Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)
Vol. 39, November 1988

0044-2275/88/006826-26 $ 6.70/0

Petites oscillations d'un liquide dans un vase fermé par une membrane élastique

Par Pierre Capodanno, Laboratoire de Mécanique Théorique – Faculté des Sciences – F-25030-Besançon Cedex – France

Introduction

Le problème du mouvement d'un liquide dans un container élastique a fait l'objet d'un nombre important de travaux [13], [14], [15], [1], [2]. Dans le cas bidimensionnel, l'auteur a donné une solution analytique pour des containers de forme particulière, fermés par un couvercle élastique et animés de mouvements simples [3], [4], et a fait également une étude théorique dans le cas du container fixe [5]. Dans cet article, il étudie le problème des petites oscillations d'un liquide dans un vase rigide fermé par une membrane élastique, en supposant que le liquide reste constamment en contact avec la paroi du vase et le couvercle.

Dans la première partie, le vase est supposé fixe. On donne d'abord une solution analytique du problème dans le cas d'une cavité ayant la forme d'un cylindre circulaire, en développant le déplacement normal d'un point de la membrane S en série de fonctions propres d'un opérateur linéaire défini dans l'espace $\tilde{L}_2(S) = \{u \in L_2(S) \mid \int_S u\,dS = 0\}$ qui s'introduit dans le problème connu des petits mouvements du liquide avex surface libre [13], [14]; en particulier, les fréquences propres peuvent être déterminées graphiquement. Le problème de l'existence des fréquences propres dans le cas général est ensuite résolu à partir de l'équation fonctionelle du problème et en utilisant la théorie des opérateurs auto-adjoints complétement continus dans un espace de Hilbert.

Dans la deuxième partie, le vase est supposé mobile. Le problème du mouvement du système vase-liquide-couvercle est mis en équations en introduisant les paramètres normaux du solide transformé de Joukowski associé au système et en utilisant un principe variationnel dérivé de celui de Hamilton. Les équations obtenues sont mises sous la forme d'une équation opérationelle dans l'espace $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n \times \tilde{L}_2(S)$, où n est le nombre de degrés de liberté du vase. L'existence des fréquences propres découle du choix d'un produit scalaire convenable dans $\mathscr{E}$ et de la théorie des opérateurs auto-adjoints complétement continus dans un espace de Hilbert.

1re partie

Le cas où le réservoir est fixe

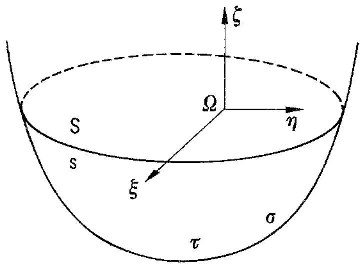

Figure 1

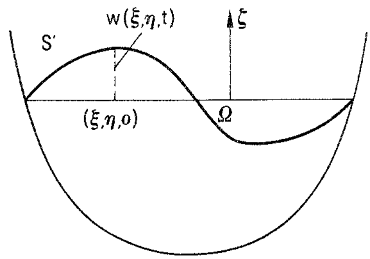

Figure 2

Mise en équations

Le couvercle occupe à l'équilibre un domaine plan horizontal S limité par une courbe fermée s.

Nous choisissons des axes orthonormés $\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta$: Ω est un point quelconque de S, $\Omega\,\zeta$ est vertical ascendant, $\Omega\,\xi$ est un axe de direction quelconque dans le plan du domaine S [Fig. 1].

Nous supposons que le liquide reste constamment en contact avec le récipient et le couvercle; nous appelons τ le volume occupé par le liquide à l'équilibre et σ la paroi mouillée du récipient.

Le couvercle est dynamiquement assimilé à une membrane S' fixée au récipient le long de la courbe s; nous supposons qu'elle est soumise à une tension constante T_0, supposée grande.

La masse spécifique du liquide est notée ϱ, la masse spécifique surfacique de la membrane, ϱ_0.

Le mouvement du liquide est supposé irrotationnel et nous nous plaçons en théorie linéaire. Soit ϕ (ξ, η, ζ, t) le potentiel des vitesses. Nous devons avoir d'abord

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } \tau \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \sigma \tag{2}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieure.

Appelons $w(\xi, \eta, t)$ la déflexion de la membrane S' [Fig. 2]; la condition cinématique sur elle s'écrit classiquement:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} = \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3}$$

D'autre part, en utilisant la formule de Bernoulli, nous trouvons pour la pression p du liquide sur le couvercle.

$$p = p_0 + \varrho_0 g - \varrho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\zeta = 0} + g\, w(\xi, \eta, t) \right]$$

où g désigne l'accélération de la pesenteur et p_0 la pression, suposée constante, au dessus du couvercle.

La condition dynamique sur celui-ci s'écrit donc

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_0 \Delta w = - \varrho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\zeta = 0} = g\, w \right], \tag{4}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien.

Il faut ajouter aux conditions précédentes la condition aux limites pour la membrane

$$w = 0 \quad \text{sur } s \tag{5}$$

et celle qui exprime que le liquide reste constamment en contact avec la paroi du container et le couvercle.

$$\int_S w(\xi, \eta, t)\, \mathrm{d}S = 0. \tag{6}$$

Un problème auxiliaire

Considérons le problème auxiliaire de Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{dans } \tau \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \sigma \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = f(P) & \text{sur } S, \end{cases} \tag{7}$$

$f(P)$ satisfaisant à la condition de compatibilité

$$\int_S f(P)\, \mathrm{d}P = 0.$$

Désignons par $H(P, Q)$ le produit par $1/4\,\pi$ de la fonction de Green du problème de Neumann pour le domaine τ [8] [9].

Cette fonction satisfait aux conditions suivantes:

(a) $H(P,Q) - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{PQ}$ est une fonction harmonique des coordonnées de P, régulière dans τ.
(b) sa dérivée normale extérieure est égale à $-1/a$, où a est l'aire de la frontière $\partial\tau$ de τ.
(c) $\int_{\partial\tau} H(P,Q)\,\mathrm{d}P = 0$ [comme l'a montré Hadamard [8], cette condition peut toujours être réalisée et assure la symétrie de $H(P,Q)$]

Considérons la solution du problème (7):

$$\phi(x,y,z,t) \text{ ou } \phi(Q,t) = \int_S H(P,Q)\,f(P)\,\mathrm{d}P - \frac{1}{S}\iint_{SS} H(P,R)\,f(P)\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}R \tag{8}$$

où $P, R \in S$, $Q \in \tau$ et où S désigne l'aire du domaine S. Nous avons évidemment

$$\int_S \phi(Q,t)\,\mathrm{d}Q = 0\,.$$

Si $Q \in S$, la formule (8) définit un opérateur linéaire K du sous-espace $\tilde{L}_2(S)$ de $L_2(S)$, formé par les éléments de ce dernier qui sont orthogonaux à l'unité.

Soit H l'opérateur intégral défini par

$$Hf = \int_S H(P,Q)\,f(P)\,\mathrm{d}P.$$

Il a été prouvé [13], [14] que H est borné et symétrique dans $L_2(S)$ et positif dans $\tilde{L}_2(S)$.

Il est facile de voir que l'opérateur K est borné, symétrique, positif et complétement continu dans $\tilde{L}_2(S)$.

Les trois premières propriétés découlent des propriétés correspondantes de H. La quatrième résulte du fait que l'opérateur intégral H, dont le noyau présente une faible singularité, est complétement continu dans $L_2(S)$ [12] et de ce que $\tilde{L}_2(S)$ est un sous-espace fermé de $L_2(S)$.

Par conséquent, l'opérateur K admet une infinité dénombrable de valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ strictement positives, μ_n tendant vers zéro quand n tend vers l'infini; les fonctions propres associées $\phi_1^*(\xi,\eta), \phi_2^*(\xi,\eta), \ldots, \phi_n^*(\xi,\eta), \ldots$ sont orthogonales entre elles et à l'unité et forment avec celle-ci un système orthogonal total dans $L_2(S)$.

