}^\phi V_\alpha f){}^\phi V_\alpha f - \phi(\cdot, -{}^\phi V_\alpha g)(-{}^\phi V_\alpha g) = h \cdot ({}^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha g).$$

Donc

$$[I + V_\alpha(h\ \cdot)]({}^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha g) = V_\alpha(f + g).$$

Ce qui donne

$$^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha g = V_{\alpha+h}(f + g).$$

En particulier

$$^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha(-f) = 0 \quad \text{et} \quad {}^\phi V_\alpha f + {}^\phi V_\alpha(|f|) \geqslant 0.$$

Ce qui donne $-{}^\phi V_\alpha f \leqslant {}^\phi V_\alpha(|f|)$. Or, on sait que ${}^\phi V_\alpha f \leqslant {}^\phi V_\alpha(|f|)$. Donc $|{}^\phi V_\alpha f| \leqslant {}^\phi V_\alpha(|f|)$.

REMARQUE 5. Si $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ n'est pas paire, la propriété précédente n'est pas vérifiée. En effet soit $V_\alpha f = f/\alpha$ et $\phi(x, r) = \sup(0, r)$. Alors

$$^\phi V_\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + 4f(x)} - \alpha}{2} & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{f(x)}{\alpha} & \text{si } f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

On obtient

$$ {}^{\phi}V_{\alpha}1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha} < \frac{1}{\alpha} = |{}^{\phi}V_{\alpha}(-1)|. $$

THÉORÈME 4. *Soit $(W_{\alpha})_{\alpha>0}$ une résolvante (linéaire) sous-markovienne sur (X, B) telle que pour tout $\alpha > 0$, $V_{\alpha} \leqslant W_{\alpha}$. Alors pour tous $\phi \in L$, $f \in B^+(X)$ et $\alpha > 0$: ${}^{\phi}V_{\alpha}f \leqslant {}^{\phi}W_{\alpha}f$.*

Preuve. Soient $\phi \in L$, $f \in B_b^+(X)$ et $\alpha > 0$. Posons $u = {}^{\phi}V_{\alpha}f$; $v = {}^{\phi}W_{\alpha}f$ *et*

$$ h = \begin{cases} \dfrac{u\phi(\cdot, u) - v\phi(\cdot, v)}{u - v} & \text{si } u \neq v \\ 0 & \text{si } u = v \end{cases}; $$

alors $u, v, h \in B_b^+(X)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leqslant \sup[\phi(x, u(x)); \phi(x, v(x)); h(x)] \leqslant \lambda$ pour tout $x \in X$ et soit $\theta = \lambda - \phi$. Alors d'après le Théorème 1 on a:

$$ u = V_{\alpha+\lambda}f + V_{\alpha+\lambda}(u\theta(\cdot, u)) \quad \text{et} \quad v = W_{\alpha+\lambda}f + W_{\alpha+\lambda}(v\theta(\cdot, v)). $$

Donc

$$ v - u = W_{\alpha+\lambda}(f + v\theta(\cdot, v)) + V_{\alpha+\lambda}(v\theta(\cdot, v)) - u\theta(\cdot, u)) - V_{\alpha+\lambda}(f + \theta(\cdot, v)v). $$

Posons

$$ \psi = \lambda - h \in B_b^+(X);\ g = f + v\theta(\cdot, v) \quad \text{et} \quad s = W_{\alpha+\lambda}g - V_{\lambda+\alpha}g \in B_b^+(X). $$

On obtient $v - u = V_{h+\alpha+\psi}(\psi(v-u)) + s$; c'est à dire $s = [I - V_{h+\psi+\alpha}(\psi\ \cdot)](v-u)$. Donc on a:

$$ v - u = s + V_{\alpha+h}(\psi s) \geqslant 0. $$

PROPOSITION 6. *Soit $\phi \in L$ tel que $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors pour tous $\alpha > 0$, $f \in B^+(X)$ et $x \in X$ tel que $0 < V_{\alpha}f(x) < +\infty$:*

$$ {}^{\phi}V_{\alpha}f(x) \leqslant V_{\alpha}f(x) \leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}f(x)\cdot\exp\left(\frac{V_{\alpha}(\phi(\cdot, V_{\alpha}f)V_{\alpha}f)(x)}{V_{\alpha}f(x)}\right). $$

Preuve. Soit $f \in B_b^+(X)$, on a:

$$ {}^{\phi}V_{\alpha}f(x) = V_{\alpha+\phi(\cdot, {}^{\phi}V_{\alpha}f)}(f)(x), \text{ or } 0 \leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}f \leqslant V_{\alpha}f \text{ donc } {}^{\phi}V_{\alpha}f \geqslant V_{\alpha+\phi(\cdot, V_{\alpha}f)}(f). $$

Soit $\theta(\lambda) = V_{\alpha+\lambda\phi(\cdot, V_{\alpha}f)}(f)(x)$, θ est complètement monotone sur $[0, \infty[$. Il en résulte que: $\theta(0) \leqslant \theta(1)\ \exp(-\theta'(0)/\theta(0))$; c'est à dire:

$$ \begin{aligned} V_{\alpha}f(x) &\leqslant V_{\alpha+\phi(\cdot, V_{\alpha}f)}(f)(x)\exp\left(\frac{V_{\alpha}(\phi(\cdot, V_{\alpha}f)V_{\alpha}f)(x)}{V_{\alpha}f(x)}\right) \\ &\leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}f(x)\cdot\exp\left(\frac{V_{\alpha}(\phi(\cdot, V_{\alpha}f)V_{\alpha}f)(x)}{V_{\alpha}f(x)}\right). \end{aligned} $$

COROLLAIRE 4. *Soient $\alpha > 0$, $\phi \in L$ tel que $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) ${}^{\phi}V_\alpha \sim V_\alpha$ (*i.e.* $\exists c > 0$ *tel que* $\forall f \in B^+(X)$, ${}^{\phi}V_\alpha f \leqslant V_\alpha f \leqslant c^{\phi}V_\alpha f$).

(2) $\exists k > 0$ *tel que* $\forall f \in B^+(X)$; $V_\alpha(\phi(\cdot, V_\alpha f)V_\alpha f) \leqslant kV_\alpha f$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2): $V_\alpha(\phi(\cdot, V_\alpha f)V_\alpha f) \leqslant V_\alpha(\phi(\cdot, {}^{\phi}V_\alpha(cf))^{\phi}V_\alpha(cf)) \leqslant V_\alpha(cf) = cV_\alpha f$.

(2) $\Rightarrow$ (1): D'après la Proposition 6, on a: $V_\alpha f \leqslant {}^{\phi}V_\alpha f \cdot \exp(k)$.

EXEMPLE. Soit $\phi(x, r) = h(x)\theta(r)$ avec $\theta \in B_b^+(\mathbb{R})$, croissante sur $]0, +\infty[$ et $h \in B^+(X)$ tel qu'il existe $c > 0$ vérifiant $V_\alpha(hV_\alpha) \leqslant cV_\alpha$. Alors ${}^{\phi}V_\alpha \sim V_\alpha$.

B. FONCTIONS EXCESSIVES

On suppose dans la suite que $V_0 1$ est bornée.

DÉFINITION 2. Soient $\phi \in L$ et $v \in B^+(X)$. v est dite ${}^{\phi}\mathbb{V}$-surmédiane si pour tout $\alpha > 0$: ${}^{\phi}V_\alpha(\alpha v) \leqslant v$.

On note S_ϕ l'ensemble des fonctions ${}^{\phi}\mathbb{V}$-surmédianes, qui contient evidemment $S_0 = \{$fonctions $\mathbb{V}$-surmédianes$\}$.

PROPOSITION 7. *Soit $\phi \in L$. On a*:

(1) $\forall f \in B^+(X)$; ${}^{\phi}Vf \in S_\phi$.

(2) $\forall u, v \in S_\phi$; $\inf(u, v) \in S_\phi$ *et si $(v_n)_n$ est une suite monotone dans S_ϕ, alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n$ *est dans S_ϕ*.

(3) *Si $v \in S_\phi$, alors l'application $\alpha \longrightarrow {}^{\phi}V_\alpha(\alpha v)$ est croissante sur $]0, +\infty[$*.

Preuve. (1) Soit $f \in B^+(X)$, on a: ${}^{\phi}Vf = {}^{\phi}V_\alpha(f + \alpha^{\phi}Vf)$. D'où ${}^{\phi}V_\alpha(\alpha^{\phi}Vf) \leqslant {}^{\phi}Vf$.

(2) evidente.

