PATRICK SUPPES

L'ARGUMENT PROBABILISTE POUR UNE LOGIQUE NON CLASSIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE*

I. L'ARGUMENT

Le but de cet article est simple. Je désire énoncer aussi clairement que possible, sans une longue digression dans des questions techniques, ce que je considère être l'argument unique le plus puissant en faveur de l'emploi d'une logique non classique en mécanique quantique. Il y a une très grande littérature mathématique et philosophique sur la logique de la mécanique quantique, mais à quelques exceptions près, cette littérature fournit une très pauvre justification intuitive du fait qu'on considère une logique non classique pour commencer. Le fameux article de Birkhoff et von Neumann (1936) constitue un exemple classique dans la littérature mathématique. Bien que Birkhoff et von Neumann aient examiné exhaustivement le développement des propriétés des géométries projectives et des géométries de lattices qui sont liées à la logique de la mécanique quantique, ils consacrent moins d'un tiers de page (p. 831) aux raisons physiques qui entraînent la considération de telles lattices. Qui plus est, les quelques lignes qu'ils y consacrent sont loin d'être claires. La littérature philosophique est toute aussi mauvaise à ce sujet. Une des discussions philosophiques les mieux connues là-dessus est celle qui est exposée dans le dernier chapitre du livre de Reichenbach (1944) sur les fondations de la mécanique quantique. Reichenbach offre une logique fonctionnelle de vérité à trois valeurs qui semble avoir peu de rapport avec les propositions de la mécanique quantique, qu'elles soient de nature expérimentale ou théorique. Ce que Reichenbach n'arrive pas à montrer, c'est comment la logique à trois valeurs qu'il propose possède un rôle fonctionnel quelconque dans le développement théorique de la mécanique quantique. Il est en effet facile de montrer que la logique qu'il propose ne pourrait certainement pas être adéquate pour un énoncé systématique et théorique

* Je désire remercier Jean et Claudine Donio pour la traduction de cet article à partir du manuscrit anglais.

Synthese **16** (1966) 74–85. © *D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Holland*

de la théorie telle qu'on la conçoit d'habitude. Les raisons pour cela deviendront claires plus tard dans le présent article. Les prémisses principales que je discute dans cet article sont peu nombreuses. Je vais les énoncer sans justification détaillée, de façon à ce que la structure générale de l'argument émerge de la façon la plus simple possible.

PREMISSE 1. *Dans les contextes physiques ou empiriques comportant l'application de la théorie de la probabilité en tant que discipline mathématique, la logique fonctionnelle qui est importante est la logique des événements ou propositions auxquels on assigne des probabilités, et non pas la logique des énoncés qualitatifs ou intuitifs que l'on fait sur la théorie formulée mathématiquement.* (Dans les applications classiques de la théorie de la probabilité, cette logique des événements est une algèbre d'ensembles de Boole; pour des raisons techniques, qui n'ont aucune importance ici, cette algèbre de Boole est généralement supposée additive dénombrable c.à.d., une σ-algèbre.)

PRÉMISSE 2. *L'algèbre des événements devrait satisfaire la condition qu'une probabilité est assignée à chaque événement ou élément de l'algèbre.*

PRÉMISSE 3. *Dans le cas de la mécanique quantique, des probabilités peuvent être assignées aux événements tels que position dans une certaine région ou moment dans des limites données, mais la probabilité de la conjonction de deux événements de ce type n'existe pas nécessairement.*

CONCLUSION: *La logique fonctionnelle de la mécanique quantique n'est pas classique.*

D'un point de vue scientifique, la conclusion tirée des prémisses est faible. Tout ce que l'on affirme, c'est que la logique fonctionnelle de la mécanique quantique n'est pas classique, ce qui signifie que l'algèbre des événements n'est pas une algèbre de Boole. Rien n'est dit au sujet de ce qu'*est* en réalité la logique de la mécanique quantique. Nous allons bientôt examiner cette question. Mais d'abord je désire être sûr que les arguments en faveur des prémisses énoncées soient clairs, ainsi que ceux qui conduisent des prémisses à la conclusion.

