Potential Analysis **3**: 15–45, 1994.

Comparaison des semi-groupes et des résolvantes d'ordre α associés à des opérateurs différentiels de type divergence*

MOHAMED SELMI
Université de Tunis – II, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisie.

(Reçu: 27 novembre 1991; accepté: 21 septembre 1992)

Abstract. We prove that the densities of the semi-groups of order α, $0 < \alpha < 1$ associated with differential operators of second order and of divergence type, and the density of Riesz semi-groups of order α are comparables.

We give a necessary and sufficient condition such that the semi-group of order α and its resolvent family and their perturbated with a nonnegative and regular Radon measure are comparables.

When $\alpha = 1$, we prove that the semi-group of brownian motion and its perturbated with a radial and nonnegative measure are comparables if and only if the measure generates a bounded potential, but the result is not true if the measure is not radial.

Mathematics Subject Classifications (1991). 31B35, 35P05, 47F05.

Key words. Resolvents, comparable semi-groups, perturbed Green functions, exact regular measure.

1. Introduction

Nous considérons la famille d'opérateurs différentiels du second ordre de type divergence à coefficients mesurables et uniformément elliptiques sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$).

Pour un opérateur de cette famille nous notons par $p(t, x, y)$ la densité du semi-groupe associé, G la fonction de Green et V le noyau potentiel associés. Les lettres indexés par 0 désignent les éléments correspondants à l'opérateur de Laplace Δ. Les lettres qui portent l'exposant α désignent les éléments correspondants à l'opérateur $(-L)^\alpha$ obtenu à partir de L au moyen de la subordination au sens de Böchner.

Dans [2], [7] et [8] les auteurs ont démontré qu'il existe $c = c(n, \lambda)$ telle que:

$$\frac{1}{C^{n/2+1}} p_0(t/c, x, y) \leqslant p(t, x, y) \leqslant C^{n/2+1} p_0(ct, x, y)$$

pour tout $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Les principaux résultats de ce travail sont les suivants.

* Ce travail est soutenu par la Fondation Nationale pour la Recherche Scientifique.

Nous démontrons qu'il existe $c = c(n, \lambda, \alpha)$ telle que:

$$\frac{1}{C} p_0^\alpha(t, x, y) \leqslant p^\alpha(t, x, y) \leqslant C p_0^\alpha(t, x, y)$$

pour tout $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Nous démontrons aussi que le semi-groupe associé à $(-L)^\alpha$ et son perturbé par une mesure de Radon positive régulière exacte sont comparables si et seulement si $G^\alpha \mu$ est borné.

Nous terminons ce travail par l'étude du cas limite $\alpha = 1$.

Nous démontrons que le semi-groupe du mouvement brownien et son perturbé par une mesure de Radon positive régulière exacte radiale sont comparables si et seulement si $G_0 \mu$ est borné.

Mais si μ n'est pas radiale ce dernier résultat n'est pas en général vrai. Pour cela nous donnons un contre-exemple de fonction ϕ dont le potentiel de Newton associé est borné mais le semi-groupe du mouvement brownien et son perturbé par φ ne sont pas comparables pour $(n \geqslant 4)$.

Je remercie Monsieur le Professeur W. Hansen pour les discussions trés fructueuses que j'ai eues avec lui et pour l'intérêt et le soin qu'il a portés pour que ce travail puisse voir le jour.

Nous nous donnons la famille $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ des opérateurs différentiels du second ordre de type divergence à coefficients mesurables sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ définis par $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Nous supposons que la matrice associée $a(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique $(a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n)$ et que L est uniformément elliptique sur $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{pour tout } x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Pour $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, nous notons par G la fonction de Green de L sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et par V le noyau de densité G (quand les expressions existent).

G_0 désigne la fonction de Green de Δ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et V_0 le noyau de densité G_0 (quand les expressions existent).

DÉFINITION 1. Soit $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$. Soient G^1, G^2 les fonctions de Green de L_1 resp. (L_2). Nous dirons que G^1 et G^2 sont comparables s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{c}G^1 \leqslant G^2 \leqslant cG^1.$$

DÉFINITION 2. [13]. Soit μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$. On dit que μ est L exacte s'il existe un unique noyau ${}^{\mu}V$ qui vérifie $Vf = {}^{\mu}Vf + G({}^{\mu}Vf\mu)$.

REMARQUE 1. *Soit μ une mesure de Radon. Alors μ est Δ exacte si et seulement si μ est L exacte pour tout $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$.*

Démonstration. L'équivalence découle du fait que G et G_0 sont comparables sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Pour $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ et μ une mesure régulière L exacte, on considère le noyau ${}^{\mu}V$ perturbé de V par μ et ${}^{\mu}G$ la fonction de Green associée a ${}^{\mu}V$ qui n'est autre que la fonction de Green de $L - \mu$.

DÉFINITION 3. Soient $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ et μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n$. On dit que μ est régulière si μ ne charge pas les semi-polaires de $\mathbb{R}^n$ associés à la structure harmonique définie par L.

THÉORÈME 1. *Soient $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ et μ une mesure L régulière exacte sur $\mathbb{R}^n$. Alors les fonctions de Green G et ${}^{\mu}G$ sont comparables si et seulement si $G\mu$ est borné.*

Démonstration. Nous savons d'après [2], [7] et [8] que les fonctions G et G_0 sont comparables. D'autre part nous savons d'après [13] que les fonctions G et ${}^{\mu}G$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x,z)G(z,y)\,\mathrm{d}\mu(z) \leqslant cG(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

ce qui est équivalent d'après [13], [16] au fait que $G\mu$ est bornée.

Nous allons nous intéresser maintenant aux noyaux de Riesz d'ordre α $0 < \alpha < 1$ associés à la famille $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$.

Nous savons d'après [5], [18] qu'il existe un unique semi-groupe $(\eta_{t,\alpha})_{t>0}$ de mesures de convolution sur $]0, \infty[$ qui vérifie

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda a}\,\mathrm{d}\eta_{t,\alpha}(\lambda) = e^{-ta^{\alpha}}$$

pour tout $a > 0$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$.

C'est un semi-groupe de mesures à densités par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$. Si on note $f_{t,\alpha}(\lambda)$ la densité de $\eta_{t,\alpha}$ nous avons d'après [18]:

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(\lambda r\cos\theta - tr^{\alpha}\cos\alpha\theta)\sin(\lambda r\sin\theta - tr^{\alpha}\sin\alpha\theta + \theta)\,\mathrm{d}r$$

où θ est compris entre $\pi/2$ et π et

$$f_{t,\alpha}(\lambda) > 0 \quad \forall t > 0 \quad \forall\alpha \quad 0 < \alpha < 1 \quad \forall\lambda > 0.$$

Pour $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ nous notons par $\mathbb{P}$ le semi-groupe associé, par $p(t, x, y)$ la densité de $\mathbb{P}$, par $\mathbb{P}_0$ le semi-groupe associé à Δ et par $p_0(t, x, y)$ la densité de $\mathbb{P}_0$.

Nous savons aussi d'après [2], [7] et [8] qu'il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$\frac{1}{c^{n/2+1}} p_0\left(\frac{t}{c}, x, y\right) \leqslant p(t, x, y) \leqslant c^{n/2+1} p_0(ct, x, y) \tag{*}$$

pour tout $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Soient $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Nous pouvons d'après [18] associer au semi-groupe $\mathbb{P}$ le semi-groupe d'ordre α noté $\mathbb{P}^\alpha$ au moyen de la subordination au sens de Böchner définie par:

$$P_t^\alpha g(x) = \int_0^\infty P_s g(x) \eta_{t,\alpha}(\mathrm{d}s) = \int_0^\infty P_s g(x) f_{t,\alpha}(s)\,\mathrm{d}s$$

pour g mesurable bornée.

Si on note $p^\alpha(t, x, y)$ la densité de $\mathbb{P}^\alpha$ nous avons:

$$p^\alpha(t, x, y) = \int_0^\infty p(s, x, y) f_{t,\alpha}(s)\,\mathrm{d}s$$

$\mathbb{P}^\alpha$ est un semi-groupe holomorphe dont le générateur infinitesimal est d'après [18]: $(-L)^\alpha$.

Pour $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, $0 < \alpha < 1$, on note par V^α le noyau potentiel associé à $\mathbb{P}^\alpha$ et par G^α la fonction de Green associée.

LEMME 1. *Soit $\alpha \in]0, 1[$, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \alpha)$ telle que pour $n \geqslant 1$ on ait*

$$\frac{1}{c} G_0^\alpha \leqslant G^\alpha \leqslant c G_0^\alpha$$

pour tout $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$.

Démonstration. Nous avons d'après (*):

$$\frac{1}{c^{n/2+1}} P_0\left(\frac{s}{c}, x, y\right) \leqslant P(s, x, y) \leqslant c^{n/2+1} P_0(cs, x, y) \quad \text{pour tout } s > 0, \text{ tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On multiplie cette inégalité par $f_{t,\alpha}(s)$ et on intègre sur $]0, \infty[$, nous obtenons en utilisant [11], [14]:

$$\frac{1}{c^{n/2+1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-c^\alpha t|\xi|^{2\alpha} + i\langle x-y, \xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi \leqslant p^\alpha(t, x, y) \leqslant c^{n/2+1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t/c^\alpha|\xi|^{2\alpha} + i\langle x-y, \xi\rangle}\,\mathrm{d}\xi,$$

On intégre par rapport à t sur $]0, \infty[$ en utilisant le théorème de Fubini et le changement de variables $s = c^\alpha/t$ dans l'intégrale à gauche et $s = t/c^\alpha$ dans l'intégrale à droite nous aurons alors:

$$\frac{1}{c^{n/2+1-\alpha}} G_0^\alpha(x,y) \leqslant G^\alpha(x,y) \leqslant c^{n/2+1-\alpha} G_0^\alpha(x,y)$$

soit encore pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{c^{n/2+1-\alpha}} \frac{1}{|x-y|^{n-2\alpha}} \leqslant G^\alpha(x,y) \leqslant c^{n/2+1-\alpha} \frac{1}{|x-y|^{n-2\alpha}}.$$

Remarquons enfin que $c = c(n, \lambda, \alpha)$.