(3) Soit $v \in S_\phi$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha \leqslant \beta$. On pose $v_n = v \wedge n$. Alors on a:

$$\begin{aligned} {}^{\phi}V_\beta(\beta v_n) &= {}^{\phi}V_\alpha(\beta v_n + (\alpha - \beta)^{\phi}V_\beta(\beta v_n)) \\ &= {}^{\phi}V_\alpha(\alpha v_n + (\beta - \alpha)(v_n - {}^{\phi}V_\beta(\beta v_n))). \end{aligned}$$

Or, ${}^{\phi}V_\beta(\beta v_n) \leqslant v_n$, donc ${}^{\phi}V_\alpha(\alpha v_n) \leqslant {}^{\phi}V_\beta(\beta v_n)$. Ce qui donne par passage à la limite $(n \longrightarrow +\infty)$: ${}^{\phi}V_\alpha(\alpha v) \leqslant {}^{\phi}V_\beta(\beta v)$.

REMARQUE 6. Soit $\phi \in L$ telle que $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors S_ϕ est stable par somme. En effet si $u, v \in S_\phi$ et $\alpha > 0$, on a d'après la Proposition 5: ${}^{\phi}V_\alpha(\alpha(u + v)) \leqslant {}^{\phi}V_\alpha(\alpha u) + {}^{\phi}V_\alpha(\alpha v)$. Il en résulte que $u + v \in S_\phi$.

THÉORÈME 5. *Soit $\phi \in L$ telle que $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Soit v une fonction positive mesurable; pour que v soit ${}^{\phi}\mathbb{V}$-surmédiane, il faut et il suffit que pour tout $h \in B_b(X)$, la relation: ${}^{\phi}Vh \leqslant v$ sur $[h > 0]$ entraine: ${}^{\phi}Vh(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Supposons que v est surmédiane; la relation ${}^{\phi}Vh \leqslant v$ sur $[h > 0]$ entraine pour tout $p > 0$: $h + p^{\phi}Vh \leqslant pv + \|h\|$ sur $[h > 0]$. Posons $f = h + p^{\phi}Vh$ et $g = pv + \|h\|$. On obtient alors: $h = f - p^{\phi}V_pf$ et $p^{\phi}V_pg \leqslant g$, car la fonction $r \to \phi(\cdot, r)$ est croissante. D'où $f \leqslant g$ sur $[h > 0] = [f > p^{\phi}V_pf] = A$.
Par suite si $u = (f-g)^+$ alors $u \equiv 0$ sur A et on a sur $\complement A$: $f - g \leqslant p^{\phi}V_pf - g \leqslant p^{\phi}V_pf - p^{\phi}V_pg \leqslant pV_p((f-g)^+)$, d'après la Proposition 2.
Il en résulte que: $0 \leqslant u \leqslant pV_pu$.
Cela donne: $u = 0$, c'est à dire $f \leqslant g$ ou encore

$$\frac{h}{p} + {}^{\phi}Vh \leqslant v + \frac{\|h\|}{p}.$$

Faisons tendre p vers $+\infty$, on obtient: ${}^{\phi}Vh \leqslant v$.
Réciproquement, supposons que v vérifie la propriété de l'énoncé.
Soit $v_n = v \wedge n$ et $h_n = p(v_n - {}^{\phi}V_p(pv_n))$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $p > 0$.
La suite $(h_n)_n \subset B_b(X)$ et ${}^{\phi}Vh_n = {}^{\phi}V_p(pv_n)$. Or on a:

$${}^{\phi}Vh_n = {}^{\phi}V_p(pv_n) \leqslant v \quad \text{sur} \quad [v - {}^{\phi}V_p(pv_n) > 0]$$

et a fortiori sur $[v_n - {}^{\phi}V_p(pv_n) > 0] = [h_n > 0]$.
On a donc partout ${}^{\phi}Vh_n = {}^{\phi}V_p(pv_n) \leqslant v$. Faisons tendre n vers $+\infty$, on obtient: ${}^{\phi}V_p(pv) \leqslant v$, ce qui montre que v est surmédiane.

DÉFINITION 3. Une fonction $v \in B^+(X)$ est dite ${}^{\phi}\mathbb{V}$-excessive si $v \in S_{\phi}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} {}^{\phi}V_{\alpha}(\alpha v) = \sup_{\alpha>0} {}^{\phi}V_{\alpha}(\alpha v) = v$.

* On note E_{ϕ} l'ensemble des fonctions ${}^{\phi}\mathbb{V}$-excessives.

PROPOSITION 8. (a) $\forall f \in B^+(X)$; ${}^{\phi}Vf$ *appartient à* E_{ϕ}.
(b) *Si* $(v_n)_n$ *est une suite croissante dans* E_{ϕ}, *alors* $\sup_n v_n \in E_{\phi}$.
(c) $\forall v \in E_{\phi}$, *il existe une suite* $(f_n)_n \subset B_b^+(X)$ *telle que* $v = \sup_n {}^{\phi}Vf_n$.

Preuve. (a) Soient $f \in B^+(X)$, $\alpha > 0$ et $f_n = f \wedge n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. On sait que ${}^{\phi}Vf_n \in S_{\phi}$, de plus on a d'aprés la Proposition 2:

$${}^{\phi}V_{\alpha}(\alpha^{\phi}Vf_n) \leqslant {}^{\phi}Vf_n = {}^{\phi}V_{\alpha}(f_n + \alpha^{\phi}Vf_n) \leqslant {}^{\phi}V_{\alpha}(\alpha^{\phi}Vf_n) + V_{\alpha}f_n.$$

En passant à la limite ($\alpha \to +\infty$) puis ($n \to +\infty$), on obtient:

$${}^{\phi}Vf = \sup_{\alpha>0} {}^{\phi}V_{\alpha}(\alpha^{\phi}Vf), \quad \text{c'est à dire } {}^{\phi}Vf \in E_{\phi}.$$

(b) C'est évident.
(c) Soit $v \in E_{\phi}$ et $v_n = v \wedge n$. On a $v_n \in S_{\phi}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$${}^{\phi}V_p(pv_n) = {}^{\phi}V(p(v_n - p^{\phi}V_p(pv_n))).$$

Ce qui donne: $\sup_p {}^\phi V_p(pv) = v = \sup_p \sup_n {}^\phi V_p(pv_n) = \sup_p \sup_n {}^\phi V(p(v_n - p^\phi V_p(pv_n))$.
Posons $f_n = n(v_n - n^\phi V_n(nv_n))$, alors $(f_n)_n \subset B_b^+(X)$ et $v = \sup_n {}^\phi V f_n$.

THÉORÈME 6. *Soit* $\phi \in L$. *On a*:

(1) *Si* $v \in S_\phi$; *alors* $v + V_0(\phi(\cdot, v)v)$ *est dans* S_0 *et* $\tilde{v} + V_0(\phi(\cdot, v)v)$ *est dans* E_0 *avec* $\tilde{v} = \sup_{\alpha > 0} {}^\phi V_\alpha(\alpha v)$.

(2) *Pour tout* $v \in S_\phi$ *et tout* $\lambda > 0$: ${}^\phi V_\lambda(\lambda v) = {}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v})$; *en particulier* $\tilde{v}$ *est la plus grande minorante* ${}^\phi\mathbb{V}$*-excessive de* v.

(3) *Pour tout* $v \in B_b^+(X)$ *tel que* $v + V_0(\phi(\cdot, v)v) \in S_0$ (*resp.* E_0) *alors* $v \in S_\phi$ (*resp.* E_ϕ).

Preuve. (1) Soit $v \in S_\phi$ et $u = v + V_0(\phi(\cdot, v)v)$. Alors pour tout $\lambda > 0$, on a: $\lambda V_\lambda u = \lambda V_\lambda v + \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, v)v) = {}^\phi V_\lambda(\lambda v) + V_\lambda(\phi(\cdot, {}^\phi V_\lambda(\lambda v)){}^\phi V_\lambda(\lambda v)) + \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, v)v)$.
Ce qui donne: $\lambda V_\lambda u \leqslant v + V_\lambda(\phi(\cdot, v)v) + \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, v)v) = v + V_0(\phi(\cdot, v)v) = u$ c'est à dire $u \in S_0$.
Maintenant, soit $v \in S_\phi \cap B_b^+(X)$ et $s_\lambda = {}^\phi V_\lambda(\lambda v)$. D'après ce qui précède, on a:

$$\lambda V_\lambda u = s_\lambda + V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) - \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) + \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, v)v). \qquad (*)$$

Pour $0 < \mu \leqslant \lambda$, on a: $\mu V_\mu V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) \leqslant \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) \leqslant \lambda V_\lambda V_0(v\phi(\cdot, v))$.
Cela donne: $\mu V_\mu V_0(\tilde{v}\phi(\cdot, \tilde{v})) \leqslant \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) \leqslant V_0(\tilde{v}\phi(\cdot, \tilde{v}))$.
Donc: $\sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) = V_0(\tilde{v}\phi(\cdot, \tilde{v}))$.
Il s'ensuit d'après (*) que: $\underset{\sim}{u} = \sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u = \tilde{v} + V_0(\phi(\cdot, v)v)$.
Maintenant si $v \in S_\phi$ alors $v_n = v \wedge n \in S_\phi$ et $\tilde{v}_n + V_0(\phi(\cdot, v_n)v_n) \in E_0$.
Puisque $\tilde{v}_n$ croit vers $\tilde{v}$ (d'après la démonstration de la Proposition 8), on déduit que $\tilde{v} + V_0(\phi(\cdot, v)v) \in E_0$.