Nous avons donc

$$\Delta\phi_n^* = 0 \qquad \text{dans } \tau$$

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \sigma, \quad \frac{\partial\phi_n^*}{\partial n} = \mu_n\phi_n^* \quad \text{sur } S\,.$$

Nous donnerons un peu plus loin une interprétation mécanique simple des valeurs propres μ_n de l'opérateur K.

L'equation fonctionnelle du problème

Posons un instant

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta \zeta t) = \frac{\partial \phi(\xi \eta \zeta t)}{\partial t}.$$

Les Éqs. (1), (2), (3), (4) deviennent

(1') $\Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{dans } \tau$

(2') $\dfrac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \sigma$

(3') $\dfrac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{sur } S$

(4') $\varrho_0 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T_0 \Delta w = -\varrho\,[\tilde{\phi}(\xi, \eta, 0, t) + g\,w(\xi, \eta, t)]\,.$

Intégrons cette dernière équation sur S; nous obtenons, en utilisant (6),

$$\int_S \tilde{\phi}(\xi, \eta, 0, t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \frac{T_0}{\varrho} \int_S \Delta w\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

et par conséquent, en désignant $\dfrac{\partial}{\partial n_s}$ la dérivée suivant la normale extérieure à la courbe plane s

$$\int_S \tilde{\phi}(\xi, \eta, 0, t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \frac{T_0}{\varrho} \int_s \frac{\partial w}{\partial n_s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Mais, résolvant le problème de Neumann pour $\tilde{\phi}$ (1'), (2'), (3'), nous avons, en nous plaçant sur S

$$\tilde{\phi}(\xi, \eta, 0, t) = K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{T_0}{\varrho S} \int_s \frac{\partial w}{\partial n_s}\,\mathrm{d}s\,,$$

de sorte qu'en portant dans (4'), nous obtenons l'équation fonctionnelle du problème

$$(\varrho_0 + \varrho K) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[- T_0 \Delta w + \varrho g w + \frac{T_0}{S} \int_s \frac{\partial w}{\partial n_s}\,\mathrm{d}s \right] = 0\,. \tag{9}$$

Remarque

Il est facile d'interpréter maintenant les valeurs propres μ_n de l'opérateur K. Considérons, en effet, le problème des petites oscillations du liquide avec surface libre. Appelons un instant $\zeta = w(\xi, \eta, t)$ l'équation de cette dernière. En faisant

$\varrho_0 = 0$, $T_0 = 0$ dans l'Éq. (9), nous trouvons pour $w(\xi, \eta, t)$ l'équation

$$K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g w = 0 .$$

Les fréquences propres du liquide sont donc égales à $\sqrt{\frac{g}{\mu_n}}$.

Introduisons les opérateurs linéaires L et M, agissant dans $\tilde{L}_2(S)$, définis par

$$Lu = \varrho_0 u + \varrho K u$$

$$Mu = - T_0 \Delta u + \varrho g u + \frac{T_0}{S} \int_s \frac{\partial u}{\partial n_s} \mathrm{d}s ,$$

le domaine de définition $D(M)$ de M étant l'ensemble des fonctions u de $C^2(\bar{S})$, nulles sur s et telles que $\int_S u \,\mathrm{d}S = 0$ ($D(M)$ est évidemment dense dans $\tilde{L}_2(S)$).

L'équation fonctionelle (12) devient

$$L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M w = 0 . \tag{10}$$

Propriétés des opérateurs L et M

1) L'operateur L est borné et symétrique dans $\tilde{L}_2(S)$, puisqu'il en est ainsi de K. D'autre part, il y est défini positif, car

$$(Lu, u) = \varrho_0 \int_S u^2 \,\mathrm{d}S + \varrho (Ku, u) \geqq \varrho_0 \, \|u\|^2 \; \forall u \in \tilde{L}_2(S)$$

2) L'opérateur M est symétrique, car, après une classique intégration par parties, on a

$$(Mu, v) = T_0 \int_S \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \,\mathrm{d}S + \varrho g \int_S u v \,\mathrm{d}S = (u, Mv) \quad \forall u, v \in D(M) .$$

Il est également défini positif, car

$$(Mu, u) \geqq \varrho g \, \|u\|^2 \quad \forall u \in D(M) .$$

Munissons $D(M)$ du produit scalaire $[u, v] = (Mu, v)$. L'espace de Hilbert obtenu, dûment complété (espace d'énergie) est noté E_M. Ses eléments appartiennent à $\tilde{H}_0^1(S) = \{u \in H_0^1(S) \mid \int_S u \,\mathrm{d}S = 0\}$; la norme associée, notée $|||\,.\,|||$, est équivalente à celle $H^1(S)$.

Comme l'injection $H_0^1(S) \subset L_2(S)$ est compacte, il en est de même de l'injection $E_M \subset \tilde{L}_2(S)$, car $\tilde{L}_2(S)$ est fermé dans $L_2(S)$. Dans ces condition [11], M^{-1} existe et est complétement continu dans $\tilde{L}_2(S)$.

Existence des fréquences propres

Cherchons des solutions de l'équation fonctionnelle (13) de la forme

$$w(\xi, \eta, t) = W(\xi, \eta)\, e^{i\sigma t}.$$

Nous obtenons l'équation

$$(M - \sigma^2 L)\, W = 0 .$$

En vertu des résultats du paragraphe précédent, le produit $C = M^{-1} L$ existe et est un opérateur de $\tilde{L}_2(S)$.

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$C\, W = \sigma^{-2}\, W.$$

Démontrer l'existence de fréquences propres du système liquide-couvercle revient donc à démontrer que C a des valeurs propres positives. Munissons $\tilde{L}_2(S)$ du produit scalaire

$$(u, v)_0 = (Lu, v) .$$

Notons $\tilde{L}_2^0(S)$ l'espace de Hilbert obtenu et $\| . \|_0$ la norme associée. Il est facile de voir que cette norme est équivalente á celle de $\tilde{L}_2(S)$. En effet, puisque L est borné et défini positif dans $L_2(S)$, nous avons

$$\varrho_0 \, \|u\|^2 \leqq \|u\|_0^2 \leqq \|L\| \, \|u\|^2 .$$

Nous allons montrer que l'opérateur C est complétement continu, symétrique et positif dans $\tilde{L}_2^0(S)$.

Puisque L est borné et M^{-1} complétement continu dans $\tilde{L}_2(S)$, leur produit C est complétement continu dans $\tilde{L}_2(S)$, donc dans $\tilde{L}_2^0(S)$. Nous avons ensuite, en utilisant les définitions de $\tilde{L}_2^0(S)$ et de C, et les propriétés de symétrie de L et de M:

$$\begin{aligned}(Cu, v)_0 &= (LCu, v) = (Cu, Lv) = (M^{-1} Lu, Lv) = (Lu, M^{-1} Lv) \\ &= (Lu, Cv) = (u, Cv)_0 .\end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$(Cu, u)_0 = (Lu, M^{-1} Lu)$$

qui est positif ou nul, nul seulement si $Lu = 0$, donc si $u = 0$. Par conséquent, l'opérateur C a une infinité dénombrable de valeurs propres positives, auxquelles correspondent les fréquences propres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ du système liquide-couvercle; σ_n tend vers l'infini avec n. Les fonctions propres correspondantes forment un système orthogonal total dans $\tilde{L}_2^0(S)$.

Solution analytique dans le cas d'un cylindre circulaire fermé par une membrane élastique

Nous allons donner un exemple dans lequel il est possible de déterminer analytiquement les valeurs propres.