Soit μ une mesure $(-L)^\alpha$ régulière exacte, on désigne par ${}^\mu G^\alpha$ la fonction de Green du noyau associé à $(-L)^\alpha + \mu$.

THÉORÈME 2. *Soient $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, $0 < \alpha < 1$ et μ une mesure $(-L)^\alpha$ régulière exacte. Alors les fonctions de Green G^α et ${}^\mu G^\alpha$ sont comparables si et seulement si $G^\alpha\mu$ est borné.*

Démonstration. Comme μ est $(-L)^\alpha$ régulière et exacte, la fonction ${}^\mu G_\alpha$ est bien définie et nous avons $V^\alpha f = {}^\mu V^\alpha f + G^\alpha[({}^\mu V^\alpha f)\mu]$ pour f mesurable positive bornée.

Par suite d'après [13], [16] les fonctions G^α et ${}^\mu G^\alpha$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G^\alpha(x,z) G^\alpha(z,y)\, d\mu(z) \leqslant k G^\alpha(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n$$

or nous avons d'après [16]:

$$\begin{aligned} G^\alpha(x,z)G^\alpha(z,y) &\leqslant c^{n+2-2\alpha} G_0^\alpha(x,z) G_0^\alpha(z,y) \leqslant 2^{n-2\alpha} c^{n+2-2\alpha} G_0^\alpha(x,y)[G_0^\alpha(x,z) + G_0^\alpha(y,z)] \\ &\leqslant 2^{n-2\alpha} c^{2(n+2-2\alpha)} G^\alpha(x,y)[G^\alpha(x,z) + G^\alpha(y,z)]. \end{aligned}$$

Ce qui entraine:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G^\alpha(x,z)G^\alpha(z,y)\, d\mu(z) \leqslant 2^{n-2\alpha} c^{2(n+2-2\alpha)} G^\alpha(x,y) \int_{\mathbb{R}^n} [G^\alpha(x,z) + G^\alpha(y,z)]\, d\mu(z).$$

Il en résulte d'après [13], [16] que si $G^\alpha\mu$ est bornée alors G^α et ${}^\mu G^\alpha$ sont comparables. La condition $G^\alpha\mu$ borné est nécessaire d'après [13] car 1 est $(-L^\alpha)$ excessive.

Soit $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, $\alpha \in]0, 1[$, on note par G_p^α la densité de la résolvante $\mathbb{V}^\alpha = (V_p^\alpha)_{p \geqslant 0}$.

LEMME 2. *Soit $\alpha \in]0, 1[$, il existe $c = c(\eta, \lambda, \alpha)$ tel que pour tout $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ et pour tout $p \geqslant 0$ on ait pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$*

$$G_p^\alpha(x,z) G_p^\alpha(z,y) \leqslant c G_p^\alpha(x,y)[G_p^\alpha(x,z) + G_p^\alpha(z,y)].$$

Démonstration. Si on note par $p^\alpha(t,x,y)$ la densité du semi-groupe associé à $(-L)^\alpha$ nous avons l'inégalité:

$$\frac{1}{c^{1+n/2}}p_0\left(\frac{s}{c}x,y\right)\leqslant p(t,x,y)\leqslant c^{n/2+1}p_0(cs,x,y)\quad\forall s>0\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$

On multiplie par $e^{-pt}f_{t,\alpha}$ et on intégre sur $[0,\infty[$. Nous obtenons en utilisant le théorème de Fubini:

$$\frac{1}{c^{n/2+1}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty e^{i(x-y|\xi)-pt-C^\alpha t|\xi|^{2\alpha}}\,dt\,d\xi\leqslant G_p^\alpha(x,y)$$
$$\leqslant c^{1+n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty e^{i(x-y|\xi)-pt-t/C^\alpha|\xi|^{2\alpha}}\,dt\,d\xi$$

Nous utilisons les changements de variables $s=c^\alpha t$ dans l'expression à gauche et $s=t/c^\alpha$ dans l'expression à droite. Nous obtenons:

$$\frac{1}{c^{n/2+1-\alpha}}(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x,y)\leqslant G_p^\alpha(x,y)\leqslant c^{1/2+1-\alpha}(G_0^\alpha)_{p/c^\alpha}(x,y)\quad\text{pour tout } x,y\in\mathbb{R}^n.$$

D'autre part d'après [16] les fonctions de Green $(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}$ et $(G_0^\alpha)_{p/c^\alpha}$ sont comparables: il existe $c=c(n,\alpha)$ telle que

$$(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}\leqslant(G_0^\alpha)_{p/c^\alpha}\leqslant c(n,\alpha)(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}.$$

En effet: soient $0<a<b$ alors les fonctions de Green $(G_0^\alpha)_{ap}$ et $(G_0^\alpha)_{bp}$ sont uniformément comparables par rapport à p car nous avons:

$$(G_0^\alpha)_{ap}=(G_0^\alpha)_{bp}+ap(V_0^\alpha)_{ap}\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)(G_0^\alpha)_{bp}\right]\tag{1}$$

et d'après [16] nous avons:

$$(G_0^\alpha)_{ap}(x,z)(G_0^\alpha)_{ap}(z,y)\leqslant\frac{2^{n+2\alpha}}{\sin^2(\alpha\pi)}(G_0^\alpha)_{ap}(x,y)[(G_0^\alpha)_{ap}(x,z)+(G_0^\alpha)_{ap}(z,y)]\tag{2}$$

ce qui entraine que:

$$ap(V_0^\alpha)_{ap}\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)(G_0^\alpha)_{ap}\right]\leqslant ap(V_0^\alpha)_{ap}\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)(G_0^\alpha)_{ap}\right]\leqslant\frac{2^{n+2\alpha+1}}{\sin^2(\alpha\pi)}\left(\frac{b}{a}-1\right)(G_0^\alpha)_{ap}.$$

Par suite si $k=[2^{n+2\alpha+1}/\sin^2(\alpha\pi)](b/a-1)<1$ nous obtenons que:

$$(1-k)(G_0^\alpha)_{ap}\leqslant(G_0^\alpha)_{bp}=(G_0^\alpha)_{ap+(b/a-1)ap}$$

soit encore $(1-k)(G_0^\alpha)_{ap}\leqslant(G_0^\alpha)_{ap+[k(\sin^2\alpha\pi)/(2^{n+2\alpha+1})]ap}$.

Soit $v = 1/k(1 + b/a)2^{n+2\alpha+1}/\sin^2(\alpha\pi)$ nous avons d'après [12], [13] et [16]:

$$(1-k)^{\gamma}(G_0^\alpha)_{ap} \leqslant (G_0^\alpha)_{ap} + k \cdot v \frac{\sin^2(\alpha\pi)}{2^{n+2\alpha-1}} ap = (G_0^\alpha)_{bp}$$

ce qui démontre que $(G_0^\alpha)_{ap}$ et $(G_0^\alpha)_{bp}$ sont uniformément comparables pour tout $p > 0$. Il existe alors une constante $c = c(n, \alpha, c)$ telle que

$$\frac{1}{c}(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x, y) \leqslant G_p^\alpha(x, y) \leqslant c(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x, y).$$

Il suffit donc de démontrer le Lemme 2 pour $L = \Delta$. Or nous avons d'après [16]

$$(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x, z)(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(z, y) \leqslant \frac{2^{n+2\alpha}}{\sin^2(\alpha\pi)}(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x, y)[(G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(x, z) + (G_0^\alpha)_{pc^\alpha}(z, y)]$$

pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, ce qui démontre le Lemme 2.

THÉORÈME 3. *Soient* $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, $0 < \alpha < 1\mu$ *une mesure* $(-L)^\alpha$ *régulière exacte. Alors pour tout* $p > 0$ *les fonctions de Green* G_p^α *et* $({}^\mu G^\alpha)_p$ *sont comparables si et seulement si* $G_p^\alpha \mu$ *est borné. En particulier les résolvantes associées à* $(-L)^\alpha$ *et* $(-L^\alpha) + \mu$ *sont comparables si et seulement si* $G^\alpha \mu$ *est borné.*

Démonstration. Soit $p > 0$, d'après [12], [13] et [16] les fonctions de Green G_p^α et $({}^\mu G^\alpha)_p$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_p^\alpha(x, z) G_p^\alpha(z, y) \mu(\mathrm{d}z) \leqslant k G_p^\alpha(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Or d'après le Lemme 2 qui précède nous avons:

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_p^\alpha(x, z) G_p^\alpha(z, y)\, \mathrm{d}\mu(z) \leqslant c G_p^\alpha(x, y) \int_{\mathbb{R}^n} [G_p^\alpha(x, z) + G_p^\alpha(y, z)]\, \mathrm{d}\mu(z)$$

par suite si $\int_{\mathbb{R}^n} G_p^\alpha(x, z)\, \mathrm{d}\mu(z)$ est bornée les noyaux de Green G_p^α et $({}^\mu G^\alpha)_p$ sont comparables.

La condition $G_p^\alpha \mu$ bornée est nécessaire d'après [13] car 1 est $(-L)^\alpha + p$ surmédiane.

En particulier si $G^\alpha \mu$ est borné, alors pour tout $p > 0$, $G_p^\alpha \mu$ est borné ce qui entraine que $(G_p^\alpha)_{p>0}$ et $({}^\mu G_p^\alpha)_{p>0}$ sont comparables (i.e.: il existe $c > 0$ telle que $G_p^\alpha \leqslant c({}^\mu G^\alpha)_p$ pour tout $p > 0$). Ce qui prouve que les résolvantes associées à $(-L)^\alpha$ et $(-L)^\alpha + \mu$ sont comparables.

