

## Kombinationsresonanz und Instabilitätsbereiche zweiter Art bei parametererregten Schwingungen mit nichtlinearer Dämpfung

Von P. Hagedorn

**Übersicht:** Bei parametererregten Schwingungen mit nichtlinearer (kubischer) Dämpfung wird der Resonanzfall untersucht, in dem die Erregerfrequenz gleich der Summe zweier Eigenfrequenzen der ungedämpften freien Schwingungen ist. Dazu wird die erste Näherung der asymptotischen Methode nach *Bogoljubow* und *Mitropolski* benützt. Bei der Stabilitätsuntersuchung der trivialen Lösung ergibt sich ein kritischer Fall, in dem das Stabilitätsverhalten mittels eines von *Salvadori* angegebenen Verfahrens nach der zweiten Methode von *Ljapunow* untersucht wird. Es zeigt sich dabei im besonderen, daß die nichtlineare Dämpfung eine Erweiterung der Instabilitätsbereiche zur Folge hat, ähnlich der, die im Falle linearer Dämpfung eintritt, wie *Schmidt* und *Weidenhammer* nachgewiesen haben.

**Summary:** In this paper, parametrically excited vibrations with nonlinear (cubic) damping are examined for that case of resonance in which the exciting frequency is equal to the sum of two of the natural frequencies of free undamped vibration. Here, the first approximation according to the asymptotic method of *Bogoliubov* and *Mitropolski* is used. The stability investigation indicates a critical case, which is solved by *Liapunov's* second method by use of a procedure given by *Salvadori*. It is particularly shown that nonlinear damping causes widening of the instability regions similar to that shown by *Schmidt* and *Weidenhammer* for the case of linear damping.

**1. Einleitung.** Bei einer Vielzahl von mechanischen Schwingungsproblemen wird man auf Systeme von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten geführt. Diese können oft als eine Verallgemeinerung der *Mathieuschen* Differentialgleichungen angesehen werden. *Mettler* [1] entwickelte erstmalig eine ausführliche und allgemeine Theorie der dabei auftretenden Instabilitäten, wobei von Dämpfungskräften abgesehen wurde. *Schmidt* und *Weidenhammer* [2] untersuchten später den Einfluß der linearen Dämpfung auf die Instabilitätsbereiche und stellten dabei fest, daß die Dämpfung die Instabilitätsbereiche zweiter Art nicht nur verkleinern, sondern auch erweitern kann. Instabilitätsbereiche zweiter Art sind diejenigen, bei denen die Erregerfrequenz eine Linearkombination zweier Eigenfrequenzen des ungedämpften linearen Systems ist. Man spricht deswegen auch von Kombinationsresonanz, womit ganz allgemein das Resonanzverhalten in der unmittelbaren Nachbarschaft einer solchen „kritischen Frequenz“ bezeichnet wird.

Um Instabilitätsbereiche zweiter Art aufzuweisen, muß das mechanische System also mindestens zwei Freiheitsgrade besitzen. Wenn die Bewegungsgleichungen in den Hauptkoordinaten geschrieben werden, nehmen sie die Form

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon (-b_1 x_2 \cos \omega t + e_1 \dot{x}_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon (-b_2 x_1 \cos \omega t + e_2 \dot{x}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

an, wo  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Eigenfrequenzen<sup>1</sup> der ungedämpften freien Schwingungen darstellen,  $\omega$  die Erregerfrequenz,  $b_1$  und  $b_2$  die Erregerkonstanten, und  $e_1$  und  $e_2$  die linearen Dämpfungskoeffizienten. Der Faktor  $\varepsilon$  ist klein und bestimmt die Größenordnung der Dämpfungs- und Erregungsglieder. Die einfachste kritische Frequenz zweiter Art des Systems (1a) ist  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ; Abb. 1a gibt den entsprechenden Instabilitätsbereich an [2, 3]. In dem schraffierten Bereich ist die „Nullage“ des mechanischen Systems, d. h. die triviale Lösung  $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  von (1a), instabil. Wenn statt der kleinen zu  $\varepsilon$  proportionalen Dämpfung konstante Dämpfungskoeffizienten angenommen werden, können wir anstelle von (1a)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + e_1 \dot{x}_1 - \varepsilon b_1 x_2 \cos \omega t &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + e_2 \dot{x}_2 - \varepsilon b_2 x_1 \cos \omega t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

schreiben. Instabilität tritt dann erst oberhalb bestimmter „Schwellwerte“  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ein, d. h. die „Erregerkraft“ muß einen bestimmten Mindestwert überschreiten, damit die Nullage instabil wird (Abb. 1b).

<sup>1</sup> Eigentlich müßte hier und auch später immer „Kreisfrequenz“ anstelle von „Frequenz“ stehen.

Die „destabilisierende“ Wirkung der Dämpfung wurde nicht nur bei parametererregten Schwingungen, sondern auch bei Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten und nichtkonservativen Lasten mehrfach nachgewiesen [4]. Der Ausdruck „nichtkonservativ“ wird in diesem Zusammenhang für Kräfte benützt, die eine Funktion der Lagekoordinaten sind, jedoch kein verallgemeinertes von der Zeit abhängiges Potential aufweisen; im besonderen werden die „Folgelasten“ oft einfach so bezeichnet.

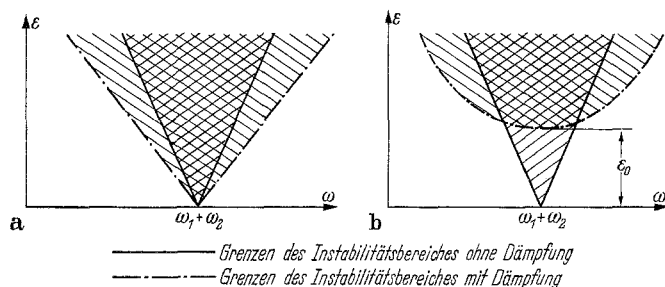


Abb. 1. Erweiterung der Instabilitätsbereiche durch lineare Dämpfung;  
a) Dämpfungskoeffizienten proportional zu  $\varepsilon$ ; b) konstante endliche Dämpfung.

Soweit bekannt wurde jedoch bisher noch nicht untersucht, ob dieses Verhalten nur die lineare Dämpfung kennzeichnet, oder ob bei nichtlinearer Dämpfung ein ähnliches Verhalten nachgewiesen werden kann. Bei parametererregten Schwingungen gibt es zwar Veröffentlichungen über die *Mathieugleichung* mit nichtlinearer Dämpfung [6, 7, 8], doch nicht über ein entsprechendes System von Differentialgleichungen; Untersuchungen darüber sollen hier angestellt werden.

In dieser Abhandlung wird der Einfluß der nichtlinearen Dämpfung auf die stationären Lösungen und deren Stabilität untersucht, und zwar in der Nachbarschaft der einfachsten kritischen Frequenz zweiter Art ( $\omega \approx \omega_1 + \omega_2$ ). Die Bewegungsgleichungen sollen in den Hauptkoordinaten des mechanischen Systems geschrieben werden, mit zusätzlichen kubischen Dämpfungsgliedern, so daß sie jetzt die Form

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon (-b_1 x_2 \cos \omega t + e_1 \dot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1^3 + a_1 x_1^3) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon (-b_2 x_1 \cos \omega t + e_2 \dot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2^3 + a_2 x_2^3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

annehmen. Dabei sind  $c_1$  und  $c_2$  die Konstanten der kubischen Dämpfung und  $a_1$  und  $a_2$  die Koeffizienten zusätzlicher kubischer Rückstellglieder; die restlichen Konstanten haben die schon erklärte Bedeutung. Für die Differentialgleichungen (1c) ohne die kubische und nur mit linearer Dämpfung gibt es eine Reihe von mechanischen Beispielen [5]. Die lineare Dämpfung stellt jedoch im Prinzip eine recht willkürliche Annahme dar, die meist nur zur Erleichterung der Rechnung dient; die Annahme einer nichtlinearen Dämpfung dürfte physikalisch mindestens ebenso gerechtfertigt sein. Als mechanisches Beispiel mit kubischer Dämpfung seien hier nur die Biegeschwingungen eines stählernen Balkens genannt, bei denen die Dämpfung nach *Bolotin* [9] in der Form

$$D = -\gamma |\dot{x}|^e \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (2)$$

geschrieben werden kann, wo  $e$  Werte zwischen 2 und 3 annimmt. Es soll hier jedoch nicht ein bestimmtes mechanisches Beispiel untersucht werden, sondern allgemeiner der Einfluß einer nichtlinearen Dämpfung.

Bei den folgenden Untersuchungen wird die erste Näherung der asymptotischen Methode nach *Bogoljubow* und *Mitropolski* [10] angewendet, die bekanntlich mit „gemittelten“ Differentialgleichungen arbeitet. Darunter sind Gleichungen zu verstehen, bei denen gewisse Glieder über eine Schwingungsperiode gemittelt wurden.

