Eindeutigkeitssätze für die Dirichletsche Randwertaufgabe bei elliptisch-parabolischen Differentialgleichungen und untere Schranken für den kleinsten Eigenwert

MANFRED PISTERS
Vorgelegt von L. COLLATZ

1. Einleitung

Es sei G ein beschränktes Gebiet im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n ($n \geqq 2$), dessen Punkte mit $x=(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet werden. Auf $\bar{G}$ seien die reellwertigen Funktionen $a_{ik}(x)=a_{ki}(x)$, $a_i(x)$, $(i, k=1, \ldots, n)$, $a(x)$ und $f(x)$ definiert und stetig. $g(x)$ sei eine auf $\dot{G}$ erklärte, stetige Funktion. Dabei wird mit $\dot{G}$ der Rand von G bezeichnet.

Es wird nun in $\bar{G}$ die Differentialgleichung

$$Du \equiv D_1 u + a(x) u = f(x) \tag{1.1}$$

mit

$$D_1 u := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i}$$

betrachtet. Diese Differentialgleichung sei elliptisch in G; sie kann auf Teilstücken von $\dot{G}$ oder ganz $\dot{G}$ parabolisch sein. Die Differentialgleichung (1.1) heißt dabei elliptisch in G (bzw. elliptisch auf einer Teilmenge von $\bar{G}$), falls es dort eine positive, stetige Funktion $\rho(x)$ so gibt, daß dort für jedes n-tupel von reellen Zahlen $(y_1, \cdots, y_n)$

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) y_i y_k \geqq \rho(x) \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{1.2}$$

gilt.

In dieser Arbeit werden mit Hilfe bekannter Verallgemeinerungen des Maximum-Minimum-Prinzips neue hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß die 1. oder Dirichletsche Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Du &= f(x) \quad \text{in } G \\ u &= g(x) \quad \text{auf } \dot{G} \end{aligned} \tag{1.3}$$

höchstens eine Lösung $u(x) \in C^2(G) \cap C^0(\bar{G})$ besitzt. Die hinreichenden Bedingungen besitzen dabei die Form $a(x) < h(x)$ in $\bar{G}$, wobei $h(x)$ eine in G stetige Funktion ist.

Wird das Eigenwertproblem

$$(1.4) \qquad \begin{aligned} D_1 u + \lambda u &= 0 \quad \text{in } G \\ u &= 0 \quad \text{auf } \dot{G} \end{aligned}$$

betrachtet, so gilt für den kleinsten Eigenwert λ_1 dieses Eigenwertproblems die Abschätzung

$$(1.5) \qquad \lambda_1 \geqq \inf_{x \in G} h(x).$$ [1]

Daher liefert der Eindeutigkeitssatz für das Randwertproblem (1.3) zugleich eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems (1.4).

Viele Autoren setzen bei der Untersuchung der Frage, ob die Randwertaufgabe (1.3) höchstens eine Lösung besitzt, voraus, daß $a(x) \leqq 0$ in G oder (1.1) elliptisch in $\bar{G}$ ist (siehe etwa R. COURANT & D. HILBERT [1], G. HELLWIG [4], C. MIRANDA [7] und M. H. PROTTER & H. F. WEINBERGER [18]). In einer Reihe von meist neueren Arbeiten (siehe O. A. OLEĬNIK [8], [9], [10], A. GENOV [2], [3], I. RAĬČINOV [22] und S. A. TERSENOV [24]) werden unter verschiedensten Voraussetzungen Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätssätze für verallgemeinerte Lösungen der 1. Randwertaufgabe bei elliptisch-parabolischen Differentialgleichungen bewiesen. Allen diesen Arbeiten gemeinsam ist jedoch, daß sie bis auf [24], wo $a(x) \leqq 0$ in G gefordert wird, $a(x) \leqq a_0 < 0$ mit geeignetem a_0 voraussetzen. R. S. PHILLIPS & L. SARASON [13] fordern anstelle von $a(x) \leqq a_0 < 0$ in G

$$2a(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \leqq \gamma_0 < 0 \quad \text{in } G,$$

und K. SUZUKI [23] ersetzt $a(x) \leqq a_0 < 0$ in G durch eine schwächere Bedingung an die Differentialgleichung, fordert dafür jedoch $(\rho(x))^{-1} \in L^\gamma$, wobei γ von n abhängt. M. PICONE untersucht in [14] elliptisch-parabolische Randwertaufgaben der Art, daß die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_i y_k - y_1^2$$

positiv semidefinit oder positiv definit ist.

M. PICONE zeigt dort unter einer Bedingung, die in vielen Fällen schwächer als $a(x) \leqq 0$ in G ist, daß die Randwertaufgabe (1.3) höchstens eine Lösung besitzt.

[1] Man kann auch das allgemeinere Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} D_1 u + k(x)(\lambda - a(x))\, u &= 0 \quad \text{in } G \\ u &= 0 \quad \text{auf } \dot{G} \end{aligned}$$

betrachten, wobei $k(x)$ eine in $\bar{G}$ definierte, stetige Funktion mit $k(x) > 0$ in $\bar{G}$ ist. Es gilt dann

$$\lambda_1 \geqq \inf_{x \in G} \left\{ a(x) + \frac{h(x)}{k(x)} \right\}.$$

In [15] wird wie in der vorliegenden Arbeit dieses Ergebnis dazu verwandt, eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems (1.4) herzuleiten. Man erhält dort als Ergebnis

$$\lambda_1 \geqq \frac{\pi^2}{d_1^2} + \frac{1}{2} \min_{x \in \bar{G}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (a_i)_{x_i}(x) - \sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik})_{x_i x_k}(x) \right\}$$

mit $d_1 := \sup\limits_{x,y \in G} |x_1 - y_1|$.

Ist die Differentialgleichung $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$, so wird die Struktur der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit am besten durch ein Resultat von J. PEETRE & I. A. RUS [12] wiedergegeben. Dort wird bewiesen, daß die Randwertaufgabe (1.3) höchstens eine Lösung besitzt, falls $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$ und

$$a(x) \leqq \frac{K}{d^2(x)} \quad \text{in } G$$

ist. Dabei ist K eine positive Konstante und $d(x)$ der Abstand des Punktes x vom Rand von G. Der Nachteil dieses Ergebnisses ist jedoch, daß eine explizite Berechnung von K dort praktisch nicht möglich ist und sowohl die Koeffizienten der Differentialgleichung als auch der Rand von G als unendlich oft differenzierbar vorausgesetzt werden.

Sehr scharfe untere Schranken für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems (1.4) wurden in dem Spezialfall $D_1 u := \Delta u$ von zahlreichen Autoren unter verschiedenen Voraussetzungen und nach verschiedenen Methoden erzielt, so etwa von G. PÓLYA & G. SZEGÖ [17], L. E. PAYNE [11], J. HERSCH [5], M. H. PROTTER [20] und W. HOOKER & M. H. PROTTER [6]. Das in der vorliegenden Arbeit erzielte Resultat stellt, was das Prinzip zur Herleitung unterer Schranken für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems (1.4) betrifft, in gewisser Weise eine Verbesserung der Arbeit von M. H. PROTTER & H. F. WEINBERGER [19] dar.