(2) Soit $v \in S_\phi$ alors $\tilde{v} + V_0(\phi(\cdot, v)v) \in E_0$ et par suite pour tout $\lambda \geqslant 0$:

$$V_\lambda(v + V_0(\phi(\cdot, v)v)) = V_\lambda(u) = V_\lambda(\underset{\sim}{u}) = V_\lambda(\tilde{v} + V_0(\phi(\cdot, v)v)).$$

Donc pour tout $\lambda \geqslant 0$: $V_\lambda v = V_\lambda \tilde{v}$. Or d'après la Proposition 2, on a:

$$0 \leqslant {}^\phi V_\lambda(\lambda v_n) - {}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v}_n) \leqslant V_\lambda(\lambda(v_n - \tilde{v}_n)) = 0.$$

Donc, pour tout $\lambda \geqslant 0$: ${}^\phi V_\lambda(\lambda v_n) = {}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v}_n)$ et par pasage à la limite ($n \to +\infty$), on obtient ${}^\phi V_\lambda(\lambda v) = {}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v})$ pour tout $\lambda \geqslant 0$. Ce qui donne $\sup_{\lambda > 0} {}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v}) = \sup_{\lambda > 0} {}^\phi V_\lambda(\lambda v) = \tilde{v}$. D'autre part on a: $\tilde{v} \leqslant v$ implique que ${}^\phi V_\lambda(\lambda \tilde{v}) \leqslant {}^\phi V_\lambda(\lambda v) \leqslant \tilde{v}$. Donc $\tilde{v} \in E_\phi$, de plus si $w \in E_\phi$ tel que $w \leqslant v$ alors pour tout $\lambda > 0$, ${}^\phi V_\lambda(\lambda w) \leqslant {}^\phi V_\lambda(\lambda v)$. Donc $w \leqslant \tilde{v}$. C'est à dire que $\tilde{v}$ est la plus grande minorante ${}^\phi\mathbb{V}$-excessive de v.

(3) Soit $v \in B_b^+(X)$ et $u = v + V_0(v\phi(\cdot, v)) \in S_0$. On a:

$$s_\lambda = {}^\phi V_\lambda(\lambda v) = \lambda V_\lambda v - V_\lambda(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda) = \lambda V_\lambda u - \lambda V_\lambda V_0(\phi(\cdot, v)v) - V_\lambda(\phi(\cdot, s_\lambda)s_\lambda).$$

Par suite: $v - s_\lambda + V_\lambda(v\phi(\cdot, v) - s_\lambda \phi(\cdot, s_\lambda)) = u - \lambda V_\lambda u$. Il existe alors $h \in B_b^+(X)$ telle que: $v - s_\lambda = u - \lambda V_\lambda u - V_{\lambda+h}(h(u - \lambda V_\lambda u))$. Or $u \in S_0$ donc $u - \lambda V_\lambda u \in S_\lambda$ et par suite il existe $(f_n)_{n \geqslant 0} \subset B_b^+(X)$ telle que: $v - s_\lambda = \lim_{n \to +\infty} [V_\lambda f_n - V_{\lambda+h}(h V_\lambda f_n)] =$

$\lim_{n \to +\infty} V_{\lambda+h} f_n \geqslant 0$, c'est à dire $v \in S_\phi$. Si de plus $u \in E_0$, alors $\lim_{\lambda \to +\infty} s_\lambda = v$, c'est à dire $v \in E_\phi$.

II. Perturbation semi-linéaire des semi-groupes

Dans cette partie, on considère un semi-groupe linéaire $\mathbb{P} = (P_t)_{t>0}$ relativement borné (i.e.: $\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \|P_s\| = \|P\|_t < +\infty$), défini sur un espace mesurable (X, B). Soit $\mathbb{T} = (T_t)_{t>0}$ le semi-groupe du mouvement uniforme à gauche sur $]0, +\infty[$. Alors le produit tensoriel $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mathbb{T}$ est un semi-groupe relativement borné sur $X \times]0, +\infty[$ défini par:

$$\tilde{P}_t h(x, \sigma) = 1_{]t, +\infty[}(\sigma) P_t h(\cdot, \sigma - t)(x) \quad \text{où} \quad h \in B^+(X \times]0, +\infty[).$$

La résolvante de $\tilde{\mathbb{P}}$ notée $\tilde{\mathbb{V}} = (\tilde{V}_\alpha)_{\alpha \geqslant 0}$ est donnée par:

$$\tilde{V}_\alpha h(x, t) = \int_0^t e^{-\alpha s} P_s h(\cdot, t - s)(x)\, \mathrm{d}s.$$

* On note $\tilde{V}$ au lieu de $\tilde{V}_0$.
* On rappelle que si $f \in B^+(X)$, la fonction Pf définie par $Pf(x, t) = P_t f(x)$, est excessive par rapport à $(\tilde{V}_\alpha)_{\alpha > 0}$.
* On note H l'ensemble des fonctions $\phi: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $\phi^- = \sup(-\phi, 0)$ soit bornée et l'application $r \to r\phi(x, r)$ soit localement lipschitzienne uniformément par rapport à x. Il s'ensuit que l'application $r \to \phi^+(x, r)$ est localement bornée uniformément par rapport à x.

A. CONSTRUCTION DU SEMI-GROUPE PERTURBÉ

THÉORÈME 7. *Soit $\phi \in H$. Alors il existe un semi-groupe non linéaire ${}^\phi\mathbb{P} = ({}^\phi P_t)_{t>0}$ relativement borné unique vérifiant pour tous $f \in B_b(X)$, $x \in X$ et $t > 0$:*

$${}^\phi P_t f(x) = P_t f(x) - \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, {}^\phi P_s f)\, {}^\phi P_s f)(x)\, \mathrm{d}s.$$

Preuve. Soit $\mu \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leqslant \phi^- \leqslant \mu$ et soient $f \in B_b(X)$ et $a > 0$. On pose $D = \{u \in B_b(X \times [0, a]) : |u(x, t)| \leqslant e^{\mu t} P_t(|f|)(x);\ \forall x \in X,\ \forall t \in [0, a]\}$.

Soit $\lambda = \sup\{\phi^+(x, u(x, t));\ x \in X,\ u \in D \text{ et } t \in [0, a]\}$ et $\theta = \lambda - \phi$. On définit alors l'opérateur T sur D par:

$$Tu(x, t) = e^{-\lambda t} P_t f(x) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} P_{t-s}(\theta(\cdot, u(\cdot, s)) u(\cdot, s))(x)\, \mathrm{d}s.$$

On a: $T(D) \subset D$ et il existe $k > 0$ tel que pour tous $u, v \in D$, $x \in X$ et $t \in [0, a]$:

$$|Tu(x,t) - Tv(x,t)| \leqslant k \int_0^t P_{t-s}(|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)|)(x)\, \mathrm{d}s.$$

Ce qui donne par récurrence sur $n \geqslant 1$:

$$|T^n u(x,t) - T^n v(x,t)| \leqslant (k\|P\|_a)^n \frac{t^n}{n!} \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|.$$

Donc pour n assez grand, T^n est une contraction stricte de D dans D. Or, D est fermé de $B_b(X \times [0, a])$, donc T^n admet un unique point fixe $w \in D$, qui est un point fixe unique de T dans D. Ainsi on construit une fonction $v \in B(X \times]0, +\infty[)$ telle que pour tous $x \in X$ et $t > 0$:

$$|v(x,t)| \leqslant e^{\mu t} P_t(|f|)(x).$$

De plus pour tout $a > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $x \in X$ et $t \in [0, a]$:

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} P_t f(x) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} P_{t-s}(\theta(\cdot, v(\cdot, s)) v(\cdot, s))(x)\, \mathrm{d}s.$$

Or cette équation s'écrit sur $X \times [0, a]$:

$$v = {}^{\lambda}Pf + \tilde{V}_\lambda(\theta(\cdot, v)v) = {}^{\lambda}Pf + \lambda \tilde{V}_\lambda v - \tilde{V}_\lambda(\phi(\cdot, v)v).$$

D'où:

$$v = (I + \lambda \tilde{V})({}^{\lambda}Pf - \tilde{V}_\lambda(\phi(\cdot, v)v)) = Pf - \tilde{V}(\phi(\cdot, v)v).$$

Donc la fonction v vérifie pour tous $x \in X$ et $t > 0$:

$$v(x,t) = P_t f(x) - \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, v(\cdot, s)) v(\cdot, s))(x)\, \mathrm{d}s.$$

Posons alors ${}^{\phi}P_t f(x) = v(x,t)$. Nous obtenons une famille $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ d'opérateurs non linéaires sur $B_b(X)$. Cette famille $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe.

