

Zur Fließbedingung der Plastizitätstheorie *

Von M. Sayir

Übersicht: In der vorliegenden Arbeit werden einige Aspekte der isotropen und anisotropen Fließbedingung behandelt. Nach einer kurzen Diskussion über die Tensorialität der Materialkonstanten folgt zunächst ein Konvexitätssatz für die isotrope Fließfläche. Die isotropen Fließbedingungen von *v. Mises* und *Tresca* werden dann auf den Fall ungleicher Zug- und Druckfließspannungen sowohl für den inkompressiblen als auch für den kompressiblen Körper erweitert und diese erweiterten isotropen Fließbedingungen im ebenen Hauptspannungszustand kurz studiert. Die Eigentümlichkeiten der anisotropen Fließfläche im Verhältnis zu den Drehungen des physikalischen Bezugssystems bilden den Gegenstand der danach folgenden Untersuchung, insbesondere die Richtungsabhängigkeit der Fließeigenschaften einiger speziellen anisotropen Körper. Schließlich wird eine sinngemäße Erweiterung der *Trescaschen* Fließbedingung für den anisotropen Stoff im ebenen Spannungszustand vorgeschlagen.

Summary: The following paper discusses some aspects of the isotropic and anisotropic yield conditions in the theory of plasticity. A short remark on the tensoriality of the material constants is followed by a theorem on the convexity of the isotropic yield surface. The isotropic yield criteria of *v. Mises* and *Tresca* are then extended to the case with different yield stresses in one-dimensional tension and compression (for the incompressible as well as for the compressible material). These extended isotropic yield criteria are thereupon specialized for plane stress. The general anisotropic yield surface and its relation to changes of the reference frame constitute a further subject of discussion with special emphasis on particular cases of anisotropy. A "reasonable" anisotropic generalization for the yield criterion of *Tresca* in plane stress is ultimately proposed.

1. Allgemeines. Die Stoffgleichungen der Plastizitätstheorie setzen sich bekanntlich aus einer skalaren Fließbedingung

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0, \quad (\sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \quad (1.1)$$

und einer tensoriellen Beziehung

$$d_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (1.2)$$

für die Komponenten des Tensors der Verformungsgeschwindigkeiten

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.3)$$

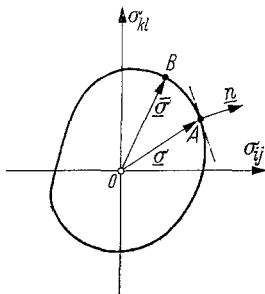


Abb. 1. Die Fließfläche und der Satz über das Maximum der Dissipationsleistung.

zusammen [1]. Die Gleichung (1.1) stellt eine 5-dimensionale Hyperfläche im 9-dimensionalen Spannungsraum S_9 dar, von der noch postuliert wird, daß sie konvex sei. Wird der 9-dimensionale Einheitsvektor auf der äußeren Normalen zu dieser Hyperfläche mit $n = (n_{ij})$ bezeichnet und die Komponenten d_{ij} als Vektorkomponenten des neundimensionalen Vektors d aufgefaßt, so läßt sich (1.2) auch als

$$d = \lambda n, \quad \lambda \geq 0 \quad (1.4)$$

darstellen. In gleicher Weise wird ein Punkt in S_9 mit den neun Komponenten des Vektors $\sigma = (\sigma_{ij})$ ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) festgelegt. Es sei $A(\sigma)$ ein Punkt auf der Fließfläche mit dem zugehörigen normalen Einheitsvektor n und $B(\bar{\sigma})$ ein weiterer Punkt auf oder innerhalb der Fließfläche; es gilt dann der Satz über das Maximum der Dissipationsleistung [1], [2]

$$(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) d_{ij} \geq 0, \quad (1.5)$$

welches aus der Konvexität der Fließfläche folgt und umgekehrt auf sie führt (Abb. 1).

Von diesen bekannten Grundlagen ausgehend werden im folgenden einige meist stillschweigend als gültig angenommene Sätze kurz diskutiert und ergänzende Bemerkungen zur Fließbedingung des isotropen und anisotropen Körpers angebracht.

* Herrn Professor Dr. H. Ziegler zum 60. Geburtstag gewidmet.

2. Die Fließfunktion und ihre Argumente. Denkt man in erster Linie an polynomiale Fließfunktionen Φ , und faßt man die verschiedenen Potenzen der σ_{ij} zusammen, so entsteht zunächst [3] die allgemeine Form

$$\Phi = K_0 + K_{ij}\sigma_{ij} + K_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + K_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots, \quad (2.1)$$

wobei die Koeffizienten $K_0, K_{ij}, K_{ijkl}, \dots$ Materialkonstanten sind. Das Prinzip der Unabhängigkeit vom Bezugssystem (Principle of material frame indifference) fordert, daß die Struktur von (1.1) und (1.2) bezüglich Koordinatentransformationen