Eine dem Satz 2 der vorliegenden Arbeit vergleichbare, aber auf anderem Wege gewonnene untere Schranke für den kleinsten Eigenwert, welche sowohl besser als auch schlechter als die in Satz 2 angegebene untere Schranke sein kann, findet man für

$$G \subset Q := \{x \mid 0 < x_i < \alpha,\ i = 1, \ldots, n,\ \alpha > 0\}$$

in der Arbeit von M. H. PROTTER [20]. Für $G \subset K := \{x \mid |x| < 1\}$ leitet C. PUCCI in [21] untere und obere Schranken für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems (1.4) mit $a_i(x) \equiv 0$ $(i=1, \ldots, n)$ in $\bar{G}$ her. Allerdings macht er die sehr einschränkenden Voraussetzungen, welche durch die Beweismethode bedingt sind, daß $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(x) = 1$ gilt und $\dot{G}$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Den Teilnehmern des von Prof. Dr. G. HELLWIG geleiteten Kolloquiums zur Spektraltheorie singulärer elliptischer Differentialoperatoren danke ich für wertvolle Anregungen.

2. Eindeutigkeitssatz und untere Schranke für den kleinsten Eigenwert

Als entscheidendes Hilfsmittel zum Beweis des Eindeutigkeitssatzes wird folgender Hilfssatz benutzt, dessen Beweis auf einer Verallgemeinerung des bekannten Maximum-Minimum-Prinzips beruht.

Hilfssatz 1. *Die Differentialgleichung $Du=f(x)$ sei elliptisch in G, und es gebe eine Funktion $w(x)\in C^2(\bar{G})$ so, daß*

$$(2.1)\qquad w(x)>0 \quad \text{in } \bar{G}, \qquad Dw\leqq 0 \quad \text{in } G$$

gilt. Dann besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *höchstens eine Lösung.*

Beweis. Siehe M. H. Protter & H. F. Weinberger [19], p. 73.

Zur einfacheren Formulierung des folgenden Satzes wird definiert:

Definition 1. Es sei $q(x,\varepsilon)$ eine auf $\bar{G}\times[0,\beta]$ ($\beta>0$ geeignet) definierte Funktion mit den Eigenschaften $q(x,\varepsilon)>0$ in $\{G\times[0,\beta]\}\cup\{\bar{G}\times(0,\beta]\}$ und $q(x,\varepsilon)\in C^2(\bar{G}\times[0,\beta])$.
Für festes $\alpha\in(0,1]$ und für $(x,\varepsilon)\in(\{G\times[0,\beta]\}\cup\{\bar{G}\times(0,\beta]\})$ mit geeignetem $\beta>0$ sowie für $(x,0)\in\dot{G}\times\{0\}$, für die $\lim_{\varepsilon\to 0} p_\alpha(x,\varepsilon)=:p_\alpha(x,0)$ existiert, wird dann die Funktion

$$(2.2)\qquad p_\alpha(x,\varepsilon):=-\frac{\alpha D_1 q(x,\varepsilon)}{q(x,\varepsilon)}+\alpha(1-\alpha)\frac{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,q_{x_i}(x,\varepsilon)\,q_{x_k}(x,\varepsilon)}{\left(q(x,\varepsilon)\right)^2}$$

erklärt. Ferner sei für $b\in(0,\beta]$

$$(2.3)\qquad B_b:=\{x\mid x\in G,\, 0<q(x,0)\leqq b\}.$$

Satz 1. a) *Die Differentialgleichung $Du=f(x)$ sei elliptisch in G. Es gebe eine reelle Zahl $K_0\geqq 0$, so daß für ein $\alpha\in(0,1]$*

$$(2.4)\qquad p_\alpha(x,\varepsilon)\geqq -K_0 \quad \text{in } \bar{G}\times[0,\beta]$$

erfüllt ist. Gilt dann für dieses α, ein $b\in(0,\beta]$ und ein $b_1\in(0,\beta]$

$$(2.5)\qquad a(x)<\begin{cases} p_\alpha(x,0) & \text{in } \overline{G-B_b} \\ \inf\limits_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} p_\alpha(x,\varepsilon) & \text{in } B_b, \end{cases}$$

so besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *höchstens eine Lösung.*

b) *Die Differentialgleichung $Du=f(x)$ sei elliptisch in G, und es gebe zu einem festen $\alpha\in(0,1]$ eine in $\bar{G}\times[0,\beta]$ definierte, stetige Funktion $\tilde{p}_\alpha(x,\varepsilon)$, welche*

$$(2.6)\qquad p_\alpha(x,\varepsilon)\geqq\tilde{p}_\alpha(x,\varepsilon) \quad \text{in } G\times[0,\beta]$$

erfüllt. Ist dann noch

$$(2.7)\qquad a(x)<\tilde{p}_\alpha(x,0) \quad \text{in } \bar{G},$$

so besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *höchstens eine Lösung, und es gilt für den kleinsten Eigenwert λ_1 des Eigenwertproblems* (1.4)

$$(2.8)\qquad \lambda_1\geqq\inf_{x\in G}\tilde{p}_\alpha(x,0).$$

c) *Die Differentialgleichung* $Du=f(x)$ *sei elliptisch in* $\bar{G}$. *Für ein* $\alpha\in(0,1]$ *sei* (2.4) *erfüllt, und für dieses* α *sei* $p_\alpha(x,\varepsilon)$ *oder* $\dfrac{1}{p_\alpha(x,\varepsilon)}$ *stetig fortsetzbar auf* $\bar{G}\times[0,\beta]$. *Ist dann*

$$a(x)<p_\alpha(x,0) \quad \textit{in } \bar{G}, \qquad \textit{falls } p_\alpha(x,0) \textit{ existiert,} \tag{2.9}$$

so besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *höchstens eine Lösung, und es gilt für den kleinsten Eigenwert* λ_1 *des Eigenwertproblems* (1.4)

$$\lambda_1 \geqq \inf_{x\in G} p_\alpha(x,0). \tag{2.10}$$

a) ist besonders nützlich, wenn auf dem Rand von G überall parabolische Entartungen vorliegen.