En ce qui concerne la première prémisse, plusieurs arguments sont en sa faveur. Une source de confusion considérable dans la discussion de la logique de la mécanique quantique a été la caractérisation de la classe des énoncés dont nous discutons la logique. D'un côté nous sommes mis en présence du fait que la mécanique quantique est une branche de la physique qui utilise des outils mathématiques hautement développés, et d'un autre côté les discussions sur la logique concernent les fondations des mathématiques elles-mêmes. Il est en général difficile de saisir la relation entre la caractérisation des liaisons propositionnelles qui semblent appropriées à une nouvelle logique et les nombreux concepts mathématiques de nature avancée qui doivent être disponibles pour un travail effectif en mécanique quantique. La question a souvent été posée de savoir comment on peut considérer le problème changer la logique de la mécanique quantique quand les mathématiques utilisées en mécanique quantique dépendent si complètement de la logique classique. Le but de cette première prémisse est de préciser le point essentiel de la discussion de la logique d'une science empirique. Comme dans le cas de la mécanique quantique, nous considérérons acquis le fait que la théorie de la probabilité intervient dans l'énoncé mathématique de la théorie. Dans chacun de ces cas une logique des événements est exigée comme fondation sousjacente de la théorie des probabilités. La structure de l'algèbre des événements exprime d'une façon exacte la structure logique de la théorie même.

En ce qui concerne la seconde prémisse, les arguments qui insistent sur le fait qu'une probabilité peut être assignée à chaque événement dans l'algèbre constitue déjà une partie de la théorie classique des probabilités. C'est seulement pour cette raison que l'on considère une algèbre, ou une σ-algèbre, d'ensembles comme base d'une théorie classique des probabilités. S'il était permis d'avoir des événements auxquels on ne pourrait assigner de probabilité, alors nous pourrions toujours prendre comme algèbre correspondante l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'espace des épreuves de base. L'hypothèse selon laquelle l'algèbre des événements doit avoir la propriété affirmée dans la seconde prémisse fait trop profondément partie de la théorie classique des probabilités pour que l'on ait besoin d'un argument supplémentaire ici. On peut dire que toute l'idée d'expliciter l'algèbre des événements est celle de caractériser explicitement les ensembles auxquels des probabilités peuvent être assignées. Il ne servirait à rien d'avoir une algèbre d'événements qui ne serait pas la famille entière des sous-ensembles de l'espace des épreuves donné, et cependant de ne pas être capable d'assigner une probabilité à chaque événement dans l'algèbre.

En ce qui concerne, la troisième prémisse, il est facile de montrer que l'algèbre des événements en mécanique quantique ne peut pas être fermée sous la réunion ou l'intersection d'événements. Une particle qui se trouve dans une certaine région de l'espace est un événement bien défini dans tous les traitements de la mécanique quantique classique. Il en est de même pour l'événement: moment d'une particule qui se trouve aussi dans une certaine région. Si l'algèbre des événements était une algèbre de Boole, alors nous pourrions demander tout de suite quelle est la probabilité de l'événement qui consiste en la réunion des deux premiers, c'est à dire, l'événement: la particule se trouve dans une certaine région à un temps donné t et a son moment compris dans un certain intervalle en ce même temps t. Ce que l'on peut montrer, est que la probabilité d'un tel événement composé n'existe pas dans la théorie classique. L'argument date de Wigner (1932) et j'ai essayé de le rendre aussi simple et aussi immédiat que possible dans Suppes (1961). L'argument détaillé ne sera pas reproduit ici. Son axe principal de développement est très direct. Dans le formalisme habituel nous pouvons calculer l'espérance d'un opérateur quand le système soumis à la mécanique quantique est dans un état donné. Dans le cas présent l'opérateur que nous choisissons est comme d'habitude celui qui donne la fonction caractéristique d'une répartition de probabilité à deux variables. Ayant obtenu la fonction caractéristique, nous pouvons ensuite l'inverser par les méthodes habituelles de Fourier. L'inversion devrait donner la densité qui correspond à la répartition jointe de la position et du moment. En fait, le résultat est que, pour la plupart des états de n'importe quel système en mécanique quantique, la densité qui en résulte n'est pas la densité d'une véritable répartition de probabilité. Nous concluons qu'en général la repartition jointe de deux variables aléatoires telles que position et moment n'existe pas en mécanique quantique et que, par conséquent, nous ne pouvons parler de la réunion de deux événements définis en terme de ces deux variables aléatoires. En ce qui concerne la logique de la science, le caractère fondamental de ce résultat se situe à un niveau beaucoup plus profond que le principe d'incertitude lui-même, car il n'y a rien dans le principe d'incertitude tel qu'on le formule habituellement qui aille à l'encontre de la théorie classique des probabilités.