En effet, soient $f \in B_b(X)$, $x \in X$, t et $t' > 0$:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= {}^{\phi}P_{t+t'} f(x) \\ &= P_{t+t'} f(x) - \int_0^{t'} P_{t+t'-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_s f)\, {}^{\phi}P_s f)(x)\, \mathrm{d}s \\ &\quad - \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_{s+t'} f)\, {}^{\phi}P_{s+t'} f)(x)\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,t) &= {}^{\phi}P_t({}^{\phi}P_{t'}f)(x)\\
&= P_{t+t'}f(x) - \int_0^{t'} P_{t+t'-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_s f)^{\phi}P_s f)(x)\,\mathrm{d}s\\
&\quad - \int_0^{t} P_{t-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_s({}^{\phi}P_{t'}f))^{\phi}P_s({}^{\phi}P_{t'}f))(x)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

On a: $|u_i(x,t)| \leqslant e^{\mu(t+t')}P_{t+t'}(|f|)(x)$ pour $i = 1,2$ et

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = \tilde{V}(\phi(\cdot, u_2)u_2 - \phi(\cdot, u_1)u_1)(x,t).$$

Donc pour tout $a > 0$, il existe $k > 0$ telle que pour tous $x \in X$, $t \in [0,a]$ et $n \geqslant 1$:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant (k\|P\|_a)^n \frac{a^n}{n!} \sup_{0 \leqslant s \leqslant a} \|u_1(\cdot, s) - u_2(\cdot, s)\|.$$

Il en résulte que $u_1 = u_2$, c'est à dire: ${}^{\phi}P_{t+t'}f = {}^{\phi}P_t({}^{\phi}P_{t'}f)$.

Soit maintenant $(Q_t)_{t>0}$ un autre semi-groupe relativement borné (i.e.: $\sup_{0 \leqslant s \leqslant t}\|Q_s f\| \leqslant c_t\|f\|_\infty < +\infty$) tel que

$$Q_t f = P_t f - \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, Q_s f)Q_s f)\,\mathrm{d}s.$$

Ce qui donne pour tout $a > 0$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $x \in X$, $t \in [0,a]$ et $n \geqslant 1$: $|{}^{\phi}P_t f(x) - Q_t f(x)| \leqslant (k\|P\|_a)^n a^n/n! \sup_{0 \leqslant s \leqslant a}\|{}^{\phi}P_s f - Q_s f\|$.
Donc ${}^{\phi}P_t f = Q_t f$ pour tout $t > 0$.

* $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ est appelé semi-groupe perturbé de $(P_t)_{t>0}$ par ϕ.

REMARQUE 7. (a) Si $f \in B_b^+(X)$ alors ${}^{\phi}P_t f \in B_b^+(X)$ et si $\phi_0(x,r) = 1_{[0,\infty]}(r)\phi(x,r)$ alors ${}^{\phi}P_t f = {}^{\phi_0}P_t f$ pour $f \in B_b^+(X)$ et ${}^{\phi_0}P_t f(x) = P_t(X)$ si f est négative.

(b) Si ϕ ne dépend pas de r (i.e.: $\phi(x,r) = \psi(x)$) alors $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ n'est autre que le semi-groupe linéaire défini dans [10].

LEMME 4. *Soit $\chi = (\Omega, X_t, F, F_t, \theta_t, P^x)$ un processus de Markov associé à $(P_t)_{t>0}$ et soit $h \in B(X +]0, +\infty[)$ telle que pour tout $t > 0$, $\int_0^t \sup_{x \in X}|h(x,s)|\,\mathrm{d}s < +\infty$. Alors ${}^h\tilde{P}_s f(x,t) = 1_{]s,+\infty[}(t)E^x(f(X_s, t-s)\cdot\exp(-\int_0^s h(X_r, t-r)\,\mathrm{d}r))$, est un semi-groupe sur $X \times]0,\infty[$ de noyau $\tilde{V}_h f(x,t) = \int_0^t {}^h\tilde{P}_s f(x,t)\,\mathrm{d}s$, vérifiant:*

$$\tilde{V} = \tilde{V}_h + \tilde{V}_h(h\tilde{V}) = \tilde{V}_h + \tilde{V}(h\tilde{V}_h).$$

PROPOSITION 9. *Si $\chi = (\Omega, X_t, F, F_t, \theta_t, P^x)$ est un processus de Markov associé à $(P_t)_{t>0}$, alors le semi-groupe $({}^{\phi}P_t)_{t>0}$ vérifie pour $f \in B_b(X)$, $x \in X$ et $t > 0$:*

$${}^{\phi}P_t f(x) = E^x\left(f(X_t)\exp\left(-\int_0^t \phi(X_s, {}^{\phi}P_{t-s}f(X_s))\,\mathrm{d}s\right)\right).$$

Preuve. On a: $Pf = {}^{\phi}Pf + \tilde{V}(\phi(\cdot, {}^{\phi}Pf){}^{\phi}Pf)$. Ce qui donne d'après le Lemme 4:

$$ {}^{\phi}Pf = Pf - \tilde{V}_h(hPf) \quad \text{où} \quad h = \phi(\cdot, {}^{\phi}Pf). $$

Soit $f_n(x,t) = ne^{-nt}P_t f(x)$, alors $Pf = \sup_n \tilde{V}f_n$ et on a:

$$ \begin{aligned} {}^{\phi}P_t f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \tilde{V}_h f_n(x,t) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^t E^x\left(ne^{-ns}P_s f(X_{t-s})\exp\left(-\int_0^{t-s} \phi(X_r, {}^{\phi}P_{t-r}f(X_r))\,\mathrm{d}r\right)\right)\mathrm{d}s \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nt} e^{-s}E^x\left(f(X_t)\exp\left(-\int_0^{t-s/n} \phi(X_r, {}^{\phi}P_{t-r}f(X_r))\,\mathrm{d}r\right)\right)\mathrm{d}s \\ &= E^x\left(f(X_t)\exp\left(-\int_0^t \phi(X_r, {}^{\phi}P_{t-r}f(X_r))\,\mathrm{d}r\right)\right). \end{aligned} $$

PROPOSITION 10. *Soit $\phi \in H$ et soit $h \in B_b(X)$. Alors $\phi + h \in H$ et on a pour tout $t > 0$: ${}^{\phi}({}^{h}P)_t = {}^{\phi+h}P_t$.*

Preuve. Soit $(X_t)_{t>0}$ un processus associé à $(P_t)_{t>0}$. Posons $Q_t = {}^{\phi}({}^{h}P)_t$. On a pour $f \in B_b(X)$, $x \in X$ *et* $t > 0$:

$$ Q_t f(x) = {}^{h}P_t f(x) - \int_0^t {}^{h}P_{t-s}(\phi(\cdot, Q_s f)Q_s f)(x)\,\mathrm{d}s. $$

Soit $\theta(x,t) = \phi(x, Q_t f(x))$. Alors on a: $Qf = {}^{h}Pf - \tilde{V}_h(\theta Qf)$ et d'après le Lemme 4 appliqué à $({}^{h}P)_{t>0}$, on obtient:

$$ Qf = {}^{h}Pf - \tilde{V}_{h+\theta}(\theta\,{}^{h}Pf). $$

Ce qui donne pour $x \in X$ et $t > 0$:

$$ Q_t f(x) = {}^{h}P_t f(x) - E^x\left(\int_0^t \theta(X_s, t-s){}^{h}P_{t-s}f(X_s)\exp\left(-\int_0^s [h(X_r) + \theta(X_r, t-r)]\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right). $$