**2. Die „gemittelten“ Differentialgleichungen im Resonanzfall  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ .** Als erstes soll das System dimensionslos gemacht werden. Zu diesem Zweck führen wir gemäß

$$\omega t = \tau \quad (3)$$

eine dimensionslose Zeit ein. Die Ableitungen nach der transformierten Zeit  $\tau$  werden nicht mehr durch einen Punkt, sondern durch einen Strich dargestellt:

$$\dot{q} = \omega q' = \omega \frac{dq}{d\tau} = \frac{dq}{dt}. \quad (4)$$

Da die Stabilität der Lösungen in der Nähe der kritischen Frequenz  $\omega_0$  untersucht werden soll, schreiben wir

$$\omega = \omega_0 (1 - \lambda), \quad (5)$$

wobei  $\lambda$  ein kleiner Faktor von der Größenordnung von  $\varepsilon$  ist und die Abweichung von der kritischen Frequenz kennzeichnet. Außerdem werden noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_0}, & B_1 &= \frac{b_1}{K_1 \omega_0^2}, & C_1 &= c_1 K_1^2 \omega_0, & E_1 &= \frac{e_1}{\omega_0}, & A_1 &= \frac{a_1}{\omega_0^2 K_1}, \\ K_2 &= \frac{\omega_2}{\omega_0}, & B_2 &= \frac{b_2}{K_2 \omega_0^2}, & C_2 &= c_2 K_2^2 \omega_0, & E_2 &= \frac{e_2}{\omega_0}, & A_2 &= \frac{a_2}{\omega_0^2 K_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wenn jetzt in (1c) für  $\omega$  der Ausdruck (5) gesetzt wird, erhält man mit den Abkürzungen (6) und unter Vernachlässigung der Größen, welche klein von zweiter Ordnung sind, das System

$$\left. \begin{aligned} x_1'' + K_0^2 (1 + 2\lambda) x_1 + \varepsilon \left( -B_1 K_1 x_2 \cos \tau + E_1 x_1' + \frac{C_1}{K_1^2} x_1'^3 + A_1 K_1 x_1^3 \right) &= 0, \\ x_2'' + K_2^2 (1 + 2\lambda) x_2 + \varepsilon \left( -B_2 K_2 x_1 \cos \tau + E_2 x_2' + \frac{C_2}{K_2^2} x_2'^3 + A_2 K_2 x_2^3 \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Nach der in der asymptotischen Methode üblichen Weise wird jetzt in der ersten Näherung die Transformation

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Q_1(\tau) \cdot \sin [K_1 \tau + \vartheta_1(\tau)], & x_2 &= Q_2(\tau) \cdot \sin [K_2 \tau + \vartheta_2(\tau)], \\ x_1' &= K_1 Q_1(\tau) \cos [K_1 \tau + \vartheta_1(\tau)], & x_2' &= K_2 Q_2(\tau) \cos [K_2 \tau + \vartheta_2(\tau)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

eingeführt. Dabei sind  $Q_1(\tau)$ ,  $Q_2(\tau)$ ,  $\vartheta_1(\tau)$  und  $\vartheta_2(\tau)$  „langsam“ veränderliche Variable, was man ja auch daraus ersieht, daß in (7) die Störungsglieder klein sind. Wenn man in (8) die Ausdrücke für  $dx_i/d\tau$  mit  $x_i'$  vergleicht, dann ergibt sich sofort

$$Q_1 \vartheta_1' = -Q_1' \operatorname{tg} \bar{q}_1 \quad \text{und} \quad Q_2 \vartheta_2' = -Q_2' \operatorname{tg} \bar{q}_2, \quad (9)$$

wobei  $\bar{q}_1 = K_1 \tau + \vartheta_1(\tau)$  und  $\bar{q}_2 = K_2 \tau + \vartheta_2(\tau)$  gesetzt ist.

Mit dem Ansatz (8) und unter Berücksichtigung von (9) folgt aus (7) das Differentialgleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= -2\lambda K_1 Q_1 \sin \bar{q}_1 \cos \bar{q}_1 + \varepsilon (B_1 Q_2 \cos \bar{q}_1 \sin \bar{q}_2 \cos \tau - \\ &\quad - E_1 Q_1 \cos^2 \bar{q}_1 - C_1 Q_1^3 \cos^4 \bar{q}_1 - A_1 Q_1^3 \sin^3 \bar{q}_1 \cos \bar{q}_1), \\ Q_2' &= -2\lambda K_2 Q_2 \sin \bar{q}_2 \cos \bar{q}_2 + \varepsilon (B_2 Q_1 \cos \bar{q}_2 \sin \bar{q}_1 \cos \tau - \\ &\quad - E_2 Q_2 \cos^2 \bar{q}_2 - C_2 Q_2^3 \cos^4 \bar{q}_2 - A_2 Q_2^3 \sin^3 \bar{q}_2 \cos \bar{q}_2), \\ Q_1 \vartheta_1' &= 2\lambda K_1 Q_1 \sin^2 \bar{q}_1 + \varepsilon (-B_1 Q_2 \sin \bar{q}_1 \sin \bar{q}_2 \cos \tau + \\ &\quad + E_1 Q_1 \sin \bar{q}_1 \cos \bar{q}_1 + C_1 Q_1^3 \sin \bar{q}_1 \cos^3 \bar{q}_1 + A_1 Q_1^3 \sin^4 \bar{q}_1), \\ Q_2 \vartheta_2' &= 2\lambda K_2 Q_2 \sin^2 \bar{q}_2 + \varepsilon (-B_2 Q_1 \sin \bar{q}_2 \sin \bar{q}_1 \cos \tau + \\ &\quad + E_2 Q_2 \sin \bar{q}_2 \cos \bar{q}_2 + C_2 Q_2^3 \sin \bar{q}_2 \cos^3 \bar{q}_2 + A_2 Q_2^3 \sin^4 \bar{q}_2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Da  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  nur langsam veränderlich sind, werden jetzt in den rechten Seiten von (10) die Winkelfunktionen durch ihre zeitlichen Mittelwerte ersetzt, wobei die  $\vartheta_i$  konstant gehalten werden. Für den einfachsten Instabilitätsbereich zweiter Art, der hier untersucht werden soll, hat man

$$K_1 + K_2 = 1, \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (11)$$

Die dafür geltenden Mittelwerte der Winkelfunktionen sind aus Tabelle 1 zu erschen.

Tabelle 1. Mittelwerte von Winkelfunktionen

Funktion	Mittelwert
$\sin \bar{q}_1 \cos \bar{q}_1, \sin \bar{q}_2 \cos \bar{q}_2$ $\sin^3 \bar{q}_1 \cos \bar{q}_1, \sin^3 \bar{q}_2 \cos \bar{q}_2$ $\sin \bar{q}_1 \cos^3 \bar{q}_1, \sin \bar{q}_2 \cos^3 \bar{q}_2$	0
$\sin \bar{q}_2 \cos \bar{q}_1 \cos \tau$ $\sin \bar{q}_1 \cos \bar{q}_2 \cos \tau$	$\frac{1}{4} \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$
$\sin^2 \bar{q}_1 \cos \tau$ $\sin^2 \bar{q}_2 \cos \tau$	$-\frac{1}{4} \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$
$\sin^2 \bar{q}_1, \sin^2 \bar{q}_2$ $\cos^2 \bar{q}_1, \cos^2 \bar{q}_2$	$\frac{1}{2}$
$\sin^4 \bar{q}_1, \sin^4 \bar{q}_2$ $\cos^4 \bar{q}_1, \cos^4 \bar{q}_2$	$\frac{3}{8}$

Die gemittelten Differentialgleichungen, welche die erste Näherung nach der asymptotischen Methode darstellen, schreiben sich in der Form

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{\varepsilon B_1}{4} Q_2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{\varepsilon E_1}{2} Q_1 - \frac{3\varepsilon}{8} C_1 Q_1^3, \\ Q_2' &= \frac{\varepsilon B_2}{4} Q_1 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{\varepsilon E_2}{2} Q_2 - \frac{3\varepsilon}{8} C_2 Q_2^3, \\ Q_1 \vartheta_1' &= \lambda K_1 Q_1 + \frac{\varepsilon B_1}{4} Q_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{3\varepsilon}{8} A_1 Q_1^3, \\ Q_2 \vartheta_2' &= \lambda K_2 Q_2 + \frac{\varepsilon B_2}{4} Q_1 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{3\varepsilon}{8} A_2 Q_2^3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dieses System ist autonom. Es besitzt außer der trivialen Lösung  $Q_1 \equiv Q_2 \equiv 0 = \text{konst.}$  auch noch andere, nichttriviale Lösungen, von denen die sogenannten stationären Lösungen besonders wichtig sind. Die letzteren sollen zuerst untersucht werden. Da dann  $Q_1 \neq 0, Q_2 \neq 0$  vorausgesetzt wird, können wir mit  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  statt (12) auch

$$\left. \begin{aligned} Q_1' &= \frac{\varepsilon B_1}{4} Q_2 \sin \vartheta - \frac{\varepsilon E_1}{2} Q_1 - \frac{3\varepsilon}{8} C_1 Q_1^3, \\ Q_2' &= \frac{\varepsilon B_2}{4} Q_1 \sin \vartheta - \frac{\varepsilon E_2}{2} Q_2 - \frac{3\varepsilon}{8} C_2 Q_2^3, \\ \vartheta' &= \lambda + \frac{\varepsilon}{4} \left( \frac{Q_2}{Q_1} B_1 + \frac{Q_1}{Q_2} B_2 \right) \cos \vartheta + \frac{3\varepsilon}{8} (A_1 Q_1^2 + A_2 Q_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

schreiben. Aus (13) werden anschließend die nichttrivialen stationären Lösungen berechnet. Da (13) nur noch aus 3 gekoppelten Differentialgleichungen besteht, haben wir gewissermaßen durch die Mittelung einen halben Freiheitsgrad eliminiert. Die Tatsache, daß wir  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  gesetzt haben, ist dabei nicht wesentlich, denn wenn  $Q_1(\tau), Q_2(\tau)$  und  $\vartheta(\tau)$  bekannt sind, können in (12)  $\vartheta_1(\tau)$  und  $\vartheta_2(\tau)$  durch einfache Quadraturen bestimmt werden. In (13) müssen natürlich  $Q_1(\tau)$  und  $Q_2(\tau)$  immer verschieden von Null sein.