La déduction de la conclusion à partir des trois prémisses est suffisament directe pour qu'on n'aie pas besoin de commentaire. De la prémisse (1) nous déduisons que la logique fonctionnelle des événements est l'algèbre formelle des événements sur laquelle une probabilité est définie. D'après la prémisse (2) une probabilité doit être assignée à tout élément, c.à.d. événement de l'algèbre. D'après la prémisse (3) l'algèbre des événements en mécanique quantique ne peut pas être fermée sous la réunion d'événements et satisfaire la prémisse (2). Ainsi l'algèbre des événements en mécanique quantique n'est pas une algèbre de Boole, parce que toute algèbre de Boole est fermée sous la réunion. Donc d'après la prémisse (1) la logique fonctionnelle de la mécanique quantique n'est pas une algébre de Boole et ainsi n'est pas classique.

II. LA LOGIQUE

Bien que la conclusion de l'argument ait été simplement l'énoncé négatif que la logique de la mécanique quantique n'est pas classique, on peut en dire beaucoup plus sur le côté positif, c.à.d., sur le type de logique qui semble être appropriée. Pour commencer, il sera utile de répéter ici la définition familière d'une algèbre, et d'une σ-algèbre d'ensembles.

DÉFINITION 1. *Soit X un ensemble non vide. $\mathscr{F}$ est une algèbre classique d'ensembles sur X si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille non vide de sous-ensembles de X et pour chaque A et B dans $\mathscr{F}$:*

1. $\sim A \in \mathscr{F}$.
2. $A \cup B \in \mathscr{F}$;

De plus, si $\mathscr{F}$ est fermée sous des unions dénombrables, c'est à dire, si pour $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{F}$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F},$$

alors $\mathscr{F}$ est une σ-algèbre classique sur X.

Il est alors normal d'utiliser les concepts de la Définition I pour définir celui d'un espace classique de probabilité. Dans cette définition nous supposons que la structure d'ensembles théorique de X, $\mathscr{F}$ et P est familière, en particulier, que X est un ensemble non vide, $\mathscr{F}$ une famille de sous-ensembles de X et P une fonction à valeurs réelles définie sur $\mathscr{F}$.

DÉFINITION 2. *Une structure $\mathscr{X} = \langle X, \mathscr{F}, P\rangle$ est un espace classique* *de probabilité additif fini, si et seulement si pour* chaque A et B dans $\mathscr{F}$:

P1 $\mathscr{F}$ *est une algèbre classique d'ensembles sur* X;

P2 $P(A) \geqslant 0$;

P3 $P(X) = 1$;

P4 *Si* $A \cap B = 0$, *alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De plus, $\mathscr{X}$ *est un espace classique de probabilité (sans restriction à l'additivité finie) si les deux axiomes suivants sont aussi satisfaits*:

P5 $\mathscr{F}$ *est une* σ*-algèbre d'ensembles sur* X;

P6 *Si* $A_1, A_2, \ldots,$ *est une suite d'événements incompatibles deux à deux dans* $\mathscr{F}$, c.à.d., $A_i \cap A_j = 0$ *pour* $i \neq j$, *alors*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

En modifiant les structures classiques caractérisées par les Définitions 1 et 2 pour expliquer les "faits" irréfutables de la mécanique quantique; il y a quelques possibilités de choix relativement arbitraires. L'une d'elles doit être décrite pour expliquer un aspect des structures qui seront bientôt définies. J'ai signalé plus tôt que la probabilité de la réunion de deux événements n'existe pas nécessairement en mécanique quantique. Une question plus délicate est celle de la probabilité de la réunion de deux événements disjoints. Dans ce cas il n'est pas possible d'observer les deux événements ensemble car la structure même de l'algèbre des événements élimine ce cas. D'un autre côté, il est théoriquement utile d'inclure l'union de deux événements de ce type dans l'algèbre des ensembles, de même que celle d'une suite dénombrable d'événements disjoints deux à deux, dans le cas d'une σ-algèbre. Cette attitude libérale envers le concept d'événement a été adopté ici, mais on doit noter qu'il serait possible de prendre une attitude plus stricte sans affecter le concept d'une quantité observable de façon notable. (Cette position plus stricte est prise par Kochen et Specker (1965), mais aussi, excluent-ils délibérément toute question de probabilité dans leur considération de la logique de la mécanique quantique.)