Cherchons d'abord, de façon générale, des solutions des Éqs. (3) et (4) de la forme

$$w(\xi, \eta, t) = W(\xi, \eta)\, e^{i\sigma t}$$

$$\phi(\xi, \eta, \zeta, t) = i\sigma \Phi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{i\sigma t}.$$

La condition dynamique (4) devient

$$\Delta W + \lambda^2 W = -\frac{\varrho\,\sigma^2}{T_0}\Phi(\xi, \eta, 0)$$

avec

$$\lambda^2 = \frac{\varrho_0\,\sigma^2 - \varrho g}{T_0}$$

que nous supposerons positif Posons

$$\phi_n(x, y, z) = \int_S H(\xi, \eta, 0; x, y, z)\,\phi_n^*(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta)$$

$$-\frac{1}{S}\iint_{SS} H(\xi, \eta, 0; \bar{\xi}, \bar{\eta}, 0)\,\phi_n^*(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\bar{\eta}.$$

Nous en déduisons

$$\phi_n(x, y, 0) = K\Phi_n^* = \frac{1}{\lambda_n}\phi_n^*\,(\lambda_n = \mu_n^{-1}).$$

Nous cherchons donc $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ sous la forme

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{S}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(\xi, \eta, \zeta)\,(\Phi_n \text{ constantes}).$$

D'où l'équation

$$\Delta W + \lambda^2 W = -\frac{\varrho\,\sigma^2}{T_0}\left[\frac{A_0}{\sqrt{S}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\lambda_n}\phi_n^*(\xi, \eta)\right]. \tag{11}$$

Considérons le cas d'un vase ayant la forme d'un cylindre circulaire d'axe vertical. Nous pouvons dans ce cas calculer les fonctions propres $\phi_n^*(\xi, \eta)$ et les valeurs caractéristiques λ_n de l'opérateur K. Nous prenons Ω au centre du disque S; nous appelons a le rayon du disque et h la profondeur du vase.

Il est connu que le problème des petites oscillations du liquide avec surface libre est régi par les équations [13], [14]:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{dans } \tau \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \sigma \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta} = 0 & \text{sur } \zeta = -h \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\zeta} = -\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} & \text{sur } \zeta = 0. \end{cases}$$

Introduisons les coordonnées polaires r, θ et posons

$$\phi(r, \theta, \zeta, t) = i\sigma\Phi(r, \theta, \zeta)\, e^{i\sigma t}.$$

Alors Φ doit vérifier

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \tau \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 & \text{pour } r = a \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = 0 & \text{pour } \zeta = -h \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = -\dfrac{\sigma^2}{g}\Phi & \text{pour } \zeta = 0. \end{cases}$$

Cherchant classiquement des solutions de $\Delta\Phi = 0$ sous les deux premières conditions aux limites par séparation des variables, nous obtenons

$$\bar{\phi}_{0m}(r, \theta, \zeta) = J_0\left(\frac{k_{0m}}{a} r\right) ch \frac{k_{0m}}{a}(\zeta + h) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{matrix} \bar{\phi}_{nm}(r, \theta, \zeta) \\ \bar{\psi}_{nm}(r, \theta, \zeta) \end{matrix} = J_0\left(\frac{k_{nm}}{a} r\right) ch \frac{k_{nm}}{a}(\zeta + h) \begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{matrix} \quad \begin{matrix} (n = 1, 2, \ldots) \\ (m = 1, 2, \ldots) \end{matrix}$$

où les k_{nm} $(m = 1, 2, \ldots)$ sont les zéros positifs de $J'_n(r)$.

Les valeurs caractéristiques sont tirées de

$$\lambda = \left(\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial\zeta}}{\Phi}\right)_{\zeta=0}.$$

Ce sont donc

$$\lambda_{0m} = \frac{k_{0m}}{a} th \frac{k_{0m}}{a} h; \quad \lambda_{nm} = \frac{k_{nm}}{a} th \frac{k_{nm}}{a} h,$$

les $\lambda_{nm} (n = 1, 2, \ldots)$ étant des valeurs caractéristique doubles. Les fonctions propres sont proportionnelles à $J_0\left(\frac{k_{0m}}{a} r\right)$ et $J_n\left(\frac{k_{nm}}{a} r\right) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$. On peut les orthonormaliser à l'aide de la formule [6]

$$2 \int_2^1 J_n^2 (kR) R \, \mathrm{d}R = J_n'^2 (k) + \left(1 - \frac{n^2}{k^2}\right) J_n^2 (k).$$

On obtient

$$\phi_{0m}^*(r) = \frac{1}{a\sqrt{\Pi}} \frac{1}{J_0(k_{0m})} J_0\left(\frac{k_{0m}}{a} r\right) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{matrix} \phi_{nm}^*(r, \theta) \\ \\ \psi_{nm}^*(r, \theta) \end{matrix} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k_{nm}^2} J_n(k_{nm})}} J_n\left(\frac{k_{nm}}{a} r\right) \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ m = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

Revenons à l'Éq. (9); elle s'écrit

$$\Delta W + \lambda^2 W = -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0} \left[\frac{A_0}{a\sqrt{\Pi}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_{0m}}{\lambda_{0m}} + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{nm}} (\Phi_{nm} \phi_{nm}^* + \psi_{nm} \psi_{nm}^*) \right].$$

Supposant un instant le second membre connu, nous en cherchons une solution formelle de la forme

$$W = W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} W_{0m} \phi_{0m}^* + \sum_{n,m=1}^{\infty} (W_{nm} \phi_{nm}^* + W'_{nm} \psi_{nm}^*) (W_0, W_{0m}, \ldots \text{constantes}).$$

Nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda^2 W_0 &= -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0} = -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0} \frac{1}{a\sqrt{\Pi}} A_0 \\ \left(\lambda^2 - \frac{k_{0m}^2}{a^2}\right) W_{0m} &= -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0 \lambda_{0m}} \Phi_{0m} \\ \left(\lambda^2 - \frac{k_{nm}^2}{a^2}\right) W_{nm} &= -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0 \lambda_{nm}} \Phi_{nm} \\ \left(\lambda^2 - \frac{k_{nm}^2}{a^2}\right) W'_{nm} &= -\frac{\varrho \sigma^2}{T_0 \lambda_{nm}} \psi_{0m} \end{aligned} \right. \tag{12}$$

D'autre part, la méthode de la séparation des variables montre que $W = a_0 J_0(\lambda r) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda r)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ (a_n, b_n = constantes) est solution de $\Delta W + \lambda^2 W = 0$.

Nous considérons donc les solutions de l'équation (9) de la forme

$$W = a_0 J_0(\lambda r) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda r)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} W_{0m}\phi^*_{0m} + \sum_{n,m=1}^{\infty} (W_{nm}\phi^*_{nm} + W'_{nm}\psi^*_{nm})$$

où les W_0, $W_{0m}, \ldots$ sont supposés exprimés à l'aide des A_0, $\Phi_{0m}, \ldots$ par les équations (10).

Calculant les a_n et b_n pour que W s'annule pour $r = a$, nous trouvons une solution de (9) nulle pour $r = a$ quels que soient les W_{nm}:

$$\begin{aligned} W(r,\theta) = & -\frac{J_0(\lambda r)}{J_0(\lambda a)}\left[W_0 + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\sum_m W_{0m}\right] \\ & -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n(\lambda r)}{J_n(\lambda a)}\left[\sum_m \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}}(W_{nm}\cos n\theta + W'_{nm}\sin n\theta)\right] \\ & + W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} W_{0m}\varphi^*_{0m} + \sum_{n,m=1}^{\infty}(W_{nm}\varphi^*_{nm} + W'_{nm}\psi^*_{nm}). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors développer $W(\tau, \theta)$ en série de fonctions propres en utilisant les développements des $J_n(\lambda r)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) en séries de fonctions $J_\nu\left(\frac{k_{n\nu}}{a} r\right)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) [1].