Liegen solche Entartungen nur auf Teilen des Randes vor, so erhält man durch eine Kombination von *a)* und *c)* die

Folgerung. *Mit* $T_b:=\{x\,|\,x\in G,\ 0<\rho(x)\leqq b\}$ *für* $b\in(0,\beta]$ *gelte für ein* $\alpha\in(0,1]$ *und ein* $b\in(0,\beta]$:

Es gebe eine reelle Zahl $K_0\geqq 0$, *so daß*

$$p_\alpha(x,\varepsilon)\geqq -K_0 \quad \textit{in } \bar{G}\times(0,\beta]$$

erfüllt ist, und es sei $p_\alpha(x,\varepsilon)$ *oder* $\dfrac{1}{p_\alpha(x,\varepsilon)}$ *stetig fortsetzbar auf* $\overline{(G-T_b)}\times[0,\beta]$. *Ist dann für ein* $b\in(0,\beta]$ *und ein* $b_1\in(0,\beta]$

$$a(x)<\begin{cases} p_\alpha(x,0) & \textit{in } \overline{G-(B_b\cap T_b)}, \quad \textit{falls } p_\alpha(x,0) \textit{ existiert} \\ \inf\limits_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} p_\alpha(x,\varepsilon) & \textit{in } B_b\cap T_b, \end{cases} \tag{2.11}$$

so besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *höchstens eine Lösung.*

Bemerkung. Die Bedingung an $a(x)$ wird besonders schwach, falls es gelingt, eine Funktion $q(x,\varepsilon)$ so zu finden, daß sie zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes noch die Eigenschaft $q(y,0)=0$ für alle $y\in\dot{G}$ besitzt; denn dann wird im allgemeinen für alle $y\in\dot{G}$ $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in G}} p_\alpha(x,0)=\infty$ gelten, falls $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$ ist.

Beweis des Satzes. Es soll gezeigt werden, daß die in $\bar{G}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$w_\alpha(x)=\big(q(x,\varepsilon)\big)^\alpha$$

mit beliebigem, festem $\alpha\in(0,1]$ und noch geeignet zu bestimmendem, festem $\varepsilon>0$ unter den Voraussetzungen des Satzes 1 die Voraussetzungen (2.1) von Hilfssatz 1 erfüllt, so daß dann aus Hilfssatz 1 die Behauptung des Satzes folgt.

(2.8) und (2.10) sind nämlich klar, da für $\lambda<p_\alpha(x,0)$ in $\bar{G}$ bzw. $\lambda<\tilde{p}_\alpha(x,0)$ in $\bar{G}$ nur $u(x)\equiv 0$ Lösung von (1.4) ist.

Zunächst erhält man

$$Dw_\alpha=\big(-p_\alpha(x,\varepsilon)+a(x)\big)\big(q(x,\varepsilon)\big)^\alpha \quad \text{für alle } x\in G.$$

Zu a). Es sei $b \in (0, \beta]$ fest. Da $a(x)$ und $p_\alpha(x, 0)$ stetig in $\overline{G - B_b}$ sind, gilt

$$\varepsilon_1 := \min_{x \in \overline{G - B_b}} (p_\alpha(x, 0) - a(x)) > 0,$$

und wegen der Stetigkeit von $p_\alpha(x, \varepsilon)$ in $(\overline{G - B_b}) \times [0, \beta]$ gibt es eine reelle Zahl $\varepsilon_2 > 0$ so, daß

$$\max_{(x,\varepsilon) \in (\overline{G - B_b}) \times [0, \varepsilon_2]} |p_\alpha(x, 0) - p_\alpha(x, \varepsilon)| \leqq \varepsilon_1$$

ist. Es wird nun $\varepsilon = \min(\varepsilon_2, b_1)$ gewählt. Dann ist $w_\alpha(x) > 0$ in $\bar{G}$,

$$\begin{aligned} D w_\alpha &\leqq (-p_\alpha(x, \varepsilon) + a(x))(q(x, \varepsilon))^\alpha \\ &\leqq (-p_\alpha(x, \varepsilon) + p_\alpha(x, 0) - \varepsilon_1)(q(x, \varepsilon))^\alpha \\ &\leqq (\varepsilon_1 - \varepsilon_1)(q(x, \varepsilon))^\alpha = 0 \quad \text{für alle } x \in G - B_b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D w_\alpha &< \Big(-p_\alpha(x, \varepsilon) + \inf_{0 \leqq \varepsilon \leqq b_1} p_\alpha(x, \varepsilon)\Big)(q(x, \varepsilon))^\alpha \\ &\leqq 0 \quad \text{für alle } x \in B_b. \end{aligned}$$

Zu b). Analog wie vorher für $p_\alpha(x, \varepsilon)$ folgt nun für $\tilde{p}_\alpha(x, \varepsilon)$

$$\varepsilon_3 := \min_{x \in \bar{G}} (\tilde{p}_\alpha(x, 0) - a(x)) > 0$$

und die Existenz einer reellen Zahl $\varepsilon_4 > 0$ so, daß

$$\max_{(x,\varepsilon) \in \bar{G} \times [0, \varepsilon_4]} |\tilde{p}_\alpha(x, 0) - \tilde{p}_\alpha(x, \varepsilon)| \leqq \varepsilon_3$$

ist. Wird nun $\varepsilon = \varepsilon_4$ gewählt, dann gilt $w_\alpha(x) > 0$ in $\bar{G}$ und wegen (2.6) und (2.7)

$$\begin{aligned} D w_\alpha &\leqq (-\tilde{p}_\alpha(x, \varepsilon) + a(x))(q(x, \varepsilon))^\alpha \\ &\leqq (-\tilde{p}_\alpha(x, \varepsilon) + \tilde{p}_\alpha(x, 0) - \varepsilon_3)(q(x, \varepsilon))^\alpha \\ &\leqq (\varepsilon_3 - \varepsilon_3)(q(x, \varepsilon))^\alpha \leqq 0 \quad \text{für alle } x \in G. \end{aligned}$$

Zu c). Aufgrund der Voraussetzungen hat $p_\alpha(x, 0)$ an den Unstetigkeitsstellen den Wert $+\infty$. Daher ist mit

$$F_b := \left\{ x \mid x \in G, 0 < \frac{1}{p_\alpha(x, 0)} \leqq b \right\}$$

$p_\alpha(x, \varepsilon)$ stetig in $\overline{G - F_b} \times [0, \beta]$ für jedes $b \in (0, \beta]$. Offenbar gibt es also reelle Zahlen b_0 und β_0 mit $b_0 \in (0, \beta]$ und $\beta_0 \in (0, \beta]$ so, daß $p_\alpha(x, \varepsilon) \geqq \max_{x \in \bar{G}} |a(x)|$ für alle $(x, \varepsilon) \in F_{b_0} \times [0, \beta_0]$ gilt. Ferner existieren positive, reelle Zahlen ε_5 und ε_6 so, daß

$$\varepsilon_5 := \min_{x \in \overline{G - F_{b_0}}} (p_\alpha(x, 0) - a(x))$$

und

$$\max_{(x,\varepsilon) \in (\overline{G - F_{b_0}}) \times [0, \varepsilon_6]} |p_\alpha(x, 0) - p_\alpha(x, \varepsilon)| \leqq \varepsilon_5$$

erfüllt ist. Dann folgt mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_6, \beta_0)$ wie im Beweis zu a)

$$D w_\alpha \leqq 0 \quad \text{für alle } x \in G - F_{b_0},$$

und für alle $x \in F_{b_0}$ erhält man

$$D w_\alpha \leqq \left(-\max_{x \in \bar{G}} |a(x)| + a(x)\right)\left(q(x, \varepsilon)\right)^\alpha \leqq 0.$$

Der Beweis der Folgerung zu Satz 1 ergibt sich, indem man die Punktmenge T_b in die Punktmengen $T_b - (B_b \cap T_b)$ und $B_b \cap T_b$ aufspaltet und dann wie im Beweis zu Satz 1a vorgeht und bei der Punktmenge $G - T_b$ wie im Beweis zu Satz 1c vorgeht.