La logique de la mécanique quantique développée ici permet l'union d'événements disjoints, mise à part la question de variables aléatoires non commutatives, si cette question se trouve mêlée à leur définition. Une discussion plus détaillée sur ce point existe dans Suppes (1965). Grossièrement parlant, les définitions qui suivent expriment l'idée que la distribution de probabilité d'une seule variable aléatoire en mécanique quantique est classique, et que les déviations surgissent seulement quand plusieurs variables aléatoires ou différents types d'événements sont considérés.

L'approche incorporée dans la définition 3 suit Varadarajan (1962); elle en diffère par le fait que Varadarajan ne considère pas une algèbre d'ensembles, mais seulement l'algèbre abstraite.

DÉFINITION 3. *Soit X un ensemble non vide. $\mathscr{F}$ est une algèbre d'ensembles de mécanique quantique sur X, si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille non vide de sous-ensembles de X et que pour tout A et B dans $\mathscr{F}$:*

1 $\sim A \in \mathscr{F}$;

2 *Si* $A \cap B = 0$ *alors* $A \cup B \in \mathscr{F}$;

De plus, si $\mathscr{F}$ est fermée sous des unions dénombrables d'ensembles disjoints deux à deux, c'est à dire, si A_1, A_2, ... est une suite d'éléments de $\mathscr{F}$ tel que pour $i \neq j$, $A_i \cap A_j = 0$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F},$$

alors $\mathscr{F}$ est une σ-algèbre d'ensembles de mécanique quantique.

Dans le language de la théorie des lattices, une σ-algèbre $\mathscr{F}$ d'ensembles de mécanique quantique est un ordre partiel et orthocomplémenté d'ensembles où la relation d'ordre est l'inclusion d'ensemble, et l'orthocomplémentation est la complémentation d'ensemble dans $\mathscr{F}$ par rapport à l'ensemble X. Le théorème élémentaire qui suit est trivial à établir.

THÉORÈME 1. *Si $\mathscr{F}$ est une algèbre classique (ou une σ-algèbre) d'ensembles sur X, alors $\mathscr{F}$ est aussi une algèbre de mécanique quantique (ou une σ-algèbre) d'ensembles sur X.*

L'interprétation du Théorème 1 est claire. Il montre que le concept d'une algèbre d'ensembles de mécanique quantique est un concept strictement plus faible que celui d'une algèbre classique d'ensembles. Ceci n'est pas surprenant, vu l'échec des distributions de probabilité jointes en mécanique quantique. Nous ne pouvons espérer en dire autant, et la structure logique sous-jacente de nos espaces de probabilité réflète cette restriction.

Il est à peine nécessaire de répéter la définition des espaces de probabilité, car la seule chose qui change est la condition sur l'algèbre $\mathscr{F}$, mais dans un effort pour être complet et explicite, elle sera donnée ici.

DÉFINITION 4. *Une structure $\mathscr{X} = < X, \mathscr{F}, P >$ est un espace de probabilité additif fini en mécanique quantique si et seulement si pour tout A et B dans $\mathscr{F}$:*

P1 *$\mathscr{F}$ est une algèbre de mécanique quantique d'ensembles sur X.*

P2 $P(A) \geqslant 0$;

P3 $P(X) = 1$;

P4 *Si $A \cap B = 0$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

De plus, $\mathscr{X}$ est un espace de probabilité de mécanique quantique (sans restriction à l'additivité finie) si les deux axiomes qui suivent sont aussi satisfaits:

P5 *$\mathscr{F}$ est une σ-algèbre d'ensembles sur X de mécanique quantique:*

P6 *Si $A_1, A_2, \ldots,$ est une suite d'évènements incompatibles deux à deux dans $\mathscr{F}$, c.à.d., $A_i \cap A_j = 0$ pour $i = j$, alors*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Il est évident d'après la similitude des Définitions 2 et 4 qu'une conséquence immédiate du théorème I, est le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Tout espace de probabilité classique est aussi un espace de probabilité en mécanique quantique.*

Il va sans dire que dans le cas de ces deux théorèmes il est facile de donner des contre-exemples pour montrer que les réciproques ne sont pas vraies.

