Probab. Th. Rel. Fields 74, 289-294 (1987)

Probability Theory and Related Fields

Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée

Rémi Léandre

Faculté des Sciences, Laboratoire de Mathématiques, U.A. CNRS 741, F-25030 Besancon, France

Résumé. Nous majorons en temps petit le logarithme de la densité d'une diffusion dégénérée à l'aide d'une distance semi-riemanienne. Nous obtenons ainsi par une méthode purement probabiliste, basée sur le calcul de Malliavin [K-S] et la théorie des grandes déviations [A], des résultats généralisant en partie ceux obtenus par Varadhan dans le cas non dégénéré [V].

Summary. We give upper-estimates of the logarithm of the density of a degenerate diffusion by means of a semi-degenerate Riemannian distance. By a probabilistic method, we generalise a part of Varadhan's results about density of non-degenerate diffusion [V].

Introduction

Le théorème de Hörmander [H] permet de montrer que le semigroupe associé au générateur:

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} X_i^2 + X_0$$

possède une densité C^∞, dès que l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs X_i est égale à tout l'espace.

Si l'on veut estimer en temps petit la densité $p_t(x, y)$ de ce semi-groupe, on est d'abord tenté d'adapter les méthodes utilisées dans le cas non dégénéré: à des degrés divers, elles reposent sur la méthode de la paramétrix [V; A et al.], l'utilisation de méthodes probabilistes permettant ultérieurement d'obtenir des résulats plus fins [B]. Adapter cette méthode au cas dégénéré implique l'utilisation de diffusions invariantes à gauche sur les groupes de Lie [R-S].

Ceci permet à Sanchez [Sa] de mettre en évidence la majoration suivante:

$$p_t(x, y) \leqq C(N) \left(\frac{d^2(x, y)}{2t} \wedge 1 \right)^{-N} t^{-\alpha}. \tag{0.1}$$

Or le résultat le moins fin obtenu dans le cas non dégénéré [V] est:

$$\lim_{t \to 0} 2t \operatorname{Log}(p_t(x, y)) = -d^2(x, y). \tag{0.2}$$

L'objet de cet article est d'améliorer le résultat de Sanchez, et de montrer que dans le cas dégénéré, on a encore:

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, 2t \operatorname{Log}(p_t(x, y)) \leqq -d^2(x, y). \tag{0.3}$$

A cette fin, nous utilisons une méthode probabiliste.

Nous remercions J.M. Bismut qui a bien voulu nous aider dans notre travail.

Enoncé et preuve du théorème principal

Considérons des champs de vecteurs X_i, $(i=0, \ldots, m)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, dont toutes les dérivées de tout ordre sont bornées.

On sait que l'on réalise le semi-groupe associé à L par l'intermédiaire de la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{aligned} dx_t &= \sum_{i=1}^{m} X_i(x_t) dw_i + X_0(x_t) dt \\ x_0 &= x, \end{aligned} \tag{1}$$

dw_i désignant la différentielle de Stratonovitch de m mouvements browniens indépendants entre eux.

Supposons enfin qu'en tout point de $\mathbb{R}^d$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs X_i, $(i=1, \ldots, m)$, est égale à $\mathbb{R}^d$. Ceci implique que x_t possède pour tout $t>0$ une densité C^∞ notée $p_t(x, y)$. Ceci implique aussi que l'on peut définir une distance semi-riemanienne sur $\mathbb{R}^d$.

On dit en effet, suivant [Sa], qu'un chemin lipschitzien γ paramétré par $[0, \rho]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, est sous-unitaire, si en presque tout t:

$$\langle \dot{\gamma}(t), \xi \rangle^2 \leqq \sum_{i=1}^{m} \langle X_i(\gamma(t)), \xi \rangle^2 \tag{2}$$

pour tout ξ de $\mathbb{R}^d$.

Cette définition garde un sens sur les variétés.