Nous obtenons

$$\begin{aligned} & W(r,\theta) \\ & = W_0 - \frac{2J_1(\lambda a)}{a\lambda J_0(\lambda a)}\left(W_0 + \frac{1}{a\sqrt{\Pi}}\sum_{\nu=1}^{\infty} W_{0\nu}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty}\left[W_{0m} - \frac{2\lambda\sqrt{\Pi}J_1(\lambda a)}{J_0(\lambda a)}\left(W_0 + \frac{1}{a\sqrt{\Pi}}\sum_{\nu=1}^{\infty} W_{0\nu}\right)\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}}\right]\phi^*_{0m}(r) \\ & + \sum_{n,m=1}\left[W_{nm} + \frac{2\lambda J'_n(\lambda a)}{aJ_n(\lambda a)}\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{W_{n\nu}}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{k_{n\nu}^2}}}\right]\varphi^*_{nm}(r) \\ & + \sum_{n,m=1}\left[W'_{nm} + \frac{2\lambda J'_n(\lambda a)}{aJ_n(\lambda a)}\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{W'_{n\nu}}{\sqrt{1-\dfrac{n^2}{k_{n\nu}^2}}}\right]\psi^*_{nm}(r) \end{aligned}$$

Nous allons alors obtenir de nouvelles relations entre les W_{nm} et les Φ_{nm} en utilisant la condition cinématique (3) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = W(\xi, \eta)$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = W(\xi, \eta)$$

Mais la formule intégrale qui définit $\phi_n(x, y, z)$, montre que cette dernière est solution du problème de Neumann pour le domaine τ quand la dérivée normale vaut ϕ_n^* sur $\zeta = 0$ et 0 sur σ; nous avons donc

$$\left(\frac{\partial \phi_n}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0} = \phi_n^*(\xi, \eta)$$

et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n^* = W.$$

Comparant avec l'expression précédente de W, nous obtenons les relations cherchées:

$$\left\{\begin{aligned}
& W_0 - \frac{2 J_1(\lambda a)}{\lambda a J_0(\lambda a)}\left(W_0 + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} W_{0\nu}\right) = 0 \\
& \Phi_{0m} = W_{0m} - \frac{2\lambda\sqrt{\pi}\, J_1(\lambda a)}{J_0(\lambda a)}\left(W_{0m} + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=2}^{\infty} W_{0\nu}\right)\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}} = 0 \\
& \Phi_{nm} = W_{nm} + \frac{2\lambda J_n'(\lambda a)}{a J_n(\lambda a)} \frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{nm}^2}{a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{W_{n\nu}}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{k_{n\nu}^2}}} = 0 \\
& \Psi_{nm} = W_{nm}' + \frac{2\lambda J_n'(\lambda a)}{a J_n(\lambda a)} \frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{nm}^2}{a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{W_{n\nu}'}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{k_{n\nu}^2}}} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les Éqs. (9) et (11) vont nous permettre de déterminer les fréquences propres du système liquide-couvercle.

L'élimination du Φ_{0m} et W_{0m} conduit à l'équation

$$W_0 \left[1 + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}} - \frac{1}{\dfrac{\varrho \sigma^2}{T_0 \lambda_{0m}} + \lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}} \right) - \frac{a \lambda J_0(\lambda a)}{2 J_1(\lambda a)} \right] = 0 .$$

Nous avons donc un premier groupe de fréquences propres en annulant le coefficient de W_0.

En utilisant la relation de récurrence entre troix fonctions de Bessel d'indices consécutifs et la formule [7]

$$\frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} = -2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \gamma_{\nu m}^2}$$

où les $\gamma_{\nu n}$ sont les zéros à partie réelle positive de $J_\nu(z)$, nous obtenons la formule

$$\lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{0m}^2}{a^2}} = -1 + \frac{a \lambda J_0(\lambda a)}{2 J_1(\lambda a)},$$

de sorte que l'équation donnant le premier groupe de fréquences propres se simplifie et peut s'écrire

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dfrac{T_0 \lambda_{0m}}{\varrho + \varrho_0 \lambda_{0m}}}{\sigma^2 - \sigma_m^2} = 0$$

où

$$\sigma_m^2 = \frac{T_0 \lambda_{0m} \left(\dfrac{\varrho g}{T_0} + \dfrac{k_{0m}^2}{a^2} \right)}{\varrho + p_0 \lambda_{0m}}$$

On vérifie aisément que $\sigma_{m+1}^2 > \sigma_m^2$. D'autre part, la fonction de σ^2 qui constitue le premier membre de l'équation, est décroissante dans les intervalles $]\sigma_m^2, \sigma_{m+1}^2[$ où elle est définie, et son graphe admet pour asymptotes les droites $\sigma^2 = \sigma_m^2$. On voit ainsi graphiquement qu'on obtient une infinité dénombrable de fréquences propres séparées par les σ_m.

Eliminant de même les Φ_{nm}, nous obtenons

$$\left[\frac{a J_n(\lambda a)}{a \lambda J_n'(\lambda a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{n^2}{k_{nm}^2}} \left(\frac{1}{\lambda^2 - \dfrac{k_{nm}^2}{a^2}} - \frac{1}{\dfrac{\varrho \sigma^2}{T_0 \lambda_{nm}} + \lambda^2 - \dfrac{k_{nm}^2}{a^2}} \right) \right]$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{W_{n\nu}}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2}{k_{n\nu}^2}}} = 0$$

de sorte qu'en annulant le crochet, nous avons l'équation qui donne les fréquences propres de premier indice n. Ces fréquences propres sont doubles, car l'élimination des ψ_{nm} conduit évidemment à la même équation.

En utilisant l'équation différentielle vérifiée par $\dot{J}_n(z)$ et la formule [7]

$$2\,\Gamma(n)\left(\frac{z}{2}\right)^{1-n} J_n'(z) = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k_{nm}^2}\right)$$

dont on prend la dérivée logarithmique, nous obtenons

$$\frac{a\,J_n(\lambda a)}{2\lambda J_n'(\lambda a)} = -\frac{n a^2}{2(a^2\lambda^2 - n^2)} - \frac{\lambda^2 a^4}{a^2\lambda^2 - n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{a^2\lambda^2 - k_{nm}^2},$$

de sorte qu'après quelques calculs, l'équation aux fréquences propres de premier indice n s'écrit

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{n^2}{k_{nm}^2}}\,\dfrac{T_0\,\lambda_{nm}}{\varrho + p_0\,\lambda_{nm}}}{\sigma^2 - \sigma_{nm}^2} = 0$$

où

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{T_0\,\lambda_{nm}\left(\dfrac{\varrho g}{T_0} + \dfrac{k_{nm}^2}{a^2}\right)}{\varrho + p_0\,\lambda_{nm}}.$$

On vérifie aisément que $\sigma_{n,m+1}^2 > \sigma_{nm}^2$ et on voit graphiquement qu'on obtient une infinité dénombrable de fréquences propres séparées par les σ_{nm}.

2eme Partie

Le cas où le récipient est mobile

Nous allons maintenant considérer le problème des petites oscillations par rapport à des axes absolus, d'un système constitué par un solide rigide possédant une cavité de forme quelconque, remplie de liquide et fermée par une membrane élastique, autour d'une position d'équilibre stable dans lequel le couvercle est horizontal. On suppose toujours que le liquide reste constamment en contact avec la paroi de la cavité et le couvercle.

L'objet de cette deuxième partie est de mettre le problème en équations et de démontrer l'existence des fréquences propres du système. Comme nous le verrons, cette preuve nécessite la connaissance des propriétés des opérateurs L et M définis dans la première partie.

Nous utiliserons les axes orthonormés $\Omega\xi\eta\zeta$ liés au solide, $\Omega\xi\eta$ portant le couvercle à l'équilibre.

Calcul de l'énergie cinétique et du potentiel des forces

Désignons par v_1, v_2, v_3 les composantes de la vitesse de Ω et par ω_1, ω_2, ω_3 celles de la rotation instantanée $\vec{\omega}$ du solide sur les axes $\Omega\xi\eta\zeta$. En utilisant le théorème de la composition des vitesses, on voit facilement que l'énergie cinétique du couvercle peut se mettre sous la forme

$$T_c = T_{co} + \varrho_0 \int_S (\omega_2 \eta - \omega_2 \xi) \frac{\partial w}{\partial t} \, \mathrm{d}S + \frac{\varrho_0}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S$$

où T_{co} est l'énergie cinétique du couvercle rigidifié dans sa position d'équilibre.

Le mouvement absolu du liquide est supposé irrotationnel. C'est le cas, par exemple, le liquide étant pesant, si le système est lancé à partir d'un état initial de repos.