Les espaces de probabilité en mécanique quantique peuvent être utilisés comme base pour un développement axiomatique de la mécanique quantique classique mais la restriction aux algèbres d'ensembles pour forcer l'analogie avec les espaces classiques de probabilité est trop sévère. Les espaces que l'on vient de définir sont adéquats pour développer la théorie des quantités observables qui peuvent être définies en termes de position et de moment, mais non pas pour developper une théorie plus générale. La caractéristique fondamentale de la théorie générale réside dans le fait que toute algèbre en mécanique quantique n'est pas susceptible d'être incluse dans une algèbre de Boole, et que par conséquent elle n'est pas isomorphe à une algèbre d'ensembles de mécanique quantique, car toute algèbre d'ensembles de ce type peut évidemment être incluse dans l'algèbre de Boole de l'ensemble de tous les sous-ensembles de X.

Il est donc naturel de considérer l'analogue abstrait de la définition 3 et de définir le concept général d'une algèbre de mécanique quantique. (Les axiomes donnés ici simplifient ceux de Suppes (1965), qui eux-mêmes étaient basés sur ceux de Varadarajan (1962).) Soit A un ensemble non vide correspondant à la famille $\mathscr{F}$ de la Definition 2, soit $\leqslant$ une relation binaire sur A (la relation $\leqslant$ est l'analogue abstrait de l'inclusion d'ensemble), soit $'$ une opération unitaire sur A (l'opération $'$ est l'analogue abstrait de la complémentation d'ensemble), et soit I un élément de A (l'élément I est l'analogue abstrait de l'espace des épreuves X). Nous avons alors:

DÉFINITION 5. *Une structure* $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant, ', I \rangle$ *est une algèbre de mécanique quantique si et seulement si les axiomes suivants sont satisfaits pour tout a, b et c dans A* :

1 $a \leqslant a$;

2 *Si* $a \leqslant b$ *et* $b \leqslant a$ *alors* $a = b$;

3 *Si* $a \leqslant b$ *et* $b \leqslant c$ *alors* $a \leqslant c$;

4 *Si* $a \leqslant b$ *alors* $b' \leq a'$;

5 $(a')' = a$;

6 $a \leqslant I$;

7 *Si* $a \leqslant b$ *et* $a' \leqslant b$ *alors* $b = I$;

8 *Si* $a \leqslant b'$ *alors il y a un c dans A tel que* $a \leqslant c$, $b \leqslant c$, *et pour tout d dans A si* $a \leqslant d$ *et* $b \leqslant d$ *alors* $c \leqslant d$;

9 *Si* $a \leqslant b$ *alors il y a un c dans A tel que* $c \leqslant a'$, $c \leqslant b$ *et pour tout d dans A si* $a \leqslant d$ *et* $c \leqslant d$ *alors* $b \leqslant d$.

Les seuls axiomes qui soient un peu difficiles sont les trois derniers. Si l'opération d'addition pour des éléments disjoints étaient donnés, les trois axiomes seraient formulés comme suit:

7′ *$a+a'=I$;*

8′ *$a+b$ est dans A;*

9′ *Si $a \leqslant b$ alors il y a un c dans A tel que $a+c=b$.*

La difficulté avec l'opération d'addition est que nous ne voulons la définir que pour des éléments disjoints, c.à.d., des éléments a et b de A tel que $a \leqslant b'$.

Il est clair que l'on obtient une σ-algèbre en ajoutant aux axiomes de la définition 5 la condition que pour toute suite d'éléments disjoints deux à deux $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de A il y a un c dans A tel que pour tout n, $a_n \leqslant c$ et pour tout d dans A, si pour tout n, $a_n \leqslant d$, alors $c \leqslant d$.

THÉORÈME 3. *Tout algèbre d'ensembles de mécanique quantique est aussi une algèbre de mécanique quantique dans le sens de la définition 5.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ une algèbre d'ensembles de mécanique quantique sur X. On interprétera la relation $\leqslant$ de la définition 5 comme l'inclusion d'ensemble $\subseteq$, la complémentation $'$ comme la complémentation d'ensemble sous X. Les axiomes 4 et 5 seront satisfaits dans cette interprétation. On interprétera l'élément unité I comme l'ensemble X et alors l'axiome 6 sera satisfait parceque pour tout A dans $\mathscr{F}$, $A \subseteq X$. Pour ce qui est l'axiome 7, il est évident que si $A \subseteq B$ et $\sim A \subseteq B$, $A \cup \sim A \subseteq B$, si bien que $X \subseteq B$ et, comme $B \subseteq X$, $B = X$.

Quant à l'axiome 8, si $A \subseteq \sim B$, $A \cap B = 0$ et $A \cup B \in \mathscr{F}$ en conséquence du second axiome de la définition de l'algèbre d'ensembles; on peut alors choisir $C = A \cup B$ et alors l'axiome 8 sera satisfait car $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ et si $A \subseteq D$ et $B \subseteq D$, $A \cup B \subseteq D$.