On pose alors:

$$\begin{aligned} d(x, y) = \operatorname{Inf}\{\rho/&\text{il existe un chemin sous-unitaire } \gamma \text{ tel que} \\ &\gamma(0)=x \text{ et tel que } \gamma(\rho)=y\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Il résulte de [B], chap. 1, que l'application $(x, y) \to d(x, y)$ est définie continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

De plus, si l'on modifie légèrement la démonstration de [A], p. 98, on obtient:

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, 2t \operatorname{Log}\Big(\int_{|z-y| \leqq \varepsilon} p_t(x, z) dz\Big) \leqq - \operatorname*{Inf}_{|z-y| \leqq \varepsilon} d^2(x, z) \tag{4}$$

uniformément en (x, y) sur tout compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, dès que l'on fixe un réel arbitraire $\varepsilon > 0$.

L'objet de cet article est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Pour tout multi-indice d'entiers* (α), *on a uniformément sur tout compact* K *de* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, 2t \operatorname{Log}\left(\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y)\right|\right) \leqq -d^2(x, y). \tag{5}$$

Nous avons d'abord besoin de prouver une version non locale de ce théorème.

Notons $\mathscr{A}_n(x)$ l'ensemble des crochets de Lie, pris en x, d'ordre plus petit que n, construits à partir des champs X_i, $i \neq 0$.

Proposition 1. *Supposons qu'il existe* n *et* $C > 0$ *tels que:*

$$\operatorname*{Inf}_{\|f\| = 1;\, x \in \mathbb{R}^d} \sum_{Y \in \mathscr{A}_n(x)} \langle Y(x), f \rangle^2 > C > 0. \tag{6}$$

Pour tout multi-indice d'entiers (α), *on a:*

$$\overline{\lim_{t \to 0}}\, 2t \operatorname{Log}\left(\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y)\right|\right) \leqq -d^2(x, y) \tag{7}$$

uniformément sur tout compact K *de* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Preuve. Rappelons les résultats suivants dont la démonstration se trouve dans [K-S].

Pour tout multi-indice d'entiers (α), il existe un entier $N(\alpha)$ et un réel $C(\alpha)$ tels que:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}^d;\, y \in \mathbb{R}^d} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y)\right| \leqq C(\alpha) t^{-N(\alpha)}. \tag{8}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $C(\varepsilon) > 0$, un réel $C(\alpha)$, et un entier $N(\alpha)$ tels que:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}^d\, |x-y| \geqq \varepsilon} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y)\right| \leqq C(\alpha) t^{-N(\alpha)} \exp\left[-\frac{C(\varepsilon)}{2t}\right]. \tag{9}$$

Comme la fonction $(x, y) \to d^2(x, y)$ est continue, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout (x, y) de K, on ait, dès que $|z - y| \leqq \eta$:

$$d^2(x, y) \leqq d^2(x, z) + \varepsilon. \tag{10}$$

D'après (4), on peut alors trouver un réel t_0 tel que pour tout (x, y) de K, tout t_1 tel que $0 < t_1 < t_0$ on ait:

$$J_1(x, y) = \int_{|y-z| \leqq \eta} p_{t_1}(x, z)\, dz \leqq \exp\left[-\frac{d^2(x, y) - \varepsilon}{2t_1}\right]. \tag{11}$$

Soit un compact $\bar{K}_1 \times \bar{K}_2$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ contenant K. Posons:

$$J_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d - \bar{K}_2} p_{t_1}(x, z)\, dz. \tag{12}$$

D'après la majoration exponentielle de [S-V], on a:

$$J_2(x, y) = P\{x_{t_1} \in \bar{K}_2\} \leqq C \exp\left[-\frac{C\Lambda(x, \bar{K}_2)}{2t_1}\right] \tag{13}$$

avec:

$$\Lambda(x, \bar{K}_2) = \inf_{y \in \bar{K}_2} \|x - y\|^2. \tag{14}$$

Comme la distance semi-riemannienne $(x, y) \to d(x, y)$ est continue en (x, y), il suffit de choisir $\bar{K}_2$ assez grand pour que:
$C\Lambda(x, \bar{K}_2) \geqq \sup_{(x, y) \in K} d^2(x, y) + \varepsilon$ de façon à ce que:

$$J_2(x, y) \leqq \exp\left[-\frac{d^2(x, y) + \varepsilon}{2t_1}\right]. \tag{15}$$

