

A Priori Verbesserung von Schubkorrekturfaktoren zur Berechnung von geschichteten anisotropen Schalentragwerken

R. Klarmann und K. Schweizerhof, Karlsruhe

Übersicht: Bekanntermaßen liefern zweidimensionale Schalentheorien mit Einschluß von Schubverformungen basierend auf der Annahme linearen Verlaufs der Verschiebungen über die Schalendicke gute Ergebnisse für isotrope Probleme, wenn ein konstanter Schubkorrekturfaktor mit dem Wert $5/6$ verwendet wird. Für geschichtete anisotrope Querschnitte trifft diese einfache Verschiebungs- und damit Dehnungsannahme nicht zu. Um trotzdem mit einer einfachen Verschiebungsfunktion arbeiten zu können, müssen Modifikationen der Korrekturfaktoren zur Anpassung der transversalen Schubsteifigkeiten verwendet werden. Die vorliegende Studie befaßt sich mit einer verbesserten Berechnung von a priori ermittelten Schubkorrekturfaktoren für die Berechnung von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt [7]. Nach einem kurzen Überblick über den bisherigen Wissensstand wird die theoretische Herleitung dargelegt und anhand mehrerer Vergleichsrechnungen der Einfluß der neu hinzugenommenen Komponenten diskutiert. Für die Beispielrechnung wird ein bilineares Schalelement mit separaten Ansatzfunktionen für die transversalen Schubverzerrungen eingesetzt [6], [1], welches in das Programmpaket FEAP [14] implementiert und für geschichtete anisotrope Werkstoffe erweitert wurde.

A priori improvement of shear correction factors for the analysis of layered anisotropic shell structures

Summary: It is well known that shell theories, which incorporate shear deformations assuming a linear displacement function in shell thickness direction, can be applied to isotropic problems leading to good results, if a constant shear correction factor with a value of $5/6$ is used. For layered cross sections with anisotropic material these simple displacement and strain assumptions are too crude. Thus modifications of correction factors are necessary to adjust the transversal stiffness, if the linear displacement function is applied. The present study shows an improved analysis of a priori calculated shear correction factors for the analysis of shell structures with layered anisotropic cross sections. The theoretical concept is presented and the influence of the new added components is compared on the basis of some numerical examples. The numerical analysis is performed using a bilinear shell element with separate trial functions for the transversal shear strains [6, 1]. This element is implemented into the FE package FEAP [14] and is further developed for layered anisotropic materials [7].

1 Einleitung

Für die Berechnung von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropem Querschnitt werden üblicherweise Schalelemente, die auf der Schalenkinematik der Schalentheorie nach Reissner/Mindlin basieren, verwendet. Als kinematische Annahme für die Querschnittsdeformation wird äquivalent zur Bernoullihypothese der Balkentheorie Ebenbleiben der Schalenquerschnittsflächen vorausgesetzt. Unter dieser Annahme kann die Verschiebung eines beliebigen Schalenpunktes gemäß Bild 1 mit Hilfe der drei translatorischen Verschiebungskomponenten u_i einer Schalenreferenzfläche und der Rotationen ω_i um zwei beliebige Tangentenvektoren an die Referenzfläche wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_M(u_1, u_2, u_3) + \frac{1}{2} \vartheta_3 h \mathbf{R}(\omega_1, \omega_2) \mathbf{D}. \quad (1)$$

In Gleichung (1) ist \mathbf{x} der aktuelle Ortsvektor eines beliebigen Schalenpunktes, \mathbf{x}_M der aktuelle Ortsvektor der Schalenmittelfläche (= Referenzfläche), ϑ_3 die natürliche Koordinate in Schalendickenrichtung, h die Schalendicke, \mathbf{R} der Rotationstensor und \mathbf{D} der Schalendirektor.

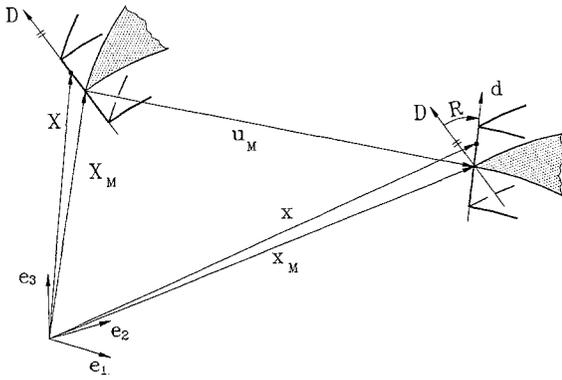


Bild 1. Kinematik eines Schalenpunktes mit linearem Ansatz

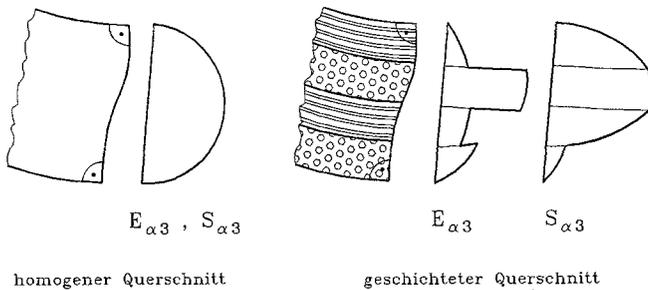


Bild 2. Verlauf der Querschnittsverformung und der transversalen Schubverzerrung und -spannung

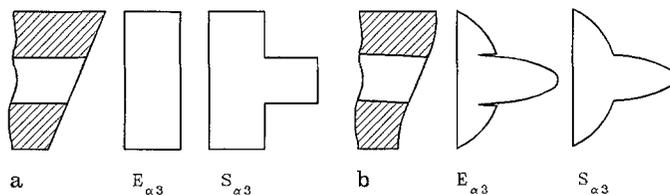


Bild 3 a, b. Qualitative Verläufe der transversalen Schubverzerrungen und -spannungen **a** bei der Uni-Direktor-Kinematik und **b** bei der Gleichgewichtsbetrachtung am differentiellen Element

Die tatsächliche Querschnittsdeformation weicht jedoch von der angenommenen Deformation stark ab (Bild 2). Schon bei homogenen Querschnitten zeigt sich über die Querschnittshöhe ein kubischer Deformationsverlauf. Bei geschichteten Querschnitten wird dieser schichtenweise kubisch, wobei sich an den Schichtgrenzen zusätzlich Unstetigkeiten in Form von Knicken einstellen. Die Verzerrungen weisen Sprünge an den Schichtgrenzen auf.