D'où

$$ \begin{aligned} Q_t f(x) = {}^{h}P_t f(x) - E^x\Bigg[\int_0^t \theta(X_s, t-s)E^{X_s}\left(e^{-\int_0^{t-s}h(X_r)\,\mathrm{d}r}f(X_{t-s})\right)\exp\Bigg(-\int_0^s h(X_r) \\ + \theta(X_r, t-r)\,\mathrm{d}r\Bigg)\mathrm{d}s\Bigg] \\ = {}^{h}P_t f(x) - E^x\left[e^{-\int_0^t h(X_r)\,\mathrm{d}r}f(X_t)\cdot\int_0^t \theta(X_s, t-s)\exp\left(-\int_0^s \theta(X_r, t-r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right] \\ = {}^{h}P_t f(x) - {}^{h}P_t f(x) + E^x\left[f(X_t)\exp\left(-\int_0^t (h(X_r) + \theta(X_r, t-r))\,\mathrm{d}r\right)\right]. \end{aligned} $$

Il en résulte que:

$$Q_t f(x) = E^x\left[f(X_t)\exp\left(-\int_0^t (h(X_r) + \phi(X_r, Q_{t-r}f(X_r)))\,\mathrm{d}r\right)\right].$$

C'est à dire:

$${}^{\phi}({}^{h}P)_t = {}^{\phi+h}P_t, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

THÉORÈME 8. *Soit $\phi \in H$ et soient $f, g \in B_b(X)$. Alors on a*:

(1) *Si $f \leqslant g \Rightarrow \forall t > 0$, ${}^{\phi}P_t f \leqslant {}^{\phi}P_t g$.*

(2) *$\forall t > 0$, il existe une constante $c = c(t, \phi, f, g) > 0$ tell que*:

$$|{}^{\phi}P_t f - {}^{\phi}P_t g| \leqslant cP_t(|f - g|).$$

En particulier, si $\phi \in L$ (cf. partie I), alors on a:

$$|{}^{\phi}P_t f - {}^{\phi}P_t g| \leqslant P_t(|f - g|).$$

Preuve. Soient $f, g \in B_b(X)$ et $\phi \in H$. Posons pour $y \in X$ et $s \geqslant 0$:

$$h(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\phi(y, {}^{\phi}P_s g(y)){}^{\phi}P_s g(y) - \phi(y, {}^{\phi}P_s f(y)){}^{\phi}P_s f(y)}{{}^{\phi}P_s g(y) - {}^{\phi}P_s f(y)} & \text{si } {}^{\phi}P_s g(y) \neq {}^{\phi}P_s f(y), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour tout $t > 0$, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que: $\forall\, y \in X$, $\forall s \in [0, t]$, $|h(y, s)| \leqslant \alpha$. Il s'ensuit d'après le Lemme 4 que:

$$\begin{aligned} {}^{\phi}P_t f(x) - {}^{\phi}P_t g(x) &= P_t(f - g)(x) - \tilde{V}_h(hP(f - g))(x, t) \\ &= E^x\left((f - g)(X_t)\exp\left(-\int_0^t \mathrm{h}(X_s, t - s)\,\mathrm{d}s\right)\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que:

(1) Si $f \leqslant g$ alors pour tout $t > 0$; ${}^{\phi}P_t f \leqslant {}^{\phi}P_t g$.

(2) Pour tous $x \in X$ et $t > 0$:

$$|{}^{\phi}P_t f(x) - {}^{\phi}P_t g(x)| \leqslant e^{t\alpha}P_t(|f - g|)(x).$$

En particulier si $\phi \in L$ alors la fonction h est positive et par suite:

$$|{}^{\phi}P_t f - {}^{\phi}P_t g| \leqslant P_t(|f - g|).$$

LEMME 5. *Soit $f \in B_b^+(X)$ et soit $(f_n)_n \subset B_b^+(X)$ telle que $f = \sup_n f_n$. Alors*

$${}^{\phi}P_t f = \sup_n {}^{\phi}P_t f_n.$$

Preuve. On a $Pf_n = {}^{\phi}Pf_n + \tilde{V}(\phi(\cdot, {}^{\phi}Pf_n){}^{\phi}Pf_n)$. Posons $u = \sup_n {}^{\phi}Pf_n$ alors, $\lim_{n\to+\infty} \phi(\cdot, {}^{\phi}Pf_n){}^{\phi}Pf_n = u\phi(\cdot, u)$ et $0 \leqslant u \leqslant {}^{\phi}Pf$. Donc d'après le théorème de Lebesgue on a: $Pf = u + \tilde{V}(\phi(\cdot, u)u)$. Donc $u = {}^{\phi}Pf$.

LEMME 6. *Soient $f \in B^+(X)$ et $(f_n)_n \subset B_b^+(X)$ une suite croissante vers f. Alors:* $\sup_n {}^{\phi}P_t f_n = \sup_n {}^{\phi}P_t(f \wedge n)$.

Preuve. On a pour $m, n \in N$: $f_m \wedge n \leqslant f_m$ implique que ${}^{\phi}P_t(f_m \wedge n) \leqslant {}^{\phi}P_t f_m$. Ce qui donne: ${}^{\phi}P_t(f \wedge n) \leqslant \sup_m {}^{\phi}P_t f_m$ et par suite $\sup_n {}^{\phi}P_t(f \wedge n) \leqslant \sup_m {}^{\phi}P_t f_m$. D'autre part:

$$f_m \wedge n \leqslant f \wedge n \text{ implique que } {}^{\phi}P_t(f_m \wedge n) \leqslant {}^{\phi}P_t(f \wedge n) \text{ et } {}^{\phi}P_t f_m \leqslant \sup_n {}^{\phi}P_t(f \wedge n).$$

Donc $\sup_m {}^{\phi}P_t f_m \leqslant \sup_n {}^{\phi}P_t(f \wedge n)$. D'où le résultat cherché.

DÉFINITION 4. Soit $f \in B^+(X)$. On définit ${}^{\phi}P_t f := \sup_n {}^{\phi}P_t(f \wedge n)$.

REMARQUE 7. Soit $f \in B^+(X)$ et soit $(f_n)_n \subset B^+(X)$ telle que $f = \sup_n f_n$. Alors ${}^{\phi}P_t f = \sup_n {}^{\phi}P_t f_n$.

PROPOSITION 11. *Soit $\phi \in H$ telle que l'application $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors pour tous $f, g \in B^+(X)$ et $t > 0$, on a:*

(*i*) ${}^{\phi}P_t(f + g) \leqslant {}^{\phi}P_t f + {}^{\phi}P_t g$.

(*ii*) ${}^{\phi}P_t(\alpha f) \leqslant \alpha {}^{\phi}P_t f$; *si* $\alpha \geqslant 1$.

Preuve. (i) Soient $f, g \in B_b^+(X)$ et $\phi \in H$ telle que $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Posons $u = {}^{\phi}P_t f, v = {}^{\phi}P_t g$ et $w = {}^{\phi}P(f + g)$. Alors d'après le Théorème 8, on a: $0 \leqslant \sup(u, v) \leqslant w$. D'autre part on a:

$$u + v - w = \tilde{V}((w - u - v)\phi(\cdot, w)) + \tilde{V}(u(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, u)) + \tilde{V}(v(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, v))).$$

Soient $h = \phi(\cdot, w)$ et $\theta = u(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, u)) + v(\phi(\cdot, w) - \phi(\cdot, v))$. Alors θ est positive et d'après le Lemme 4, on a $u + v - w = \tilde{V}\theta - \tilde{V}_h(h\tilde{V}\theta) = \tilde{V}_h(\theta))$, que est positive. C'est à dire pour $f, g \in B_b^+(X)$:

$${}^{\phi}P_t(f + g) \leqslant {}^{\phi}P_t f + {}^{\phi}P_t g.$$

Maintenant, en utilisant la Définition 4, on obtient l'inégalité pour $f, g \in B^+(X)$.

(ii) Ça se démontre de la même manière que (i).