**3. Die nichttrivialen stationären Lösungen.** Als stationär wird hier eine Lösung bezeichnet, für die

$$Q_1 = Q_{10} = \text{konst.}, \quad Q_2 = Q_{20} = \text{konst.}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{konst.} \quad (14)$$

ist. Wenn man diese Größen in (13) einsetzt, wobei die Ableitungen verschwinden, erhält man

$$2 B_1 Q_{20} \sin \vartheta_0 - 4 E_1 Q_{10} - 3 C_1 Q_{10}^3 = 0, \quad (15)$$

$$2 B_2 Q_{10} \sin \vartheta_0 - 4 E_2 Q_{20} - 3 C_2 Q_{20}^3 = 0, \quad (16)$$

$$\lambda + \frac{\varepsilon}{4} \left( \frac{Q_{20}}{Q_{10}} B_1 + \frac{Q_{10}}{Q_{20}} B_2 \right) \cos \vartheta_0 + \frac{3\varepsilon}{8} (A_1 Q_{10}^2 + A_2 Q_{20}^2) = 0. \quad (17)$$



gilt. Nichttriviale stationäre Lösungen sind jetzt für beliebig kleine Erregerkräfte stets vorhanden. Auch hier müssen die Vorzeichen von  $B_1$  und  $B_2$  gleich sein, und die kubische Dämpfung muß in beiden Gleichungen in (1c) auftreten. Die Neigung der diesmal nicht eingetragenen Mittellinien hängt von  $\left(A_1 + A_2 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}}\right) Q_{10}^2$ , bzw. von  $\left(A_1 \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} + A_2\right) Q_{20}^2$  ab. Wie im Falle linearer Dämpfung zeigt es sich auch bei kubischer Dämpfung, daß die Koeffizienten der nichtlinearen Rückstellkräfte  $A_1$  und  $A_2$  keinen Einfluß auf die Lage der Verzweigungspunkte auf der  $\lambda$ - bzw.  $\omega$ -Achse haben.

Bei gleichzeitiger Wirkung von linearer und kubischer Dämpfung treten an die Stelle von (18), (19) bzw. (20), (21) etwas kompliziertere Ausdrücke. Die Resonanzkurven sind jedoch wieder in erster Näherung geschlossen und entsprechen im wesentlichen denen mit nur kubischer Dämpfung, wobei jedoch die Lage der Verzweigungspunkte ausschließlich durch die Koeffizienten der linearen Dämpfung bestimmt wird.

**4. Die Stabilität der nichttrivialen stationären Lösungen.** Es soll jetzt die Stabilität der oben betrachteten stationären Lösungen untersucht werden, wobei der *Ljapunowsche* Stabilitätsbegriff zugrunde gelegt wird. Im Fall linearer Dämpfung wurde diese Untersuchung in der 1. Näherung schon in Sonderfällen von *Mettler* [12] und *Benz* [13], und in der 2. Näherung von *Leiss* [11] durchgeführt. Dabei zeigte es sich, daß der obere Ast der Resonanzkurve stabil und der untere Ast instabil ist (Abb. 2). Darüber hinaus wird jetzt die Stabilität der stationären Lösungen im Falle kubischer Dämpfung untersucht, wenn keine lineare Dämpfung vorhanden ist. Wir setzen in (13)

$$E_1 = E_2 = 0, \quad Q_1 = Q_{10} + \bar{Q}_1, \quad Q_2 = Q_{20} + \bar{Q}_2, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta}, \quad (23)$$

wo  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{Q}_2$  und  $\bar{\vartheta}$  die Abweichungen von den stationären Lösungen angeben. Auf diese Weise erhalten wir ein Differentialgleichungssystem für die „Störungen“, das nach Linearisierung in  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{Q}_2$  und  $\bar{\vartheta}$  die Form

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_1' &= -\frac{9\varepsilon}{8} C_1 Q_{10}^2 \bar{Q}_1 + \frac{\varepsilon B_1}{4} \sin \vartheta_0 \cdot \bar{Q}_2 + \frac{\varepsilon B_1}{4} \cos \vartheta_0 \cdot Q_{20} \bar{\vartheta}, \\ \bar{Q}_2' &= \frac{\varepsilon B_2}{4} \sin \vartheta_0 \cdot \bar{Q}_1 - \frac{9\varepsilon}{8} C_2 Q_{20}^2 \bar{Q}_2 + \frac{\varepsilon B_2}{4} \cos \vartheta_0 \cdot Q_{10} \bar{\vartheta}, \\ \bar{\vartheta}' &= \left[ \frac{\varepsilon}{4} \left( \frac{B_2}{Q_{20}} - B_1 \frac{Q_{20}}{Q_{10}^2} \right) \cos \vartheta_0 + \frac{3\varepsilon}{4} A_1 Q_{10} \right] \bar{Q}_1 + \\ &\quad + \left[ \frac{\varepsilon}{4} \left( \frac{B_1}{Q_{10}} - B_2 \frac{Q_{10}}{Q_{20}^2} \right) \cos \vartheta_0 + \frac{3\varepsilon}{4} A_2 Q_{20} \right] \bar{Q}_2 - \frac{\varepsilon}{4} \left( B_2 \frac{Q_{10}}{Q_{20}} + B_1 \frac{Q_{20}}{Q_{10}} \right) \sin \vartheta_0 \cdot \bar{\vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

annimmt.

An Hand des linearen Systems (24) kann die Stabilität der stationären Lösungen nach dem *Hurwitz-Kriterium* untersucht werden. Dabei wird in (24) der Ansatz

$$\bar{Q}_1 = \beta_1 e^{\nu \tau}, \quad \bar{Q}_2 = \beta_2 e^{\nu \tau}, \quad \bar{\vartheta} = \beta_3 e^{\nu \tau} \quad (25)$$

gemacht, woraus dann die charakteristische Gleichung

$$\nu^3 + A_1 \nu^2 + A_2 \nu + A_3 = 0 \quad (26)$$

folgt. Darin ergeben sich unter Berücksichtigung von (15), (16), (17) und (21) folgende Ausdrücke:

$$A_1 = \frac{3\varepsilon}{2} Q_{10}^2 \left( C_1 + C_2 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A_2 = \varepsilon^2 Q_{10}^4 \left[ \frac{9}{8} C_1 C_2 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + \frac{27}{64} \left( C_1 + C_2 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right)^2 - \frac{9}{64} \frac{C_1^2}{B_1^2} \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \left( B_1 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} - B_2 \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right)^2 \right] \mp \\ \mp \varepsilon^2 Q_{10}^2 \frac{3}{16} (A_1 B_1 + A_2 B_2) \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \sqrt{1 - Q_{10}^4 \frac{9 C_1^2}{4 B_1^2} \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_3 = \varepsilon^3 Q_{10}^6 \frac{27 C_1^2 C_2}{64 B_1} \left( B_2 + B_1 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right) \mp \\ \mp \varepsilon^3 Q_{10}^4 \frac{9}{32} C_1 B_2 \left( A_1 \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} + A_2 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right) \sqrt{1 - Q_{10}^4 \frac{9 C_1^2}{4 B_1^2} \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Das obere Vorzeichen in (28) und (29) entspricht dem oberen Vorzeichen in der Gleichung (21) der Resonanzkurve.

Das Hurwitz-Kriterium liefert die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß die charakteristische Gleichung (26) nur Wurzeln mit negativem Realteil aufweist. Ist das der Fall, so ist die triviale Lösung  $\bar{Q}_1 = 0, \bar{Q}_2 = 0, \bar{\varphi} = 0$  des linearisierten Systems (24) asymptotisch stabil. Aus den Ljapunowschen Sätzen wissen wir aber, daß die asymptotische Stabilität der trivialen Lösung des linearisierten Gleichungssystems für die Stabilität derselben Lösung des vollständigen Gleichungssystems hinreichend ist. Ist die triviale Lösung des linearisierten Systems nur schwach stabil, d. h. ist der Realteil mindestens einer Wurzel der charakteristischen Gleichung gleich Null, wobei jedoch keine Wurzel einen positiven Realteil aufweisen darf, so kann an Hand der linearisierten Gleichungen keine Aussage über die Stabilität der trivialen Lösung des vollständigen Gleichungssystems gemacht werden. Zur Stabilitätsuntersuchung müssen dann auch noch Glieder höherer Ordnung hinzugezogen werden, was die Rechnung außerordentlich erschwert. Man spricht dann von einem „kritischen Fall“. Wenn mindestens eine Wurzel der charakteristischen Gleichung einen positiven Realteil aufweist, so ist die triviale Lösung des vollständigen Systems instabil.

Im vorliegenden Fall liefert das Hurwitz-Kriterium die Stabilitätsbedingungen

$$\Delta_1 > 0, \quad (30) \quad \Delta_3 > 0 \quad (31) \quad \text{und} \quad \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3 > 0. \quad (32)$$

Während (30) immer erfüllt ist, zeigt eine einfache Zwischenrechnung, daß (31) zwar für das untere Vorzeichen immer erfüllt ist, für das obere Vorzeichen jedoch nur, wenn die Ungleichung

$$Q_{10}^4 \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{B_1^2 B_2^2 \left( A_1 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} + A_2 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right)^2}{C_1^2 C_2^2 \left( B_2 + B_1 \sqrt{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right)^2 + C_1^2 B_2^2 \sqrt{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \left( A_1 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} + A_2 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} \right)^2} \quad (33)$$

gilt. Die Ungleichung (32) gilt ebenfalls immer für das untere Vorzeichen in den Ausdrücken  $\Delta_2$  und  $\Delta_3$ ; außerdem gilt sie auch für das obere Vorzeichen, für mindestens alle Werte von  $Q_{10}$ , die die Ungleichung (33) erfüllen, wie sich mit einer im Prinzip recht einfachen, jedoch mühsamen Zwischenrechnung zeigt. Aus der Diskussion der Hurwitzschen Bedingungen (30), (31), (32) kann man demnach entnehmen, daß die oberen Äste der Resonanzkurven immer stabil sind, während die unteren Äste nur stabil sind, solange die Werte von  $Q_{10}$  der Ungleichung (33) entsprechen.

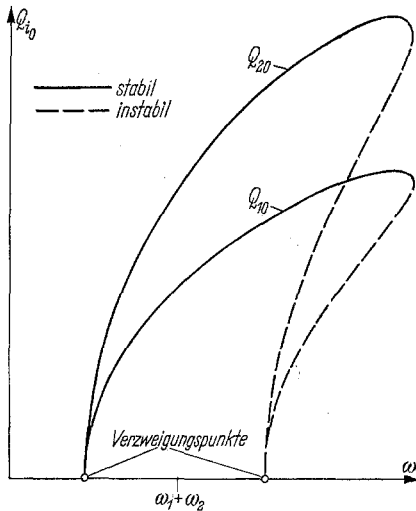


Abb. 3. Resonanzkurven bei kubischer Dämpfung.