Die kinematische Annahme bewirkt, daß über die Schalendicke lediglich konstante transversale Schubverzerrungen und -spannungen abgebildet werden können. In Bild 3 sind qualitative Verläufe der transversalen Schubverzerrungen und -spannungen einerseits nach der Uni-Direktor-Kinematik und andererseits nach der tatsächlichen Querschnittsdeformation einander gegenübergestellt. Es sei allerdings bemerkt, daß bei sehr dünnen Schalen mit homogenem Querschnitt die Querschnittsdeformationen gering sind; bei geschichtetem Querschnitt sind sie eventuell von Bedeutung.

Durch diesen Approximationsfehler wird auch die Erfassung der transversalen Schubdeformationsarbeit verfälscht. Zur wirklichkeitsnäheren Erfassung der tatsächlichen virtuellen inneren Arbeiten aus den transversalen Schubdeformationen werden in der vorliegenden Studie die approximierten Querschubverzerrungen daher mit einem Korrekturfaktor abgemindert, der gewährleistet, daß sich die gleiche spezifische Deformationsenergie wie bei parabolischem Verlauf ergibt. Unter Vernachlässigung der nichtlinearen Effekte kann diese Berechnung a priori erfolgen und stellt

somit z. B. im Vergleich zur Verwendung höherer Ansatzordnungen in Schalendickenrichtung [13, 12, 19, 11, 18] ein sehr effizientes Verfahren dar.

Dieses Verfahren zur Herleitung und Verwendung von Schubkorrekturfaktoren ist im Schrifttum bekannt. Es sei hier bemerkt, daß die übliche Angabe von Schubfaktoren sich auf das Quadrat derselben bezieht, z. B. $k = 5/6$ und nicht $\sqrt{5/6}$. Bei anisotropen Materialien ist dies, wie sich später zeigen wird, nicht sinnvoll. Daher wird hier immer explizit das Quadrat der Schubkorrekturfaktoren verwendet. Cowper gibt in [4] Schubkorrekturfaktoren für homogene Rechteckbalken nach Timoschenko ($k^2 = 0.667$), Mindlin ($k^2 = 0.822$), Goodman ($\nu = \frac{1}{3}, k^2 = 0.870$), Roark ($k^2 = 0.833$) und nach eigenen Berechnungen ($\nu = 0, k^2 = 0.833$; $\nu = 0.3, k^2 = 0.850$; $\nu = 0.5, k^2 = 0.870$) an. Chow leitet in [3] durch Annäherung der tatsächlichen Schubdeformationsenergie Schubkorrekturfaktoren für anisotrope, geschichtete Werkstoffe mit symmetrischem Schichtaufbau her, wobei er für homogene Querschnitte den Wert 0.833 erhält. Whitney erweitert diese Theorie für Werkstoffe mit beliebigem Schichtaufbau in [13], [16] und [17]. Bert entwickelt in [2] den Schubkorrekturfaktor für einen geschichteten Balken und zeigt dabei die Kopplung zwischen Längsbeanspruchung und Biegung auf. In den genannten Arbeiten werden die Schubkorrekturfaktoren a priori aus den Geometrie- und Werkstoffkennwerten ermittelt.

A posteriori Schätzungen für Schubkorrekturfaktoren werden von Noor und Koautoren für Platten und Zylinderschalen in einer Reihe von Veröffentlichungen vorgeschlagen [8, 9, 10]. Hierbei werden aufgrund einer dreidimensionalen Nachlaufberechnung auf der Basis der Ergebnisse einer zweidimensionalen Schalenvorbereitung mit angenommenen Schubkorrekturfaktoren neue Schubkorrekturfaktoren geschätzt. Mit diesen Faktoren ergeben sich korrigierte Membran- und Transversalverschiebungen für jede Schicht, mit deren Hilfe dann neue Dehnungen und Spannungen berechnet werden können. Damit lassen sich die wirklichen Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungsverläufe über die Dicke in vielen Fällen gut annähern. Fraglich ist allerdings das Vorgehen bei nichtlinearem Verhalten; auch der Rechenaufwand liegt erheblich über dem der hier dargestellten a priori Verbesserung.

In den oben erwähnten Arbeiten liegen kaum Informationen zu Schubkorrekturfaktoren für beliebig orientierte Schichten vor. So werden für beliebige Orientierungen lediglich in [16] Werte angegeben, allerdings fehlt dort eine Aussage über ihre Wirkungsrichtung. Das Vorgehen in [17] entspricht einer Reduktion der Betrachtung auf die Hauptdiagonalglieder des Elastizitätstensors, was nur für orthogonale Lamine korrekt ist. In der vorliegenden Studie erfolgt nun eine Erweiterung der Betrachtung auf alle Außendiagonalglieder des Elastizitätstensors mit einer ausführlichen Diskussion der Auswirkung auf die Berechnung geschichteter Schalentragwerke.

Hierzu werden zwei verschiedene Verfahren zur a priori Berechnung von Schubkorrekturfaktoren hergeleitet und diskutiert. Beim ersten Verfahren werden die Außendiagonalglieder in der Elastizitätsmatrix vernachlässigt, die durch Rotation der Hauptstoffachsen um die lokale \vec{e}_3 -Achse nach Bild 6 nicht zu null werden. Beim zweiten Verfahren werden alle Glieder des transformierten Werkstofftensors mit entsprechender Transformation der Schubkorrekturfaktoren in die aktuelle Lage berücksichtigt.

Für die Beziehungen innerhalb der vorliegenden Studie werden folgende Vereinbarungen getroffen; siehe auch [5]:

1. Der Index i beschreibt die aktuelle Schicht und durchläuft bei Summationen die Werte 1 bis Anzahl der Schichten, sofern keine obere Grenze angegeben wird.
2. Sofern Klammerausdrücke mit dem Index i versehen sind, sind alle Terme innerhalb der Klammer von i abhängig.
3. Werden Zusammenhänge innerhalb einer Schicht beschrieben, so werden die einzelnen Terme nicht mit dem Index i versehen, sofern die Ausdrücke nur schichtabhängige Terme enthalten.
4. Die Komponenten des Elastizitätstensors werden, wie in Gleichung (3) angegeben, mit nur zwei Indizes bezeichnet. Sind ausnahmsweise 4 Indizes angegeben, so entspricht dies den Indizes des vierstufigen Elastizitätstensors.
5. Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention, d. h. über doppelt vorkommende Indizes wird aufsummiert. Sind Indizes mit $\langle \rangle$ versehen, so ist die Summationskonvention außer Kraft.