Enfin, quant à l'axiome 9, on veut d'abord montrer que $B \sim A \in \mathscr{F}$. Or, par hypothèse, $A, B \in \mathscr{F}$; donc $\sim B \in \mathscr{F}$ et comme $A \subseteq B$, $A \cap \sim B = 0$ si bien que $A \cup \sim B \in \mathscr{F}$; mais alors comme $\mathscr{F}$ est fermé pour la complémentation $\sim(A \cup \sim B) = \sim A \cap B = B \sim A \in \mathscr{F}$. Il est facile de prouver, afin de vérifier l'axiome 9, que comme $A \subseteq B$ l'on a $B \sim A \subseteq \sim A$, $B \sim A \subseteq B$ et que pour tout D dans $\mathscr{F}$ si $A \subseteq D$ et $B \sim A \subseteq D$ alors $B \subseteq D$ puisque $A \cup (B \sim A) \subseteq D$ et que $A \cup (B \sim A) = B$; si bien que $B \sim A$ est le C dont cherchait à prouver l'existence.

Pour faire une analyse propositionnelle pour des algèbres de mécanique quantique, nous définissons la notion de validité comme d'habitude. D'une façon générale, dans l'analyse l'implication $\rightarrow$ correspond à la relation $\leqslant$ et la négation $\sim$ à l'opération de complémentation $'$. Nous disons qu'une formule propositionnelle est valide en mécanique quantique si elle est satisfaite dans toutes les algèbres de mécanique quantique, c.à.d., si dans l'interpretation attendue la formule désigne l'élément I de l'algèbre. L'ensemble de ces formules propositionnelles valides caractérise la logique sentencielle de la mécanique quantique. La structure axiomatique de cette logique sera étudiée dans un article ultérieur.

Je concluerai par une brève remarque sur la logique propositionelle à trois valeurs de Reichenbach. Il est facile de montrer que la logique de mécanique quantique définie ici n'est pas réellement une fonctionnelle de vérité à trois valeurs (pour plus de détails, voir Suppes (1965)). Il me semble clair que sa logique à trois valeurs n'a rien ou peu à faire avec la logique sous-jacente des espaces de probabilité en mécanique quantique, et j'ai essayé de montrer pourquoi la logique de probabilité de mécanique quantique est *la* logique de la mécanique quantique. Ce que je n'ai pas pu faire dans les limites de cet article a été de clarifier précisement pourquoi les algèbres caractérisées par la Définition 5 sont exactement adaptées à l'expression de la logique probabiliste de mécanique quantique. L'argument en faveur de ce choix est nécessairement long et technique. Un bon exposé de cette question apparaît en détail dans Varadarajan (1962).

Outre le fait qu'elles fournissent un argument mathématique complet pour la Définition 5, les algèbres de mécanique quantique ont beaucoup de propriétés intuitives communes avec les algèbres classiques ou Booléiennes. Les relations d'implication ou d'inclusion ont la plupart de leurs propriétés ordinaires, les algèbres sont fermées sous la négation, et la loi classique de la double négation est vraie. Les propriétés qui manquent sont celles de fermeture sous l'union et l'intersection – ou disjonction et conjonction – qui causeraient des difficultés pour les distributions de probabilité jointes non existantes.

Stanford University, Stanford, California

RÉFÉRENCES

Birkhoff, G., & von Neumann, J., 'The Logic of Quantum Mechanics', *Annals of Mathematics* **37** (1936) 823–43.

Kochen, S., & Specker, E. P., 'Logical Structures Arising in Quantum Theory' in *The Theory of Models* (Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley, ed. by J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski). Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, 177–89.

Reichenbach, H., *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*, University of California Press, Berkeley-Los Angeles 1944.

Suppes, P., 'Probability Concepts in Quantum Mechanics', *Philosophy of Science* **28** (1961) 378–89.

Suppes, P., 'Logics Appropriate to Empirical Theories' in *The Theory of Models* (Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley, ed. by J. W. Addison, L. Henkin, and A. Tarski). Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, 364–75.

Varadarajan, V. S., 'Probability in Physics and a Theorem on Simultaneous Observability', *Communications on Pure and Applied Mathematics* **15** (1962) 189–217.

Wigner, E., 'On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium', *Physical Review* **40** (1932) 749–59.