Enfin, on peut supposer que:

$$(\mathbb{R}^d - \bar{K}_2) \cap \{z/|z - y| \leqq \eta\} = \emptyset. \tag{16}$$

(9) implique:

$$\begin{aligned} J_3(x, y) &= \int_{\bar{K}_2 - \{z/|z - y| \leqq \eta\}} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_{t - t_1}(z, y)\right| dz \\ &\leqq \exp\left[-\frac{C(\eta)}{2(t - t_1)}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Soit un réel t_1 plus petit que t.

D'après la formule de Kolmogorov, on a:

$$\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} p_{t_1}(x, z) \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_{t - t_1}(z, y) dz. \tag{18}$$

Décomposons cette dernière intégrale en trois intégrales: l'une sur $\{z/|z - y| \leqq \eta\}$, l'autre sur $\mathbb{R}^d - \bar{K}_2$, la dernière sur $\bar{K}_2 - \{z: |z - y| \leqq \eta\}$. On obtient:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x, y)\right| &\leqq J_1(x, y) \sup_{|z - y| \leqq \eta} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_{t - t_1}(z, y)\right| \\ &\quad + J_2(x, y) \sup_{z \in \mathbb{R}^d - \bar{K}_2} \left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_{t - t_1}(z, y)\right| \\ &\quad + J_3(x, y) \sup_{z \in \bar{K}_2;\, |z - y| > \eta} p_{t_1}(x, z). \end{aligned} \tag{19}$$

Choisissons N tel que:

$$N C(\eta) > \sup_{(x, y) \in K} d^2(x, y) + \varepsilon. \tag{20}$$

Posons $t - t_1 = \frac{t}{N}$. (8), (9), (10), (12) et (14) impliquent que:

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\, 2t \operatorname{Log}\left(\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x,y)\right|\right) \leqq -\frac{d^2(x,y)-\varepsilon}{1-\dfrac{1}{N}} \tag{21}$$

uniformément en (x, y) appartenant à K.

Nous devons maintenant localiser le résultat de la proposition 1.

Si (x, y) décrit un compact K de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, x décrit un compact K' de $\mathbb{R}^d$.

Revenons aux champs de vecteurs initiaux X_i, $(i=0, \ldots, m)$, qui ne vérifient pas nécessairement la condition *uniforme* de Hörmander (6).

Introduisons la boule de centre O et de rayon R. Notons la $B(O, R)$, et supposons que R est assez grand pour que $B(O, R)$ contienne K'.

Introduisons d champs de vecteurs supplémentaires $X_{i,R}$ $(i=1, \ldots, d)$, *nuls sur* $B(O, R)$, et tels que:

i) Pour tout multi-indice (α), pour tout i:

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname*{Sup}_{R>1}\left\|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{(\alpha)}} X_{i,R}(x)\right\| \leqq C(\alpha). \tag{22}$$

ii) Si $\|x\| \geqq 2R$, la forme quadratique $\sum_{i=1}^{d} \langle X_{i,R}(x), .\rangle^2$ est égale à l'identité.

Introduisons enfin d mouvements browniens supplémentaires w_i', $(i=1, \ldots, d)$, indépendants des mouvements browniens initiaux.

Considérons la solution $x'_{R,t}$ issue de $x \in K'$ de l'équation différentielle de Stratonovitch:

$$\begin{aligned} dx'_{R,t} &= \sum_{i=1}^{m} X_i(x'_{R,t})dw_i + \sum_{i=1}^{d} X_{i,R}(x'_{R,t})dw_i' + X_0(x'_{R,t})dt \\ x'_{R,0} &= x. \end{aligned} \tag{23}$$

Enfin, posons:

$$\Lambda(K', R) = \operatorname*{Inf}_{x\in K',\, y\notin B(O,R)} \|x-y\|^2. \tag{24}$$

On a la proposition suivante:

Proposition 2. *$x'_{R,t}$ possède une densité C^∞ $p'_{R,t}(x, y)$ si $t>0$.*

De plus, pour tout multi-indice (α), il existe une constante C qui ne dépend pas de R, une constante $C((\alpha), R)$ et un entier $N((\alpha), R)$ tels que:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Sup}_{x\in K'}\operatorname*{Sup}_{y\in\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p_t(x,y) - \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial y^{(\alpha)}} p'_{R,t}(x,y)\right| \\ &\qquad \leqq C((\alpha), R)\, t^{-N((\alpha),R)} \exp\left[-\frac{C\Lambda(K',R)}{2t}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Preuve. $p'_{R,t}(x, y)$ existe et est C^∞ en y dès que $t>0$, car la famille de champs de vecteurs X_i, $X_{i,R}$ $(i\neq 0)$ vérifie la condition de Hörmander.

Soit un multi-indice (α). On peut trouver grâce au calcul de Malliavin des variables aléatoires $P_t(\alpha)$ et $P_t(\alpha, R)$ telles que:

$$E[f^{(\alpha)}(x_t) - f^{(\alpha)}(x'_{R,t})] = E[f(x_t)P_t(\alpha) - f(x'_{R,t})P_t'(\alpha, R)]. \tag{26}$$

Notons $T(R)$ le temps d'arrêt $\inf\{t; x_t \notin B(O, R)\}$.

D'après les résultats de [B] ou de [K-S]:

$$P_t(\alpha) = P_t'(\alpha, R) \qquad \text{si } t < T(R).$$

De plus, on a évidemment:

$$x_t = x'_{R,t} \qquad \text{si } t < T(R).$$

Par ailleurs, d'après [K-S], on a:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in K'} E[|P_t(\alpha)|^2 + |P_t'(\alpha, R)|^2] \leqq C'((\alpha), R)\, t^{-N'((\alpha), R)} \tag{27}$$

pour une constante $C'((\alpha), R)$ et un entier $N'((\alpha), R)$ bien choisis. D'où le résultat, grâce à la major ationexponentielle de [S-V].

Nous pouvons maintenant achever la preuve du théorème 1.

Remarquons en effet que la famille de champs de vecteurs X_i, $X_{i,R}$, $i \neq 0$, vérifié la condition uniforme de Hörmander (6). On peut donc appliquer la proposition 1 à $p'_{R,t}(x, y)$. Par ailleurs, si R est assez grand, $C\Lambda(K', R)$ est nettement plus grand que $\operatorname*{Sup}_{(x,y) \in K} d^2(x, y)$, et la distance semi-riemannienne entre x, y, (x, y) appartenant à K, calculée à partir de la famille de champs de vecteurs modifiée, coïncide avec celle calculée à l'aide de la famille de champs de vecteurs initiale.

Il ne reste plus qu'à appliquer (25).

Bibliographie

[A] Azencott, R.: Grandes déviations et applications. Cours de probabilité de Saint-Flour. Lect. Notes Math. **774**. Berlin Heidelberg New York: Springer 1978

[A et al.] Azencott, R., et al.: Géodésiques et diffusions en temps petit. Astérisque **84–85**. Société mathématique de France (1981)

[B] Bismut, J.M.: Large deviations and the Malliavin calculus. Progress in Math. **45**. Boston: Birkhäuser 1984

[H] Hörmander, L.: Hypoelliptic second order differential equation. Acta Math. **119**, 147–171 (1967)

[K-S] Kusuoka, S., Stroock, D.: Applications of the malliavin calculus, part II. A paraître

[R-S] Rotschild, L.P., Stein, E.M.: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. **137**, 247–320 (1976)

[Sa] Sanchez-Calle, A.: Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vectors fields. A paraître

[S-V] Stroock, D., Varadhan, S.R.S.: Multidimensional diffusion processes. Grundlehren Math. Wissenschaften, Bd. **233**. Berlin Heidelberg New York: Springer 1981

[V] Varadhan, S.R.S.: Asymptotic probabilities and differential equations. Commun. Pure Appl. Math. **19**, 261–286 (1966)

Réçu le 16 juin, 1985; revisé le 25 mars, 1986