2 Transversale Schubspannungen und Schubverzerrungen

Mit der Uni-Direktor-Kinematik (Bild 1) und der 3-Koordinate in Dickenrichtung der Schale lassen sich die Verzerrungen im Schalenraum angeben zu:

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +u_{1,1} & & & & +\omega_{2,1}z \\ & +u_{2,2} & & +\omega_{1,2}z & \\ +u_{1,1} & +u_{2,1} & & +\omega_{1,1}z & +\omega_{2,2}z \\ & +u_{2,3} & +u_{3,2} & +\omega_1 & \\ +u_{1,3} & & +u_{3,1} & & +\omega_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

mit $u_{1,3} = u_{2,3} = 0$.

Für eine beliebige Rotation eines orthotropen Werkstoffes um die Hauptstoffachse in \tilde{e}_3 -Richtung nach Bild 6 ergeben sich die konstitutiven Beziehungen zu

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & C_{45} & \\ & & & C_{45} & C_{55} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Mit Gleichung (2) lassen sich lediglich über die Querschnittshöhe konstante transversale Schubverzerrungen E_{23} und E_{31} darstellen. Die transversalen Schubspannungen S_{23} und S_{31} sind nach Gleichung (3) über die schichtabhängigen konstitutiven Beziehungen mit diesen Verzerrungen verknüpft und somit auch schichtenweise konstant.

Im Gegensatz hierzu ergeben sich die transversalen Schubspannungen aus Gleichgewicht am differentiellen Element (siehe Bild 4) als von der Schalendickenrichtung abhängige Werte zu:

$$S_{23} = -\int_z (S_{12,1} + S_{22,2}) dz \quad (4)$$

$$S_{31} = -\int_z (S_{11,1} + S_{21,2}) dz.$$

Da die Spannungsanteile in der Schalenebene (S_{11} , S_{22} und S_{12}) über die konstitutiven Beziehungen in Gleichung (3) mit den nach Gleichung (2) über die Schalendicke linear veränderlichen Verzerrungskomponenten (E_{11} , E_{22} und E_{12}) verknüpft sind, ergibt sich für die transversalen Schubspannungen nach Gleichung (4) für jede Schicht jeweils ein parabolischer Verlauf. Die Folge sind Knickpunkte des Gesamtverlaufs an den Schichtgrenzen. Die daraus über die konstitutiven Beziehungen (Gleichung (3)) zurückgerechneten transversalen Schubverzerrungen haben ebenfalls jeweils einen parabolischen Verlauf in jeder Schicht. Sie sind jedoch an den Schichtgrenzen neben Knicken auch mit Sprüngen behaftet (Bild 3b).

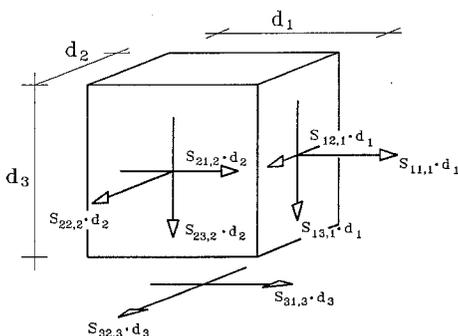


Bild 4. Zuwachs der Spannungsanteile für Gleichgewicht am differentiellen Element

Aus Bild 3 ist klar ersichtlich, warum eine nach der Uni-Direktor-Theorie ermittelte transversale Schubdeformationsenergie nicht der tatsächlichen Deformationsenergie entsprechen kann. Um diesen Fehler auszugleichen, wird im folgenden die transversale Schubdeformationsenergie einerseits mit Hilfe der aus der Uni-Direktor-Annahme gewonnenen Spannungen und andererseits unter Zugrundelegung der tatsächlichen Spannungen ermittelt. Durch einen Koeffizientenvergleich werden schließlich Schubkorrekturfaktoren gewonnen, die dann in einer Uni-Direktorthorie einsetzbar sind.

3 Schubdeformationsenergie bei einer Schalentheorie mit Uni-Direktor-Kinematik

Unter der Annahme über die gesamte Querschnittshöhe konstanter Schubverzerrungen und schichtenweise konstanter Schubspannungen berechnet sich die spezifische Schubdeformationsenergie über alle Schichten i zu

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \sum_i (S_{23i} 2E_{23} + S_{31i} 2E_{31}) z_i \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\sum_i S_{23i} \right) 2E_{23} + \left(\sum_i S_{31i} \right) 2E_{31} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Werden nun in den konstitutiven Beziehungen nach Gleichung (3) Schubkorrekturfaktoren k_1 und k_2 mit entsprechenden Transformationsbedingungen für die Außendiagonalglieder zu

$$\begin{bmatrix} S_{23} \\ S_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2^2 C_{44} & ck_1 sk_2 C_{45} \\ ck_1 sk_2 C_{45} & k_1^2 C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} \quad (6)$$

eingeführt, so lassen sich die Verzerrungen in Abhängigkeit von den Spannungen wie folgt angeben:

$$\begin{bmatrix} E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix} = \frac{1}{C_{44}C_{55} - c^2s^2C_{45}^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{k_2^2} C_{55} & -\frac{1}{ck_1 sk_2} C_{45} \\ -\frac{1}{ck_1 sk_2} C_{45} & \frac{1}{k_1^2} C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2S_{23} \\ 2S_{31} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Hierbei sind $c = \cos \alpha$ und $s = \sin \alpha$, mit α als Richtungswinkel des orthotropen Werkstoffgesetzes nach Bild 6. Die längenbezogenen Querkkräfte als Spannungsergebnisse der transversalen Schubspannungen nach Gleichung (6) lauten mit $k_1 = k_2 = 1$:

$$q_1 = \sum_i S_{31i} z_i = \sum_i 2E_{31} \left(C_{55i} + \frac{E_{23}}{E_{31}} c_i s_i C_{45i} \right) z_i \quad (8)$$

$$q_2 = \sum_i S_{23i} z_i = \sum_i 2E_{23} \left(C_{44i} + \frac{E_{31}}{E_{23}} c_i s_i C_{45i} \right) z_i.$$