La condition $G^\alpha \mu$ borné est évidemment nécessare d'après la première partie de la démonstration de ce théorème pour $p = 0$.

COMPORTEMENT DE LA DENSITÉ DU SEMI-GROUPE DE RIESZ D'ORDRE α ASSOCIÉ À $(-\Delta)^\alpha$ SUR $\mathbb{R}^n$

Nous savons que la densité du semi-groupe de Riesz d'ordre α associé à $(-\Delta)^\alpha$ sur

$\mathbb{R}^n$ est donnée d'après [11], [14] par:

$$\begin{aligned} p_0^\alpha(t,x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}+i(x-y|\xi)}\,d\xi \quad \text{pour tout } t>0, \quad x,y\in\mathbb{R}^n \\ &= p_0^\alpha(t,x-y,0). \end{aligned}$$

On note encore $p_0^\alpha(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}+i(x|\xi)}\,d\xi$.

C'est une fonction radiale, elle est strictement positive décroissante: ceci est immédiat si on écrit $p_0^\alpha(t,x) = \int_0^\infty p_0(s,x)\eta_{t,\alpha}(s)\,ds$ avec $\eta_{t,\alpha}\geqslant 0$. On pose $\zeta = t^{1/2\alpha}\xi$, on obtient:

$$p_0^\alpha(t,x) = \frac{1}{t^{n/2\alpha}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\zeta|^{2\alpha}+i(x/t^{1/2\alpha}|\zeta)}\,d\zeta.$$

On pose

$$a = \frac{x}{t^{1/2\alpha}} \quad \text{et } \phi_\alpha(a) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\zeta|^{2\alpha}+i(a|\zeta)}\,d\zeta$$

on a alors:

$$p_0^\alpha(t,x) = \frac{1}{t^{n/2\alpha}}\phi_\alpha\left(\frac{x}{t^{1/2\alpha}}\right)$$

ϕ_α est positive, radiale, décroissante et continue sur $\mathbb{R}^n$.

LEMME 3. *Nous avons*:

(1) $$\phi_\alpha(a) \simeq \frac{\pi^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2\alpha}\right)}{2\alpha\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}$$

quand $|a|$ *tend vers* 0.

(2) $$\phi_\alpha(a) \simeq \frac{2^{2\alpha}\sin\alpha\pi}{\pi^{n+2/2}}\Gamma\left(\frac{n+2\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)\frac{1}{|a|^{n+2\alpha}}$$

quand $|a|$ *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. (1) D'après le théorème de convergence de Lebesgue nous avons:

$$\lim_{|a|\to 0}\phi_\alpha(a) = \lim_{|a|\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\alpha}+i(a|\xi)}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^{2\alpha}}\,d\xi = v_n\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^{2\alpha}}\,dr = \frac{v_n}{2\alpha}\Gamma\left(\frac{n}{2\alpha}\right)$$

où v_n est les volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n\cdot v_n = [\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)]$. Ce qui démontre (1).

(2) Comportement de $\phi_\alpha(a)$ au voisinage de $+\infty$. Nous allons nous servir de la formule donnée dans [18] qui peut s'obtenir en faisant recours au changement de variables en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$

$$p_0^\alpha(t,x) = \frac{4}{(4\pi)\dfrac{n+2}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{(1-n/2)-1} e^{-|x|^2/4s} e^{-tu^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \cos\left(su - tu^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right) \mathrm{d}s\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2|x|^{1-n/2}}{(2\pi)^{(n+2)/2}} \int_0^\infty u^{1/2(n/2-1)} [\text{Ré } e^{i(\pi/4)(n/2-1)} e^{-tu^\alpha e^{-i(\alpha\pi)/2}} K_{n/2-1}(|x|u^{1/2} e^{i\pi/4})]\,\mathrm{d}u$$

où $K_{n/2-1}$ est la fonction de Macdonald.

On fait le changement de variable $v = |x|u^{1/2}$, on obtient:

$$p_0^\alpha(t,x) = \text{Ré}\frac{4}{(2\pi)\dfrac{n+2}{2}} \frac{1}{|x|^n} \int_0^\infty v^{n/2} e^{i(\pi/4)(n/2-1)} e^{-t(v^{2\alpha}/|x|^{2\alpha})} e^{-i(\alpha\pi/2)} K_{n/2-1}(ve^{i(\pi/4)})\,\mathrm{d}v$$

ce qui permet d'écrire:

$$\phi_\alpha(a) = \text{Ré}\frac{4}{(2\pi)\dfrac{n+2}{2}} \cdot \frac{1}{|a|^n} \int_0^\infty v^{n/2} e^{i(\pi/4)(n/2-1)} e^{-(v^{2\alpha}/|a|^{2\alpha}) e^{-i(\alpha\pi)/2}} K_{n/2-1}(ve^{i\pi/4})\,\mathrm{d}v$$

On fait le développement de

$$e^{-(v^{2\alpha}/|a|^{2\alpha})e^{i(\alpha\pi/2)}}$$

par rapport à v et on intégre terme à terme nous obtenons

$$\phi_\alpha(a) \simeq \text{Ré}\frac{-4}{(2\pi)\dfrac{n+2}{2}} \frac{1}{|a|^{n+2\alpha}} e^{+i(\pi/4)(n/2-1)-i\alpha(\pi/2)} \int_0^\infty v^{n/2+2\alpha} K_{n/2-1}(ve^{i(\pi/4)})\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{2^{2\alpha}\sin(\alpha\pi)}{\pi^{n+2/2}} \Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{n+2\alpha}{2}\right) \frac{1}{|a|^{n+2\alpha}}.$$

Ce qui démontre (2).

THÉORÈME 4. *Soit* $\alpha \in]0,1[$ $\exists c = c(n,\lambda,\alpha)$ *telle que pour tout* $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ *on ait*:

$$\frac{1}{c} p_0^\alpha(t,x,y) \leqslant p^\alpha(t,x,y) \leqslant c p_0^\alpha(t,x,y) \quad \textit{pour tout } t > 0 \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Nous avons d'après [2], [7], [8]:

$$\frac{1}{c^{1+n/2}}p_0\left(\frac{t}{c}, x, y\right) \leqslant p(t, x, y) \leqslant c^{1+n/2}p_0(ct, \ x, y)$$

ce qui nous donne d'après ce qui précède:

$$\frac{1}{c^{n/2+1-\alpha}}p_0^\alpha\left(\frac{t}{c^\alpha}, x, y\right) \leqslant p^\alpha(t, x, y) \leqslant c^{n/2+1-\alpha}p_0^\alpha(c^\alpha t, x, y).$$

Il suffit alors de montrer que $p_0^\alpha(t/c^\alpha, x, y)$ et $p_0^\alpha(c^\alpha t, x, y)$ sont comparables ce qui revient à montrer que $\phi_\alpha(c^\alpha a)$ et $\phi_\alpha(a/c^\alpha)$ sont comparables. Or d'après le Lemme 3 nous avons:

$$\phi_\alpha\left(\frac{a}{c^\alpha}\right) \simeq \phi_\alpha(c^\alpha a) \simeq \frac{v_n}{2\alpha}\Gamma\left(\frac{n}{2\alpha}\right)$$

quand $|a|$ tend vers 0

$$\phi_\alpha\left(\frac{a}{c^\alpha}\right) \simeq k\frac{c^{\alpha(n+2\alpha)}}{|a|^{n+2\alpha}}, \phi_\alpha(c^\alpha a) \simeq \frac{k}{c^{\alpha(n+2\alpha)}}\frac{1}{|a|^{n+2\alpha}} \quad \text{avec } k > 0$$

quand $|a|$ tend vers $+\infty$, il s'en suit qu'il existe $c = c(n, \alpha, c)$ telle que

$$c^{-1}p_0^\alpha(t, x, y) \leqslant p_0^\alpha(c^\alpha t, x, y) \leqslant cp_0^\alpha(t, x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

ce qui démontre le Théorème 4.

LEMME 4. *Soit* $\alpha \in]0, 1[$, *il existe* $c = c(n, \lambda, \alpha)$ *telle que pour tout* $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$ *la densité* p^α *du semi-groupe d'ordre* α *associé à* $(-L)^\alpha$ *vérifie*:

$$p^\alpha(s, x, z)p^\alpha(t-s, z, y) \leqslant cp^\alpha(t, x, y)[p^\alpha(s, x, y) + p^\alpha(t-s, z, y)]$$

pour tout $0 < s < t$ *et* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. D'après le Théorème 4 précédent, il suffit de démontrer le résultat pour $L = \Delta$. Pour des raisons de symétrie, il suffiit de démontrer le résultat pour $0 < s \leqslant t/2$.

En utilisant la propriété $p_0^\alpha(t, x) = 1/t^{n/2\alpha}\phi_\alpha(x/t^{1/2\alpha})$, il suffit de démonstrer qu'il existe $c > 0$ telle que:

$$\frac{\left(\frac{1}{s(t-s)}\right)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{x-z}{s^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{z-y}{(t-s)^{1/2\alpha}}\right)}{\frac{1}{s^{n/2\alpha}}\phi_\alpha\left(\frac{x-z}{s^{1/2\alpha}}\right) + \frac{1}{(t-s)^{n/2\alpha}}\phi_\alpha\left(\frac{z-y}{(t-s)^{1/2\alpha}}\right)} \leqslant c\cdot\frac{1}{t^{n/2\alpha}}\phi_\alpha\left(\frac{x-y}{t^{1/2\alpha}}\right)$$

pour tout $0 < s < t$ et $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Quitte à prendre $x/t, y/t, z/t$ au lieu de x, y, z et en posant $\theta = s/t$ il suffit de démontrer:

$$\frac{\phi_\alpha\left(\frac{x-z}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{z-y}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{x-z}{\theta^{1/2\alpha}}\right)+\theta^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{z-y}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)} \leqslant c\phi_\alpha(x-y)$$

pour tout $0 < \theta < 1/2$ et $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

On pose $u = x - y$, $v = x - z$ on a alors $z - y = u - v$ il suffit de démontrer:

$$\frac{\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)+\theta^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)} \leqslant c\phi_\alpha(u)$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$, $0 < \theta < 1/2$.