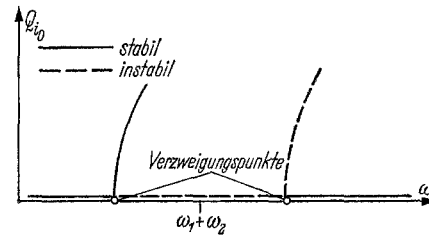


Abb. 4. Stabilitätsverhalten der trivialen Lösung bei linearer (und evtl. zusätzlicher kubischer) Dämpfung.

Aus der Frequenz-Amplituden-Beziehung (21) läßt sich der Wert von  $Q_{10}$  bestimmen, für den die Resonanzkurve eine zur  $\lambda$ - bzw.  $\omega$ -Achse senkrechte Tangente aufweist; dazu genügt es  $d\lambda/dQ_{10}$  gleich Null zu setzen. Vergleicht man den so errechneten Wert mit der vierten Wurzel der rechten Seite von (33), so stellt man fest, daß beide Ausdrücke identisch sind. Daraus ist zu entnehmen, daß der untere Ast der Resonanzkurve oberhalb des Punktes mit lotrechter Tangente stabil und unterhalb dieses Punktes instabil ist (Abb. 3). Wegen (20) gilt dasselbe für die Resonanzkurve von  $Q_{20}$ .

Mit zunehmenden Dämpfungskoeffizienten und mit abnehmenden nichtlinearen Rückstellgliedern wandert der Grenzpunkt zwischen den stabilen und instabilen stationären Lösungen in Abb. 3 nach unten, so daß schließlich die ganze Resonanzkurve stabil wird. Das ist auch bei  $A_1 = A_2 = 0$  immer der Fall.

Es sei noch erwähnt, daß kein kritischer Fall eintritt, da niemals Wurzeln mit verschwindendem Realteil vorhanden sind, außer für den Punkt mit lotrechter Tangente. Wurzeln mit Realteil Null können nur auftreten, wenn  $\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_3 = 0$  ist.

**5. Die Stabilität der trivialen Lösung.** Es soll jetzt die Stabilität der trivialen Lösung  $Q_1 = Q_2 = 0 = \text{konst.}$  untersucht werden. Dazu wird in (12) die von *Leiss* [11] erwähnte Substitution

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= Q_1 \cos \vartheta_1, & y_2 &= Q_2 \cos \vartheta_2, \\ z_1 &= Q_1 \sin \vartheta_1, & z_2 &= Q_2 \sin \vartheta_2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

vorgenommen, wodurch man das System

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= -\bar{E}_1 y_1 + 0 - \bar{\lambda}_1 z_1 + \bar{B}_1 z_2 - \bar{C}_1 y_1 (y_1^2 + z_1^2) - \bar{A}_1 z_1 (y_1^2 + z_1^2), \\ y_2' &= 0 - \bar{E}_2 y_2 + \bar{B}_2 z_1 - \bar{\lambda}_2 z_2 - \bar{C}_2 y_2 (y_2^2 + z_2^2) - \bar{A}_2 z_2 (y_2^2 + z_2^2), \\ z_1' &= \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{B}_1 y_2 - \bar{E}_1 z_1 + 0 - \bar{C}_1 z_1 (y_1^2 + z_1^2) + \bar{A}_1 y_1 (y_1^2 + z_1^2), \\ z_2' &= \bar{B}_2 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2 + 0 - \bar{E}_2 z_2 - \bar{C}_2 z_2 (y_2^2 + z_2^2) + \bar{A}_2 y_2 (y_2^2 + z_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

erhält. Dabei stellen die überstrichenen Größen folgende Abkürzungen dar:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda K_1, & \bar{B}_1 &= \frac{\varepsilon B_1}{4}, & \bar{E}_1 &= \frac{\varepsilon E_1}{2}, & \bar{A}_1 &= \frac{3\varepsilon}{8} A_1, \\ \bar{\lambda}_2 &= \lambda K_2, & \bar{B}_2 &= \frac{\varepsilon B_2}{4}, & \bar{E}_2 &= \frac{\varepsilon E_2}{2}, & \bar{A}_2 &= \frac{3\varepsilon}{8} A_2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Stabilität der trivialen Lösung  $Q_1 = Q_2 = 0$ , bzw.  $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$ , wurde im Fall  $\bar{E}_1 \neq 0, \bar{E}_2 \neq 0, \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ , also am nur linear gedämpften System, schon von *Leiss* [11] behandelt. Das dort erhaltene Ergebnis stimmt erwartungsgemäß überein mit der von *Schmidt* und *Weidenhammer* [2] auf anderem Wege abgeleiteten Aussage. Aus dem linearen Teil von (35) ergab sich bei *Leiss* mit dem *Hurwitz*-Kriterium, daß die triviale Lösung instabil ist für

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{B_1 B_2} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right) \sqrt{1 - \frac{4 E_1 E_2}{B_1 B_2}} \quad (37)$$

und asymptotisch stabil ist für

$$|\lambda| > \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{B_1 B_2} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right) \sqrt{1 - \frac{4 E_1 E_2}{B_1 B_2}}. \quad (38)$$

Die Stabilität der trivialen Lösung von (35) läßt sich außer für

$$\lambda = \pm \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{B_1 B_2} \left( \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right) \sqrt{1 - \frac{4 E_1 E_2}{B_1 B_2}} \quad (39)$$

im ganzen Frequenzbereich an Hand der linearen Glieder entscheiden, da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung immer einen von Null verschiedenen Realteil aufweisen.

Aus (37), (38) und aus der Frequenz-Amplituden-Beziehung ersieht man, daß die triviale Lösung gerade innerhalb des Bereiches instabil ist, der durch die Verzweigungspunkte auf der  $\omega$ -Achse begrenzt wird (Abb. 4). Das gilt auch noch, wenn  $\bar{C}_1 \neq 0, \bar{C}_2 \neq 0$ , sofern lineare Dämpfung vorhanden ist; allerdings wurde für diesen Fall keine explizite Frequenz-Amplituden-Beziehung angegeben. Bei nichtverschwindender linearer Dämpfung werden also die Grenzen des hier betrachteten Instabilitätsbereiches immer durch (39) angegeben. Der Instabilitätsbereich verschwindet, wenn  $4 E_1 E_2 \geq B_1 B_2$ . Außerdem erkennt man an (39), daß die lineare Dämpfung den Instabilitätsbereich einschränken oder auch erweitern kann, worauf *Schmidt* und *Weidenhammer* [2] zum ersten Mal hingewiesen haben (Abb. 1). Wenn man in den Ausgangsgleichungen (1c) von einer kleinen konstanten Dämpfung ausgeht, die nicht von  $\varepsilon$  abhängt, so nimmt der Instabilitätsbereich die in der Abb. 1b gezeigte Form an. Man sieht, daß Instabilität dann erst oberhalb eines bestimmten Schwellwertes  $\varepsilon = \varepsilon_0$  eintreten kann. Das Stabilitätsverhalten ist also bekannt für den Fall, in dem lineare Dämpfung vorhanden ist.



Als nächstes soll die Stabilität der trivialen Lösung untersucht werden, wenn die lineare Dämpfung verschwindet, d. h. wenn  $E_1 = E_2 = 0$  ist. Dazu wird im linearen Teil von (35)

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= -\bar{\lambda}_1 z_1 + \bar{B}_1 z_2, \\ y_2' &= \bar{B}_2 z_1 - \bar{\lambda}_2 z_2, \\ z_1' &= \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{B}_1 y_2, \\ z_2' &= \bar{B}_2 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

wieder

$$y_1 = \beta_1 e^{\nu \tau}, \quad y_2 = \beta_2 e^{\nu \tau}, \quad z_1 = \beta_3 e^{\nu \tau}, \quad z_2 = \beta_4 e^{\nu \tau} \quad (41)$$

gesetzt, woraus sich die charakteristische Gleichung

$$\nu^4 + (\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{B}_2) \nu^2 + (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2 = 0 \quad (42)$$

ergibt. Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung können explizit angegeben werden:

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2 \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_2^2) \pm \sqrt{(2 \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_2^2)^2 - 4 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2}}. \quad (43)$$

Aus (43) ist zu entnehmen, daß stets Wurzeln mit positivem Realteil existieren, wenn

$$(2 \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_2^2)^2 - 4 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2 < 0 \quad \text{ist,} \quad (44)$$

also wenn

$$|\lambda| < \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2} \quad \text{ist;} \quad (45)$$

d. h. die triviale Lösung ist instabil für  $\lambda$ -Werte, die die Ungleichung (45) erfüllen. Dies gilt nach den *Ljapunowschen* Sätzen auch, wenn das Gleichungssystem außer den linearen noch beliebige nichtlineare Glieder aufweist. Diese Aussage behält demzufolge ihre Gültigkeit auch für  $\bar{C}_1 \neq 0$ ,  $\bar{C}_2 \neq 0$ ,  $\bar{A}_1 \neq 0$ ,  $\bar{A}_2 \neq 0$ .