Wird anschließend Gleichung (8) nach den Verzerrungskomponenten E_{31} und E_{23} aufgelöst und mit Gleichung (6) in Gleichung (5) eingesetzt, so ergibt sich die spezifische Schubdeformationsenergie zu:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{z}{C_{44}C_{55} - c^2s^2C_{45}^2} \right]_i \left[\frac{1}{k_1^2} C_{44i} \left(\frac{T_{2i}}{T_2} \right)^2 q_1^2 - 2 \frac{1}{k_1 k_2} c_i s_i C_{45i} \left(\frac{T_{1i} T_{2i}}{T_1 T_2} \right) q_1 q_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{k_2^2} C_{55i} \left(\frac{T_{1i}}{T_1} \right)^2 q_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} T_{1i} &= \left(C_{55\langle i \rangle} + \frac{E_{23}}{E_{31}} c_{\langle i \rangle} s_{\langle i \rangle} C_{45\langle i \rangle} \right) z_{\langle i \rangle}, & T_{2i} &= \left(C_{44\langle i \rangle} + \frac{E_{31}}{E_{23}} c_{\langle i \rangle} s_{\langle i \rangle} C_{45\langle i \rangle} \right) z_{\langle i \rangle}, \\ T_\alpha &= \sum_i T_{\alpha i} \end{aligned} \quad (10)$$

4 Tatsächliche Schubdeformationsenergie

Bei veränderlichen Schubspannungen und -verzerrungen geht Gleichung (5) über in:

$$W = -\frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{1}{C_{44}C_{55} - C_{45}^2} \int_h (C_{55}S_{23(z)}^2 - 2C_{45}S_{23(z)}S_{31(z)} + C_{44}S_{31(z)}^2) dz \right]. \quad (11)$$

Die Gleichgewichtsbetrachtungen am differentiellen Element nach Bild 4 bzw. Gleichung (4) liefern nach Einsetzen der Anteile des ebenen Spannungszustandes der konstitutiven Beziehungen gemäß Gleichung (3) nach der Verzerrungsdefinition gemäß Gleichung (2) die transversalen Schubspannungen in Abhängigkeit der zweiten Ableitungen der Verschiebungen:

$$S_{23}, S_{31} = f(\mathbf{u}_{,\alpha\beta}). \quad (12)$$

Durch Gleichgewichtsbetrachtungen am unbelasteten Element nach Bild 5 und durch Annahme konstanter Membranspannungen senkrecht zu ihrer Wirkungsrichtung in der Schalenebene erhält man die Beziehung in vektorieller Darstellung:

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = \mathbf{q} \quad (13)$$

mit der Belegung

$$\mathbf{n}_{,\alpha}^T = [n_{1,1} n_{2,1} m_{1,1} m_{2,1} n_{12,1} m_{12,1} n_{1,2} n_{2,2} m_{1,2} m_{2,2}]$$

und

$$(14)$$

$$\mathbf{q}^T = [0 \ 0 \ q_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_2].$$

Die partiellen Ableitungen der Spannungsergebnisse in Gleichung (13) lassen sich über die Definition der Spannungsergebnisse selbst

$$\begin{bmatrix} n_1 & , & m_1 \\ n_2 & , & m_2 \\ n_{12} & , & m_{12} \end{bmatrix} = \int [1, z] \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} dz \quad (15)$$

und durch Einsetzen der ebenen Spannungsanteile von Gleichung (3) und (2) in Abhängigkeit der 2. Verschiebungsableitungen angeben. Damit geht Gleichung (13) über in

$$\mathbf{Q}\mathbf{u}_{,\alpha\beta} = \mathbf{q} \quad (16)$$

bzw.

$$\mathbf{u}_{,\alpha\beta} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q} \quad (17)$$

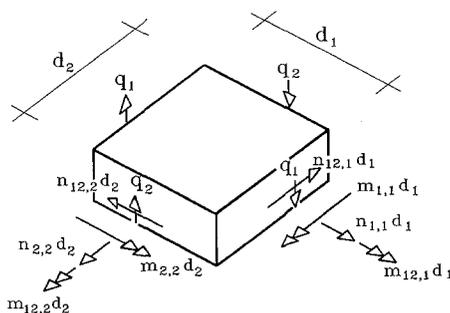


Bild 5. Gleichgewichtsbetrachtungen am unbelasteten Element

mit

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A_1 & A_4 & B_1 & B_4 & A_5 & B_5 & & A_5 & B_5 \\ A_4 & A_2 & B_4 & B_2 & A_6 & B_6 & & A_6 & B_6 \\ B_1 & B_4 & D_1 & D_4 & B_5 & D_5 & & B_5 & D_5 \\ B_4 & B_2 & D_4 & D_2 & B_6 & D_6 & & B_6 & D_6 \\ A_5 & A_6 & B_5 & B_6 & A_3 & B_3 & & A_3 & B_3 \\ B_5 & B_6 & D_5 & D_6 & B_3 & D_3 & & B_3 & D_3 \\ & A_3 & B_3 & & A_3 & B_3 & A_5 & A_6 & B_5 & B_6 \\ & B_3 & D_3 & & B_3 & D_3 & B_5 & B_6 & D_5 & D_6 \\ & A_5 & B_5 & & A_5 & B_5 & A_1 & A_4 & B_1 & B_4 \\ & A_6 & B_6 & & A_6 & B_6 & A_4 & A_2 & B_4 & B_2 \\ & B_5 & D_5 & & B_5 & D_5 & B_1 & B_4 & D_1 & D_4 \\ & B_6 & D_6 & & B_6 & D_6 & B_4 & B_2 & D_4 & D_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

und

$$\mathbf{u}_{,\alpha\beta}^T = [u_{1,11}u_{2,12}\omega_{2,11}\omega_{1,12}u_{2,11}\omega_{1,11}u_{1,22}\omega_{2,22}u_{1,12}u_{2,22}\omega_{2,12}\omega_{1,22}]. \quad (19)$$

Die Querschnittswerte in Gleichung (18) ergeben sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} = \int_h \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix} [C_{11}C_{22}C_{33}C_{12}C_{13}C_{23}] dz. \quad (20)$$

Führt man weiterhin die Matrix \mathbf{H} als Teil der Inversen von \mathbf{Q} mit der Zuweisung