PROPRIÉTÉ 2. *Soit $\phi \in H$ telle que l'application $r \to \phi(\cdot, r)$ est paire. Alors pour tous $f, g \in B_b(X)$ et tout $a > 0$, il existe $h \in B_b(X \times [0, a])$ telle que pour tous $x \in X$ et $t \in [0, a]$:*

$${}^{\phi}P_t f(x) + {}^{\phi}P_t g(x) = E^x\left(\exp\left(-\int_0^t h(X_s, t - s)\,ds\right)(f + g)(X_t)\right).$$

où $(X_t)_{t>0}$ est un processus de Markov associé à $(P_t)_{t>0}$. En particulier pour tous $f \in B_b(X)$ et $t > 0$, on a:

$$^{\phi}P_t(-f) = -{}^{\phi}P_t f \quad et \quad |{}^{\phi}P_t f| \leqslant {}^{\phi}P_t(|f|).$$

Preuve. On a sur $X \times [0, a]$:

$$^{\phi}Pf + {}^{\phi}Pg = P(f + g) - \tilde{V}(\phi(\cdot, {}^{\phi}Pf)^{\phi}Pf + \phi(\cdot, {}^{\phi}Pg)^{\phi}Pg).$$

Or la fonction $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ est paire, donc on a:

$$^{\phi}Pf + {}^{\phi}Pg = P(f + g) - \tilde{V}(\phi(\cdot, {}^{\phi}Pf)^{\phi}Pf - \phi(\cdot, -{}^{\phi}Pg)(-{}^{\phi}Pg)).$$

Soit $h \in B_b(X \times [0, a])$ telle que pour tous $x \in X$ et $t \in [0, a]$:

$$\phi(x, {}^{\phi}P_t f(x))^{\phi}P_t f(x) - \phi(x, -{}^{\phi}P_t g(x))(-{}^{\phi}P_t g(x)) = h(x, t)({}^{\phi}P_t f(x) + {}^{\phi}P_t g(x)).$$

Alors on a d'après le Lemme 4 pour $x \in X$ et $t \in [0, a]$:

$$^{\phi}P_t f(x) + {}^{\phi}P_t g(x) = P_t(f + g)(x) - \tilde{V}_h(h(P(f + g)))(x, t).$$

C'est à dire

$$^{\phi}P_t f(x) + {}^{\phi}P_t g(x) = E^x\left((f + g)(X_t)\exp\left(-\int_0^t h(X_s, t - s)\,\mathrm{d}s\right)\right).$$

En particulier si $g = -f$, on obtient pour tout $t > 0$:

$$^{\phi}P_t(-f) = -{}^{\phi}P_t f.$$

D'autre part, on a pour tout $t > 0$: ${}^{\phi}P_t f + {}^{\phi}P_t(|f|) \geqslant 0$. Or on sait d'après le Théorème 8 que: ${}^{\phi}P_t f \leqslant {}^{\phi}P_t(|f|)$. Donc $|{}^{\phi}P_t f| \leqslant {}^{\phi}P_t(|f|)$.

REMARQUE 8. Si $r \longrightarrow \phi(\cdot, r)$ n'est pas paire, la Propriété 2 ne subsiste pas. En effet soit $\phi(x, r) = \sup(r, 0)$ et $P_t = \mathrm{Id}$.

Alors

$$^{\phi}P_t f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1 + tf(x)} & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

On a: ${}^{\phi}P_t(-1) = -1$ et ${}^{\phi}P_t 1 = 1/(1 + t)$. Ce qui montre que:

$$^{\phi}P_t 1 \neq -{}^{\phi}P_t(-1) \quad \text{et} \quad |{}^{\phi}P_t(-1)| = 1 > \frac{1}{1 + t} = {}^{\phi}P_t 1; \text{ pour tout } t > 0.$$

THÉORÈME 9. *Soient ϕ et ψ dans H tels que $\phi \leqslant \psi$. Alors pour tous $f \in B^+(X)$ et $t > 0$: ${}^{\psi}P_t f \leqslant {}^{\phi}P_t f$.*

Preuve. Soit $f \in B_b^+(X)$. On a: ${}^{\phi}Pf - {}^{\psi}Pf = \tilde{V}({}^{\psi}Pf\psi(\cdot, {}^{\psi}Pf) - {}^{\phi}Pf\phi(\cdot, {}^{\phi}Pf))$. Posons:

$$h = \begin{cases} \dfrac{\Psi(\cdot, {}^{\phi}Pf){}^{\phi}Pf - \Psi(\cdot, {}^{\psi}Pf){}^{\psi}Pf}{{}^{\phi}Pf - {}^{\psi}Pf} & \text{si } {}^{\phi}Pf \neq {}^{\psi}Pf. \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$u = {}^{\phi}Pf - {}^{\Psi}Pf$ et $v = {}^{\phi}Pf(\Psi(\cdot, {}^{\phi}Pf) - \phi(\cdot, {}^{\phi}Pf))$.

Alors on a: $u = -\tilde{V}(hu) + \tilde{V}v$. Ce qui donne d'après le Lemme 4: $u = \tilde{V}v - \tilde{V}_h(h\tilde{V}v) = \tilde{V}_h v$. Or la fonction v est positive, donc u est positive; c'est à dire ${}^{\Psi}P_t f \leqslant {}^{\phi}P_t f$.

COROLLAIRE 3. *Soit $\phi \in H$ et soit $\phi_n(x, r) = 1_{[0, +\infty[}(r)(\phi(x, r) \wedge n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $f \in B_b^+(X)$, on a: ${}^{\phi}P_t f(x) = \inf_n {}^{\phi_n}P_t f$.*

Preuve. On a: $r\phi_n(x, r) = 1_{[0, +\infty[}(r) \inf(r\phi(x, r), nr)$. Il s'ensuit que $\phi_n \in H$. De plus on a pour $f \in B_b^+(X)$:

$${}^{\phi_n}P_t f(x) = P_t f(x) - \tilde{V}(\phi_n(\cdot, {}^{\phi_n}Pf){}^{\phi_n}Pf)(x, t).$$

D'après le Théorème 9, la suite $({}^{\phi_n}Pf)_n$ est décroissante, soit $u(x, t) = \inf_n {}^{\phi_n}P_t f(x)$. D'autre part si $0 \leqslant \phi^- \leqslant \mu \in \mathbb{R}^+$ alors $0 \leqslant {}^{\phi_n}P_t f \leqslant e^{\mu t}P_t f$. Donc pour tout $a > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $n \geqslant n_0$, $x \in X$ et $t \in [0, a]$: $\phi(x, {}^{\phi_n}P_t f(x)) \leqslant n$.

Il en résulte que pour tous $n \geqslant n_0$, $x \in X$ et $t \in [0, a]$:

$${}^{\phi_n}P_t f(x) = P_t f(x) - \tilde{V}(\phi(\cdot, {}^{\phi_n}Pf){}^{\phi_n}Pf)(x, t). \qquad (*)$$

Or $\lim_{n \to +\infty} {}^{\phi_n}P_t f(x)\phi(x, {}^{\phi_n}P_t f(x)) = u(x, t)\phi(x, u(x, t))$ et il existe $k > 0$ telle que $|\phi(x, {}^{\phi_n}P_t f(x)){}^{\phi_n}P_t f(x)| \leqslant k$, pour $x \in X$ et $t \in [0, a]$.

Donc par passage à la limite dans (*) en utilisant le théorème de Lebesgue, on obtient pour tous $x \in X$ et $t > 0$: $u(x, t) = P_t f(x) - \tilde{V}(\phi(\cdot, u)u)(x, t)$. Ce qui donne d'après le Théorème 7: $u(x, t) = {}^{\phi}P_t f(x)$, c'est à dire

$${}^{\phi}P_t f(x) = \inf_n {}^{\phi_n}P_t f(x).$$

THÉORÈME 10. *Soit $(Q_t)_{t > 0}$ un semi-groupe linéaire relativement borné sur (X, B) tel que pour tout $t > 0$: $P_t \leqslant Q_t$. Alors pour tous $\phi \in H$, $f \in B^+(X)$ et $t > 0$, on a: ${}^{\phi}P_t f \leqslant {}^{\phi}Q_t f$.*

Preuve. On peut supposer que $\phi \in H^+$ (quitte à prendre $\mu + \phi$ au lieu de ϕ où $0 \leqslant \phi^- \leqslant \mu \in \mathbb{R}^+$ et $e^{\mu t}P_t$ au lieu de P_t et $e^{\mu t}Q_t$ au lieu de Q_t). De même d'après le Corollaire 3, on peut supposer que ϕ est bornée sur $X \times [0, \infty[$. Soit $f \in B_b^+(X)$ et $\lambda \geqslant 0$ tel que pour tous $x \in X$ et $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \phi(x, r) \leqslant \lambda$. Alors d'après le Théorème 7, on a

$$\begin{aligned} {}^{\phi}Pf &= {}^{\lambda}Pf + \tilde{V}_\lambda((\lambda - \phi(\cdot, {}^{\phi}Pf)){}^{\phi}Pf) \\ {}^{\phi}Qf &= {}^{\lambda}Qf + \tilde{W}_\lambda((\lambda - \phi(\cdot, {}^{\phi}Qf)){}^{\phi}Qf) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{V}_\lambda = \int_0^\infty {}^\lambda P_t f \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt \quad \text{et} \quad \tilde{W}_\lambda = \int_0^\infty {}^\lambda Q_t f \, dt.$$