Wenn

$$(2 \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_2^2)^2 - 4 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2 \geq 0 \quad \text{ist,} \quad (46)$$

läßt sich leicht zeigen, daß zwei Paare rein komplexer konjugierter Wurzeln vorhanden sind. Das bedeutet, daß für  $\lambda \geq \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$  und für  $\lambda \leq -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2}$  die triviale Lösung schwach stabil ist, sofern in (35) die Glieder höherer Ordnung wegfallen. Falls in (35) die Glieder höherer Ordnung nicht verschwinden, so kann man an Hand der linearisierten Gleichungen für  $\lambda^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} \bar{B}_1 \bar{B}_2$  nichts über die Stabilität aussagen. Für

$$\lambda \geq \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2} \quad \text{und für} \quad \lambda \leq -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{B}_1 \bar{B}_2} \quad (47)$$

tritt somit der „kritische Fall“ ein, und für die Stabilitätsuntersuchung der trivialen Lösung müssen in (35) die Glieder höherer Ordnung hinzugezogen werden. Abb. 5 zeigt, daß der Instabilitätsbereich, der sich mit  $E_1 = E_2 = 0$  aus den linearisierten Gleichungen ergibt, stets innerhalb des Bereiches liegt, der auf der  $\omega$ - bzw.  $\lambda$ -Achse durch die Verzweigungspunkte begrenzt wird. Im Grenzfall  $C_1 B_1 = C_2 B_2$  stimmen beide Bereiche überein.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (42) sollen im kritischen Fall mit  $\pm i \nu_1$  und  $\pm i \nu_2$  bezeichnet werden, wobei  $\nu_1$  und  $\nu_2$  reell und positiv sind und den Ausdrücken

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{B}_2) + \sqrt{(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2 - 4 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2}}, \\ \nu_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{B}_2) - \sqrt{(\bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2 - 4 (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

entsprechen.

Im kritischen Fall muß die Stabilität mittels der zweiten oder direkten Methode von *Ljapunow* untersucht werden. Diese beruht auf der „Konstruktion“ einer *Ljapunowschen* Funktion, wofür es jedoch keine allgemeingültigen Regeln gibt. Verschiedene Autoren haben versucht, die Kon-

struktions der *Ljapunowschen* Funktion zu mechanisieren, wobei jedoch immer mehr oder weniger willkürliche Ausnahmen gemacht werden müssen; die Erfahrung und Übung in der Lösung solcher Aufgaben spielt dabei eine grundlegende Rolle. Es sei hier nur die „Methode des veränderlichen Gradienten“ erwähnt (*Hahn* [14]), welche im besonderen von *Szegö* [15, 16] systematisch weiterentwickelt wurde. Die Untersuchung der Stabilität der trivialen Lösung von (35) nach dieser oder ähnlichen Methoden ist jedoch außerordentlich mühsam, wenn nicht ganz undurchführbar. Die bekannten Beispiele für diese Methoden entsprechen im allgemeinen bedeutend einfacheren Differentialgleichungen.

Es existieren jedoch auch andere systematische Untersuchungen für einzelne kritische Fälle, von denen einige bis auf *Ljapunow* zurückgehen. Für ein mechanisches System mit zwei Freiheitsgraden sind für den kritischen Fall mit zwei Paaren konjugiert komplexer Wurzeln Untersuchungen von *Malkin* [17] und von *Salvadori* [18, 19, 20] bekannt. Beide Methoden gelten für nichtlineare Systeme, bei denen die nichtlinearen Glieder in Form einer Potenzreihe geschrieben werden können, und sind deswegen auf unseren Fall anwendbar. *Malkin* transformiert zuerst mittels einer linearen Transformation die Matrix der linearen Glieder des Differentialgleichungssystems in die *Jordansche* Normalform:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} i\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\nu_2 \end{pmatrix}.$$

Er erhält so ein komplexes System von Differentialgleichungen, und führt mittels verschiedener Transformationen das Problem auf einen anderen einfacheren kritischen Fall zurück, für den die Stabilitätsuntersuchung leicht durchführbar ist. Die Anwendung dieser Methode auf die Gleichungen (35) führt auf ziemlich komplizierte Ausdrücke, welche die Rechnung recht unübersichtlich machen und die Auswertung der transformierten Gleichungen sehr erschweren.

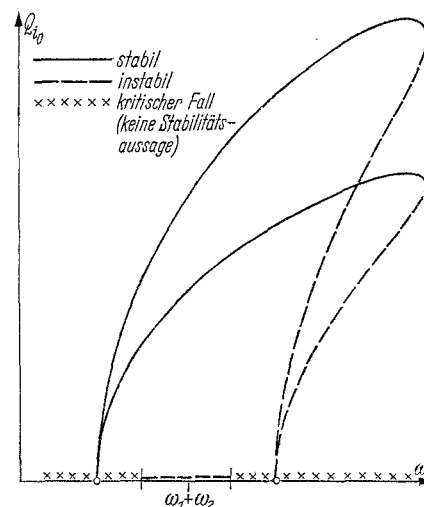


Abb. 5. Aus dem linearen Teil der Gleichungen folgendes Stabilitätsverhalten der trivialen Lösung, ohne lineare Dämpfung.

Der von *Salvadori* [18, 19, 20] angegebene Weg beruht direkt auf der Anwendung der zweiten Methode von *Ljapunow* und auf Sätzen über die Konstruktion einer *Ljapunowschen* Funktion. Dabei wird von einem System ausgegangen, dessen Matrix der linearen Glieder die Normalform

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ -\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

annimmt. Das Gleichungssystem bleibt also reell. Diese Methode scheint im vorliegenden Fall auf einfacherem Wege zum Ziel zu führen; die Zwischenrechnungen sind zwar auch hier recht mühsam, bleiben jedoch relativ übersichtlich. Außerdem kann diese Methode auch auf allgemeinere kritische Fälle angewendet werden. Aus diesen Gründen soll die Stabilitätsuntersuchung im kritischen Fall nach dem von *Salvadori* aufgezeigten Weg durchgeführt werden.

**6. Die Stabilitätsuntersuchung im kritischen Fall nach Salvadori [18, 19, 20].** Da dieses Verfahren nicht sehr bekannt ist und auch keine praktischen Anwendungsbeispiele vorhanden sind, sollen zuerst seine Grundlagen kurz dargelegt werden. Dabei wird die Methode nur soweit entwickelt als es zur Beurteilung der Stabilität in unserem Fall nötig ist<sup>2</sup>. Anschließend wird dann die Stabilitätsuntersuchung für das System (35) im kritischen Fall durchgeführt.

Das System von Differentialgleichungen wird jetzt in der Normalform

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= \nu_1 z_1 + Y_1(y_1, y_2, z_1, z_2), \\ y_2' &= \nu_2 z_2 + Y_2(y_1, y_2, z_1, z_2), \\ z_1' &= -\nu_1 y_1 + Z_1(y_1, y_2, z_1, z_2), \\ z_2' &= -\nu_2 y_2 + Z_2(y_1, y_2, z_1, z_2) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

dargestellt. Darin sind die  $Y_i$  und  $Z_i$  Potenzreihen in  $y_i$  und  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit Potenzen mindestens zweiten Grades. In unserem speziellen Fall bestehen sie nur aus Gliedern dritter Ordnung.

Die Gleichungen (50) können auch mit

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

in Matrizenform als

$$\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) \quad (52)$$

geschrieben werden.

Das Verfahren von *Salvadori* beruht in unserem besonderen Fall auf dem Ansatz

$$V(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}) + V_4(\mathbf{x}) \quad (53)$$

für die *Ljapunowsche* Funktion, wobei  $V_j(\mathbf{x})$  ( $j = 2, 4$ ) homogene Polynome  $j$ -ten Grades in den 4 Variablen  $y_i, z_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind.

Für das linearisierte System

$$\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} \quad (54)$$

läßt sich sofort eine *Ljapunowsche* Funktion angeben, nämlich

$$V(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}) = \alpha_1 (y_1^2 + z_1^2) + \alpha_2 (y_2^2 + z_2^2). \quad (55)$$

Darin sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beliebige Konstanten, die wegen der geforderten Definitheit dasselbe Vorzeichen besitzen. Die Ableitung von  $V_2(\mathbf{x})$  nach  $\tau$  mittels der linearisierten Gleichungen (54) ist identisch Null, weil

$$\frac{dV_2(\mathbf{x})}{d\tau} = V_2'(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} V_2(\mathbf{x}) \mathbf{x}' = \mathbf{grad} V_2(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \alpha_1 \nu_1 (y_1 z_1 - y_1 z_1) + \alpha_2 \nu_2 (y_2 z_2 - y_2 z_2) \equiv 0 \quad (56)$$

ist. Hier steht  $\mathbf{grad} V_2(\mathbf{x})$  für die Zeilenmatrix

$$\mathbf{grad} V_2(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial y_1}, \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial y_2}, \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial z_1}, \frac{\partial V_2(\mathbf{x})}{\partial z_2} \right) \quad (57)$$

der partiellen Ableitungen nach  $y_i, z_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Für das vollständige System (52) soll im Ansatz (53) der obige Ausdruck für  $V_2(\mathbf{x})$  erhalten bleiben. Gesucht wird jetzt eine Funktion  $V_4(\mathbf{x})$ , so daß die Ableitung von  $V(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}) + V_4(\mathbf{x})$  nach der Zeit  $\tau$  längs den Trajektorien der Lösungen von (52) definit ist. Diese Ableitung wird durch

$$V'(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{d\tau} = \mathbf{grad} V(\mathbf{x}) \mathbf{x}' = \mathbf{grad} [V_2(\mathbf{x}) + V_4(\mathbf{x})] (\bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{f}_3(\mathbf{x})) \quad (58)$$

oder auch durch

$$V'(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} V_2(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{grad} V_2(\mathbf{x}) \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) + \mathbf{grad} V_4(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{grad} V_4(\mathbf{x}) \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) \quad (59)$$

gegeben. Das erste Glied der rechten Seite von (59) ist wegen (56) identisch Null. Die nächsten beiden Glieder der rechten Seite von (59) sind homogene Polynome vierter Ordnung in  $y_i, z_i$  ( $i = 1, 2$ ),

<sup>2</sup> Das Verfahren von *Salvadori* reicht bedeutend weiter. Es ist im Prinzip in allen kritischen Fällen anwendbar, in denen alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung rein imaginär sind. Die Anzahl der Freiheitsgrade des mechanischen Systems ist dabei beliebig.

während das letzte Glied ein homogenes Polynom sechster Ordnung ist. Wir schreiben deshalb

$$V'(\mathbf{x}) = [V'(\mathbf{x})]_4 + [V'(\mathbf{x})]_6, \quad (60)$$

mit

$$[V'(\mathbf{x})]_4 = \text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}) + \text{grad } V_4(\mathbf{x}) \bar{A} \mathbf{x} \quad (61)$$

und

$$[V'(\mathbf{x})]_6 = \text{grad } V_4(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}). \quad (62)$$

Dabei steht  $[V'(\mathbf{x})]_m$  für die Glieder  $m$ -ter Ordnung aus  $V'(\mathbf{x})$ . Wenn  $[V'(\mathbf{x})]_4$  definit wird, so ist hiermit die Stabilitätsfrage entschieden, denn für die Definitheit von  $V'(\mathbf{x})$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  genügt ja die Definitheit des Polynoms der Glieder niedrigster Ordnung. Die Glieder sechster Ordnung spielen dann keine Rolle bei der Stabilitätsentscheidung. Aus diesem Grunde wird jetzt nur noch  $[V'(\mathbf{x})]_4$  betrachtet.