$$x'_i = \mu_{ij}x_j \quad (2.2)$$

erhalten bleibt. Zudem muß die „Gradientenbildung“ in (1.2) einen Tensor d_{ij} ergeben, der beim Übergang zum neuen Koordinatensystem dem Transformationsgesetz

$$d'_{ij} = \mu_{ip}\mu_{jq}d_{pq} \quad (2.3)$$

genügen muß. Da der Spannungstensor auch einem ähnlichen Transformationsgesetz unterworfen ist, ergibt der Vergleich der untransformierten und transformierten Form von (1.2) oder (2.1), daß die symmetrischen Anteile der Materialkonstanten $K_{ij} + K_{ji}, K_{ijkl} + K_{jikl} + K_{ijlk} + K_{jilk} + K_{klij} + K_{lkij} + K_{klji} + K_{lkji}$, usw. Tensoren zweiter, vierter, sechster bzw. höherer Stufe sind. Die antisymmetrischen Anteile, welche keine tensoriellen Größen zu sein brauchen, ergeben jedoch keinen Beitrag in (2.1), so daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Materialkonstanten als symmetrische Tensoren der entsprechenden Stufe angesetzt werden können. Die verjüngten Produkte mit den Spannungen sind folglich skalare Größen

$$P_1 = K_{ij}\sigma_{ij}, \quad P_2 = K_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \quad P_3 = K_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}, \dots,$$

welche als Argumente der Fließfunktion auftreten. Es gilt also

$$\Phi(P_i) = 0, \quad (i = 1 \dots n). \quad (2.4)$$

Mit anderen Worten ist die Voraussetzung für die Zulässigkeit des Ansatzes (1.2) als Stoffgesetz, daß die Spannungskomponenten in der Fließfunktion mit tensoriellen Materialkonstanten zu verjüngten skalaren Produkten P_i zusammengefaßt sind.

Ist der Stoff inkompressibel, so gelten wegen $d_{ii} = 0$ die Beziehungen

$$K_{ii} = 0, \quad K_{iikl} = K_{ijkk} = 0, \quad K_{iiklmn} = K_{ijkkmn} = K_{ijklmm} = 0, \dots \quad (2.5)$$

usw. für die Materialkonstanten. Alsdann ergibt nur der deviatorische Anteil

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ii}\delta_{ij}, \quad (2.6)$$

des Spannungstensors in (2.1) einen Beitrag. Die Fließbedingung eines inkompressiblen Körpers enthält folglich die skalaren Argumente

$$Q_1 = K_{ij}s_{ij}, \quad Q_2 = K_{ijkl}s_{ij}s_{kl}, \dots \quad (2.7)$$

und ist von der ersten Grundinvariante $\sigma_{(1)}$ des Spannungstensors unabhängig, wie schon wohlbekannt ist.

Für den isotropen Körper sind die Materialeigenschaften richtungsunabhängig; die Tensoren der Materialkonstanten reduzieren sich folglich auf isotrope Tensoren. Sämtliche Produkte P_i bzw. Q_i ($i = 1 \dots n$) können dann in Funktion der Grundinvarianten des Spannungstensors bzw. des Spannungsdeviators dargestellt werden. Man erhält in diesem Fall die bekannten Fließbedingungen

$$\Phi(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}) = 0 \quad (2.8)$$

des kompressiblen isotropen und

$$\Phi(s_{(2)}, s_{(3)}) = 0 \quad (2.9)$$

des inkompressiblen isotropen Körpers mit noch skalaren Materialkonstanten, welche in (2.8) und (2.9) neben den Grundinvarianten als Argumente der Fließfunktion einzuführen sind.

3. Die isotrope Fließbedingung und ein Konvexitätssatz. Die skalaren Materialkonstanten der Fließbedingung eines isotropen Körpers werden durch die Drehung (2.2) des physikalischen Bezugssystems nicht beeinflusst. Daraus folgt, daß die fünfdimensionale Fließfläche in S_9 für jedes Bezugssystem x_i dieselbe ist. Ein Punkt $A(\sigma)$ der Fließfläche, welcher den Spannungszustand in einem

materiellen Punkt darstellt, beschreibt bei der Drehung des physikalischen Bezugssystems eine Kurve auf der Fließfläche (Abb. 2). Insbesondere, wenn das physikalische Bezugssystem soweit gedreht ist, daß das Hauptachsensystem vorliegt, kommt der Punkt A in den Hauptspannungsraum \mathcal{H}_3 . Dieser ist der dreidimensionale Schnitt $i \neq j \rightarrow \sigma_{ij} = 0$ von S_9 mit den Achsen $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. Es folgt daraus, daß jedem Punkt der Fließfläche in S_9 ein Punkt von \mathcal{H}_3 zugeordnet ist, welcher auf dem dreidimensionalen Hauptschnitt der Fließfläche liegt. Dieser Hauptschnitt ist also repräsentativ für die ganze Fließfläche in S_9 , welche aus jener in \mathcal{H}_3 und der Gesamtheit aller Koordinatentransformationen $x_i \rightarrow x'_i$ erzeugt werden kann.