La vitesse absolue d'une particle de liquide peut alors s'écrire

$$\vec{U} = \vec{v} + \vec{\mathrm{grad}}\, \bar{\phi}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse absolue de la particule quand le liquide occupe le domaine τ, le couvercle étant rigidifié dans sa position d'équilibre, et est animé d'un mouvement absolu irrotationnel, et $\bar{\phi}(\xi, \eta, \zeta, t)$ le potentiel des vitesses correspondant aux petites oscillations, considéré dans la première partie, satisfaisant donc aux Éqs. (1), (2), (3).

D'après la théorie de Stokes-Joukowski [13], nous avons

$$\vec{v} = v_1 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_1 + v_2 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_2 + v_3 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_3 + \omega_1 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_4 + \omega_2 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_5 + \omega_3 \vec{\mathrm{grad}}\, \tilde{\phi}_6$$

où les $\tilde{\phi}_i$ sont des fonctions connues des seules coordonnées ξ, η, ζ, obtenues en résolvant des problèmes de Neumann.

Supposons maintenant que la position du solide soit déterminée par six coordonnées lagrangiennes $q_i (i = 1, \ldots, 6)$, nulles à l'équilibre. Les v_i et ω_i sont des combinaisons linéaires des $\dot{q}_i$ à coéfficients en thèorie linéaire, des sorte que nous pouvons écrire

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^{6} \dot{q}_i \vec{\mathrm{grad}}\, \phi_1 + \vec{\mathrm{grad}}\, \bar{\phi}$$

où les $\phi_i (\xi, \eta, \zeta)$ sont des combinaisons linéaires connues des $\tilde{\phi}_i (\xi, \eta, \zeta)$, et

$$T_c = T_{co} + \varrho_0 \sum_{i=1}^{6} a_i \dot{q}_i \int_S \xi \frac{\partial w}{\partial t} \mathrm{d}S + \varrho_0 \sum_{i=1}^{6} b_i \dot{q}_i \int_S \eta \frac{\partial w}{\partial t} \mathrm{d}S + \frac{\varrho_0}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S$$

où les a_i et b_i sont des constantes connues.

Notant

$$T_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{6} a_{ij}^0 \dot{q}_i \dot{q}_j$$

l'energie cinétique du solide constitué par le vase et le couvercle rigidifié dans sa position d'equilibre, et posant

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \varrho \int_\tau \vec{\text{grad}}\, \phi_i\, \vec{\text{grad}}\, \phi_j\, d\tau,$$

nous pouvons écrire l'énergie cinétique totale sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{6} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \varrho \sum_{i=1}^{6} \dot{q}_i \int_\tau \vec{\text{grad}}\, \varphi_i\, \vec{\text{grad}}\, \bar{\varphi}\, d\tau + \frac{\varrho}{2} \int_\tau (\text{grad}\, \bar{\varphi})^2\, d\tau \\ &\quad + \varrho_0 \sum_{i=1}^{6} a_i \dot{q}_i \int_S \xi \frac{\partial w}{\partial t}\, dS + \varrho_0 \sum_{i=1}^{6} b_i \dot{q}_i \int_S \eta \frac{\partial w}{\partial t}\, dS + \frac{\varrho_0}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dS. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Quand le solide est soumis à des liaisons holonomes laissant indépendantes n paramètres q_i ($n < 6$), nous avons la même formulae avec la sommation de 1 à n. Suppose le sytème conservatif.

Le potentiel du système constitué par le récipient, le couvercle rigidifié dans sa position d'équilibre et le liquide en mouvement irrotationnel (c'est-à-dire le solide transformé de Joukowski [14]) est une forme quadratique

$$\Pi_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j,$$

définie positive afin que la position d'équilibre $q_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) de ce système soit stable.

Nous devons lui ajouter l'énergie potentielle du liquide et du couvercle vibrant. Elle comprend l'énergie potentielle du liquide vibrant dans le vase fixe

$$\int_S \int_0^w \varrho\, g\, \zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{\varrho g}{2} \int_S w^2\, dS,$$

l'énergie de déformation de la membrane

$$\frac{T_0}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right] dS$$

et des termes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \int_S f_i(\xi, \eta)\, w\, dS$$

puisque liquide et couvercle participent au mouvement du système, les $f_i(\xi, \eta)$ dépendant de la géométrie de la cavité.

Le potentiel total peut donc s'écrire

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j + \sum_{i=1}^{n} q_i \int_S f_i w \, dS + \frac{\varrho g}{2} \int_S w^2 \, dS$$
$$+ \frac{T_0}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] dS. \tag{15}$$

Equations réduites du mouvement

Considérons le solide transformé de Joukowski, d'énergie cinétique $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ et de potentiel $\Pi_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} q_i q_j$. Notons $Y_i (i = 1, \ldots, n)$ les paramètres normaux de ce système; son énergie cinétique devient $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{Y}_i^2$, son potentiel $\frac{1}{2} \sum \mu_i^2 Y_i^2$.

Nous pouvons donc écrire

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i \varrho \int_\tau \vec{\text{grad}}\, \varphi_i^* \, \vec{\text{grad}}\, \bar{\varphi} \, d\tau + \frac{\varrho}{2} \int_\tau (\text{grad}\, \bar{\varphi})^2 \, d\tau$$
$$+ \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dot{y}_i \int_S \xi \frac{\partial w}{\partial t} \, d\delta + \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \dot{y}_i \int_S \eta \frac{\partial w}{\partial t} \, dS + \frac{\varrho_0}{2} \int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dS$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i \int_S v_i w \, dS + \frac{\varrho g}{2} \int_S w^2 \, dS$$
$$+ \frac{T_0}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] dS$$

où les α_i, β_i sont des constantes, les ϕ_i^* et les v_i des combinaisons linéaires à coéfficients constants des ϕ_i et des f_i respectivement.

La formule de Green donne d'abord

$$\int_\tau \vec{\text{grad}}\, \phi_i^* \, \vec{\text{grad}}\, \bar{\phi} \, d\tau = \int_{\partial\tau} \phi_i^* \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \, dS = \int_S \phi_i^* \frac{\partial w}{\partial t} \, dS,$$

ensuite, puisque $\bar{\phi}_{|S} = K \frac{\partial w}{\partial t} + \mathscr{C}(t)$, où $\mathscr{C}(t)$ est une fonction arbitraire du temps t, et compte tenu de la condition (6)

$$\int_\tau (\vec{\text{grad}}\, \bar{\varphi})^2 \, d\tau = \int_{\partial\tau} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} \, dS = \int_S \bar{\varphi} \frac{\partial w}{\partial t} \, dS = \int_S K \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \, dS.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left\{\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i^2 + \varrho \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i \int_S \varphi_i^* \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}S + \frac{\varrho}{2}\int_S K\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}S \\ & + \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{y}_i \int_S \xi \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}S + \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \dot{y}_i \int_S \eta \frac{\partial w}{\partial t}\,\mathrm{d}S + \frac{\varrho_0}{2}\int_S \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}S \end{aligned}\right. \qquad (16_1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i \int_S v_i w\,\mathrm{d}S + \frac{\varrho g}{2}\int_S w^2\,\mathrm{d}S \\ & + \frac{T_0}{2}\int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right]\mathrm{d}S. \end{aligned} \qquad (16_2)$$

Considérons la fonctionnelle

$$L(Y_i, w) = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\,\mathrm{d}t \qquad (t_2 > t_1).$$

Selon un principe variationnel dérivé de celui de Hamilton [12], [13], nous obtenons les équations du mouvement en cherchant dans la classe des fonctions $Y_i(t)$, $w(\xi, \eta, t)$ deux fois continûment différentiables, prenant les mêmes valeurs pour $t = t_1$ ainsi que pour $t = t_2$, w vérifiant également $w = 0$ sur s pour tout $t \geqq 0$ et $\int_S w\,\mathrm{d}S = 0$, celles qui annulent δL.