Es wird jetzt untersucht, unter welchen Bedingungen  $[V'(\mathbf{x})]_4$  dem Ausdruck

$$[V'(\mathbf{x})]_4 = C_{20}(y_1^2 + z_1^2)^2 + C_{11}(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2) + C_{02}(y_2^2 + z_2^2)^2 \quad (63)$$

entspricht. Aus (61) folgt mit (63)

$$\text{grad } V_4(\mathbf{x}) \bar{A} \mathbf{x} = C_{20}(y_1^2 + z_1^2)^2 + C_{11}(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2) + C_{02}(y_2^2 + z_2^2)^2 - \text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \quad (64)$$

oder auch

$$\nu_1 \left( \frac{\partial V_4}{\partial y_1} z_1 - \frac{\partial V_4}{\partial z_1} y_1 \right) + \nu_2 \left( \frac{\partial V_4}{\partial y_2} z_2 - \frac{\partial V_4}{\partial z_2} y_2 \right) = C_{20}(y_1^2 + z_1^2)^2 + C_{11}(y_1^2 + z_1^2)(y_2^2 + z_2^2) + C_{02}(y_2^2 + z_2^2)^2 - \text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \quad (65)$$

worin  $\text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x})$  ein bekanntes Polynom vierter Ordnung ist. Wenn die ganze rechte Seite von (65) als bekannt vorausgesetzt wird, so ist (65) eine partielle Differentialgleichung in  $V_4(\mathbf{x})$ . Salvadori hat über die Existenz von Lösungen solcher Differentialgleichungen verschiedene Sätze angegeben. Die Differentialgleichung (65) besitzt genau dann Lösungen in der Klasse der homogenen Polynome vierter Ordnung, wenn  $\nu_1$  und  $\nu_2$  inkommensurabel sind und die Koeffizienten der Glieder der bekannten rechten Seite bestimmte Bedingungen erfüllen. Die Tatsache, daß  $\nu_1$  und  $\nu_2$  inkommensurabel sind, d. h. in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen, besagt, daß in (50) keine „innere Resonanz“ eintritt. Damit wollen wir uns hier nicht weiter befassen; diese Bedingung darf aber im allgemeinen als erfüllt angenommen werden. Es wird jetzt die erwähnte Beziehung zwischen den Koeffizienten ausgewertet. In  $\text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x})$  soll der Koeffizient des Gliedes  $2 r_i$ -ten Grades in  $y_i$  und  $2(p_i - r_i)$ -ten Grades in  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $A_{p_i, r_i}^{r_1, r_2}$  bezeichnet werden. Dann ergibt sich aus den erwähnten Sätzen, daß genau dann eine Lösung für  $V_4(\mathbf{x})$  existiert, wenn die Koeffizienten der Glieder der rechten Seiten von (65) den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} C_{20} &= \frac{3}{8} \left( A_{20}^{00} + \frac{1}{3} A_{20}^{10} + A_{20}^{20} \right), \\ C_{11} &= \frac{1}{4} (A_{11}^{00} + A_{11}^{01} + A_{11}^{10} + A_{11}^{11}), \\ C_{02} &= \frac{3}{8} \left( A_{02}^{00} + \frac{1}{3} A_{02}^{01} + A_{02}^{02} \right) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

genügen. Es existiert also bestimmt immer ein Polynom  $V_4(\mathbf{x})$ , so daß  $[V'(\mathbf{x})]_4$  die Form (63) annimmt, wobei die Konstanten  $C_{20}$ ,  $C_{11}$  und  $C_{02}$  durch (66) gegeben sind. Wenn sich die Stabilitätsfrage an Hand von  $[V'(\mathbf{x})]_4$  beantworten läßt, so braucht  $V_4(\mathbf{x})$  gar nicht konstruiert werden. Es hat  $V_4(\mathbf{x})$  nämlich keinen Einfluß auf den Charakter der Definitheit von  $V(\mathbf{x})$ , da dieser ja durch  $V_2(\mathbf{x})$  bestimmt wird.

Da  $V_2(\mathbf{x})$  noch die freien Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  enthält, hängen die durch (66) bestimmten Koeffizienten  $C_{20}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{02}$  linear von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ab. Nach einer Zwischenrechnung folgt

$$C_{20} = h \alpha_1, \quad C_{11} = q \alpha_1 + s \alpha_2, \quad C_{02} = k \alpha_2, \quad (67)$$

wo  $h$ ,  $k$ ,  $q$  und  $s$  nicht mehr von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  abhängen. Mittels der Koeffizienten  $h$ ,  $k$ ,  $q$  und  $s$  kann man die Art der Definitheit von  $V'(\mathbf{x})$  in Zusammenhang mit der von  $V(\mathbf{x})$  untersuchen und damit im allgemeinen die Stabilitätsfrage beantworten;  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind dabei frei wählbare Parameter.

Es sei hier nur ein besonderer Fall erwähnt, den wir für unsere speziellen Gleichungen anschließend benötigen. Wenn  $h k \neq 0$  ist, und wenn die Produkte  $h q$  und  $k s$  nicht gleichzeitig negativ sind, so gilt folgendes Stabilitätskriterium: die triviale Lösung von (50) ist asymptotisch stabil, wenn beide Konstanten  $h$  und  $k$  negativ sind; sie ist instabil, wenn mindestens eine dieser Konstanten positiv ist. Es können nämlich dann immer  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  so gewählt werden, daß  $V_2(x)$  und  $[V'(x)]_4$  mit demselben, bzw. mit entgegengesetztem Vorzeichen definit werden. Das ist im einzelnen in [18, 19, 20] nachgewiesen. Dort wird außerdem gezeigt, für welche anderen Beziehungen zwischen  $h, k, q$  und  $s$  die triviale Lösung stabil, bzw. instabil ist.

Die Stabilitätsuntersuchung beschränkt sich also auf die Bestimmung von  $h, k, q$  und  $s$  aus den Gleichungen (50), (55), (66) und (67), und auf die anschließende Anwendung des angegebenen Stabilitätskriteriums, sofern die für seine Gültigkeit nötigen Voraussetzungen erfüllt sind. Dabei ersieht man aus (66), daß nicht alle Koeffizienten des Polynoms  $\text{grad } V_2(x) f_3(x)$  einen Einfluß auf die Stabilität haben. Nur die Koeffizienten der Glieder mit ausschließlich geraden Potenzen in den  $y_i, z_i$  ( $i = 1, 2$ ) gehen in die  $C_{20}, C_{11}, C_{02}$  ein.

Die besondere Eleganz dieses Verfahrens liegt darin, daß die *Ljapunowsche* Funktion  $V(x)$  nicht vollständig konstruiert werden muß, obwohl die zweite Methode von *Ljapunow* streng angewandt wird.

Nachdem die wesentlichen Punkte dieses Verfahrens kurz erläutert wurden, soll es auf unser spezielles Problem — die Stabilitätsuntersuchung der trivialen Lösung von (35) — angewendet werden. Der kritische Fall tritt ein, wenn  $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = 0$  ist, so daß sich die Matrix der linearen Glieder in (35) als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{\lambda}_1 & \bar{B}_1 \\ 0 & 0 & \bar{B}_2 & -\bar{\lambda}_2 \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{B}_1 & 0 & 0 \\ \bar{B}_2 & \bar{\lambda}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (68)$$

schreibt. Mit einer linearen Transformation wird die Matrix  $A$  in die Normalform (49) überführt. Nennt man die Transformationsmatrix  $S$ , so gilt

$$\bar{A} = S A S^{-1}, \quad (69)$$

wobei  $\bar{A}$  die auf die Normalform (49) transformierte Matrix und  $S^{-1}$  die Kehrmatrix von  $S$  ist.

Für  $S$  und  $S^{-1}$  ergeben sich in unserem Fall die Ausdrücke

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & -b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad (70)$$

und

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\bar{b}_2 & \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & -\bar{b}_1 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \\ \bar{d}_2 & -\bar{d}_1 & \bar{d}_2 & -\bar{d}_1 \\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 & -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &= \bar{B}_2 v_i (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2), & b_i &= v_i (v_i^2 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2), \\ c_i &= \bar{B}_2 (\bar{B}_1 \bar{B}_2 + v_i^2 - \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2), & d_i &= \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{\lambda}_1 - v_i^2 \bar{\lambda}_2, \\ \bar{a}_i &= \frac{v_i}{v_1 v_2 (v_2^2 - v_1^2)}, & \bar{b}_i &= \frac{v_i (v_i^2 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2)}{v_1 v_2 \bar{B}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) (v_2^2 - v_1^2)}, \\ \bar{c}_i &= \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2 - v_i^2}{(v_2^2 - v_1^2) (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)}, \\ \bar{d}_i &= \frac{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{\lambda}_1 + v_i^2 \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_2}{\bar{B}_2 (v_2^2 - v_1^2) (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2) (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{B}_1 \bar{B}_2)}, & \text{für } i &= 1, 2, \end{aligned}$$

Die nichtlinearen Glieder in (35) müssen natürlich auch mit transformiert werden. Das ist etwas mühsamer als die Transformation der linearen Glieder; es wird an Hand der Transformationsgleichungen

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{S} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}_N \quad (72)$$

im einzelnen schrittweise durchgeführt. In (72) ist  $\mathbf{x}$  die Matrix der Variablen  $y_1, y_2, z_1, z_2$  in (35);  $\mathbf{x}_N$  ist die Matrix der transformierten Variablen, wenn (35) in der Normalform (50) dargestellt wird. Für die transformierten Variablen — also für die Variablen unserer Differentialgleichungen, wenn sie in der Form (50) geschrieben werden — sollen keine neuen Bezeichnungen eingeführt werden. Vielmehr sollen von jetzt an die schon transformierten Variablen wieder einfach mit  $y_1, y_2, z_1, z_2$  bezeichnet werden. Die Matrix  $\mathbf{x}_N$  entspricht deshalb der Matrix  $\mathbf{x}$  in (51).