(1) Si $|u| \geqslant 1$ deux cas se présentent:

(a) $|v| \geqslant 1/2|u|$, il existe d'après [14] une constante c telle que $1/c \cdot 1/|a|^{n+2\alpha} \leqslant \phi_\alpha(a) \leqslant c \cdot 1/|a|^{n+2\alpha}$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| \geqslant \frac{1}{2}$. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)+\theta^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)} &\leqslant \frac{\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{\theta^{n/2\alpha}\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)} = \frac{\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)}{\theta^{n/2\alpha}} \\
&\leqslant c\left(\frac{1}{|v|}\right)^{n+2\alpha}\frac{\theta^{n/2\alpha+1}}{\theta^{n/2\alpha}} \leqslant c\theta\left(\frac{1}{|v|}\right)^{n+2\alpha} \\
&\leqslant 2^{n+2\alpha-1}c\left(\frac{1}{|u|}\right)^{n+2\alpha} \leqslant 2^{n+2\alpha-1}c^2 \cdot \phi_\alpha(u).
\end{aligned}$$

(b) Si $|u - v| \geqslant 1/2|u|$ nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)+\theta^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)} &\leqslant \frac{\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}} \leqslant 2^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\frac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right) \\
&\leqslant 2^{n/2\alpha}\phi_\alpha(u/2(1-\theta)^{1/2\alpha}) \\
&\leqslant 2^{n/2\alpha}\phi_\alpha(2^{1/2\alpha-1}u) \leqslant 2^{n/2\alpha}c \cdot \phi_\alpha(u)
\end{aligned}$$

car ϕ_α est radiale décroissante et il existe $c > 0$ telle que $\phi_\alpha(2^{1/2\alpha-1}u) \leqslant c\phi_\alpha(u)$.

(2) Si $|u| \leqslant 1$, comme ϕ_α est continue strictement positive et d'après le Lemme 3: $\lim_{a \to 0} \phi_\alpha(a) = (v_n/2\alpha)\Gamma(n/2\alpha)$, il suffit de démontrer que l'expression:

$$\frac{\phi_\alpha\left(\dfrac{v}{\theta^{1/2\alpha}}\right)\phi_\alpha\left(\dfrac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\dfrac{v}{\theta^{n/2\alpha}}\right)+\theta^{n/2\alpha}\phi_\alpha\left(\dfrac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}$$

est majorée par une constante.

Or cette expression est trivialement majorée par:

$$\frac{\phi_\alpha\left(\dfrac{u-v}{(1-\theta)^{1/2\alpha}}\right)}{(1-\theta)^{n/2\alpha}}\leqslant 2^{n/2\alpha}\phi_\alpha(0)\leqslant c\phi_\alpha(u).$$

REMARQUE 2. Pour $\alpha = 1/2$ le résultat est trivial d'après [12].

THÉORÈME 5. *Soient $\alpha\in]0,1[$, $L\in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\lambda)$ et μ une mesure $(-L)^\alpha$ régulière exacte. Alors le semi-groupe $\mathbb{P}^\alpha$ et son perturbé par μ, ${}^\mu\mathbb{P}^\alpha$ sont comparables si et seulement si $G^\alpha\mu$ est borné.*

Démonstration. D'après [13], les semi-groupes $\mathbb{P}^\alpha$ et ${}^\mu\mathbb{P}^\alpha$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} p^\alpha(s,x,z)p^\alpha(t-s,z,y)\,\mathrm{d}\mu(z)\,\mathrm{d}s\leqslant \tilde{c}\cdot p^\alpha(t,x,y)\quad \text{pour tout } t>0,\ x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Supposons que $G^\alpha\mu$ est borné, nous aurons d'après le Lemme 4:

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} p^\alpha(s,x,z)p^\alpha(t-s,z,y)\,\mathrm{d}\mu(z)\,\mathrm{d}s &\leqslant cp^\alpha(t,x,y)\\ &\quad\cdot\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} p^\alpha(s,x,z)+p^\alpha(t-s,y,z)\right]\mathrm{d}\mu(z)\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2c\|G^\alpha\mu\|p^\alpha(t,x,y)\end{aligned}$$

il suffit alors de prendre $\tilde{c} = 2c\|G^\alpha\mu\|$.

La condition $G^\alpha\mu$ borné est nécessaire d'après [13] car 1 est $\mathbb{P}^\alpha$ excessive.

Nous introduisons maintenant Γ^α la fonction de Green de l'opérateur $(-L)^\alpha + \partial/\partial t$ sur $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$ où L appartient à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\lambda)$ et $0<\alpha<1$. Γ^α est donnée par $\Gamma^\alpha(t,x,s,y) = 1_{]-\infty,t[}(s)p^\alpha(t-s,x,y)$ où p^α est la densité du semi-groupe associé à $(-L)^\alpha$ sur $\mathbb{R}^n$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $s,t\in\mathbb{R}$.

Pour μ une mesure de Radon $(-L)^\alpha + \partial/\partial t$ régulière exacte nous notons par ${}^\mu\Gamma^\alpha$ la fonction de Green associée à $(-L)^\alpha + \partial/\partial t + \mu$ sur $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}$.

Nous avons alors le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Soient* $L \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \lambda)$, $0 < \alpha < 1$ *et* μ *une mesure* $(-L)^\alpha + \partial/\partial t$ *régulière exacte. Alors les fonctions de Green* Γ^α *et* ${}^\mu\Gamma^\alpha$ *sont comparables si et seulement si* $\Gamma^\alpha\mu = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma^\alpha \,d\mu$ *est borné.*

Démonstration. La condition est nécessaire d'après [13] car 1 est $(-L)^\alpha + \partial/\partial t$ excessive.

La condition est suffisante: En effet d'après [13], [16] les fonctions de Green Γ^α et ${}^\mu\Gamma^\alpha$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma^\alpha(t,x,r,z)\Gamma^\alpha(r,z,s,y)\,d\mu(r,z) \leqslant k\Gamma^\alpha(t,x,s,y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t, s \in \mathbb{R}$.

En fait il suffit de considérer le cas $s < t$ vu que la propriété est triviale pour $s \geqslant t$.

Or nous avons pour $s < t$:

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha(t,x,r,z)\Gamma^\alpha(r,z,s,y) &= 1_{]-\infty,t[}(r)P^\alpha(t-r,x,z)\cdot 1_{]-\infty,r[}(s)P^\alpha(r-s,z,y)\\ &= 1_{]s,t[}(r)P^\alpha(t-r,x,z)P^\alpha(r-s,z,y).\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4 nous obtenons:

$$\begin{aligned}1_{]s,t[}(r)P^\alpha(t-r,x,z)P^\alpha(r-s,z,y) &\leqslant c1_{]s,t[}(r)P^\alpha(t-s,x,y)[P^\alpha(t-r,x,z) + P^\alpha(r-s,z,y)]\\ &\leqslant c1_{]-\infty,t[}(s)P^\alpha(t-s,x,y)[1_{]-\infty,t[}(r)P^\alpha(t-r,x,z)\\ &\qquad + 1_{]-\infty,r[}(s)P^\alpha(r-s,z,y)]\\ &= c\Gamma^\alpha(t,x,s,y)[\Gamma^\alpha(t,x,r,z) + \Gamma^\alpha(r,z,s,y)].\end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\Gamma^\alpha(t,x,r,z)\Gamma^\alpha(r,z,s,y) \leqslant c\cdot\Gamma^\alpha(t,x,s,y)[\Gamma^\alpha(t,x,r,z) + \Gamma^\alpha(r,z,s,y)].$$

En intégrant cette inégalité par rapport à μ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ nous obtenons que:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma^\alpha(t,x,r,z)\Gamma^\alpha(r,z,s,y)\,d\mu(r,z)\\ &\qquad\leqslant c\Gamma^\alpha(t,x,s,y)\int_{\mathbb{R}^{n+1}} [\Gamma^\alpha(t,x,r,z) + \Gamma^\alpha(r,z,s,y)]\,d\mu(r,z)\end{aligned}$$

par suite si $\Gamma^\alpha\mu = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma^\alpha\,d\mu$ est borné nous prendrons $k = 2c\cdot\|\Gamma^\alpha\mu\|$. Ce qui démontre le Théorème 6.

Nous allons maintenant nous interesser au cas $\alpha = 1$ pour étudier la comparaison du semi-groupe du mouvement brownien avec son perturbé par une mesure de Radon Δ régulière exacte sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbb{P}_0$ et ${}^\mu\mathbb{P}_0$ soient comparables sur $\mathbb{R}^n$.

LEMME 5. *Soit μ une mesure régulière V_0 exacte. Alors les semi-groupes $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\mu}\mathbb{P}_0$ sont comparables sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$) si et seulement s'il existe $c > 0$ telle que*:

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t} \, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}t \leqslant c \quad \textit{pour tout } u, x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Nous avons d'après [12] que $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\mu}\mathbb{P}_0$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $k > 0$ telle que:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{t}{4\pi s(t-s)}\right)^{n/2} e^{-(t/4s(t-s))|z-(s/t)y-(1-(s/t))x|^2} \, \mathrm{d}\mu(z)\, \mathrm{d}s \leqslant k$$

pour tout $t > 0$ tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ceci est équivalent à dire que:

$$\int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-1/4s|z-(s/t)y-(1-(s/t))x|^2} \, \mathrm{d}\mu(z)\, \mathrm{d}z + \int_{t/2}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-1/4(t-s)|z-(s/t)x-(1-(s/t))y|^2} \, \mathrm{d}\mu(z)\, \mathrm{d}s \leqslant \frac{k}{2^{n/2}}$$

pour tout $t > 0$ tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ceci est encore équivalent à dire que:

$$\int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-1/4s|z-(s/t)y-(1-(s/t))x|^2} \, \mathrm{d}\mu(z)\, \mathrm{d}s$$

est bornée.