Un calcul classique, basé sur les habituelles intégrations par parties, donne:

$$\begin{aligned} \delta L = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\ddot{y}_i + \gamma_i^2 y_i + \varrho \int_S \varphi_i^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}S + \varrho_0 \int_S (\alpha_i \xi + \beta_i \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}S \\ & + \int_S v_i w\,\mathrm{d}S \Bigg] \delta y_i + \int_S \Bigg[\sum_{i=1}^{n} \varrho_i \ddot{y}_i \varphi_i^* + \varrho K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varrho_0 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \xi + \beta_i \eta) \ddot{y}_i \\ & + \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + \varrho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varrho g w - T_0 \Delta w \Bigg] \delta w\,\mathrm{d}S \Bigg\}, \end{aligned}$$

de sorte que, les δY_i etant arbitraires et δw vérifiant $\int_S \delta w\,\mathrm{d}S = 0$, nous obtenons les équations du movement

$$\begin{aligned} & \ddot{y}_i + \mu_i^2 y_i + \varrho \int_S \varphi_i^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}S + \varrho_0 \int_S (\alpha_i \xi + \beta_i \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}S \\ & + \int_S v_i w\,\mathrm{d}S = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \qquad (17_1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \varrho\, \varphi_i^* \ddot{y}_i + \varrho \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \xi + \beta_i \eta) \ddot{y}_i + \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + \varrho K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ & \qquad + \varrho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varrho g w - T_0 \Delta w = F(t) \ \text{ sur } S \end{aligned} \qquad (17_2)$$

où $F(t)$ est une fonction arbitraire de t.

Nous remarquons que l'expression (16_2) de Π n'est pas modifiée quand on ajoute à chaque v_i une constante $-d_i$; d'autre part, puisque les ϕ_i^* sont solutions de problèmes de Neumann, on peut leur ajouter des constantes $-c_i$ sans changer l'expression (16_1) de T; et il en est de même quand on ajoute à $K\dfrac{\partial w}{\partial t}$ une fonction arbitraire $\mathscr{C}(t)$ du temps.

Les Éqs. (17_1) ne sont pas altérées quand on ajoute les $-d_i$ aux v_i et les $-c_i$ aux ϕ_i^*. L'Éq. (17_2), qui n'est autre que la condition dynamique sur le couvercle, devient, en faisant entrer $F(t)$ dans $\varrho\mathscr{C}'(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{y}_i[\varrho(\varphi_i^* - c_i) + \varrho_0(\alpha_i\xi + \beta_i\eta)] + \sum_{i=1}^{n}(v_i - d_i)y_i + \varrho\left[K\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathscr{C}'(t)\right] + \varrho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varrho g w - T_0\Delta w = 0.$$

Intégrant sur S et déterminant

les c_i par $\int_S [\varrho(\phi_i^* - c_i) + \varrho_0(\alpha_i\xi + \beta_i\eta)]\,\mathrm{d}S = 0$

les d_i par $\int_S (v_i - d_i)\,\mathrm{d}S = 0$,

nous obtenons

$$\mathscr{C}'(t) = \frac{T_0}{\varrho S}\int_0 \Delta w\,\mathrm{d}S = \frac{T_0}{\varrho S}\int_s \frac{\partial w}{\partial n_s}\,\mathrm{d}s.$$

Conservant alors les notations ϕ_i^* et v_i au lieu de $\phi_i^* - c_i$ et $v_i - d_i$, posant

$$\varrho\Phi_i^*(\xi,\eta) = \varrho\phi_i^*|_S + \varrho_0(\alpha_i\xi + \beta_i\eta),$$

et introduisant les opérateurs L et M de la première partie, nous pouvons écrire les Éqs. (17) sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{y}_i + \mu_i^2 y_i + \int_S \varrho\,\Phi_i^*\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\mathrm{d}S + \int_S v_i w\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (= 1,\ldots,n) \\ \sum_{i=1}^{n}\varrho\Phi_i^*\ddot{y}_i + \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + L\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Mw = 0 \end{cases} \tag{18}$$

avec

$$\int_S \varrho\Phi_i^*\,\mathrm{d}S = 0, \quad \int_S v_i\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n).$$

Transformation en équation opérationnelle

Introduire l'espace $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n \times \tilde{L}_2(S)$ des couples

$$x = \{Y, w\}, \text{ où } Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } w(\xi, \eta) \in \tilde{L}_2(S),$$

muni du produit scalaire

$$(x^{(1)}, x^{(2)})_{\mathscr{E}} = (Y^{(1)}, Y^{(2)})_0 + (w^{(1)}, w^{(2)})$$

avec

$$(Y^{(1)}, Y^{(2)})_0 = \sum_{i=1}^{n} + (Y_i^{(1)} Y_i^{(2)}, (w^{(1)}, w^{(2)}) = \int_S w^{(1)}, w^{(2)} \, dS,$$

La norme associée est notée $\| . \|_{\mathscr{E}}$.

Introduisons ensuite les applications linéaires suivantes:

– deux applications L_{00} et M_{00} de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définies par

$$L_{00} Y = Y, \quad M_{00} Y = (\mu_1^2 Y_1, \ldots, \mu_n^2 Y_n)$$

– deux applications L_{10} et M_{10} de $\mathbb{R}^n$ dans $\tilde{L}_2(S)$ définies par

$$L_{10} Y = \varrho (\Phi^*, Y)_0, \quad M_{10} Y = (v, Y)_0$$

où Φ^* et v sont les éléments de $\mathbb{R}^n$ de composantes Φ_i^* et v_i

– deux applications linéaires L_{01} et M_{01} de $\tilde{L}_2(S)$ dans $\mathbb{R}^n$ définies par

$$L_{01} = \int_S \varrho \Phi^* w \, dS, \quad M_{01} = \int_S v w \, dS$$

Notons L_{11} et M_{11} les applications L et M de $\tilde{L}_2(S)$ dans lui-même.

Si nous définissons alors deux opérateur $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ agissant dans $\mathscr{E}$

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{M} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}$$

nous pouvons écrire le système (18) sous la forme opérationelle cherchée

$$\mathscr{L} \ddot{x} + \mathscr{M} x = 0. \tag{20}$$

Propriétés des opérateurs $\mathscr{M}$ et $\mathscr{L}$

1) – Etudions d'abord les propriétés de $\mathscr{M}$.

a) – Un calcul direct facile montre que $\mathscr{M}$ est symétrique.

b) Prouvons que $\mathscr{M}$ est défini positif.

Un calcul direct montre, après comparaison avec (16_2), que $(\mathscr{M}x, x)_{\mathscr{E}} = 2\Pi$. Appelons $\mathscr{M}'$ l'opérateur auquel se réduit $\mathscr{M}$ quand on fait $T_0 = 0$; nous avons

$$(\mathfrak{M}x, x)_{\mathscr{E}} = (\mathfrak{M}'x, x)_{\mathscr{E}} + T_0 \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right] \mathrm{d}S$$
$$\geqq (\mathfrak{M}'x, x)_{\mathscr{E}} \; \forall x \in \mathbb{R}^n \times D(M).$$

Nous trouvons aisément

$$(\mathfrak{M}'x, x)_{\mathscr{E}} = \left[\sum_{i=1}^n \mu_i^2 y_i^2 - \frac{1}{\varrho g} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_S \nu_i \nu_j \,\mathrm{d}S\right]$$
$$+ \varrho g \int_S \left(w + \frac{1}{\varrho g} \sum_{i=1}^n \nu_i y_i\right)^2 \mathrm{d}S.$$

Nous supposerons que la forme quadratique des Y_i entre crochets est définie positive, donc qu'il existe une constante $a' > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 y_i^2 - \frac{1}{\varrho g} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_S \nu_i \nu_j \,\mathrm{d}S \geqq a' \, \| y \|_0^2 .$$

Nous remarquons que cela entraîne la stabilité requise de l'équilibre du système, car nous avons alors

$$2\Pi \geqq a' \, \| y \|_0^2 + \varrho g \int_S \left(w + \frac{1}{\varrho g} \sum_{i=1}^n \nu_i y_i\right)^2 \mathrm{d}S + T_0 \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right) \mathrm{d}S$$

de sorte que 2Π est défini positif par rapport à $\| Y \|_0$, $\| w \|$, $\left\|\frac{\partial w}{\partial \xi}\right\|$, $\left\|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right\|$, et, par conséquent, la position d'équilibre $Y = 0$, $w = 0$ est stable par rapport aux grandeurs précitées d'après un théorème de Rumiantsev [14]. Employant une méthode utilisée dans [10], nous posons

$$w + \frac{1}{\varrho g} \sum_{i=1}^n \nu_i Y_i = w_1' + w_2'$$

où w_1' est une combinaison linéaire des ν_i et w_2' est orthogonal aux ν_i, et nous écrivons

$$x' = \{Y, w\} = x_1' + x_2' + x_3'$$

avec

$$x_1' = \left\{Y, -\frac{1}{\varrho g} (\nu, Y)_0\right\}; \quad x_2' = \{0, w_1'\}; \quad x_3' = \{0, w_2'\}.$$