On pose $\theta = \lambda - \phi$; $v = {}^\phi Qf - {}^\phi Pf$; $u = {}^\lambda Qf - {}^\lambda Pf$ et $g = {}^\phi Qf\theta(\cdot, {}^\phi Qf)$. Alors il existe une fonction mesurable

$$h = \begin{cases} \dfrac{{}^\phi Pf\theta(\cdot, {}^\phi Pf) - {}^\phi Qf\theta(\cdot, {}^\phi Qf)}{{}^\phi Qf - {}^\phi Pf} & \text{si } {}^\phi Pf \neq {}^\phi Qf, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

telle que:

$$v = u - \tilde{V}_\lambda(hv) + \tilde{W}_\lambda g - \tilde{V}_\lambda g.$$

Ce qui donne d'après le Lemme 4:

$$v = [I - \tilde{V}_{\lambda+h}(h\,\cdot)](u + \tilde{W}_\lambda g - \tilde{V}_\lambda g).$$

Les fonctions u et $\tilde{W}_\lambda g - \tilde{V}_\lambda g$ sont $\tilde{\mathbb{W}}_\lambda$-surmédianes donc la fonction $s = u + \tilde{W}_\lambda g - \tilde{V}_\lambda g$ est $\tilde{\mathbb{W}}_\lambda$-surmédiane et par suite s est $\tilde{\mathbb{V}}_\lambda$-surmédiane et on a: $s - \tilde{V}_{\lambda+h}(hs) \geqslant \hat{s} - \tilde{V}_{\lambda+h}(h\hat{s})$ où $\hat{s}$ = régularisée $\tilde{\mathbb{V}}_\lambda$-excesive de s. Or il existe $s_n \in B_b^+(X \times]0, \infty[)$ telle que $\hat{s} = \sup_n \tilde{V}_\lambda s_n$, donc $v = s - \tilde{V}_{\lambda+h}(hs) \geqslant \hat{s} - \tilde{V}_{\lambda+h}(h\hat{s}) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{V}_{\lambda+h} s_n$, qui est positive. Par suite v est une fonction positive, c'est à dire ${}^\phi Pf \leqslant {}^\phi Qf$.

PROPOSITION 12. *Soit $\phi \in H^+$ telle que l'application $r \to \phi(\,\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors pour tous $f \in B^+(X)$, $x \in X$ et $t > 0$ tels que* $0 < P_t f(x) < +\infty$:

$${}^\phi P_t f(x) \leqslant P_t f(x) \leqslant {}^\phi P_t f(x) \exp\left(\frac{\int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, P_s f) P_s f)(x)\, ds}{P_t f(x)} \right).$$

Preuve. Soient $f \in B_b^+(X)$, $x \in X$ et $t > 0$ tels que $0 < P_t f(x)$. Soit $(X_t)_{t>0}$ un processus associé à $(P_t)_{t>0}$. Alors d'après la Proposition 9, on a:

$${}^\phi P_t f(x) = E^x\left(\left[\exp\left(- \int_0^t \phi(X_s, {}^\phi P_{t-s} f(X_s))\, ds \right) \right] f(X_t) \right).$$

Or la fonction $r \to \phi(\cdot, r)$ est croissante sur $[0, \infty[$ et ${}^\phi P_t f \leqslant P_t f$. Donc

$${}^\phi P_t f(x) \geqslant E^x\left[f(X_t) \exp\left(- \int_0^t \phi(X_s, P_{t-s} f(X_s))\, ds \right) \right].$$

D'autre part la fonction $\theta(\lambda) = E^x[f(X_t)\exp(-\lambda \int_0^t \phi(X_s, P_{t-s}f(X_s))\,ds)]$ est complétement monotone sur $]0, \infty[$, donc on a:

$$\theta(0) \leqslant \theta(1)\exp\left(-\frac{\theta'(0)}{\theta(0)}\right).$$

Ce qui donne:

$$P_t f(x) \leqslant {}^{\phi}P_t f(x)\exp\left(\frac{E^x\left(\int_0^t \phi(X_s, P_{t-s}f(X_s))\,ds f(X_t)\right)}{P_t f(x)}\right)$$

ou encore

$$P_t f(x) \leqslant {}^{\phi}P_t f(x)\exp\left(\frac{\int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, P_s f)P_s f)(x)\,ds}{P_t f(x)}\right).$$

COROLLAIRE 4. *Soit $\phi \in H^+$ telle que l'application $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

(1) $({}^{\phi}P_t)_{t>0} \sim (P_t)_{t>0}$ (*i.e.*: $\exists c > 0$ *tel que* $\forall f \in B^+(X)$, $\forall t > 0$; ${}^{\phi}P_t f \leqslant P_t f \leqslant c\,{}^{\phi}P_t f$).

(2) *Il existe $k > 0$ tel que* $\forall f \in B^+(X)$, $\forall t > 0$: $\int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, P_s f)P_s f)\,ds \leqslant kP_t f$.

Preuve: (1) $\Rightarrow$ (2). Pour tous $f \in B^+(X)$ et $t > 0$ un a:

$$\int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, P_s f)P_s f)\,ds \leqslant \int_0^t P_{t-s}(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_s(cf)){}^{\phi}P_s(cf))\,ds \leqslant P_t(cf) = cP_t f.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Ça découle de la Proposition 12.

EXEMPLE. Soit $P_t f(x) = f(x + t)$ sur $\mathbb{R}$ et soit $\phi \in H^+$ tel que $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$. Alors $({}^{\phi}P_t)_{t>0} \sim (P_t)_{t>0}$ si et seulement si $x \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s, x)\,ds$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

B. FONCTIONS EXCESSIVES

DÉFINITION 5. Soient $\phi \in H$ et $v \in B^+(X)$. v est dite ${}^{\phi}\mathbb{P}$-surmédiane si pour tout $t > 0$: ${}^{\phi}P_t v \leqslant v$.

* On note $S({}^{\phi}\mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions ${}^{\phi}\mathbb{P}$-surmédianes, qui contient evidemment $S({}^{-\mu}\mathbb{P})$ où $0 \leqslant \phi^- \leqslant \mu \in \mathbb{R}^+$.

REMARQUES 9. (1) Si $v \in S({}^{\phi}\mathbb{P})$ alors l'application $t \to {}^{\phi}\mathbb{P}_t v$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

(2) Soit $\phi \in H$ telle que $r \to \phi(\cdot, r)$ soit croissante sur $[0, +\infty[$ alors $S(^{\phi}\mathbb{P})$ est stable per somme.

(3) $\forall u, v \in S(^{\phi}\mathbb{P})$, $\inf(u, v) \in S(^{\phi}\mathbb{P})$ et si $(v_n)_n$ est une suite monotone dans $S(^{\phi}\mathbb{P})$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n$ est dans $S(^{\phi}\mathbb{P})$.

DÉFINITION 6. Une fonction $v \in B^+(X)$ est dite $^{\phi}\mathbb{P}$-excessive si $v \in S(^{\phi}\mathbb{P})$ et $\lim_{t \to 0} {}^{\phi}P_t v = \sup_{t>0} {}^{\phi}P_t v = v$.

* On note $E(^{\phi}\mathbb{P})$ l'ensemble des fonctions $^{\phi}\mathbb{P}$-excessives.

REMARQUES 10. (a) Si $v \in S(^{\phi}\mathbb{P})$ alors $u = \sup_{t>0} {}^{\phi}\mathbb{P}_t v$ est la plus grande minorante $^{\phi}\mathbb{P}$-excessive de v.

(b) Soient $a > 0$ et $v \in E(^{\phi}\mathbb{P})$. Alors $^{\phi}\mathbb{P}_a v$ est $^{\phi}\mathbb{P}$-excessive.

(c) Si $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante dans $E(^{\phi}\mathbb{P})$ alors $\sup_n v_n \in E(^{\phi}\mathbb{P})$.

PROPOSITION 13. *Soient* $\phi \in H$ *et* $v \in B_b^+(X)$. *On considère les assertions suivantes*:

(*a*) $P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds$; $(\forall t > 0)$.

(*b*) $^{\phi}P_t v \leqslant v$; $(\forall t > 0)$.

Alors $(a) \Rightarrow (b)$.