En posant $u = (y-x)/2t$, nous obtenons que les semi-groupes $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\mu}\mathbb{P}_0$ sont comparables s'il existe $c > 0$ telle que

$$\int_0^{t/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-|y-2su-x|^2/4s} \, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}s \leqslant c$$

pour tout $x, u \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Ce qui se traduit par:

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t} \, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}t \leqslant c$$

pour $u, x \in \mathbb{R}^n$. Ce qui démontre le Lemme 5.

Pour $u \in \mathbb{R}^n$ nous définissons pour tout $t > 0$ l'opérateur Q_t^u sur $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n)$ par:

$$Q_t^u f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y-2tu-x|^2/4t} f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$Q_0^u = \mathrm{Id}.$$

LEMME 6. *Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, $(Q^u)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de Feller markovien sur $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n)$ dont le générateur infinitésimal est $A = \Delta + 2\langle u, grad\rangle$.*

Démonstration. Nous avons:

$$Q_t^u 1(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/4t}\,\mathrm{d}y = 1$$

Soit $f \in \mathscr{C}_k(\mathbb{R}^n)$ nous avons:

$$\begin{aligned} Q_t^u f(x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y-2tu-x|^2/4t} f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y-x|^2/4t - t|u|^2} (e^{\langle u, y-x\rangle} f(y))\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

On pose

$$q_u(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-t|u|^2} e^{-|x-y|^2/4t + \langle u, y-x\rangle} = q_u(t, x-y, 0) = q_u(t, x-y).$$

C'est une fonction radiale et $Q_t^u f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} q_u(t,x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$.

Q_t^u est alors un noyau à densité $q_u(t, x, \cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $x\,\mathbb{R}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned} q_u(t,\cdot)*q_u(s,\cdot)(x) &= \frac{e^{-(t+s)|u|^2}}{(4\pi t)^{n/2}(4\pi s)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t + \langle u, x-y\rangle - |y|^2/4s + \langle u, y\rangle}\,\mathrm{d}y \\ &= e^{-(t+s)|u|^2} e^{\langle u, x\rangle} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t - |y|^2/4s}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(4\pi(t+s))^{n/2}} e^{-(t+s)|u|^2} e^{-|x|^2/4(t+s) + \langle u, x\rangle} \\ &= q_u(t+s, x) \end{aligned}$$

d'après la propriété du semi-groupe du mouvement Brownien sur $\mathbb{R}^n$. Ce qui démontre que $Q_t^u(Q_t^u f) = Q_{t+s}^u(f)$ pour tout f mesurable bornée. Comme le semi-groupe du mouvement brownien est propre, Q^u est donc propre et $\overline{Q_t^u(\mathscr{C}_k(\mathbb{R}^n))} = \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ vu que le semi-groupe du mouvement Brownien vérifie la même propriété. On note W^u le noyau du semi-groupe $(Q_t^u)_{t\geqslant 0}$. Nous avons pour $f\in\mathscr{C}_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
W^u f(x) &= \int_0^{\mathrm{M}} Q_t^u(f)(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{M}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|y-2tu-x|^2/4t}f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\mathrm{M}}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|y-2tu-x|^2/4t}f(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\mathrm{M}}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|y-x|^2/4t-t|u|^2+\langle u,y-x\rangle}f(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\\
&= V_{|u|^2}(e^{\langle u,\cdot-x\rangle}\cdot f)
\end{aligned}$$

où $V_{|u|^2}$ est le noyau d'indice $|u|^2$ de la résolvante du semi-groupe du mouvement Brownian sur $\mathbb{R}^n$.

Nous allons déterminer le générateur infinitésimal du semi-groupe $(Q_t^u)_{t\geqslant 0}$. Pour ce faire nous remarquons que $(Q_t^u)_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de convolution associé au semi-groupe de mesures:

$$\mu_t = p_t^* \delta_{-2tu}$$

(où p_t est le semi-groupe de mesures de générateur $\Delta\delta$).

On en déduit immédiatement que μ_t admet pour générateur

$$\Delta\delta + 2\langle u, \operatorname{grad}\delta\rangle,$$

ce qui démontre que Q_t^u admet pour générateur $\Delta f + 2\langle u, \operatorname{grad} f\rangle$.

DÉFINITION 4. Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n$. On dit que μ est radiale si $\int_{\mathbb{R}^n} f\circ R\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu$ pour tout $R\in SO(n)$.

LEMME 7. *Pour $n\geqslant 3$, il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $u\in\mathbb{R}^n$ et toute fonction ϕ sur $\mathbb{R}^n$ mesurable, positive, radiale et vérifiant $V_0(\phi)$ borné on ait*:

$$W^u\phi(0)\leqslant cV_0(\phi)(0).$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que $W^u\phi(0)\leqslant cp(0)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^n$ sous l'hypothèse que $p=V_0(\phi)$ est borné.

Nous avons:

$$\begin{aligned}
W^u\phi(0) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu|^2/4t} \phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu|^2/4t} \phi(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \quad \text{d'après le théorème de Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/4t - t|u|^2} e^{(u,y)} \phi(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u|}{|y|}\right)^{n/2-1} K_{(n/2)-1}(|u|\cdot|y|) e^{(u,y)} \phi(y)\,\mathrm{d}y = V_{|u|^2}(\phi e^{(u,.)})(0)
\end{aligned}$$

$K_{(n/2)-1}$ est la fonction de Macdonald.

Quitte à faire une rotation, nous pouvons supposer que u est porté par le dernier vecteur e_n de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ car nous avons

$$W^{Ru}\phi(0) = W^u\phi(0) \quad \text{pour tout } R \in SO(n).$$

On utilise alors le changement de variables en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$ données par:

$$\begin{aligned}
y_n &= r\cos\theta_1 \\
y_{n-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
y_{n-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
&\vdots \\
y_k &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k \\
&\vdots \\
y_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
y_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

avec $0 < r < \infty$, $0 < \theta i < \pi$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$ et $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$. La jacobien est donné par:

$$r^{n-1}\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\ldots\sin^{n-1-k}\theta_k\ldots\sin\theta_{n-2}.$$

Pour les nouvelles coordonnées nous aurons:

(1) $$(u,y) = |u|\cdot|y|\cos\theta_1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^n.$$

(2) $$p(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(y)}{|y|^{n-2}}\,\mathrm{d}y = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty r\phi(r)\,\mathrm{d}r = M$$

(2) est encore équivalent à

$$(2') \qquad \frac{2\cdot\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \lambda^2 r\phi(\lambda r)\,\mathrm{d}r = M \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

(3)

$$\begin{aligned}
W^u\phi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\infty}\left(\frac{|u|}{r}\right)^{n/2-1} K_{(n/2)-1}(|u|r)e^{|u|r\cos\theta_1}\\
&\quad\cdot\phi(r)r^{n-1}\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\ldots\mathrm{d}\theta_{n-1}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\sin\theta_2^{n-3}\sin\theta_3^{n-4}\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_3\ldots\mathrm{d}\theta_{n-1}\right)\\
&\quad\cdot\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{|u|}{r}\right)^{(n/2)-1}K_{(n/2)-1}(|u|r)e^{|u|r\cos\theta_1}\sin\theta_1^{n-2}r^{n-1}\phi(r)\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{r\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{|u|}{r}\right)^{(n/2)-1}\\
&\quad\cdot K_{(n/2)-1}(|u|r)e^{|u|r\cos\theta_1}r^{n-1}\phi(r)\sin\theta_1^{n-2}\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

si $u = 0$ nous aurons $W^0\phi(0) = V_0(\phi)(0) = p(0)$.

Si $u \neq 0$, on fait le changement de variable $\rho = |u|\cdot r$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned}
W^u\phi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}K_{(n/2)-1}(\rho)\left(\frac{|u|^2}{\rho}\right)^{(n-2)/2}\left(\frac{\rho}{|u|}\right)^{n-1}e^{\rho\cos\theta_1}\sin^{n-2}\theta_1\cdot\\
&\quad\cdot\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\mathrm{d}\theta_1\frac{\mathrm{d}\rho}{|u|}\\
&= \frac{2}{(2\pi)^{n/2}}\frac{2\cdot\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}K_{(n/2)-1}(\rho)\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{\rho^{n/2}}{|u|^2}e^{\rho\cos\theta_1}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}e^{\rho}K_{(n/2)-1}(\rho)\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{\rho^{n/2}}{|u|^2}e^{-\rho(1-\cos\theta_1)}\sin^{n-2}\\
&\quad\cdot\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\rho\int_0^{1}\int_0^{\pi}e^{\rho}K_{(n/2)-1}(\rho)\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{\rho^{n/2}}{|u|^2}e^{-\rho(1-\cos\theta_1)}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\rho\\
&\quad+\int_1^{\infty}\int_0^{\pi}e^{\rho}K_{(n/2)-1}(\rho)\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{\rho^{n/2}}{|u|^2}e^{-\rho(1-\cos\theta_1)}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\rho = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pour $0 < \rho < 1$ nous avons d'après [15], [16] $K_{(n/2)-1}(\rho) \leqslant \frac{1}{2}\Gamma((n/2)-1)(\rho/2)^{1-n/2}$. Ce qui donne que:

$$I_1 \leqslant e\left(\frac{1}{2}\right)^{2-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\int_0^1\int_0^\pi \rho\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{1}{|u|^2}\,\mathrm{d}\rho \leqslant e\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)p(0).$$

D'autre part nous avons:

$$\int_0^\pi e^{-\rho(1-\cos\theta_1)}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^\pi e^{-\rho\sin^2(\theta_1/2)/2}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1.$$

On fait le changement de variable $\theta = \theta_1/2$ et utilise $(2/\pi)\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ce qui nous donne:

$$\int_0^\pi e^{-\rho\sin^2(\theta_1/2)/2}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 = 2\int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin^2\theta/2}\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2^{n-1}\int_0^{\pi/2} e^{(-2/\pi 2)\rho\theta^2}\theta^{n-2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant (2\pi^2)^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{1}{\rho^{(n-1)/2}}.$$

Par suite nous avons:

$$I_2 \leqslant (2\pi^2)^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\int_1^\infty e^\rho K_{(n/2)-1}(\rho)\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{\rho}{|u|^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Or nous savons d'après [15], [16] que $e^\rho K_{(n/2)-1}(\rho) \leqslant (\pi/2\rho)^{1/2}$.