On vérifie aisément par un calcul direct que

$$(\mathfrak{M}' x_i', x_j')_{\mathscr{E}} = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j; \; (\mathfrak{M}' x_2', x_2')_j = \varrho g \, \| x_2' \|_{\mathscr{E}}^2;$$
$$(\mathfrak{M}' x_3', x_3')_{\mathscr{E}} = \varrho g \, \| x_3' \|_{\mathscr{E}}^2.$$

Nous avons d'autre part

$$(\mathfrak{M}' x_1', x_1')_{\mathscr{E}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 y_i^2 - \frac{1}{\varrho g} \sum_{i,j=1}^{n} y_i y_j \int_S v_i v_j \, dS$$
$$\geqq a' \, \| y \|_0^2; \quad \| x_1' \|_{\mathscr{E}}^2 \leqq b' \, \| y \|_0^2 \quad \text{avec} \quad b' = 1 + \frac{1}{\varrho^2 g^2} \int_S \| v \|_0^2 \, dS$$

ce qui entraîne

$$(\mathscr{M} x_1', x_1')_{\mathscr{E}} \geqq \frac{a'}{b'} \, \| x_1' \|_{\mathscr{E}}^2.$$

Désignant alors par c' le plus petit du nombre $\frac{a'}{b'}$ et ϱg; nous avons

$$(\mathscr{M}' x, \; x)_{\mathscr{E}} \geqq c' (\| x_1' \|_{\mathscr{E}}^2 + \| x_2' \|_{\mathscr{E}}^2 + \| x_3' \|_{\mathscr{E}}^2)$$

et par conséquent, en utilisant l'inégalité de Cauchy

$$(\mathscr{M} x, x)_{\mathscr{E}} \geqq \frac{c'}{3} \, \| x \|_{\mathscr{E}}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \times D(M).$$

c) Démontrons enfin que $\mathscr{M}$ admet un inverse complétement continu dans $\mathscr{E}$.

$\mathbb{R}^n \times D(M)$ est evidemment dense dans $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n \times \tilde{L}_2(S)$. Munissons-le produit scalaire

$$[x, y]_{\mathscr{E}} = (\mathscr{M} x, y)_{\mathscr{E}}.$$

L'espace de Hilbert ainsi obtenu, dûment complété, est noté $\mathscr{E}_{\mathfrak{M}}$; soit $|||.|||_{\mathscr{E}}$ la norme associée.

Nous avons

$$|||x|||_{\mathscr{E}}^2 = (\mathscr{M} x, x)_{\mathscr{E}} \geqq \frac{c'}{3} \, \| x \|_{\mathscr{E}}^2 + T_0 \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] dS$$

ou encore

$$|||x|||_{\mathscr{E}}^2 \geqq \frac{c'}{3} \, \| Y \|_0^2 + \frac{c'}{3} \, \| w \|^2 + T_0 \left(\left\| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\|^2 \right).$$

Soit alors un ensemble $\mathscr{X}$ d'éléments $x = \{Y, w\} \in \mathscr{E}_{\mathfrak{M}}$, borné dans celui-ci: $|||x|||_{\mathscr{E}} \leqq C$, où C est une constante positive. Nous avons $\forall x = \{y, w\} \in \mathscr{X}$

$$\| Y \|_0 \leqq \sqrt{\frac{3}{c'}}\, C; \frac{c'}{3} \| w \|^2 + T_0 \left(\left\| \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\|^2 \right) \leqq C;$$

la deuxième inégalité est équivalente à $\| w \|_{H^1(S)} \leqq C'$, où C' est une constante positive.

L'ensemble des Y tels que $\{Y, w\} \in \mathscr{X}$ est donc borné dans $\mathbb{R}^n$ et, par conséquent, est relativement compact dans lui.

L'ensemble des w tels que $\{Y, w\} \in \mathscr{X}$ est tel que $\| w \|_{H^1(S)}$ est borné; il est donc relativement compact dans $L_2(S)$, et, par conséquent, dans $\tilde{L}_2(S)$ qui en est un sous-ensemblé fermé.

Ainsi, l'ensemble $\mathscr{X}$, contenu dans le produit de deux ensembles relativement compacts dans $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{L}_2(S)$, est relativement compact dans $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n \times \tilde{L}_2(S)$. Les propriétés de $\mathfrak{M}$ entraînent que $\mathscr{M}^{-1}$ existe et est complétement continu dans $\mathscr{E}$. [11].

2) – Etudions maintenant les propriétés de $\mathscr{L}$.

a) Un calcul direct facile montre que $\mathscr{L}$ est symétrique.

b) Prouvons que $\mathscr{L}$ est borné

Nous avons

$$\| \mathscr{L} x \|_{\mathscr{E}}^2 = \| Y + \varrho \int_S \Phi^* \, w \, dS \|_0^2 + \int_S [\varrho (\Phi^*, Y)_0 + Lw]^2 \, dS$$

et les deux majorations

$$\begin{aligned} &\| Y + \varrho \int_S \Phi^* \, w \, dS \|_0^2 \\ &\quad \leqq 2 [\| Y \|_0^2 + \varrho^2 \int_S \{\Phi^* \|_0^2 \, dS \cdot \| w \|^2] \int_S [\varrho (\Phi^*, Y)_0 + Lw]^2 \, dS \\ &\quad \leqq 2 [\| L \|^2 \, \| w \|^2 + \varrho^2 \int_S \| \Phi^* \|_0^2 \, dS \cdot \| Y \|_0^2]. \end{aligned}$$

Comme $\| x \|_{\mathscr{E}}^2 = \| Y \|_0^2 + \| w \|^2$, il existe une constante positive A telle que

$$\| \mathscr{L} x \|_{\mathscr{E}} \leqq A \, \| x \|_{\mathscr{E}}^2 \quad \forall x \in \mathscr{E}$$

c) Enfin, prouvons qu'au moins sous une certaine condition, $\mathscr{L}$ est défini positif.

Un calcul direct montre, après comparaison (16_1), que $(\mathscr{L} \dot{x}, \dot{x})_{\mathscr{E}} = 2\,T \geqq 0$. Appelons $\mathscr{L}'$ l'opérateur obtenu en supprimant K dans $\mathscr{L}$; nous avons

$$(\mathscr{L} x, x)_{\mathscr{E}} = (\mathscr{L}' x, x)_{\mathscr{E}} + \varrho \int_S K w \cdot w \, ds$$

avec

$$(\mathscr{L}' x, x)_{\mathscr{E}} = \| Y \|_0^2 + 2 \int_S \varrho (\Phi^*, Y)_0 \, w \, \mathrm{d}S + \varrho_0 \int_S w^2 \, \mathrm{d}S .$$

Opérant comme $(\mathscr{M}' x, x)_{\mathscr{E}}$, on voit que, si

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{\varrho^2}{\varrho_0} \sum_{i,j=1}^n Y_i Y_j \int_S \Phi_i^* \Phi_j^* \, \mathrm{d}S$$

est une forme quadratique définie positive des Y_i, ce qui est une hypothèse vraisemblable à cause de la prépondérance des termes dus au vase dans l'énergie cinétique, $\mathscr{L}'$ est défini positif, de sorte qu'il existe une constante positive c telle que

$$(\mathscr{L} x, x)_{\mathscr{E}} \geqq \frac{c}{3} \| x \|^2 \quad \forall x \in \mathscr{E} .$$

Existence des fréquences propres

Cherchons des solutions de l'équation opérationelle (20) de la forme

$$x = X \, \mathrm{e}^{i\sigma t} .$$

Nous avons

$$(\mathscr{M} - \sigma^2 \mathscr{L}) X = 0 .$$

Posons

$$\mathscr{C} = \mathscr{M}^{-1} \mathscr{L}$$

qui existe et est un opérateur de $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n x \, \tilde{L}_2(S)$.