Preuve. Soient $a > 0$ et $v \in B_b^+(X)$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tous $x \in X$ et $t \in [0, a]$: $\phi(x, v(x)) \leqslant \lambda$ et $\phi(x, {}^{\phi}P_t v(x)) \leqslant \lambda$. De plus on a:

$$^{\phi}P_t v(x) = {}^{\lambda}P_t v(x) + \tilde{V}_\lambda[[\lambda - \phi(\cdot, {}^{\phi}Pv)]{}^{\phi}Pv](x, t) \quad \text{pour} \quad x \in X \quad \text{et} \quad t \in [0, a].$$

D'autre part l'inégalité $P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds$ est équivalente à $^{\lambda}Pv + \tilde{V}_\lambda((\lambda - \phi(\cdot, v))v) \leqslant v$ sur $X \times [0, a]$.

Donc en posant $u = {}^{\phi}Pv$, on obtient sur $X \times [0, a]$:

$$u - \tilde{V}_\lambda((\lambda - \phi(\cdot, u))u) \leqslant v - \tilde{V}_\lambda((\lambda - \phi(\cdot, v))v).$$

Soit $h = \lambda - \phi(\cdot, u)$ et $\theta = \phi(\cdot, v)$: alors on a sur $X \times [0, a]$:

$$u - \tilde{V}_{h+\theta}(hu) \leqslant v - \tilde{V}_{h+\theta}(hv).$$

Ce qui donne: $[I - \tilde{V}_{h+\theta}(h\,\cdot)](u - v) \leqslant 0$ et par suite $u \leqslant v$.

COROLLAIRE 5. *Soit* $\phi \in H^+$ *telle que* $r \to r\phi(\cdot, r)$ *soit croissante sur* $[0, +\infty[$ *et soit* $v \in B_b^+(X)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) $P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds$; $(\forall t > 0)$.

(*b*) $^{\phi}P_t v \leqslant v$; $(\forall t > 0)$.

On suppose dans la suite que le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ *est sous-markovien* (*i.e.*: $\forall t > 0$, $P_t 1 \leqslant 1$) *et on considère* $\phi \in L$. *On note* $V_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t\,dt$, *la résolvante de* $(P_t)_{t>0}$ *et* $(^{\phi}V_\alpha)_{\alpha>0}$ *sa perturbée par* ϕ. *On suppose que* $V_0 1$ *est bornée.*

LEMME 7. *Toute fonction* ${}^{\phi}\mathbb{P}$*-surmédiane est* ${}^{\phi}\mathbb{V}$*-surmédiane.*

Preuve. Soit $u \in B_b^+(X) \cap S({}^{\phi}\mathbb{P})$. Alors d'après le Corollaire 5, on a:

$$P_t u \leqslant u + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, u)u)\,ds.$$

Ce qui donne: $u + V_0(\phi(\cdot, u)u)$ est dans $S(\mathbb{P}) \subset S_0$. Par suite d'après le Théorème 6, $u \in S_\phi$.

Maintenant si v est une fonction quelconque ${}^{\phi}\mathbb{P}$-surmédiane alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v \wedge n \in B_b^+(X) \cap S({}^{\phi}\mathbb{P})$ car ${}^{\phi}P_t(n) \leqslant P_t(n) \leqslant n$. Donc d'après ce qui précède, $u_n \in S_\phi$ et par suite $v = \sup_n u_n$ est dans S_ϕ.

REMARQUE 11. Si $S_0 = S(\mathbb{P})$ alors $S({}^{\phi}\mathbb{P}) = S_\phi$. En effet, soit $u \in B_b^+(X) \cap S_\phi$ alors d'après le Théorème 6, $u + V_0(\phi(\cdot, u)u) \in S_0 = S(\mathbb{P})$. Il en résulte que pour tout $t > 0: P_t u \leqslant u + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, u)u)\,ds$. Donc d'après le Corollaire 5, $u \in S({}^{\phi}\mathbb{P})$. Si v est une fonction quelconque dans S_ϕ, alors $u_n = v \wedge n$ est dans $B_b^+(X) \cap S_\phi$ et donc $u_n \in S({}^{\phi}\mathbb{P})$. Par suite, $v = \sup_n u_n \in S({}^{\phi}\mathbb{P})$.

THÉORÈME 11. *Soit* $v \in B_b^+(X)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*:

(*a*) v *est* ${}^{\phi}\mathbb{P}$*-excessive.*

(*b*) $(\forall t > 0)$, $P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds$ *et* $\lim_{t\to 0} P_t v = v$.

(*c*) $v + V_0(\phi(\cdot, v)v)$ *est* $\mathbb{P}$*-excessive.*

(*d*) v *est* ${}^{\phi}\mathbb{V}$*-excessive.*

Preuve: (a)$\Leftrightarrow$(b). D'après le Corollaire 5, on a: $v \in E({}^{\phi}\mathbb{P})$ si et seulement si pour tout $t > 0$, $P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds$ et $\lim_{t\to 0} {}^{\phi}P_t v = v$.
Or, $P_t v = {}^{\phi}P_t v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, {}^{\phi}P_{t-s}v){}^{\phi}P_{t-s}v)\,ds$ et $\lim_{t\to 0}\int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds = 0$, car $V_0(\phi(\cdot, v)v) < +\infty$. Donc v est ${}^{\phi}\mathbb{P}$-excessive si pour tout $t > 0$,

$$P_t v \leqslant v + \int_0^t P_s(\phi(\cdot, v)v)\,ds \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} P_t v = v.$$

(b)$\Leftrightarrow$(c) évidente.

(c)$\Leftrightarrow$(d) Ça résulte d'après le Théorème 6 et la fait que $E_0 = E(\mathbb{P})$.

COROLLAIRE 6. *La résolvante non linéaire* $({}^{\phi}V_\alpha)_{\alpha > 0}$ *et le semi-groupe non linéaire* $({}^{\phi}P_t)_{t > 0}$ *possèdent les mêmes fonctions excessives.*

Preuve. Soit v une fonction ${}^{\phi}\mathbb{P}$-excessive alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup_{t>0} {}^{\phi}P_t(v \wedge n)$ est ${}^{\phi}\mathbb{P}$-excessive bornée et $v = \sup_n v_n$. Il s'ensuit d'après le Théorème 11 qui v_n est ${}^{\phi}\mathbb{V}$-excessive et donc $v \in E_\phi$.

Réciproquement si u est une fonction ${}^{\phi}\mathbb{V}$-excessive alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{\alpha>0} {}^{\phi}V_\alpha(\alpha(u \wedge n))$ est dans $E_\phi \cap B_b^+(X)$ et $u = \sup_n u_n$. Or d'après le théorème précédent u_n est ${}^{\phi}\mathbb{P}$-excessive et donc u aussi.

Reconnaissance

Je remercie le reférée pour les suggestions qu'il m'a faites.

Bibliographie

1. Ben Saad, H.: *Généralisation des noyaux V_h et applications.* Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris. Lecture Notes in Math. **1060**, 14–39, Springer-Verlag (1984).
2. Bliedtner, J. et Hansen, W.: *Potential Theory – An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage.* Springer-Verlag (1986).
3. De La Pradelle, A. et Feyel, D.: Etude de l'équation $1/2\Delta u - u\mu = 0$ où μ est une mesure positive, *Ann. Inst. Fourier* **38** (1988), 199–218.
4. De La Pradelle, A. et Feyel, D.: Sur certaines perturbations non linéaires du Laplacien, *J. Math. Pures et Appl.* **67** (1988), 397–404.
5. Dellacherie, C.: Théorie élémentaire du potentiel non linéaire. Séminaire d'Initiation à l'Analyse Paris VI (1985/86).
6. Dellacherie, C.: Une version non linéaire du théorème de Hunt. ICPT90; Septembre 1990, Nagoya, Japan.
7. Dellacherie, C. et Meyer, P. A.: *Probabilités et potentiel,* A.S.I 1417, Paris–Hermann (1987).
8. Hirsch, F.: Conditions nécessaires et suffisantes d'existence des résolvantes, *Z. Wh. Verw. Gebiete* **29** (1974), 73–85.
9. Maagli, H.: *Perturbation and Excessive Functions,* Proceedings of a Conference on Potential Theory held July 19–24, 1987, in Prague, Czechoslovakia, pp. 223–230.
10. Maagli, H. et Selmi, M.: Perturbation et comparaison des semi-groupes, *Rev. Roum. de Math. Pures et Appl.* **34** (1989), 29–40.
11. Maagli, H. et Selmi, M.: Perturbation des résolvantes et des semi-groupes par une mesure de Radon positive, *Math. Z.* **205** (1990), 379–393.
12. Maeda, F. Y.: Semi-linear perturbation of harmonic spaces, *Hokkaido. Math. J.* **10** (1981), 464–493.
13. Neveu, J.: Potentiel Markovian recurrent des chaînes de Harris, *Ann. Inst. Fourier* **22** (2) (1972), 85–130.