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} Q_{13}^{-1}, Q_{23}^{-1}, & \dots & Q_{123}^{-1} \\ Q_{112}^{-1}, Q_{212}^{-1}, & \dots & Q_{1212}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

die Integrationsergebnisse

$$z_n = \frac{1}{n} (z_0^n - z_u^n), \quad n = 1 \dots 5 \quad (22)$$

und die schichtenweise konstanten Größen $r_{\xi\alpha}$, $t_{\xi\alpha}$ und $d_{\xi\alpha}$ mit

$$\begin{aligned} r_{\xi 1} &= C_{11}H_{1\xi} + C_{12}H_{2\xi} + C_{13}(2H_{9\xi} + H_{5\xi}) + C_{23}H_{10\xi} + C_{33}(H_{7\xi} + H_{2\xi}) \\ r_{\xi 2} &= C_{12}H_{9\xi} + C_{22}H_{10\xi} + C_{23}(2H_{2\xi} + H_{7\xi}) + C_{13}H_{1\xi} + C_{33}(H_{9\xi} + H_{5\xi}) \\ t_{\xi 1} &= C_{11}H_{3\xi} + C_{12}H_{4\xi} + C_{13}(2H_{11\xi} + H_{6\xi}) + C_{23}H_{12\xi} + C_{33}(H_{4\xi} + H_{8\xi}) \\ t_{\xi 2} &= C_{12}H_{11\xi} + C_{22}H_{12\xi} + C_{45}(2H_{4\xi} + H_{8\xi}) + C_{13}H_{3\xi} + C_{33}(H_{6\xi} + H_{11\xi}) \\ d_{\xi\alpha} &= - \sum_{j=1}^{i-1} [(r_{\xi\alpha} + t_{\xi\alpha}) z_1]_j + r_{\xi\alpha} z_u + \frac{1}{2} t_{\xi\alpha} z_u^2 \end{aligned} \quad (23)$$

ein, so lassen sich die transversalen Schubspannungen nach Gleichung (4) in Abhängigkeit der bezogenen transversalen Schubkräfte q_1 und q_2 ausdrücken. Damit ergibt sich die spezifische Schubdeformationsenergie, über die Indizes α , β , ξ und η nach der Einsteinschen Summationskonvention aufsummiert, zu:

$$W_2 = -\frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{1}{C_{44}C_{55} - C_{45}^2} (-1)^{\alpha+\beta} C_{\alpha 3 \beta 3} \right\}_i [(d_{\xi\alpha} d_{\xi\beta} + d_{\xi\alpha} d_{\eta\alpha}) z_1$$

$$\begin{aligned}
& + 2(d_{\xi\alpha}d_{\eta\alpha} + d_{\eta\alpha}r_{\xi\beta} + d_{\eta\beta}r_{\xi\alpha} + d_{\xi\alpha}r_{\eta\beta}) z_2 \\
& + (0.5(d_{\xi\alpha}t_{\eta\alpha} + d_{\eta\alpha}t_{\xi\beta} + d_{\eta\beta}t_{\xi\alpha} + d_{\xi\alpha}t_{\eta\beta}) + r_{\xi\beta}r_{\eta\alpha} + r_{\xi\alpha}r_{\eta\beta}) z_3 \\
& + 0.5(r_{\xi\alpha}t_{\eta\alpha} + r_{\eta\alpha}t_{\xi\beta} + r_{\eta\beta}t_{\xi\alpha} + r_{\xi\alpha}t_{\eta\beta}) z_4 + 0.25(t_{\xi\beta}t_{\eta\alpha} + t_{\eta\beta}t_{\xi\alpha}) z_5 \Big] q_{\xi} q_{\eta} \Big\} \quad \alpha, \beta, \xi, \eta = 1, 2. \quad (24)
\end{aligned}$$

5 Ermittlung der Schubkorrekturfaktoren

Die Schubkorrekturfaktoren können in dem beschriebenen Verfahren a priori für jede einzelne Schicht berechnet werden. Zunächst werden die spezifischen Schubdeformationsenergien nach den Gleichungen (9) und (24) in Richtung der beiden Hauptstoffachsen \hat{e}_1 und \hat{e}_2 der betrachteten Schicht berechnet. Dazu müssen die Werkstoffgesetze der jeweils anderen Schichten in die Hauptstoffachsen der aktuellen Schicht transformiert werden. Die Schubkorrekturfaktoren in Gleichung (9) können schließlich durch Koeffizientenvergleich von q_1^2 und q_2^2 in Gleichung (24) berechnet werden.

Verfahren 1 – Teilweise Berücksichtigung des Werkstoffgesetzes

Bei dieser Berechnungsart werden diejenigen Komponenten im Werkstoffgesetz vernachlässigt, die durch die Rotation der Hauptstoffachsen um die \hat{e}_3 -Achse nach Bild 6 entstehen, d. h., es werden $C_{13} = C_{23} = C_{45} = 0$ gesetzt. Diese vereinfachte Vorgehensweise entspricht derjenigen in [17].

Verfahren 2 – Vollständige Berücksichtigung des Werkstoffgesetzes

Diese Berechnungsart berücksichtigt die vollständigen Ausdrücke in den Gleichungen (9) und (24). Das Außendiagonalglied C_{45} wird dabei mit dem Vorfaktor $\cos \alpha \sin \alpha$ multipliziert, welcher durch Transformation der entsprechenden Verzerrungen und Spannungen entsteht.

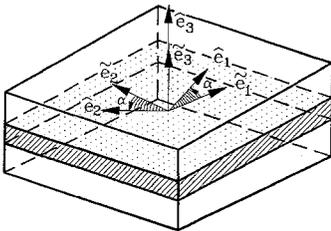


Bild 6. Lokales kartesisches Koordinatensystem des Elements (\hat{e}_i) und kartesisches Hauptstoffachsensystem der aktuellen Schicht (\hat{e}_i)

6 Vergleich mit Beispielen aus dem Schrifttum

Für verschiedene Schichtaufbauten mit anisotropen Werkstoffen sind im Schrifttum [16], [17] und [3] richtungsbezogene Schubkorrekturfaktoren angegeben. Zum Vergleich mit den Referenzlösungen werden die Schubkorrekturfaktoren der zugrundeliegenden Lamine sowohl mit Verfahren 1 als auch mit Verfahren 2 berechnet. Es ist darauf hinzuweisen, daß die Angaben im Schrifttum bei beliebigen Faserorientierungen (Beispiele 4 und 5) unvollständig sind, da die Wirkungsrichtungen der Schubkorrekturfaktoren fehlen. Aus diesem Grund sind lediglich die Beispiele mit zueinander orthogonal angeordneten Hauptstoffachsen wirklich miteinander zu vergleichen.