L'équation devient

$$\mathscr{C} X = \sigma^{-2} X .$$

Démontrer l'existence de fréquences propres du système revient donc à prouver que $\mathscr{C}$ a des valeurs propres positives.

Munissons $\mathscr{E}$ du produit scalaire

$$(x, y)_1 = (\mathscr{L} x, y)_{\mathscr{E}} .$$

Soit $\mathscr{E}_1$ l'espace de Hilbert obtenu et $\| . \|_1$ la norme associée.

Puisque $\mathscr{L}$ est borné et défini positif dans $\mathscr{E}$, nous avons

$$\frac{c}{3} \| x \|_{\mathscr{E}}^2 \leqq \| x \|_1^2 \leqq \| \mathscr{L} \| . \| x \|_{\mathscr{E}}^2$$

et les normes $\| . \|_{\mathscr{E}}$ et $\| . \|_1$ sont équivalentes dans $\mathscr{E}$.

Montrons que $\mathscr{C}$ est complétement continu, symétrique et positif dans $\mathscr{E}_1$. Puisque $\mathscr{L}$ est borné dans $\mathscr{E}$ et $\mathfrak{M}^{-1}$ complétement continu dans $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}$ est complétement continu dans $\mathscr{E}$, donc dans $\mathscr{E}_1$. Nous avons ensuite, en utilisant les définitions de $\mathscr{E}_1$ et de $\mathscr{C}$ et les propriétés de symétrie de $\mathscr{L}$ et de $\mathscr{M}$:

$$\begin{aligned}(\mathscr{C}x, y)_1 &= (\mathscr{L}\mathscr{C}x, y)_{\mathscr{E}} = (\mathscr{C}x, \mathscr{L}y)_{\mathscr{C}} = (\mathfrak{M}^{-1}Lx, \mathscr{L}y)_{\mathscr{E}} \\ &= (\mathscr{L}x, \mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}y)_{\mathscr{E}} = (\mathscr{L}x, \mathscr{C}y)_{\mathscr{E}} = (x, \mathscr{C}y)_1\end{aligned}$$

et, enfin

$$(\mathscr{C}x, x)_1 = (\mathscr{L}x, \mathscr{M}^{-1}\mathscr{L}x)_{\mathscr{E}} \geqq 0,$$

nul seulement pour $\mathscr{L}x = 0$, donc pour $x = 0$. L'opérateur $\mathscr{C}$ a donc une infinité dénombrable de valeurs propres positives, auxquelles correspondent les fréquences propres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ du système, σ_n tendant vers l'infini avex n. Les fonctions propres correspondantes forment un système orthogonal total dans $\mathscr{E}_1$.

Ainsi, sous les conditions indiquées dans le paragraphe précédent, est prouvée l'existence de vibrations propres du système container-liquide-couvercle, c'est-à-dire l'existence de solutions de la forme

$$Y_j = Y_j^0 e^{i\sigma t}, \qquad w = W(\xi, \eta) e^{i\sigma t}$$

pour les Éqs. (18).

Les fréquences σ_n de ces vibrations forment un ensemble dénombrable; σ_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Tout mouvement du système résulte de la superposition de vibrations propres.

Bibliographie

[1] H. F. Bauer, *Hydroelastische Schwingungen in einem starren Kreiszylinder bei elastischer Flüssigkeitsoberflächenabdeckung* – Z. Flugwiss. *21*, Heft 6, 202–213 (1973).

[2] H. F. Bauer, *Hydroelastische Schwingungen einer Oberflächenspannungsstruktur in einem Satellitenbehälter-Forschungsbericht:* LRT WE9, FB10, 35 p., Hochschule der Bundeswehr München 1980.

[3] P. Capodanno, *Oscillations d'un liquide dans un vase mobile fermé par un couvercle élastique.* Rev. Roumaine Sci. Techn. – Sér. de Mécanique Appl., Tome 32, n° 5, 521–531 (1987).

[4] P. Capodanno, *Sur les petites oscillations d'un pendule élastique contenant un liquide.* A paraître dans le Bull. Académie Polonaise des Sciences.

[5] P. Capodanno, *Sur les petites oscillations planes d'un liquide dans un récipient fixe fermé par un couvercle élastique.* J. Méc. Théor. et Appl. *7*, 21–33 (1988).

[6] R. Courant, and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. I. Interscience Publ., New York 1965.

[7] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions,* Vol. 2. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London 1953.

[8] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique.* Chelsea Publ., Co., p. 33–39, London 1949.

[9] F. John, Partial differential equations dans *"Mathematics Applied to Physics",* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, UNESCO Paris, 229–315 (1970).

[10] S. Krein et N. N. Moiseyev, *Oscillations d'un corps solide contenant un liquide avec surface libre.* P.M.M., Tome *21*, 169–174 (1957) (en russe).

[11] S. G. Mikhlin, *The problem of the minimum of a quadratic functional*. Holden Day, Inc. San Francisco-London-Amsterdam 1965.
[12] S. G. Mikhlin, *Mathematical Physics, an advanced course*. North Holland Publ. Co., Amsterdam-London 1970.
[13] N. N. Moiseyev et autres, *Méthodes variationnelles pour les problèmes d'oscillations d'un liquide et d'un solide contenant un liquide*. Publications du Centre de Calcul de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., 247 p., Moscou 1962 (en russe).
[14] N. N. Moiseyev et V. V. Rumiantsev, *Dynamic stability of bodies containing fluid*. Springer Verlag, Berlin 1968.
[15] I. M. Rapoport, *Dynamics of elastic containers partially filled with liquid*. Springer Verlag, Berlin 1968.

Résumé

Dans ce travail, l'auteur étudie le problème des petites oscillations d'un liquide dans un container rigide fermé par une membrane élastique. Dans la première partie, le container est fixe. Dans le cas général, l'existence des fréquences propres du système est démontrée à l'aide des méthodes de l'analyse fonctionnelle. Une solution analytique est donnée dans le cas où le container a la forme d'un cylindre circulaire.

Dans la seconde partie, le container est mobile. Les équations du mouvement sont obtenues au moyen d'un principe variationnel et sont mises sous la forme d'une équation opérationnelle dans un espace de Hilbert convenable. L'existence des fréquences propres est prouvée à l'aide de la théorie des opérateurs auto-adjoints complètement continus dans l'espace de Hilbert.

Summary

The problem of the small oscillations of a liquid in a rigid container closed by an elastic membrane is investigated. In the first part, the container is fixed. In the general case, the existence of the eigenfrequencies of the system is proved by means of the methods of the functional analysis. An analytic solution is given in the case of a circular cylindrical container.

The second part deals with a moving container. The equations of motion are obtained by means of a variational principle and are written in the form of an operational equation in a suitable Hilbert space. The existence of the eigenfrequencies arises from the theory of the completely continuous self-adjoint operators in an Hilbert space.

Zusammenfassung

Es wird das Schwingungsproblem einer in einem Behälter befindlichen Flüssigkeit, deren Oberfläche mit einer elastischen Membran abgedeckt ist, behandelt. In dem ersten Teil ist der Behälter fest. In dem allgemeinen Fall wird die Existenz der Eigenfrequenzen mit Hilfe der Methoden der Funktionalanalysis bewiesen. Für einen Kreiszylinderbehälter werden die Eigenfrequenzen des Systems bestimmt.

Im zweiten Teil ist der Behälter beweglich. Die Bewegungsgleichungen werden mit Hilfe eines Variationsprinzips erhalten und in der Gestalt einer Operatorgleichung in einem richtigen Hilbertraum geschrieben. Die Existenz der Eigenfrequenzen ergibt sich aus der Theorie der vollstetigen, selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum.

(Reçu le 29 mars 1988; révision: 9 Mai 1988)