Ce qui nous donne en utilisant (2′):

$$I_2 \leqslant (2\pi^2)^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{2}\int_1^\infty \rho^{1/2}\phi\left(\frac{\rho}{|u|}\right)\frac{1}{|u|^2}\,\mathrm{d}\rho \leqslant (2\pi^2)^{(n-1)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)p(0).$$

Ce qui démontre que:

$$W^u\phi(0) \leqslant (2\pi^2)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)p(0).$$

Ainsi nous obtenons:

$$W^u\phi(0) \leqslant (2\pi^2)^{n/2}\Gamma(n/2-1)p(0)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ il en résulte que

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|y-2tu|^2/4t}\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}t \leqslant (2\pi^2)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)p(0).$$

Il suffit de prendre $c = (2\pi^2)^{n/2}\Gamma(n/2 - 1)$.

Ce qui démontre le Lemme 7.

THÉORÈME 7. *Soit μ une mesure de Radon positive V_0 régulière exacte et radiale alors $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\mu}\mathbb{P}_0$ sont comparables si et seulement si $G_0\mu$ est borné.*

Démonstration. D'après le Lemme 5 les semi-groupes $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\phi}\mathbb{P}_0$ sont comparables si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que: $W^u\phi \leqslant c$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$. C'est-à-dire encore

$$W^u\phi(x) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t}\phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \leqslant c$$

pour tout $x, u \in \mathbb{R}^n$.

Il est facile à montrer que $W^u\phi(x)$ est toujours finie, et d'après le Lemme 7 il suffit de considérer $x \neq 0$.

Pour $n = 3$ c'est déjà fait dans [12].

Pour $n \geqslant 4$, soit μ une mesure régulière exacte et radiale sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G_0\mu$ soit borné sur $\mathbb{R}^n$, il existe une suite de fonctions $(\phi_m)_m$ positives et radiales sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G_0\mu = \sup_m V_0(\phi_m)$ où V_0 est le noyau de Newton associé à Δ sur $\mathbb{R}^n$. $V_0(\phi_m)$ est donc bornée, ϕ_m est régulière V_0 exacte et radiale. Il suffit alors de démontrer que $\mathbb{P}_0$ et ${}^{\phi}\mathbb{P}_0$ sont comparables pour ϕ une fonction régulière V_0 exacte radiale et $V_0(\phi)$ bornée par $\sup_{\mathbb{R}^n} G_0\mu$. Plus précisément nous allons démonstrer qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons $W^u\phi(x) \leqslant cV_0(\phi)(0)$ pour tout ϕ radiale vérifiant: $V_0(\phi) \leqslant G_0\mu$. Posons $p = V_0(\phi)$, nous avons: $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) = p(0)$. Si $u = 0$ nous avons $W^0(\phi)(x) = V_0(\phi)(x) \leqslant V_0(\phi)(0) = p(0)$.

Si $u \neq 0$ nous avons:

$$\begin{aligned}
W^u\phi(x) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t}\phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2tu-x|^2/4t}\phi(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-x|^2/4t-|u|^2t+(u,y-x)}\phi(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u|}{|y-x|}\right)^{(n/2)-1} K_{(n/2)-1}(|u|\cdot|y-x|)e^{(u,y-x)}\phi(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Comme ϕ est invariante par rotation, on peut supposer que: $x = |x|e_n$, $u = u_1e_n + u_2e_{n-1}$. En fait on choisit e_n porté par x puis on considère le vecteur e_{n-1} de façon que (e_{n-1}, e_n) soit un repère orthonormée direct dans le plan défini par les deux vecteurs x et u, puis on complète pour avoir une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^n$. Si (x, u) est lié, on fait de la même manière, on complète e_n pour avoir une base de $\mathbb{R}^n$. On utilise alors le changement de variables en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \text{ avec } y_n &= r\cos\theta_1 \\
y_{n-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
y_{n-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\
&\vdots \\
y_k &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-k}\cos\theta_{n-k+1} \\
&\vdots \\
y_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
y_1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Nous aurons alors:

$$
\begin{aligned}
|y-x|^2 &= r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1 \\
(u, y-x) &= u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + u_2 r\sin\theta_1\cos\theta_2
\end{aligned}
$$

le Jacobien est donée par $r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}$.

L'intégrale devient alors:

$$
\begin{aligned}
W^u\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\infty}&\left(\frac{|u|}{(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\right)^{(n/2)-1} \\
&\cdot K_{(n/2)-1}(|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}) \times \mathrm{e}^{u_1(r\cos\theta_1-|x|)+u_2 r\sin\theta_1\cos\theta_2} \\
&\cdot \phi(r)r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

On écrit maintenant l'intégrale en deux morceaux:

$\mathbf{I}_1$: sur la partie de l'espace $\mathbb{R}^n$ pour laquelle

$$|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} \leqslant 1.$$

Nous avons alors d'après [15] et [16]:

$$
\begin{aligned}
K_{(n/2)-1}(|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}) \leqslant \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)&e^{-|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} \\
&\times\left(\frac{|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}{2}\right)^{1-(n/2)}
\end{aligned}
$$

ce qui nous permet de controler l'intégrale I_1

$$
\begin{aligned}
I_1 \leqslant 2^{(n/2)-2}\frac{\Gamma(n/2-1)}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\infty}&(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1-(n/2)}\phi(r)r^{n-1}\sin\theta_1^{n-2} \\
&\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Or nous avons $r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1 \geqslant r^2\sin^2\theta_1$ ce qui donne que:

$$I_1 \leqslant 2^{(n/2)-2}\frac{\Gamma(n/2-1)}{(2\pi)^{(n/2)-1}}\cdot b_{n-2}\cdot\pi\cdot\int_0^\infty r\phi(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{n}\int_0^\infty r\phi(r)\,\mathrm{d}r = c_1 p(0)$$

où b_{n-2} = volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{n-2}$,

$$b_{n-2} = \frac{\pi^{(n/2)-1}}{\Gamma(n/2)}.$$

$$c_1 = \frac{\Gamma(n/2)}{2n\cdot\pi^{(n/2)-1}}.$$

I_2: sur la partie de l'espace $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $|u|(r2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} \geqslant 1$. Nous avons alors d'après [15] et [16]:

$$\begin{aligned} &K_{(n/2)-1}(|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}) \\ &\qquad\leqslant \left(\frac{\pi}{2|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\right)^{1/2} e^{-|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que:

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \frac{1}{2(2\pi)^{(n/2)-1}}\int\cdots\int |u|^{(n-3)/2}\left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)^{(n-1)/4} e^{-|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} \\ &\quad\times e^{u_1(r\cos\theta_1-|x|)+u_2 r\sin\theta_1\cos\theta_2} \\ &\quad\times \phi(r)r^{n-1}\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-1} \\ &\leqslant \frac{1}{2\cdot(2\pi)^{(n/2)-1}}b_{n-2}|u|^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)^{(n-1)/4} \\ &\quad\cdot e^{-|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}+u_1(r\cos\theta_1-|x|)+u_2 r\sin\theta_1\cos\theta_2} \\ &\quad\cdot\phi(r)r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\ldots\mathrm{d}\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-1}. \end{aligned}$$

Deux cas se présentent

(i) $|u_2| \geqslant |u_1|$, nous avons:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{|u_2 r\sin\theta_1\cos\theta_2|}\sin_2^{n-3}\mathrm{d}\theta_2 &= \int_0^{\pi/2} e^{|u_2|r\sin\theta_1\cos\theta_2}\sin^{n-3}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_2 \\ &\quad+\int_{\pi/2}^\pi e^{-|u_2|r\sin\theta_1\cos\theta_2}\sin\theta_2^{n-3}\,\mathrm{d}\theta_2 \\ &= 2\int_0^{\pi/2} e^{|u_2|r\sin\theta_1\cos\theta_2}\sin\theta_2^{n-3}\,\mathrm{d}\theta_2. \end{aligned}$$

Ce qui entraine:

$$
\begin{aligned}
& e^{-|u_2| r \sin\theta_1} \int_0^{\pi} e^{u_2 r \sin\theta \cos\theta_2} \sin\theta_2^{n-3}\, d\theta_2 \\
& \leqslant 2 e^{-|u_2| r \sin\theta_1} \int_0^{\pi/2} e^{|u_2| r \sin\theta_1 \cos\theta_2} \sin\theta_2^{n-3}\, d\theta_2 \\
& = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2|u_2| r \sin\theta_1 \sin^2(\theta_2/2)} \sin\theta_2^{n-3}\, d\theta_2 \leqslant 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2|u_2| r \sin\theta_1 \cdot (\theta_2/\pi^2)} \theta_2^{n-4}\, d\theta_2 \\
& \leqslant \left(\frac{\pi^2}{2|u_2| r \sin\theta_1} \right)^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right)
\end{aligned}
$$

puisque: $\theta_2/\pi \leqslant \sin\theta_2/2 \leqslant \min(1, \theta_2/2)$.