3. Anwendung des Satzes auf quader- und kugelähnliche Gebiete

Es sollen mit Hilfe von Satz 1 konkrete obere Schranken für den Koeffizienten $a(x)$ hergeleitet werden, welche gewährleisten, daß die Randwertaufgabe (1.3) mit $a_i(x) \equiv 0$ in $\bar{G}$ $(i = 1, \ldots, n)$ höchstens eine Lösung besitzt. Zur Vorbereitung des folgenden Satzes werden einige Erklärungen getroffen.

Definition 2. Man setze

$$\rho_1(x) := \min_{k=1,\ldots,n} a_{kk}(x), \qquad m_1 := \min_{x \in \bar{G}} \rho_1(x),$$

$$\rho_2(x) :\geqq \max_{k=1,\ldots,n} \mu_k(x),$$

wobei mit $\mu_k(x)$ die Eigenwerte der Matrix $(a_{ik}(x))$ bezeichnet werden;

$$m_2 := \max_{x \in \bar{G}} \rho_2(x),$$

$$Q := \{x \mid \alpha_i < x_i < \alpha_i + d_i;\ i = 1, \ldots, n\}$$

mit

$$d_i := \sup_{x, y \in G} |x_i - y_i|$$

und reellen Zahlen α_i $(i = 1, \ldots, n)$,

$$S_b^1 := \left\{x \mid x \in G, 0 < \rho(x) \leqq b, 0 < \prod_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi(x_i - \alpha_i)}{d_i}\right) \leqq b\right\},$$

$$\dot{G}_1 := \left\{x \mid x \in \dot{G}, \prod_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi(x_i - \alpha_i)}{d_i}\right) > 0\right\},$$

$$t_\alpha^1(x, \varepsilon) := \alpha(1 - \alpha c)\rho_1(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{(d_k + \varepsilon)^2} \cot^2\left(\frac{\pi}{d_k + \varepsilon}\left(x_k + \frac{\varepsilon}{2} - \alpha_k\right)\right)$$
$$+ \alpha \rho_1(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{(d_k + \varepsilon)^2}$$

für alle $(x, \varepsilon) \in (G \cup \dot{G}_1) \times [0, 1]$, falls $\alpha \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$ gilt, und für alle $(x, \varepsilon) \in \bar{G} \times [0, 1]$, falls $\alpha = \frac{1}{c}$ gilt. Hierbei ist $c \in [1, \infty)$.

Satz 2. *Es sei* $Q \supset G$.

a) *Die Differentialgleichung* $Du=f(x)$ *sei elliptisch in* G, *und es gebe eine reelle Zahl* $c \geqq 1$ *so, daß*

$$\rho_2(x) \leqq c\,\rho_1(x) \quad \textit{für alle } x \in G \tag{3.1}$$

erfüllt ist. Gilt nun für ein $\alpha \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$, *ein* $b \in (0, 1]$ *und ein* $b_1 \in (0, 1]$

$$a(x) < \begin{cases} t_\alpha^1(x, 0) & \textit{in} \quad \overline{\{G - S_b^1\}} \cap \{G \cup \dot{G}_1\} \\ t_\alpha^1(x, b_1) & \textit{in} \quad S_b^1 \end{cases} \tag{3.2a}$$

oder für $\alpha = \frac{1}{c}$

$$a(x) < t_\alpha^1(x, 0) \quad \textit{in} \quad \bar{G}, \tag{3.2b}$$

dann besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *mit* $a_i(x) \equiv 0$ *in* $\bar{G}$ $(i=1, \ldots, n)$ *höchstens eine Lösung.*

b) *Ist die Differentialgleichung* $Du=f(x)$ *elliptisch in* $\bar{G}$ *und gilt für ein beliebiges* $\alpha \in \left(0, \frac{m_1}{m_2}\right)$ *und* $c = \frac{m_2}{m_1}$

$$a(x) < t_\alpha^1(x, 0) \quad \textit{in} \quad G \cup \dot{G}_1 \tag{3.3a}$$

oder für $\alpha = \frac{m_1}{m_2}$ *und* $c = \frac{m_2}{m_1}$

$$a(x) < t_\alpha^1(x, 0) \quad \textit{in} \quad \bar{G}, \tag{3.3b}$$

dann besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *mit* $a_i(x) \equiv 0$ *in* $\bar{G}$ $(i=1, \ldots, n)$ *höchstens eine Lösung, und für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems* (1.4) *mit* $a_i(x) \equiv 0$ *in* $\bar{G}$ $(i=1, \ldots, n)$ *gilt*

$$\lambda_1 \geqq \frac{(m_1)^2}{m_2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{d_k^2}. \tag{3.4}$$

c) *Im Spezialfall* $a_{ik}(x) \equiv 0$ *in* $\bar{G}$ *für* $i \neq k$ *entfällt die Voraussetzung* (3.1), *und es kann in den in den Voraussetzungen* (3.2a) (3.2b), (3.3a) *und* (3.3b) *auftretenden Funktionen* $t_\alpha^1(x, 0)$ *und* $t_\alpha^1(x, b_1)$ $c=1$ *gesetzt werden und somit* $\alpha \in (0, 1]$ *beliebig gewählt werden. Ferner gilt nun für den kleinsten Eigenwert* λ_1 *des Eigenwertproblems* (1.4)

$$\lambda_1 \geqq m_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{d_k^2}. \tag{3.5}$$

Bemerkung. Folgendes Beispiel soll zeigen, daß die Ungleichung (3.5) in gewissem Sinne scharf ist. Es sei $G = Q := \{x \mid 0 < x_i < d_i, i=1, \ldots, n\}$. Die Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta_n u + \lambda u &= 0 \quad \text{in} \quad G \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \dot{G} \end{aligned}$$

besitzt $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi^2}{d_i^2}$ als kleinsten Eigenwert und $u_1(x) = \prod_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{d_i} x_i\right)$ als zugehörige Eigenfunktion. Es ist hier $m_1 = 1$, so daß für dieses Beispiel in (3.5) das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis des Satzes. *Zu a).* Es sei o.B.d.A. $\alpha_k=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Dann wird in Satz 1

$$q(x, \varepsilon)=\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \quad \text{auf} \quad \bar{G}\times[0, 1]$$

gewählt. $q(x, \varepsilon)$ besitzt die nach Definition 1 geforderten Eigenschaften, und für $G=Q$ ist sogar $\lim\limits_{x\to\dot{G}} q(x, 0)=0$.