Für alle Beispiele werden orthogonal anisotrope Werkstoffe zugrunde gelegt. Die Materialparameter werden dabei wie in Tabelle 1 angenommen:

Tabelle 1. Untersuchte Kombinationen der Werkstoffkennwerte

Werkstoff 1:	$E_1 = 25.e6$	$E_2 = 1.e6$	$E_3 = 1.e6$	[N/mm ²]
	$\nu_{12} = 0.25$	$\nu_{23} = 1.50$	$\nu_{31} = 0.01$	
	$G_{12} = 0.5e6$	$G_{23} = 0.2e6$	$G_{31} = 0.5e6$	[N/mm ²]
Werkstoff 2:	$E_1 = 0.5e6$	$E_2 = 0.04e6$	$E_3 = 0.04e6$	[N/mm ²]
	$\nu_{12} = 0.00$	$\nu_{23} = 0.00$	$\nu_{31} = 0.00$	
	$G_{12} = 0.016e6$	$G_{23} = 0.06e6$	$G_{31} = 0.06e6$	[N/mm ²]
Werkstoff 3:	$E_1 = 40.e6$	$E_2 = 1.e6$	$E_3 = 1.e6$	[N/mm ²]
	$\nu_{12} = 0.25$	$\nu_{23} = 0.00$	$\nu_{31} = 0.00$	
	$G_{12} = 0.6e6$	$G_{23} = 0.5e6$	$G_{31} = 0.6e6$	[N/mm ²]

Die untersuchten Schichtaufbauten bestehen aus unterschiedlichen Schichtanzahlen, Faserorientierungen und Werkstoffen. Die den Beispielen zugrundeliegenden Werkstoffzuweisungen, Faserorientierungen in Grad und Schichten werden wie in Tabelle 2 angenommen:

Tabelle 2. Liste der untersuchten Beispiele

Beispiel	Schichtorientierung	Schichtdicken [bezogen auf 1]
1) Werkstoff 1	aus [17] [90/0/0/90]	[0.25/0.25/0.25/0.25]
2) Werkstoff 1	aus [17] und [2] [90/0]	[0.5/0.5]
3) Werkstoff 1	aus [16] [0/90/.../90/0] ₉	[0.1/0.125/.../0.125/0.1] ₉
4) Werkstoff 1	aus [16] [30/-30]	[0.5/0.5]
5) Werkstoff 1	aus [16] [30/-30/-30/30]	[0.25/0.25/0.25/0.25]
6) Werkstoff 1 u. 2	aus [16] [0 ₁ /0 ₂ /0 ₁]	[0.1 ₁ /0.8 ₂ /0.1 ₁]
7) Werkstoff 3	aus [3] [0/90/90/0]	[0.25/0.25/0.25/0.25]

Der Vergleich der ermittelten Schubkorrekturen mit Beispielen aus dem Schrifttum in Tabelle 3 zeigt bei orthogonal zueinander stehenden Schichten recht gute Übereinstimmung. Wie erwartet liefern Verfahren 1 (ohne Außendiagonalglieder) und Verfahren 2 (mit Außendiagonalgliedern) für diese Lamine identische Ergebnisse. Bei beliebig orientierten Schichten weichen die Ergebnisse voneinander ab bzw. sind wegen im Schrifttum fehlender Angaben bezüglich ihrer Wirkungsrichtungen nicht miteinander zu vergleichen. Die Ergebnisse nach Verfahren 1 und 2 weisen hierbei Unterschiede um bis zu 10% (Beispiel 5) auf.

Bei homogenen Querschnitten geht der Schubkorrekturfaktor k^2 unabhängig von der Querkontraktion gegen den Wert 0.833.

Tabelle 3. Gegenüberstellung der Rechenergebnisse mit Werten aus dem Schrifttum

Beispiel	Schrifttum		Verfahren 1		Verfahren 2	
	k_1^2	k_2^2	k_1^2	k_2^2	k_1^2	k_2^2
1)	0.5952	0.7205	0.5952	0.7203	0.5952	0.7203
2)	0.8212	0.8212 ^a	0.8209	0.8209	0.8209	0.8209
3)	0.6891	0.6112	0.6891	0.6112	0.6891	0.6112
4) + 30°	0.8592	0.8592 ^b	0.7799	0.8479	0.7788	0.8396
5) + 30° - 30°	0.6730	0.7549 ^b	0.7034 0.6649	0.7480 0.6493	0.6306 0.6729	0.7904 0.6352
6)	0.4098	0.6915	0.4094	0.6920	0.4094	0.6920
7)	0.8280	0.5210	0.8277	0.5215	0.8277	0.5215

^a Unter Vernachlässigung aller Außendiagonalglieder im Werkstoffgesetz ($C_{12} = C_{13} = C_{23} = C_{45} = 0$) ergeben sich die gleichen Werte.

^b Die maßgeblichen Richtungen der Schubkorrekturfaktoren wurden nicht angegeben.

7 Studien zum Einfluß der Schubdeformation

Um den Einfluß der Schubdeformationen bei geschichteten Schalentragwerken einschätzen zu können, werden im folgenden zunächst die Abhängigkeit der richtungsabhängigen Schubkorrekturfaktoren von der Faserorientierung der Schichten eines zweilagigen Querschnitts aufgezeigt. Anschließend werden am Beispiel eines Kreisbogens unter Einzellast die Schubdeformationen mit den hergeleiteten Korrekturfaktoren denen mit dem im allgemeinen üblichen Faktor $k^2 = 5/6$ ermittelten Werten gegenübergestellt und mit einer vollständigen Kontinuumslösung verglichen.

Zur Einflußstudie wird bei einem 2-lagigen Schichtaufbau (Bild 7) die Faserrichtung einer Schicht um den Winkel α gegenüber der anderen verdreht. Hierbei zeigt sich ein Abfall der Schubkorrekturfaktoren um ca. 30%. Der Vergleich der Verläufe der Schubkorrekturfaktoren nach Verfahren 1 und Verfahren 2 zeigt, daß die Berücksichtigung der Außendiagonalglieder im Werkstoffgesetz einen wesentlichen Einfluß vor allem im Bereich $20^\circ < \alpha < 60^\circ$ besitzt.

In der anschließenden Studie wird der Einfluß der Schubdeformation an einem Tragwerk in Abhängigkeit der Faserorientierung der Schichten und der Krümmung des Bogens veranschaulicht.