Nous obtenons alors:

$$
\int_0^{\pi} e^{u_1 r \sin\theta_1 \cos\theta_2} \sin\theta_2^{n-3}\, d\theta_2 \leqslant \left(\frac{\pi^2}{2|u_2| r \sin\theta_1} \right)^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right) e^{|u_2| r \sin\theta_1}
$$

et comme $r^2 + |x|^2 - 2r|x| \cos\theta_1 \geqslant r^2 \sin^2\theta_1$ et $|u| \leqslant \sqrt{2}|u_2|$ nous avons:

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant & \frac{b_{n-2}}{2(2\pi)^{(n/2)-1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right) (\sqrt{2}|u_2|)^{(n-3)/2} \left(\frac{\pi^2}{2|u_2| r \sin\theta_1} \right)^{(n-3)/2} \left(\frac{1}{r \sin\theta_1} \right)^{(n-1)/2} \\
& \cdot \sin\theta_1^{n-2} \times e^{-|u|(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} + u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + |u_2| r \sin\theta_1} \times r^{n-1} \phi(r) \sin\theta_1^{n-2}\, d\theta_1\, dr \\
= & \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} b_{n-2} 2^{(n-3)/2} \cdot 2^{(3-n)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right) \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} r\phi(r) e^{-|u|(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} \\
& e^{u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + |u_2|) + |u_2| r \sin\theta_1}\, d\theta_1\, dr
\end{aligned}
$$

or

$$
-|u|(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} + u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + |u_2| r \sin\theta_1 \leqslant 0
$$

ce qui prouve que:

$$
I_2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{(n/2)-1}} b_{n-2} 2^{(3-n)/4} \Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right) \int_0^{\infty} r\phi(r)\, dr \leqslant c_2 p(0) \quad \text{avec} \quad c_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2} \right)}{(2\pi)^{(n/2)-1}}.
$$

(ii) $|u_1| \geqslant |u_2|$ nous avons en utilisant la quantité conjuguée:

$$
\begin{aligned}
& |u|(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} - u_1(r\cos\theta_1 - |x|) - u_2 r \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
& \qquad = \frac{|u|^2(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1) - [(u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + u_2 r \sin\theta_1 \cos\theta_2)^2}{|u|(r^2 + |x|^2 - 2r|x|\cos\theta_1)^{1/2} + u_1(r\cos\theta_1 - |x|) + u_2 r \sin\theta_1 \cos\theta_2}.
\end{aligned}
$$

On minore le numérateur par $u_1^2 r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2$, nous obtenons alors que l'expression est minoré par:

$$\geqslant \frac{u_1^2 r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}{|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}+u_1(r\cos\theta_1-|x|)+|u_2|r\sin\theta_1}$$

en utilisant:

$$u_1(r\cos\theta_1-|x|)+|u_2|r\sin\theta_1 \leqslant 1/2|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}$$

nous obtenons que l'expression est minorée par:

$$\begin{aligned}&\geqslant \frac{u_1^2 r^2 \sin^2\theta_1 \cdot \sin^2\theta_2}{3|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} \geqslant \frac{1/2|u|^2 r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}{3|u|(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\\ &= \frac{|u| r^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2}{6(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'avoir:

$$\begin{aligned}I_2 &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} b_{n-2}|u|^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)\frac{n-1}{4}\\ &\quad\times e^{-|u|r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2/6(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} r^{n-1}\phi(r)\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r\\ &= 2\cdot\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} b_{n-2}\cdot|u|^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)^{(n-1)/4}\\ &\quad\times e^{-|u|r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2/6(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} r^{n-1}\phi(r)\sin\theta_1^{n-2}\sin\theta_2^{n-3}\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

On utilise maintenant que $(2/\pi)\theta_2 \leqslant \sin\theta_2 \leqslant \theta_2$ nous obtenons que l'intégrale I_2 est majorée par:

$$\begin{aligned}&\leqslant 2\cdot\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} b_{n-2}\cdot|u|^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)^{(n-1)/4}\\ &\quad\cdot e^{-|u|(4/\pi^2)\sin\theta_1^2\,\theta_2^2 r^2/6(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\times r^{n-1}\phi(r)\sin\theta_1^{n-2}\theta_2^{n-4}\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons en intégrant par rapport à θ_2:

$$\begin{aligned}I_2 &\leqslant \frac{2}{2(2\pi)^{n/2}} b_{n-2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)|u|^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\left(\frac{1}{r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1}\right)^{(n-1)/4}\\ &\quad\cdot\left[\frac{3\pi^2}{2}\,\frac{(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}{|u|r^2\sin^2\theta_1}\right]^{(n-3)/2}\times r^{n-1}\phi(r)\sin\theta_1^{n-2}\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} b_{n-2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{(n-3)/2}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{\sin\theta_1}{(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}} r^2\phi(r)\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

Mais nous avons:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta_1}{(r^2+|x|^2-2r|x|\cos\theta_1)^{1/2}}\,d\theta_1 = \frac{1}{|x|\cdot r}[(r^2+|x|^2-2|x|r\cos\theta_1)^{1/2}]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{|x|\cdot r}[|x|+r-||x|-r|].$$

Or nous avons

$$\frac{1}{|x|}(|x|+r-||x|-r|)\leqslant 2.$$

En effet deux cas se présentent:

– si $r\leqslant |x|$ nous avons $r+|x|-|r-|x||=r+|x|-|x|+r=2r$

Ce qui donne que $(|x|+r-||x|-r|)/|x|\leqslant 2$.

– si $r\geqslant |x|$ nous avons $r+|x|-|r-|x||=2|x|$

ce qui donne $(|x|+r-||x|-r|)/|x|=2$.

Il en résulte que:

$$I_2\leqslant \frac{4}{(2\pi)^{n/2-1}}b_{n-2}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{(n-3)/2}\int_0^\infty r\phi(r)\,dr = c_3p(0)$$

avec $c_3=\theta\pi\Gamma(n-3/2)\Gamma(n/2)$.

Ce qui prouve que $W^u\phi(x)\leqslant (c_1+c_2+c_3)p(0)$, pour tout $u\in\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Ce qui démontre le Théorème 7.

REMARQUE 3. Pour $n\geqslant 4$ et μ non radiale le Théorème 7 n'est pas vrai. Pour cela nous allons étudier le contre exemple suivant:

CONTRE EXEMPLE dans $\mathbb{R}^n$; $n\geqslant 4$.

Nous fixons $u=e_1$, $e_1=(1,0,\dots,0)$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Nous définissons: $C_k=B(k^2\theta_1,k)\backslash B(k^2e_1,k/2)$ et $\phi_k=\alpha_k\cdot 1_{C_k}$ avec la condition $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_k(y)\,dy=k^{n-2}$.

On pose $\phi=\Sigma_{k=1}^\infty\phi_k$. Soient p_k le potentiel de newton engendré par ϕ_k et p le potentiel engendré par ϕ. On a $p=\Sigma_{k=1}^\infty p_k$.

PROPOSITION 1.

(1) *P est borné sur* $\mathbb{R}^n$: $P\leqslant 2^{n-2}\left(1+2\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{K^{n-2}}\right)$.

(2) $$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2te_1|^2/4t} \phi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes. Nous avons:

(i) $$P_k \leqslant 2^{n-2}.$$

En effet

$$P_k(k^2 e_1) = \int_{C_k} \frac{\phi_k(y)}{|k^2 e_1 - y|^{n-2}} \mathrm{d}y \leqslant \int_{C_k} \frac{\phi_k(y)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^{n-2}} \mathrm{d}y = 2^{n-2}$$

il s'en suit pour des raisons de symétrie que $P_k \leqslant 2^{n-2}$ sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) $$P(m^2 e_1) \leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. En effet nous avons

(a) $$\sum_{k=m+1}^{\infty} P_k(m^2 e_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+m}(m^2 e_1)$$

et $|m^2 e_1 - y| \geqslant \mathrm{d}(m^2 e_1, C_{k+m}) = (m+k)^2 - (k+m) - m^2 = k^2 + (2m-1)k - m \geqslant \frac{1}{2}k(k+m)$ pour tout $y \in C_{k+m}$, $k, m \in \mathbb{N}^*$ ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k+m}(m^2 e_1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+m)^{n-2}}{\left(\dfrac{k(k+m)}{2}\right)^{n-2}} = 2^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}.$$

(b) $$\sum_{k=1}^{m-1} P_k(m^2 e_1) \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{n-2}}{\left(\dfrac{k(m-k)}{2}\right)^{n-2}} = 2^{n-2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(m-k)^{n-2}}.$$

car nous avons

$$|m^2 e_1 - y| \geqslant \mathrm{d}(m^2 e_1, C_k) = m^2 - k^2 - k \geqslant \tfrac{1}{2}k(m-k)$$

pour tout $1 \leqslant k \leqslant m-1$ et tout $y \in C_k$.

Ce qui nous donne:

$$P(m^2 e_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(m^2 e_1) \leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right).$$

(iii) $$P(xe_1) \leqslant 2^{n-1}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En effet nous avons:

(a) Pour $x \leqslant 1$ nous avons: $|xe_1 - y| \geqslant d(xe_1, C_k) = k^2 - k - x \geqslant k^2 - k - 1 \geqslant \frac{1}{2}k^2$ pour tout $k \geqslant 2$ et tout $y \in C_k$. Ceci nous permet d'avoir:

$$P_k(xe_1) = \int \frac{\phi_k(y)}{|xe_1 - y|^{n-2}} \mathrm{d}y \leqslant 2^{n-2} \frac{1}{k^{n-2}}$$

et par suite $p(xe_1) \leqslant 2^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{n-2}$.

(b) Pour $x > 1$, il existe m unique dans $\mathbb{N}^*$ tel que $m^2 \leqslant x < (m+1)^2$; soient $1 \leqslant k \leqslant m-1$ et $y \in C_k$ on a:

$$|xe_1 - y| \geqslant d(xe_1, C_k) = x - k^2 - k \geqslant m^2 - k^2 - k \geqslant \tfrac{1}{2}k(m-k).$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\sum_{k=1}^{m-1} P_k(xe_1) \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} P_k(m^2 e_1) \leqslant 2^{n-2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(m-k)^{n-2}}$$

d'après (ii b).