Für die Bestimmung von  $h, k, q$  und  $s$  benötigt man jedoch nur einige der Koeffizienten des nichtlinearen Teils von (50). Wegen (66) und wegen der Form von  $V_2(\mathbf{x})$  müssen nur folgende Koeffizienten in den transformierten Gleichungen bestimmt werden:

- in der Gleichung für  $y_1'$  die Koeffizienten von  $y_1 z_1^2, y_1^3, y_1 z_2^2, y_1 y_2^2$ ;
- in der Gleichung für  $y_2'$  die Koeffizienten von  $y_2 z_1^2, y_2 y_1^2, y_2 z_2^2, y_2^3$ ;
- in der Gleichung für  $z_1'$  die Koeffizienten von  $z_1^3, y_1^2 z_1, z_1 z_2^2, z_1 y_2^2$ ;
- in der Gleichung für  $z_2'$  die Koeffizienten von  $z_2^3, y_1^2 z_2, z_2^2 z_2, y_2^2 z_2$ .

Diese Koeffizienten werden aus (35) mit den Transformationsgleichungen (72) bestimmt. Anschließend werden die entsprechenden Glieder in  $f_3(\mathbf{x})$  eingesetzt, und aus dem bekannten Polynom  $\text{grad } V_2(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x})$  die nötigen  $A_{p_1 p_2}^{r_1 r_2}$  berechnet. Man erhält dann, unter Berücksichtigung von (66) und (67), die Ausdrücke

$$h = -\frac{4}{(\nu_2^2 - \nu_1^2)^3 \nu_1^2} \left[ \frac{\bar{C}_1 \beta^3}{\bar{B}_2^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} + \bar{C}_2 \alpha \right], \quad (73)$$

$$k = -\frac{4}{(\nu_2^2 - \nu_1^2)^3 \nu_2^2} \left[ \frac{\bar{C}_1 \alpha^3}{\bar{B}_2^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} + \bar{C}_2 \beta \right], \quad (74)$$

$$q = -\frac{4}{(\nu_2^2 - \nu_1^2)^3 \nu_2^2} \left[ \frac{\bar{C}_1 \alpha^2 \beta}{\bar{B}_2^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} + \bar{C}_2 \alpha \right], \quad (75)$$

$$s = -\frac{4}{(\nu_2^2 - \nu_1^2)^3 \nu_1^2} \left[ \frac{\bar{C}_1 \alpha \beta^2}{\bar{B}_2^2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2} + \bar{C}_2 \beta \right], \quad (76)$$

mit

$$\alpha = \nu_2^2 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_2^2 \quad \text{und} \quad \beta = \nu_2^2 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 - \bar{\lambda}_1^2. \quad (77)$$

Die einzelnen Schritte der Zwischenrechnung bereiten keinerlei Schwierigkeiten, sollen aber hier wegen ihres Umfangs nicht ausgeführt werden.

An den Ausdrücken für  $h, k, q$  und  $s$  fällt sofort auf, daß sie die Konstanten  $\bar{A}_1$  und  $\bar{A}_2$  nicht enthalten. Daraus ist zu entnehmen, daß die nichtlinearen Rückstellglieder hier die Stabilität nicht beeinflussen, sofern die Stabilitätsfrage an Hand von  $h, k, q$  und  $s$  eindeutig zu beantworten ist. Es läßt sich auch auf anderem Wege direkt aus den Gleichungen (35) ersehen, daß die nichtlinearen Rückstellglieder tatsächlich keinen Einfluß auf die Stabilität der trivialen Lösung haben. Wenn diese Tatsache schon anfangs bekannt ist, so vereinfacht sich die Rechnung erheblich; dann braucht man nämlich diese Glieder bei der Transformation nicht zu berücksichtigen.

In (73), (74), (75) und (76) muß jetzt untersucht werden, ob die Voraussetzungen zur Anwendung des oben formulierten Stabilitätskriteriums erfüllt sind. Als nächstes muß dann festgestellt werden für welche Werte von  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{\lambda}_1$  und  $\bar{\lambda}_2$  die Größen  $h$  und  $k$  positiv bzw. negativ sind.

Dazu werden die Produkte  $h q$  und  $k s$  gebildet. Aus (42) und (77) ergibt sich leicht

$$\alpha \beta = -\bar{B}_1 \bar{B}_2 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2, \quad (78)$$

und damit folgt

$$h q + k s = \frac{16 (\alpha^2 + \beta^2) (\bar{C}_1 \bar{B}_1 - \bar{C}_2 \bar{B}_2)^2}{\nu_1^2 \nu_2^2 (\nu_2^2 - \nu_1^2)^6 \bar{B}_2^2} \quad (79)$$

aus den Gleichungen für  $h, k, q$  und  $s$ . Diese Summe wird nie negativ; es gilt also das angegebene Stabilitätskriterium.

Zur Bestimmung der Vorzeichen von  $h$  und  $k$  wird zunächst das Produkt  $h k$  betrachtet. Nach einer kurzen Zwischenrechnung erhält man den Ausdruck

$$h k = \frac{16 (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2)^2 \bar{C}_1 \bar{C}_2}{v_1^2 v_2^2 (v_2^2 - v_1^2)^6 \bar{B}_2^3} F(\lambda), \quad (80)$$

wo  $F(\lambda)$  durch

$$F(\lambda) = \lambda^4 - 4 \bar{B}_1 \bar{B}_2 \lambda^2 + 2 \bar{B}_1^2 \bar{B}_2^2 - \frac{\bar{C}_1}{\bar{C}_2} \bar{B}_1^3 \bar{B}_2 - \frac{\bar{C}_2}{\bar{C}_1} \bar{B}_2^3 \bar{B}_1 \quad (81)$$

gegeben ist. Das Vorzeichen von  $h k$  wird durch  $F(\lambda)$  bestimmt und soll in Abhängigkeit von der Frequenzabweichung  $\lambda$  untersucht werden. Die biquadratische Gleichung  $F(\lambda) = 0$  besitzt jeweils ein Paar imaginärer und reeller Wurzeln. Die reellen Wurzeln sind durch

$$\lambda^2 = \left( \bar{B}_1 \sqrt[4]{\frac{\bar{C}_1 \bar{B}_2}{\bar{C}_2 \bar{B}_1}} + \bar{B}_2 \sqrt[4]{\frac{\bar{C}_2 \bar{B}_1}{\bar{C}_1 \bar{B}_2}} \right)^2 \quad (82)$$

gegeben, was auch als

$$\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2}{16} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right)^2 \quad (83)$$

geschrieben werden kann. Ein Vergleich von (83) mit (21) zeigt, daß die reellen Wurzeln von  $F(\lambda) = 0$  grade den Verzweigungspunkten der Resonanzkurven entsprechen (Abb. 5), deren Lage sich mit  $Q_{10} = 0$  aus (21) ergibt. Aus (81) ist außerdem zu entnehmen, daß für

$$\lambda^2 > \frac{\varepsilon^2}{16} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right)^2, \quad (84)$$

$$F(\lambda) > 0 \quad (85)$$

folgt. Wenn

$$\lambda^2 < \frac{\varepsilon^2}{16} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right)^2 \quad (86)$$

ist, so ergibt sich

$$F(\lambda) < 0. \quad (87)$$

Die ganze hier durchgeführte Berechnung gilt natürlich nur für  $\lambda^2 > \frac{\varepsilon^2}{4} B_1 B_2$ , da ja nur für diese Werte von  $\lambda$  der kritische Fall eintritt.<sup>3</sup> Aus (80), (86), und (87) ersieht man deshalb, daß mindestens eine der Größen  $h$  und  $k$  positiv ist, wenn die Ungleichung (86) erfüllt ist. Aus dem angegebenen Stabilitätskriterium folgt dann, daß die triviale Lösung von (35) für  $\lambda$ -Werte instabil ist, die der Bedingung

$$-\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{B_1 B_2} > \lambda > -\frac{\varepsilon}{4} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right) \quad (88)$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{B_1 B_2} < \lambda < \frac{\varepsilon}{4} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right) \quad (89)$$

genügen. Das bedeutet, daß die Nullage instabil ist innerhalb des Bereiches, der auf der  $\lambda$ - oder  $\omega$ -Achse durch die Verzweigungspunkte begrenzt wird (Abb. 5). In diesem Bereich ist also jetzt die Stabilitätsfrage beantwortet.

Es muß jetzt noch die Stabilität außerhalb dieses Bereiches untersucht werden, wofür wieder die Vorzeichen von  $h$  und  $k$  ausschlaggebend sind. Die Größen  $h$  und  $k$  sind wegen (84) und (85) dann entweder beide negativ oder beide positiv. Aus (73) und (74) läßt sich aber zeigen, daß  $h$  und  $k$  nie gleichzeitig positiv sein können; die entsprechende Zwischenrechnung soll hier übergangen werden. Die Größen  $h$  und  $k$  sind also beide negativ, und das oben formulierte Stabilitätskriterium besagt, daß die triviale Lösung von (35) für

$$\lambda > \frac{\varepsilon}{4} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right) \quad (90)$$

und für

$$\lambda < -\frac{\varepsilon}{4} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right) \quad (91)$$

<sup>3</sup> Für  $\lambda^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} B_1 B_2$  hat man auch noch den kritischen Fall, aber mit  $v_1 = v_2 = 0$ . Das Verfahren von *Salvadori* ist dann nicht anwendbar.

asymptotisch stabil ist. Die Ungleichung  $\lambda^2 > \frac{\varepsilon^2}{4} B_1 B_2$  ist dabei immer erfüllt, da nämlich

$$\frac{\varepsilon^2}{16} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right)^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} B_1 B_2 \quad (92)$$

gilt, wobei das Gleichheitszeichen der Beziehung  $C_1 B_1 = C_2 B_2$  entspricht.