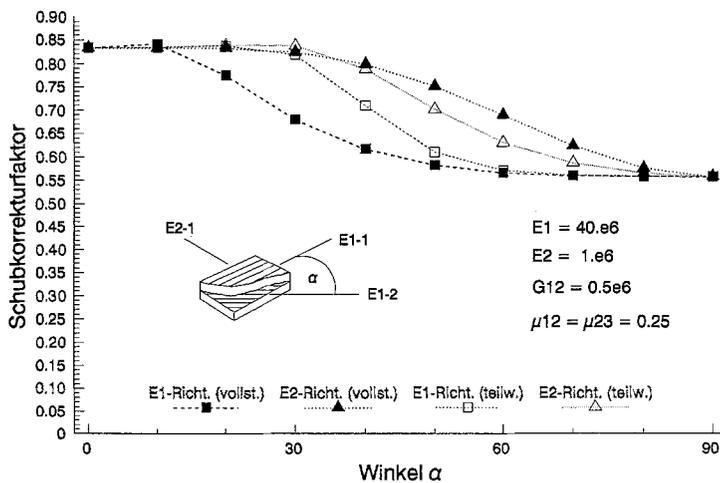


Bild 7. Verlauf der Schubkorrekturfaktoren in E1- und E2-Richtung über den Richtungswinkel α bei einem 2-lagigen Schichtaufbau und Richtungsänderung einer Schicht. Vergleich der Werte nach den Verfahren 1 (\equiv voll.) und 2 (\equiv teilw.)

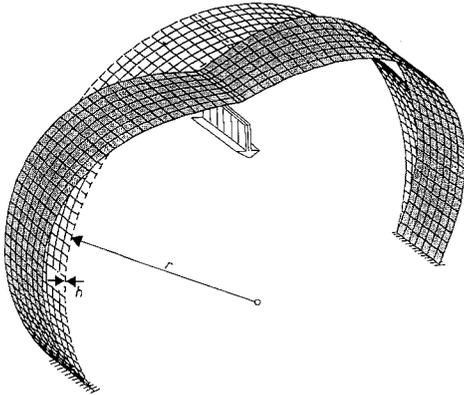


Bild 8. Kreisbogenträger unter Linienlast

Dazu werden bei einem an den Fußpunkten eingespannten und durch eine vertikale Linienlast in Trägermitte belasteten Kreisbogenträger mit der Bogenlänge a nach Bild 8 der Radius R und der Faserwinkel α der oberen Schicht variiert. Als Werkstoff wird orthotropes Graphit-Epoxy-Material mit einem extrem großen Verhältnis der Hauptlängsdehnsteifigkeit zur transversalen Schubsteifigkeit

$$\begin{aligned} E_1 &= 40.e6 & E_2 &= 1.e6 & E_3 &= 1.e6 \\ \nu_{12} &= 0.15 & \nu_{23} &= 0.00 & \nu_{31} &= 0.00 \\ G_{12} &= 0.6e6 & G_{23} &= 0.5e6 & G_{31} &= 0.6e6 \end{aligned}$$

angenommen.

Um Lasteinleitungsprobleme zu verhindern, wird die Linienlast auf 3 Knotenreihen im Abstand $a/100$ in der Mitte des Trägers verteilt. Zur Einsparung von Rechenzeit wird das System symmetrisch angenommen und lediglich am halben System gerechnet, obgleich dies bei einer Faserrichtung $\alpha \neq 0^\circ, 90^\circ$ fertigungstechnisch nicht sinnvoll ist, da dann die Fasern in der Symmetrieebene mit Knicken behaftet wären. In Bild 9 werden die Verhältnisse der Gesamtdurchbiegung zur reinen Biegedurchbiegung in Bogenmitte dargestellt. Die reine Biegeverformung wurde dabei mit um den Faktor 10^6 künstlich vergrößerten transversalen Schubmoduln ermittelt.

Die Ergebnisse zeigen wie schon bei der Ermittlung der Schubkorrekturfaktoren bei einem Faserwinkel zwischen 10° und 60° den stärksten Einfluß. Der Unterschied in der Gesamtverschiebung bei Anwendung der Schubkorrekturfaktoren mit und ohne Berücksichtigung der Außendiagonalglieder beträgt dabei bis zu ca. 10% und gegenüber der Anwendung des Schubkorrekturfaktors des homogenen Querschnitts ($k^2 = 5/6$) bis zu ca. 15% beim mäßig dicken ($R/h = 5$), aber stark gekrümmten Kreisbogenträger nach Bild 9.

Mit abnehmender Krümmung werden die Unterschiede zwischen den Ergebnissen geringer. Bei schwach gekrümmten Schalenträgwerken (ab ca. $R/h \geq 50$) kann die Korrektur der Schubdeformationsarbeit mit den Schubkorrekturfaktoren ohne Berücksichtigung der Außendiagonalglieder genau genug erfolgen. Eine Anwendung des Schubkorrekturfaktors des homogenen Querschnitts ($k^2 = 5/6$) führt jedoch auch hier zu feststellbaren Fehlern.

8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Studie wurde die Ermittlung von verbesserten Schubkorrekturfaktoren vorgestellt und der Einfluß der zusätzlich berücksichtigten Komponenten auf die Berechnung von Schalenträgwerken mit geschichteten anisotropen Querschnitten ausführlich diskutiert. Hierbei zeigt sich, daß vor allem bei stark gekrümmten Schalenträgwerken aus Werkstoffen mit großem E/G Verhältnis der Einfluß der transversalen Schubdeformationsarbeit signifikant werden kann und somit eine genauere Ermittlung der Schubkorrekturfaktoren unerlässlich ist.

Die Berücksichtigung des vollständigen Werkstoffensors wirkt sich bei beliebigen, nicht orthogonalen Faserorientierungen aus. Die Verschiebungen des hier gezeigten Beispiels veränderten