Man erhält nun für alle $(x, \varepsilon)\in G\times[0, 1]$ wegen $a_i(x)\equiv 0$ in $\bar{G}$ $(i=1, \ldots, n)$

$$\begin{aligned} p_\alpha(x, \varepsilon)= & -\alpha^2 \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\pi^2}{(d_i+\varepsilon)(d_k+\varepsilon)}\cot\left(\frac{\pi}{d_i+\varepsilon}\left(x_i+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ & \cdot\cot\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ & +\alpha\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x)\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}\cot^2\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ & +\alpha\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x)\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Hieraus folgt nun aufgrund der Definition der Funktionen $\rho_1(x)$ und $\rho_2(x)$ und wegen (3.1) für beliebiges $\alpha\in\left(0, \frac{1}{c}\right]$

$$\begin{aligned} p_\alpha(x, \varepsilon) \geqq & \, \alpha(1-\alpha c)\rho_1(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}\cot^2\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ & +\alpha\rho_1(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}=t_\alpha^1(x, \varepsilon) \quad \text{in} \quad G\times[0, 1]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Es gilt offenbar $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(t_\alpha^1(x, \varepsilon))\leqq 0$ für alle $(x, \varepsilon)\in G\times[0, 1]$ und ein $\alpha\in\left(0, \frac{1}{c}\right]$, so daß für ein solches α und jedes $x\in G$

$$\inf_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} p_\alpha(x, \varepsilon)\geqq \inf_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} t_\alpha^1(x, \varepsilon)=t_\alpha^1(x, b_1)$$

ist. Da für $\alpha\in\left(0, \frac{1}{c}\right)$ $t_\alpha^1(x, 0)$ genau für $x\in G\cup\dot{G}_1$ existiert, sind für $\alpha\in\left(0, \frac{1}{c}\right)$ wegen $S_b^1:=B_b\cap T_b$ die Voraussetzungen der Folgerung zu Satz 1 erfüllt. — Für $\alpha=\frac{1}{c}$ folgt die Behauptung aus Satz 1b mit (3.7), da $\tilde{p}_{\frac{1}{c}}(x, \varepsilon):=t_{\frac{1}{c}}^1(x, \varepsilon)$ $((x, \varepsilon)\in\bar{G}\times[0, 1])$ stetig in $\bar{G}\times[0, 1]$ ist.

Zu b). Ist die Differentialgleichung $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$, so ist (3.1) mit $c=\frac{m_2}{m_1}$ erfüllt. Für $\alpha\in\left(0, \frac{m_1}{m_2}\right)$ folgt dann die Behauptung aus Satz 1c und für

$\alpha=\frac{m_1}{m_2}$ aus Satz 1 b, da wegen (3.7)

$$\inf_{x\in G} p_{\frac{m_1}{m_2}}(x,0)\geqq\frac{(m_1)^2}{m_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{d_k^2}$$

gilt.

Zu c). Im Spezialfall $a_{ik}(x)\equiv 0$ in $\bar{G}$ für $i\neq k$ $(i,k=1,\ldots,n)$ folgt aus (3.6) für beliebiges $\alpha\in(0,1]$

$$\begin{aligned}p_\alpha(x,\varepsilon)&=\alpha(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(x)\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}\cot^2\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\alpha\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(x)\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}\\&\geqq\alpha(1-\alpha)\rho_1(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2}\cot^2\left(\frac{\pi}{d_k+\varepsilon}\left(x_k+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)+\alpha\rho_1(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(d_k+\varepsilon)^2},\end{aligned}$$

so daß die Behauptung sich für $\alpha\in(0,1)$ nach Satz 1 c und der Folgerung zu Satz 1 ergibt. Für $\alpha=1$ folgt sie aus Satz 1 b, da dann noch

$$\inf_{x\in G} p_1(x,0)\geqq m_1\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{d_k^2}$$

gilt.

Es wird nun ein weiterer Satz dieser Art bewiesen, der besonders auf kugelähnliche Gebiete zugeschnitten ist. Zur Vorbereitung des Satzes werden einige Erklärungen getroffen.

Definition 3. Mit $J_p(z)$ wird die Besselfunktion 1. Art und p-ter Ordnung und mit j_p die erste positive Nullstelle von $J_p(z)$ bezeichnet.

Ferner sei mit $\mathring{x}\in R_n$

$$K:=\{x\,|\,|x-\mathring{x}|^2<r^2,\ r>0\},$$

$$z=z(x,\varepsilon):=\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}|x-\mathring{x}|\qquad((x,\varepsilon)\in\bar{G}\times[0,1]),$$

$$z_0=z(x,0):=\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}|x-\mathring{x}|\qquad(x\in\bar{G}),$$

$$m:=\min_{x\in\bar{G}}\rho(x),\qquad m_1:=\min_{x\in\bar{G}}\Big(\min_{k=1,\ldots,n}a_{kk}(x)\Big),$$

$$d(x):=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)-n\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\frac{(x_i-\mathring{x}_i)(x_k-\mathring{x}_k)}{|x-\mathring{x}|^2}\qquad(x\in\bar{G}),$$

$$D:=\max_{x\in\bar{G}}|d(x)|,$$

$$S_b^2:=\{x\,|\,x\in G,\ 0<|x-\mathring{x}|^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(z_0)\leqq b,\ 0<\rho(x)\leqq b\},$$

$$\dot{G}_1:=\{x\,|\,x\in\dot{G},\ |x-\mathring{x}|^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(z_0)>0\},$$

$$t_\alpha^2(x,\varepsilon):=\begin{cases}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2\alpha\left[\left\{1+(1-\alpha)\left(\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\right)^2-\frac{n}{z}\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\right\}\right.\\ \qquad\left.\cdot\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)\frac{(x_i-\mathring{x}_i)(x_k-\mathring{x}_k)}{|x-\mathring{x}|^2}+\frac{1}{z}\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)\right]\\ \qquad\qquad \text{für } (x,\varepsilon)\in(G\cup\dot{G}_1)\times[0,1],\ (x,\varepsilon)\neq(\mathring{x},0)\\ \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)\quad \text{für } (x,\varepsilon)=(\mathring{x},0)\end{cases}$$

für $\alpha\in(0,1)$. $t_\alpha^2(x,\varepsilon)$ ist stetig in $(G\cup\dot{G}_1)\times[0,1]$.

Satz 3. *Es sei* $K\supset G$.

a) *Ist die Differentialgleichung* $Du=f(x)$ *elliptisch in* G *und gilt für ein* $\alpha\in\left(0,\frac{1}{n+2}\right]$, *ein* $b\in(0,1]$ *und ein* $b_1\in(0,1]$

$$a(x)<\begin{cases}t_\alpha^2(x,0) & \text{in } \overline{\{G-S_b^2\}}\cap\{G\cup\dot{G}_1\}\\ t_\alpha^2(x,b_1) & \text{in } S_b^2,\end{cases}\tag{3.8}$$

dann besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *mit* $a_i(x)\equiv 0$ *in* $\bar{G}$ $(i=1,\dots,n)$ *höchstens eine Lösung.*

b) *Die Differentialgleichung* $Du=f(x)$ *sei elliptisch in* $\bar{G}$. *Es gelte für ein* $\alpha\in(0,1)$

$$a(x)<t_\alpha^2(x,0)\quad \text{in } G\cup\dot{G}_1,\tag{3.9}$$

oder es gelte, falls $D\leqq\frac{n}{2}m$ *ist, für ein* $\alpha\in\left(0,1-\frac{2D}{nm}\right]$ *und alle* $x\in G\cup\dot{G}_1$

$$a(x)<\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2\left\{\alpha\rho(x)+\frac{J_{\frac{n}{2}}(z_0)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z_0)}\left(\alpha(1-\alpha)\rho(x)\frac{J_{\frac{n}{2}}(z_0)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z_0)}+\alpha\frac{d(x)}{z_0}\right)\right\}.\tag{3.10}$$