D'autre part, soient $k \geqslant 2$ et $y \in C_{k+m}$ on a $|xe_1 - y| \geqslant d(xe_1, C_{k+m}) = (k+m)^2 - (k+m) - x \geqslant (k+m)^2 - (k+m) - (m+1)^2 \geqslant \frac{1}{2}k(k+m)$ ce qui permet d'écrire d'après (ii a):

$$\sum_{k=m+2}^{\infty} P_k(xe_1) = \sum_{k=2}^{\infty} P_{k+m}(xe_1) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} P_{k+m}(m^2 e_1) \leqslant 2^{n-2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}$$

il en résulte que:

$$\begin{aligned} P(xe_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(xe_1) = \sum_{k=1}^{m-1} P_k(xe_1) + P_m(xe_1) + P_{m+1}(xe_1) + \sum_{k=m+2}^{\infty} P_k(xe_1) \\ &\leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$P(xe_1) \leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Enfin nous avons

(iv) $$P(X) \leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right) \quad \text{pour tout } X \in \mathbb{R}^n.$$

En effet: soit x la composante de X suivant e_1. Soit X_2 l'orthogonal de e_1 et $X = xe_1 + X_2$. Nous avons:

$$d(X, C_k) = ((x - k^2)^2 + |X_2|^2)^{1/2} - k \geqslant |x - k^2| - k$$

(a) si $x \leqslant 1$ on aura:

$$d(X, C_k) \geqslant |x - k^2| - k = k^2 - k - x = d(xe_1, C_k).$$

Ce qui donne $|X - y| \geqslant d(X, C_k) \geqslant k^2 - k - x \geqslant k^2 - k - 1 \geqslant \frac{1}{2}k^2$ pour tout $y \in C_k$, $k \geqslant 2$. Ce qui entraine d'aprés (iii a) que

$$P(X) \leqslant 2^{n-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}.$$

(b) Si $x > 1$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $m^2 \leqslant x \leqslant (m+1)^2$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$ on a:

$$d(X, C_k) = ((x - k^2)^2 + |X_2|^2)^{1/2} \geqslant (x - k^2) - k = d(xe_1, C_k) \geqslant 1/2k(m - k)$$

d'après (iii b). Il s'en suit que $|x - y| \geqslant d(x, C_k) \geqslant \frac{1}{2}k(m - k)$ pour tout $y \in C_k$.

Soit $k \geqslant 2$ et $y \in C_{k+m}$ on a aussi

$$|X - y| \geqslant d(X, C_{k+m}) \geqslant |x - (k+m)^2| - (k+m) = (k+m)^2 - (m+k) - x$$

$= d(xe_1, C_{k+m}) \geqslant 1/2k(k+m)$ d'après (iii b), on obtient ainsi:

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(X) = \sum_{k=1}^{m-1} P_k(X) + P_m(X) + P_{m+1}(X) + \sum_{k=m+2}^{\infty} P(X) \\ &\leqslant 2^{n-2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-2}}\right). \end{aligned}$$

Ce qui démontre le (1) de la proposition.

Nous allons maintenant montrer que:

$$W^{e_1}(\phi)(x) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y - 2te_1 - x|^2/4t} \phi(y) \, dy \, dt$$

n'est pas borné.

Pour $x = 0$ on a

$$W^{e_1}(\phi)(0) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y - 2te_1|^2/4t} \phi(y) \, dy \, dt.$$

En utilisant le théorème de Fubini on aura:

$$\begin{aligned} W^{e_1}(\phi)(0) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y-2te_1|^2/4t}\phi(y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-(|y|^2/4t)-t}(e^{(y,e_1)}\phi(y))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\left(\frac{|y|^2}{4}\right)^{(1/2)(1-n/2)} K_{(n/2)-1}(|y|)e^{(y,e_1)}\phi(y)\,\mathrm{d}y = V_1(\phi e^{(\cdot,e_1)})(0) \end{aligned}$$

où $K_{(n/2)-1}$ est la fonction de Macdonald et V_1 est le noyau d'indice 1 de la résolvante du semi-groupe du mouvement brownien sur $\mathbb{R}^n$. Or nous savons d'après [17] que V_1 a une densité g_1^n par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ qui est radiale et vérifie:

(1) Pour n impair

$$g_1^n(r) = \left(\sum_{p=(n-1)/2}^{n-2} a_p^n \frac{1}{r^p}\right)e^{-r}$$

avec $a_p^n > 0$,

$$a_{n-2}^n = \frac{1}{4\pi^{(n+1)/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right), \quad a_{(n-1)/2}^n = \frac{1}{2\cdot(2\pi)^{(n-1)/2}}.$$

(2) Pour n pair

$$g_1^n(r) = \sum_{p=n/2-1}^{n-3} b_p^n \frac{1}{r^p}\int_0^\infty (cht)^{n-2-p}e^{-rcht}\,\mathrm{d}t$$

avec $b_p^n > 0$,

$$b_{n-3}^n = \frac{(n-4)!}{2\cdot(4\pi)^{(n/2)-2}\left(\dfrac{n}{2}-2\right)!}, \quad b_{(n/2)-1}^n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Ce qui nous permet de remarquer:

(i) $$g_1^n(r) \geqslant \frac{1}{2\cdot(2\pi r)^{(n-1)/2}}e^{-r}$$

pour tout $r > 0$.

(ii) $$g_1^n(r) \simeq \frac{1}{2\cdot(2\pi r)^{(n-1)/2}}e^{-r}$$

quand r tend vers $+\infty$.

Il s'en suit d'après cette remarque que:

$$W^{e_1}(\phi)(0) \geqslant \frac{1}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{(1-n)/2} e^{-|y|+\langle e_1, y\rangle} \phi(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{(1-n)/2} e^{-|y|+y_1} \phi(y)\,\mathrm{d}y$$

or sur C_k on a:

(1) $$y = y_1 e_1 + y_2 \quad \text{avec} \quad \langle e_1, y_2\rangle = 0.$$

(2) $$k^2 - k < y_1 < k^2 + k, \quad |y_2| < k.$$

Ce qui donne:

$$|y| - y_1 = (y_1^2 + |y_2|^2)^{1/2} - y_1 = y_1\left[\left(1 + \left(\frac{|y_2|^2}{y_1^2}\right)\right)^{1/2} - 1\right]$$
$$\leqslant y_1\left(1 + \frac{|y_2|}{y_1} - 1\right) = \frac{|y_2|}{y_1} \leqslant \frac{k}{k^2} \leqslant 1$$

pour tout $k \geqslant 2$ car $y_1 \geqslant k^2 - k > 1/2k^2$ pour $k \geqslant 2$ nous obtenons ainsi $e^{-|y|+y_1} \geqslant e^{-1}$ pour tout $y \in C_k$, $k \geqslant 2$ et $|y| \leqslant y_1 + |y_2| \leqslant k^2 + 2k \leqslant 2k^2$ pour tout $k \geqslant 2$.

Il en résulte que:

$$W^{e_1}(\phi)(0) \geqslant \frac{e^{-1}}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{(1-n)/2} \phi_k(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \frac{e^{-1}}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi_k(y)}{(2k^2)^{(n-1)/2}}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{e^{-1}}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{n-2}}{k^{n-1}} = \frac{e^{-1}}{2(2\pi)^{(n-1)/2}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Bibliographie

1. Ancona, A.: Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien, *Ann. Inst. Fourier* **28** (4) (1978), 169–213.
2. Aronson, D. G.: Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, *Bulletin of the American Mathematical Society* **73** (1967), 890–896.
3. Ben Saad, H.: Généralisation des noyaux V_h et applications, *Séminaire théorie du potentiel de Paris* N°7. Lecture Notes in Math. N°1061, Springer-Verlag (1984).
4. Ben Tahar, R.: Perturbation des espaces harmoniques et comparaison des fonctions de Green, Thése de 3^e cycle, Université de Tunis (1985).
5. Bliedtner, J. et Hansen, W.: *Potential Theory – An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*, Universität Berlin-Heidelberg-New York Toyo, Springer (1986).
6. Boukricha, A., Hansen, W. et Hueber, H.: Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces. *Exp. Math.* **5** (1987), 97–135.
7. Davies, E. B.: *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney (1989).
8. Fabes, E. B. et Stroock, D. W.: A new proof of Moser's inegality using the old idea of Nash, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **96** (1986), 327–338.

9. Hirsch, F.: Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de résolvantes, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete* **29** (1974), 73–85.
10. Hueber, H. et Sieveking, M.: Uniform bounds for quotient of Green fucntions on $C^{1,1}$ domains, *Ann. Inst. Fourier* **32** (1) (1982), 105–117.
11. Ito, M. et Nishio, M.: Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, *Nagoya Math. J.* **115** (1989), 1–22.
12. Maagli, H. et Selmi, M.: Perturbation et comparaison des semi-groupes, *Revue Roum. de Math. Pures et Appliquées* **XXXIV** (1) (1989), 29–40.
13. Maagli, H. et Selmi, M.: Perturbation des résolvantes et des semi-groupes par une mesure de Radon positive, *Math. Zeitschrift* **205** (1990), 379–393.
14. Nishio, M.: The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α, *Nagoya Math. J.* **116** (1989), 163–179.
15. Olver, F. W. J.: *Asymptotics and Special Functions*, New York: Academic Press (1974).
16. Selmi, M.: Critère de comparaison de certains noyaux de Green, *Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris N° 8*, Lecture Notes 1235 (1987).
17. Selmi, M.: Comparaison des noyaux vérifiant le principe complet du maximum avec leurs perturbés, Thèse de 3ème Cycle, Université de Tunis (1984).
18. Yosida, K.: *Functional Analysis*, 5th edition, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1978).