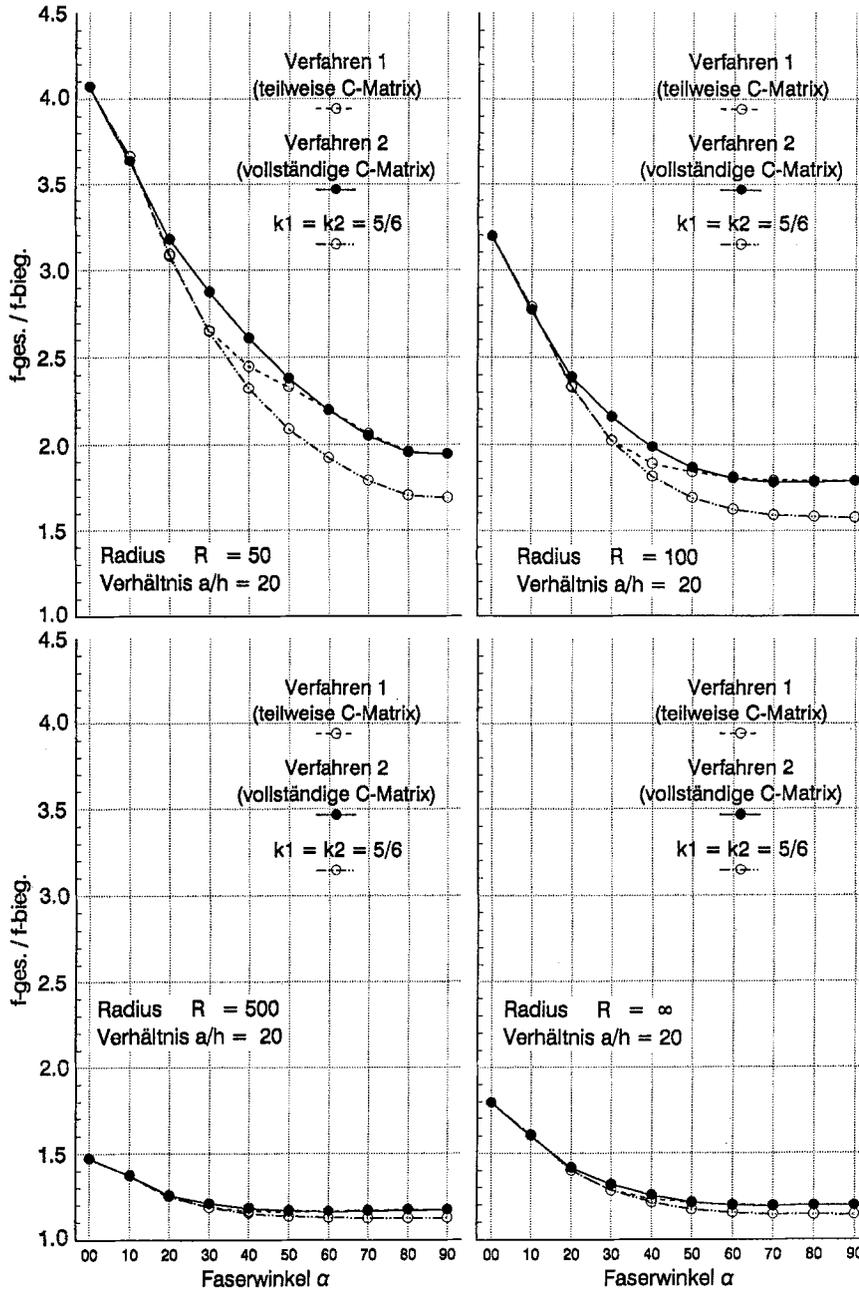


Bild 9. Gesamtdurchbiegung zum reinen Biegeanteil bei $a = 200$ und $h = 10$

sich um bis zu 10% gegenüber einer unvollständigen Berücksichtigung. Eine Berechnung mit den Schubkorrekturfaktoren des homogenen Querschnitts kann die Ergebnisse um bis zu 15% verfälschen.

Der geringfügig höhere Aufwand der vorgestellten a priori Ermittlung von angepaßten Schubkorrekturfaktoren erscheint daher auch besonders im Hinblick auf imperfektionempfindliche Stabilitätsberechnungen gerechtfertigt. Für dickere Schalen aus Composite Werkstoffen sind allerdings Theorien mit höheren Ansatzordnungen über den Querschnitt [11] vorzuziehen, wobei für geometrisch nichtlineare Probleme noch keine zufriedenstellenden Lösungen vorliegen.

Abschließend sei noch bemerkt, daß der Schubeinfluß bei anderen Werkstoffen wie z. B. Stahl oder Beton infolge wesentlich größerer Schubsteifigkeiten erheblich geringer ist. Dann ist naturgemäß der Einfluß eines genauen Schubkorrekturfaktors für Schalenberechnungen dünner und mässig dicker Schalen auch bei starker Krümmung vernachlässigbar klein.

Literatur

1. Bathe, K. J.; Dvorkin, E.: A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 22 (1986) 679–722
2. Bert, C. W.: Simplified analysis of static shear factors for beams of non homogeneous cross section. *J. Comp. Mat.* 7 (1973) 525–529
3. Chow, T. S.: On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *J. Comp. Mat.* 5 (1971) 306–319
4. Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenkos beam theory. *Trans. ASME/E: J. Appl. Mech.* 33 (1966) 335–340
5. de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Berlin: Springer 1982
6. Gebhardt, H.: Finite Element-Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen (Diss.). Bericht Nr. 10, Institut für Baustatik, Uni Karlsruhe, 1990
7. Klarmann, R.: Nichtlineare Finite Element-Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt (Diss.). Bericht Nr. 12, Institut für Baustatik, Uni Karlsruhe, 1991
8. Noor, A. K.; Peters, J. M.: A posteriori estimates for shear correction factors in multilayered composite cylinders. *J. Eng. Mech.* 115 (1989) 1225–1244
9. Noor, A. K.; Burton, W. S.; Peters, J. M.: Predictor – corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 82 (1990) 341–363
10. Noor, A. K.; Burton, W. S.: Predictor – corrector procedures for thermal buckling analysis of multilayered composite plates. *Comp. & Struct.* 40 (1991) 1071–1084
11. Pandya, B. N.; Kant, T.: Flexural analysis of laminated composites using refined higher order C^0 plate bending elements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 66 (1988) 173–198
12. Phan, N. P.; Reddy, J. N.: Analysis of laminated composite plates using a higher – order shear deformation theory. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 21 (1985) 2201–2219
13. Reddy, J. N.: A simple higher order theory for laminated composite plates. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* 51 (1984) 745–752
14. Taylor, R. L.: FEAP – A finite element analysis programm. University of California, Berkeley, USA. Erweiterungen: Schweizerhof, K.; Gebhardt, H.; Klarmann, R.; Baumann, M.: FEAP – Karlsruhe. Institut für Baustatik, Uni Karlsruhe, 1990
15. Whitney, J. M.; Pagano, N. J.: Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Trans. ASME/E: J. Appl. Mech.* 37 (1970) 1031–1036
16. Whitney, J. M.: Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.* 6 (1972) 426–440
17. Whitney, J. M.: Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Trans. ASME/E: J. Appl. Mech.* 40 (1973) 302–304
18. Whitney, J. M.; Sun, C. T.: A higher order theory for extensional motion of laminated isotropic shells and plates. *J. Sound. Vibr.* 30 (1973) 85
19. Wung, P. M.; Reddy, J. N.: A transverse deformation theory of laminated composite plates. *Comp. & Struct.* 41 (1991) 821–833

Eingegangen am 28. Februar 1992

Dr.-Ing. R. Klarmann
Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof
Universität Karlsruhe
Institut für Baustatik
Kaiserstr. 12
7500 Karlsruhe
Deutschland