Dann besitzt die Randwertaufgabe (1.3) *mit* $a_i(x)\equiv 0$ *in* $\bar{G}$ $(i=1,\dots,n)$ *höchstens eine Lösung, und für den kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems* (1.4) *gelten die Abschätzungen*

$$\lambda_1\geqq\frac{2m_1}{n+2}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2\tag{3.11}$$

und

$$\lambda_1\geqq\frac{1}{m}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\left(m-\frac{2}{n}D\right)\right)^2\quad \textit{für } D\leqq\frac{n}{2}m.\tag{3.12}$$

Bemerkung. Folgendes Beispiel soll zeigen, daß die Ungleichung (3.12) in gewissem Sinne scharf ist. Es sei $G=K:=\{x\mid |x|^2<r^2, r>0\}$. Die Eigenwertaufgabe

$$(3.13)\qquad \begin{aligned} \Delta_n u+\lambda u&=0 \quad \text{in } K\\ u&=0 \quad \text{auf } \dot{K}\end{aligned}$$

besitzt $\lambda_1=\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2$ als kleinsten Eigenwert und

$$u_1(x)=|x|^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}|x|\right)$$

als zugehörige Eigenfunktion. Es ist hier $m=1$ und $D=0$, so daß für dieses Beispiel in (3.12) das Gleichheitszeichen gilt.

Folgerung aus Satz 3. *Die Abschätzung* (3.11) *für den kleinsten Eigenwert* λ_1 *ist besser als* (3.12), *wenn die Matrix* $(a_{ik}(x))$ *hinreichend stark von der Matrix* $(m\delta_{ik})$ *abweicht. Ein Maß für diese Abweichung ist die Konstante D, so daß die Abschätzung* (3.11) *besser als* (3.12) *ist, falls*

$$D>\left(1-\sqrt{\frac{2}{n+2}}\right)\frac{nm}{2}$$

erfüllt ist.

Zum Beweis des Satzes wird folgender Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz 2. a) $f(z):=\frac{1}{z}\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}$ $(0<z<j_{\frac{n}{2}-1})$ *ist im Intervall* $(0,j_{\frac{n}{2}-1})$ *streng monoton wachsend.*

b) *Wird mit* $s_{\frac{n}{2}}$ *die erste positive Lösung der Gleichung* $J_{\frac{n}{2}}(z)-J_{\frac{n}{2}-1}(z)=0$ *bezeichnet, so gilt*

$$(3.14)\qquad s_{\frac{n}{2}}>\frac{n}{2} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{n}<f(z)<\frac{2}{n} \quad \textit{für } 0<z\leqq s_{\frac{n}{2}}.$$

c) *Es sei* $g(z):=\frac{1}{z}\frac{f'(z)}{f^2(z)}$ $(0<z<j_{\frac{n}{2}-1})$. *Dann gilt*: $g(z)$ *ist im Intervall* $(0,j_{\frac{n}{2}-1})$ *streng monoton wachsend und*

$$(3.15)\qquad g(z)>\frac{2}{n+2} \quad \textit{für } 0<z<j_{\frac{n}{2}-1}.$$

Beweis des Hilfssatzes. *Zu a).* Unter Benutzung der bekannten Rekursionsformeln

$$(3.16)\qquad J'_{\frac{n}{2}-1}(z)=-J_{\frac{n}{2}}(z)+\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{1}{z}J_{\frac{n}{2}-1}(z)$$

und

$$(3.17)\qquad J'_{\frac{n}{2}}(z)=J_{\frac{n}{2}-1}(z)-\frac{n}{2z}J_{\frac{n}{2}}(z)$$

erhält man

$$(3.18)\qquad f'(z)=\frac{1}{z}\left(1+z^2f^2(z)-nf(z)\right)$$

und somit

$$f''(z) = -\frac{1}{z} f'(z) + \frac{1}{z}(2z f^2(z) + 2z^2 f(z) f'(z) - n f'(z)).$$

Daher folgt also, falls mit n_0 eine beliebige Nullstelle von $f'(z)$ mit $n_0 \in (0, j_{\frac{n}{2}-1})$ bezeichnet wird,

$$f''(n_0) = 2f^2(n_0) > 0,$$

wenn man $j_{\frac{n}{2}-1} < j_{\frac{n}{2}}$ beachtet. $f(z)$ kann somit im Intervall $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ als relatives Extremum höchstens ein relatives Minimum besitzen. Wegen

$$\lim_{z\to 0} f'(z) = 0, \qquad \lim_{z\to 0} f''(z) = \frac{2}{n^2(n+2)} > 0$$

liegt aber bei $z=0$ ein relatives Minimum vor, so daß $f(z)$ in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ streng monoton wachsend ist.

Zu b). Benutzt man die Rekursionsformel (3.17), so erhält man

$$J_{\frac{n}{2}}(z) - J_{\frac{n}{2}-1}(z) = -J'_{\frac{n}{2}}(z) - \left(\frac{n}{2z} - 1\right) J_{\frac{n}{2}}(z) < 0$$

für $J'_{\frac{n}{2}}(z) > 0$, $J_{\frac{n}{2}}(z) \geqq 0$ und $0 < z \leqq \frac{n}{2}$. Es wird nun mit $j'_{\frac{n}{2}}$ die erste positive Nullstelle von $J'_{\frac{n}{2}}(z)$ bezeichnet. Da $J_{\frac{n}{2}}(z)$ für $0 \leqq z \leqq j'_{\frac{n}{2}}$ monoton wachsend ist und

$$j_{\frac{n}{2}} > j'_{\frac{n}{2}} > \sqrt{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 2\right)} > \frac{n}{2}$$

gilt (siehe G. N. WATSON [25], p. 486), folgt $s_{\frac{n}{2}} > \frac{n}{2}$. Da $f(z)$ nach Teil *a)* des Hilfssatzes in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ streng monoton wachsend ist, folgt wegen $s_{\frac{n}{2}} < j_{\frac{n}{2}-1}$

$$\frac{1}{n} = \lim_{z\to 0} f(z) < f(z) \leqq f(s_{\frac{n}{2}}) < \frac{2}{n} \qquad \text{für } 0 < z \leqq s_{\frac{n}{2}}.$$