Die Abb. 5 kann jetzt so ergänzt werden, daß die triviale Lösung gerade innerhalb des Bereiches instabil ist, der auf der  $\lambda$ - bzw.  $\omega$ -Achse zwischen den Verzweigungspunkten liegt (Abb. 6); die triviale Lösung ist asymptotisch stabil außerhalb dieses Bereiches. Es zeigt sich dabei auch wegen (92), daß die kubische Dämpfung den Instabilitätsbereich grundsätzlich erweitert, außer wenn zwischen Dämpfungs- und Erregungskoeffizienten die Beziehung  $C_1 B_1 = C_2 B_2$  besteht; in diesem Fall bleibt der Instabilitätsbereich unverändert (Abb. 7).

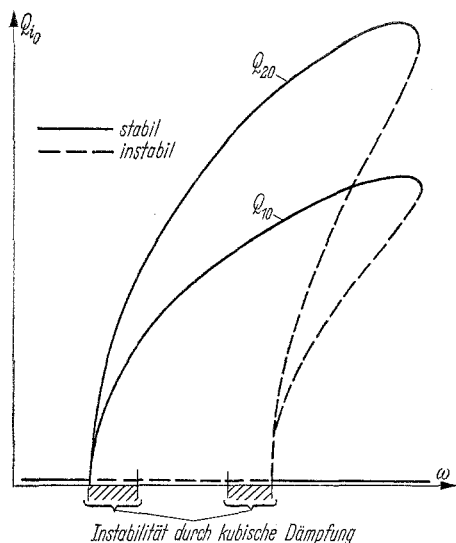


Abb. 6. Stabilitätsverhalten der trivialen Lösung im Falle kubischer Dämpfung (ohne lineare Dämpfung).

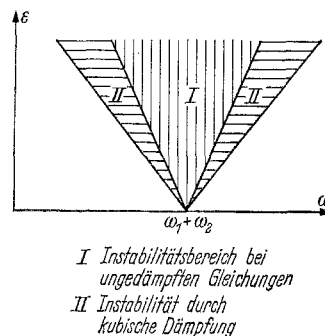


Abb. 7. Durch kubische Dämpfung erweiterter Instabilitätsbereich.

Wenn man statt einer zu  $\varepsilon$  proportionalen eine konstante kubische Dämpfung annimmt, ergibt sich jetzt nicht mehr wie im Fall der konstanten linearen Dämpfung (Abb. 1b) ein „angehobener“ Instabilitätsbereich, bei dem Instabilität nur oberhalb eines bestimmten Schwellwertes auftritt, sondern der Instabilitätsbereich bleibt auch weiterhin keilförmig und seine Spitze liegt auch weiterhin auf der  $\lambda$ - bzw.  $\omega$ -Achse. Der Instabilitätsbereich behält also die in der Abb. 7 angegebene Form. Physikalisch kann diese Tatsache so interpretiert werden, daß im kritischen Fall mit kubischer Dämpfung Instabilität bei beliebig kleinen Werten der „Erregerkräfte“ eintritt. Es gibt hier keine „Schwellwerte“ wie im Falle linearer Dämpfung, die überschritten werden müßten, damit Instabilität möglich ist.

Es muß noch bemerkt werden, daß die Stabilitätsfrage für

$$\lambda = \pm \frac{\varepsilon}{4} \left( B_1 \sqrt[4]{\frac{C_1 B_2}{C_2 B_1}} + B_2 \sqrt[4]{\frac{C_2 B_1}{C_1 B_2}} \right) \quad (93)$$

und für

$$\lambda = \pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{B_1 B_2} \quad (94)$$

hier nicht beantwortet wurde. Auf den durch (93) gegebenen Verzweigungspunkten ist bei praktischen Anwendungen die Stabilitätsfrage allerdings sowieso unwichtig, da es sich um die festliegenden Grenzen des Instabilitätsbereiches handelt.

**7. Schlußbemerkungen.** Es wurde der Resonanzfall  $\omega \approx \omega_1 + \omega_2$  der Gleichungen (1c) mittels der ersten Näherung der asymptotischen Methode nach *Bogoljubow* und *Mitropolski* untersucht, wobei die erste Näherung dieser Methode mit dem Verfahren der langsam veränderlichen Phase und Amplitude identisch ist. Dabei wurden sowohl die nichttrivialen stationären Lösungen betrachtet als auch die Stabilität der trivialen Lösung.



Als wesentliches und wichtigstes Ergebnis ist dabei die Feststellung anzusehen, daß die kubische Dämpfung den Instabilitätsbereich im allgemeinen erweitert. Die zum ersten Mal von *Schmidt* und *Weidenhammer* [2] bei parametererregten Schwingungen nachgewiesene Erweiterung der Instabilitätsbereiche durch Dämpfung ist somit nicht auf den Spezialfall der linearen Dämpfung beschränkt. Bei nichtlinearer (kubischer) Dämpfung ist dieser Effekt sogar noch prägnanter, denn während die lineare Dämpfung den Instabilitätsbereich verkleinern oder vergrößern kann, kann die kubische Dämpfung den Instabilitätsbereich nur vergrößern. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist darin zu sehen, daß bei konstanter, von  $\varepsilon$  unabhängiger kubischer Dämpfung keine „Schwellwerte“  $\varepsilon = \varepsilon_0$  wie im linear gedämpften Fall vorhanden sind, und daß demzufolge bei konstanter kubischer Dämpfung Instabilität für beliebig kleine Werte von  $\varepsilon$  eintritt.

Bei den angestellten Berechnungen wurde eine kubische Dämpfung der Form (2) angenommen. Es kann aber leicht gezeigt werden, daß alles, was hier gesagt wurde, auch noch für einen anderen kubischen Dämpfungsansatz gilt. In der Elastomechanik ist es nämlich auch oft üblich, die innere Dämpfung oder mechanische Hysterese durch einen Ausdruck der Art

$$D_H = -\gamma_H x^2 \dot{x} \quad (95)$$

darzustellen [9]. Dämpfungsglieder dieser Art spielen auch in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. Mit einem solchen Dämpfungsansatz würde man für die Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon (-b_1 x_2 \cos \omega t + e_1 \dot{x}_1 + h_1 x_1^2 \dot{x}_1 + a_1 x_1^3) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon (-b_2 x_1 \cos \omega t + e_2 \dot{x}_2 + h_2 x_2^2 \dot{x}_2 + a_2 x_2^3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

schreiben, statt (1c); dabei sind  $h_1$  und  $h_2$  die Koeffizienten der mechanischen Hysterese. Bei Anwendung der asymptotischen Methode wie im Absatz 2 müßten dann an Stelle der Gleichungen (12) der ersten Näherung neue Ausdrücke treten. Es zeigt sich aber, daß die Gleichungen der ersten Näherung, die den Bewegungsgleichungen (96) entsprechen, mit (12) identisch sind, sofern dort

$$C_i = \frac{h_i}{3\omega_0} \quad (i = 1, 2) \quad (97)$$

gesetzt wird. Dementsprechend behalten dann auch alle weiteren Berechnungen ihre Gültigkeit.

#### Literatur

- [1] *E. Mettler*, Ing.-Archiv 17 (1949) S. 418.
- [2] *G. Schmidt u. F. Weidenhammer*, Math. Nachr. 23 (1961) S. 301.
- [3] *E. Mettler*, Proc. Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prag 1968.
- [4] *G. Herrmann*, Appl. Mech. Rev. 20 (1967) S. 103 (dort ausführliches Literaturverzeichnis).
- [5] *E. Mettler*, in: Dynamic stability of structures (editor: *G. Herrmann*), Oxford 1966, S. 169.
- [6] *A. Tondl*, Proc. Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, Prag 1968.
- [7] *A. Tondl*, Z. Angew. Math. Mech. 48 (1968) S. T289.
- [8] *P. Hagedorn*, Z. Angew. Math. Mech. 48 (1968) S. T256.
- [9] *W. W. Bolotin*, Kinetische Stabilität elastischer Systeme, Berlin 1961, S. 62.
- [10] *N. N. Bogoljubow u. J. A. Mitropolski*, Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Berlin 1965.
- [11] *F. Leiss*, Zur Berechnung von Resonanzschwingungen quasilinearer mechanischer Systeme mit der asymptotischen Methode, Diss. TH Karlsruhe 1966.
- [12] *E. Mettler*, Z. Angew. Math. Mech. 45 (1965) S. 475.
- [13] *G. Benz*, Schwingungen nichtlinearer gedämpfter Systeme mit pulsierenden Speicherkennwerten, Diss. TH Karlsruhe 1962.
- [14] *W. Hahn*, Stability of Motion, Berlin 1967.
- [15] *G. P. Szegő*, Trans. ASME, J. of Basic Eng. 84 (1962) S. 571.
- [16] *G. P. Szegő*, Trans. ASME, J. of Basic Eng. 85 (1963) S. 137.
- [17] *J. G. Malkin*, Theorie der Stabilität einer Bewegung, München 1959.
- [18] *L. Salvadori*, Ricerche di Mat., Napoli, XI (1962) S. 271.
- [19] *L. Salvadori*, Ricerche di Mat., Napoli, XIII (1964) S. 92.
- [20] *L. Salvadori*, Annali di Mat. pura ed appl., Bologna (1965) S. 1.

(Eingegangen am 23. Juli 1968)

Anschrift des Verfassers: Dr. *P. Hagedorn*, Institut für Mechanik,  
Universität Karlsruhe, 75 Karlsruhe, Kaiserstraße 12.