Zu c). Mit Hilfe von (3.18) erhält man für

$$h(z) := -\frac{1}{f(z)} \qquad (0 < z < j_{\frac{n}{2}-1})$$

$$h'(z) = \frac{1}{z}(z^2 + h^2(z) + n h(z)).$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$h''(z) = \frac{1}{z}(2z + [2h(z) + (n-1)] h'(z)), \tag{3.19}$$

$$h'''(z) = \frac{1}{z}(2 + 2(h'(z))^2 + [2h(z) + (n-2)] h''(z)). \tag{3.20}$$

Für

$$g(z):=\frac{1}{z}\,\frac{f'(z)}{f^2(z)}=\frac{1}{z}\left(-\frac{1}{f(z)}\right)'=\frac{1}{z}\,h'(z)\qquad (0<z<j_{\frac{n}{2}-1})$$

ergibt sich nun

$$g'(z)=\frac{1}{z^2}\left(h''(z)\,z-h'(z)\right),$$

$$g''(z)=\frac{1}{z}\,h'''(z)-\frac{2}{z}\,g'(z).$$

Ist nun n_1 eine beliebige Nullstelle von $g'(z)$ mit $0<n_1<j_{\frac{n}{2}-1}$, dann gilt

$$h'(n_1)=n_1\,h''(n_1)$$

und somit wegen (3.19)

$$2+[2h(n_1)+(n-2)]\,h''(n_1)=0.$$

Hieraus folgt mit (3.20)

$$h'''(n_1)=\frac{2}{n_1}\,(h'(n_1))^2$$

und somit

$$g''(n_1)=\frac{1}{n_1}\,h'''(n_1)=\frac{2}{n_1^2}\,(h'(n_1))^2=2\left(\frac{f'(n_1)}{n_1 f^2(n_1)}\right)^2>0,$$

da aufgrund der strengen Monotonie von $f(z)$ in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ $f'(z)>0$ in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ ist.

Wie im Teil *a)* des Hilfssatzes folgt wegen

$$\lim_{z\to 0} g'(z)=0 \quad\text{und}\quad \lim_{z\to 0} g''(z)=\frac{8}{(n+2)^2(n+4)}>0,$$

daß $g(z)$ in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ streng monoton wachsend ist, so daß

$$g(z)>\lim_{z\to 0} g(z)=\frac{2}{n+2}\qquad \text{für } 0<z<j_{\frac{n}{2}-1}$$

gilt.

Beweis des Satzes. O.B.d.A. sei $\mathring{x}=0$. Es wird nun Satz 1 angewandt und daher zunächst für beliebiges $\alpha\in(0, 1]$ und

$$q(x,\varepsilon):=|x|^{\frac{2-n}{2}}\,J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\,|x|\right)\qquad ((x,\varepsilon)\in(G\cup\dot{G}_1)\times[0, 1])$$

der Ausdruck $p_\alpha(x,\varepsilon)$ aus Definition 1 berechnet. $q(x,\varepsilon)$ wurde dabei so gewählt, daß $u(x):=q(x, 0)$ Lösung der Randwertaufgabe (3.13) ist und $q(x,\varepsilon)>0$ in $\{G\times[0, 1]\}\cup\{\bar{G}\times(0, 1]\}$ sowie $q(x,\varepsilon)\in C^2(\bar{G}\times[0, 1])$ erfüllt ist. Ferner gilt für $G:=K$ sogar für alle $y\in\dot{G}$ $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in G}} q(x, 0)=0$.

Benutzt man die Rekursionsformel (3.16), so erhält man

$$\begin{aligned}(3.21)\qquad &\frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,q_{x_i}(x,\varepsilon)\,q_{x_k}(x,\varepsilon)}{\big(q(x,\varepsilon)\big)^2}\\ &=\left(\frac{2-n}{2}\,\frac{1}{|x|}+\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\,\frac{J'_{\frac{n}{2}-1}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\right)^2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2}\\ &=\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2\left(\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\right)^2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2}.\end{aligned}$$

Wird wieder die Rekursionsformel (3.16) benutzt und beachtet man, daß $J_{\frac{n}{2}-1}(z)$ der Besselschen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}&\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2|x|^2 J''_{\frac{n}{2}-1}(z)+\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}|x|\,J'_{\frac{n}{2}-1}(z)\\ &\qquad+\left(\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2|x|^2-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)J_{\frac{n}{2}-1}(z)=0\end{aligned}$$

genügt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&-\frac{\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,q_{x_i x_k}(x,\varepsilon)}{q(x,\varepsilon)}\\ &=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\delta_{ik}\frac{1}{|x|}\left(\frac{n-2}{2}\,\frac{1}{|x|}-\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\,\frac{J'_{\frac{n}{2}-1}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\right)\\ &\quad+\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^4}\,\frac{1}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\left\{\frac{(2-n)(n+2)}{4}J_{\frac{n}{2}-1}(z)\right.\\ (3.22)\qquad &\quad+(n-1)|x|\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}J'_{\frac{n}{2}-1}(z)+\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}|x|\,J'_{\frac{n}{2}-1}(z)\\ &\quad\left.+\left(\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2|x|^2-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right)J_{\frac{n}{2}-1}(z)\right\}\\ &=\frac{1}{|x|}\,\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\,\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)-n\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2}\right)\\ &\quad+\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2}.\end{aligned}$$

Man erhält nun unter Benutzung der in Hilfssatz 2 erklärten Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ aus (3.21) und (3.22) mit der Definition von $p_\alpha(x,\varepsilon)$ und mit (3.18)

$$\begin{aligned}
p_\alpha(x,\varepsilon) &= \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2 \alpha \Bigg[\{1+(1-\alpha)z^2 f^2(z) - n f(z)\} \\
&\quad \cdot \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2} + f(z)\sum_{i=1}^n a_{ii}(x)\Bigg] \qquad (3.23)\\
&= \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2 \alpha \left[z^2 f^2(z)(g(z)-\alpha)\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)\frac{x_i x_k}{|x|^2} + f(z)\sum_{i=1}^n a_{ii}(x)\right] \\
&= t_\alpha^2(x,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 2 sind $f(z)$ und $g(z)$ monoton wachsend in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$, es gilt $f(z) > \frac{1}{n}$ und $g(z) > \frac{2}{n+2}$ in $(0, j_{\frac{n}{2}-1})$ sowie

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = -\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{(r+\varepsilon)^2}|x| \leqq 0.$$

Daher folgt

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}(t_\alpha^2(x,\varepsilon)) \leqq 0 \qquad \text{für alle } (x,\varepsilon)\in G\times[0,1]$$

und $\alpha \in \left(0, \frac{2}{n+2}\right]$, so daß

$$\inf_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} p_\alpha(x,\varepsilon) = \inf_{0\leqq\varepsilon\leqq b_1} t_\alpha^2(x,\varepsilon) = t_\alpha^2(x,b_1)$$

ist. Da für $\alpha\in\left(0,\frac{2}{n+2}\right]$ $t_\alpha^2(x,0)$ genau für $x\in G\cup \dot{G}_1$ existiert, sind für $\alpha\in\left(0,\frac{2}{n+2}\right]$ die Voraussetzungen der Folgerung zu Satz 1 erfüllt, so daß Satz 3a folgt.

Ist $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$, dann sind für $\alpha\in(0,1)$ wegen der Monotonie von $g(z)$ und

$$\lim_{|x|\to r} g\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}|x|\right) = 1$$

die Voraussetzungen von Satz 1c erfüllt, so daß die Randwertaufgabe (1.3) mit $a_i(x)\equiv 0$ in $\bar{G}$ $(i=1,\ldots,n)$ unter der Voraussetzung (3.9) höchstens eine Lösung besitzt. Weiter folgt aus (3.23) für $\alpha=\frac{2}{n+2}$ nach Teil *b)* und *c)* des Hilfssatzes 2

$$p_{\frac{2}{n+2}}(x,0) \geqq \frac{2m_1}{n+2}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2.$$

Somit ergibt sich (3.11) nach Satz 1c.

Aus (3.21) und (3.22) folgt, falls man die einzelnen Summanden anders als in (3.23) zusammenfaßt und (1.2) benutzt,

$$(3.24)\quad p_\alpha(x,\varepsilon) \geqq \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2 \left\{\alpha\rho(x) + \frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)}\left(\alpha(1-\alpha)\rho(x)\frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)} + \alpha\frac{d(x)}{z}\right)\right\}.$$

Es sei nun $Du=f(x)$ elliptisch in $\bar{G}$ und $D \leqq \frac{n}{2}m$. Dann erhält man für $j_{\frac{n}{2}-1} > z \geqq s_{\frac{n}{2}}$ und $\alpha \in \left(0, 1-\frac{2D}{nm}\right]$, wobei $s_{\frac{n}{2}}$ im Hilfssatz 2b definiert wurde,

$$(3.25)\quad \begin{aligned} p_\alpha(x,\varepsilon) &\geqq \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2 \alpha\left\{m + \frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)} D\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{s_{\frac{n}{2}}}\right)\right\} \\ &\geqq \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r+\varepsilon}\right)^2 \alpha\left(m + \frac{J_{\frac{n}{2}}(z)}{J_{\frac{n}{2}-1}(z)} D\,c(n)\right) \end{aligned}$$

mit einer reellen Zahl $c(n)>0$. Daher sind die Voraussetzungen von Satz 1c erfüllt, so daß nach Satz 1c die Randwertaufgabe (1.3) mit $a_i(x)\equiv 0$ in $\bar{G}$ $(i=1,\dots,n)$ höchstens eine Lösung besitzt, falls (3.10) gilt. Weiter folgt aus (3.24) für $s_{\frac{n}{2}} > z > 0$ und $\alpha = 1-\frac{2D}{nm}$

$$p_\alpha(x,0) \geqq \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2 \left(1-\frac{2D}{nm}\right)\left(m-\frac{2D}{n}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\left(m-\frac{2D}{n}\right)\right)^2,$$

und aus (3.25) erhält man für $j_{\frac{n}{2}-1} > z \geqq s_{\frac{n}{2}}$ und $\alpha = 1-\frac{2D}{nm}$

$$p_\alpha(x,0) \geqq \left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\right)^2 \left(1-\frac{2D}{nm}\right) m \geqq \frac{1}{m}\left(\frac{j_{\frac{n}{2}-1}}{r}\left(m-\frac{2D}{n}\right)\right)^2.$$

Somit ergibt sich nach Satz 1c (3.12).

Weitere nach derselben Methode wie hier gewonnene Eindeutigkeitssätze für die Dirichletsche Randwertaufgabe, insbesondere auch für den Fall, daß $a_i(x) \not\equiv 0$ in $\bar{G}$ ist, $(i=1,\dots,n)$, findet man in [16]. Mit Hilfe dieser Sätze kann man ebenfalls untere Schranken für den kleinsten Eigenwert λ_1 des Eigenwertproblems (1.4) angeben.

Literatur

1. COURANT, R., & D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, vol. II. New York-London: Interscience Publishers 1962.
2. GENOV, A., Some uniqueness theorems for elliptic equations which are degenerate on the whole boundary. Godišnik Visš. Tehn. Učebn. Zaved. Mat. **2** (1965), kn. 2, 141–146 (1967).
3. GENOV, A., Elliptic-parabolic equations which are degenerate on the whole boundary. Godišnik Visš. Tehn. Učebn. Zaved. Mat. **2** (1965), kn. 2, 147–152 (1967).

4. Hellwig, G., Partielle Differentialgleichungen. Stuttgart: Teubner 1960.
5. Hersch, J., Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante: évaluation par défaut et principe de maximum. Z. Angew. Math. Phys. **11**, 387–413 (1960).
6. Hooker, W., & M. H. Protter, Bounds for the first eigenvalue of a rhombic membrane. J. Math. Phys. **39**, 18–34 (1960).
7. Miranda, C., Partial Differential Equations of Elliptic Type. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
8. Oleĭnik, O. A., On a problem of G. Fichera. Dokl. Akad. Nauk SSSR **157**, 1297–1300 (1964).
9. Oleĭnik, O. A., On the smoothness of solutions of degenerating elliptic and parabolic equations. Sov. Math. Dokl. **6**, 972–976 (1965).
10. Oleĭnik, O. A., On linear equations of the second order with a non-negative characteristic form. Mat. Sb. (N.S.) **69** (111), 111–140 (1966).
11. Payne, L. E., New isoperimetric inequalities for eigenvalues and other physical quantities. Comm. Pure Appl. Math. **9**, 531–542 (1956).
12. Peetre, J., & I. A. Rus, Sur la positivité de la fonction de Green. Math. Scand. **21**, 80–89 (1967).
13. Phillips, R. S., & L. Sarason, Elliptic parabolic equations of the second order. J. Math. Mech. **17**, 891–917 (1967/68).
14. Picone, M., Teoremi di confronto fra due equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine, di tipo ellittico-parabolico, in più variabili reali indipendenti e alcuni loro corollari. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **84**, 73–82 (1970).
15. Picone, M., Nuova limitazione per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione lineare a derivate parziali, del second'ordine, di tipo ellittico-parabolico in quante si vogliano variabili reali indipendenti. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **48**, 152–154 (1970).
16. Pisters, M., A priori Abschätzungen und Regularitätsaussagen bei elliptischen Differentialgleichungen 2. Ordnung und deren Anwendung auf die Störungstheorie. Dissertation an der RWTH Aachen (1971).
17. Pólya, G., & G. Szegö, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton: University Press 1951.
18. Protter, M. H., & H. F. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1967.
19. Protter, M. H., & H. F. Weinberger, On the spectrum of general second order operators. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 251–255 (1966).
20. Protter, M. H., Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations. Ann. of Math. **71**, 423–444 (1960).
21. Pucci, C., Maximum and minimum first eigenvalues for a class of elliptic operators. Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 788–795 (1966).
22. Raĭčinov, I., A class of degenerate elliptic equations. Godišnik Visš. Tehn. Učebn. Zaved. Mat. **1** (1964), kn. 1, 117–154 (1965).
23. Suzuki, K., The first boundary value problem and the first eigenvalue problem for the elliptic equations degenerate on the boundary. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A **3**, 299–335 (1967/68).
24. Tersenov, S. A., On the first boundary value problem for equations of elliptic type degenerating on the boundary. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **44**, 311–316 (1968).
25. Watson, G. N., Theory of Bessel Functions. Cambridge: University Press 1922.

Institut für Mathematik
Technische Hochschule Aachen
51 Aachen, Templergraben 55
Germany

(Eingegangen am 20. April 1972)