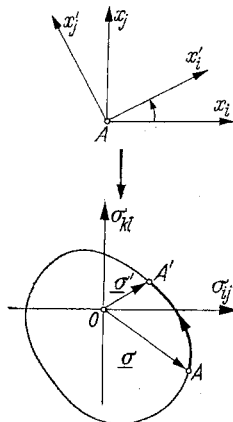


Abb. 2. Wanderung des Bildpunktes auf der isotropen Fließfläche.

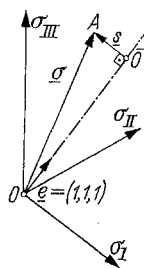


Abb. 3. Der Hauptspannungsraum \mathcal{H}_3 .

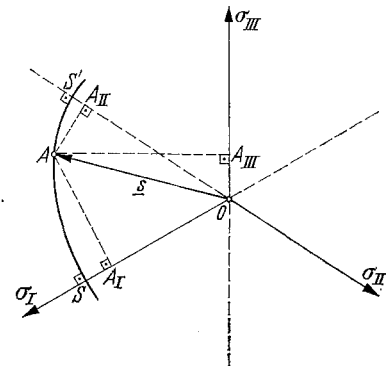


Abb. 4. Die Fließfigur in der deviatorischen Ebene.

Die Eigentümlichkeiten von \mathcal{H}_3 sind wohlbekannt [4]. Insbesondere kann ein Vektor $\sigma = (\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ in \mathcal{H}_3 in zwei zueinander orthogonale Vektoren

$$\sigma = (s_I, s_{II}, s_{III}) + \frac{1}{3} \sigma_{(1)}(1, 1, 1) \tag{3.1}$$

zerlegt werden, wobei s_I, s_{II}, s_{III} die Hauptwerte des Spannungsdeviators sind (Abb. 3). Wird ein ebener Schnitt $\sigma_{(1)} = \text{konstant}$ durch die Fließfläche gelegt und der ganze Raum \mathcal{H}_3 in diese deviatorische Ebene projiziert, entsteht die sogenannte Fließfigur (Abb. 4). Der Vektor $\vec{OA} = s$ erscheint hier in seiner wirklichen Länge, welche bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ die Wurzel der zweiten Grundinvariante $s_{(2)}$ darstellt. Ferner sind die Projektionen \vec{OA}_I, \dots bis auf den Faktor $\sqrt{3/2}$ die Hauptwerte s_I, \dots selbst, nämlich

$$\vec{OA}_I = \sqrt{\frac{3}{2}} s_I, \dots \tag{3.2}$$

Da die Grundinvarianten in (2.8) bzw. (2.9) in den Hauptwerten symmetrisch sind, weist die Fließfigur eine mindestens sechsfache Symmetrie bezüglich der projizierten Achsen $O\sigma_I, \dots$ auf, so daß die Stützgeraden in den Schnittpunkten S, S' usw. zu den projizierten Achsen orthogonal sind.

Aus der Konvexität der Fließfläche in S_9 folgt trivialerweise, daß der Hauptschnitt in \mathcal{H}_3 ebenfalls konvex ist. Es stellt sich nun die Frage, ob auch die Umkehrung dieses Satzes gültig ist: entspricht (für den isotropen Stoff) einem jeden konvexen Hauptschnitt in \mathcal{H}_3 eine konvexe fünfdimensionale Fließfläche in S_9 ?

Es sei $A(\sigma_{ij})$ ein Punkt auf der Fließfläche in S_9 und d_{ij} der zugehörige Tensor der Verformungsgeschwindigkeiten nach (1.4). Die spezifische Dissipationsleistung $l_d = \sigma_{ij} d_{ij}$ ändert ihren Wert bei einer Drehung $x_i \rightarrow x'_i$ des physikalischen Bezugssystems nicht, weil sie eine skalare Größe ist. Bekanntlich [5, 6] besitzen σ_{ij} und d_{ij} für den isotropen Fall stets ein gemeinsames Hauptachsensystem, so daß l_d nach der Hauptachsentransformation $x_i \rightarrow X_i$ als

$$l_d = \sigma_I d_I + \sigma_{II} d_{II} + \sigma_{III} d_{III} = \sigma_{ij} d_{ij} \tag{3.3}$$

berechnet werden kann, wobei $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ die Koordinaten eines Punktes $A(\sigma)$ des Hauptschnittes und d_I, d_{II}, d_{III} die Komponenten des zugehörigen normalen Vektors $d = \lambda(n_I, n_{II}, n_{III})$, $\lambda > 0$ sind (Abb. 5).

Es sei $B(\bar{\sigma}_{ij})$ ein anderer Punkt auf der Fließfläche in S_9 . Die Hauptachsentransformation von σ_{ij} wird $\bar{\sigma}_{ij}$ im allgemeinen nicht in die Hauptform bringen. Dennoch wird sich das Produkt $\bar{\sigma}_{ij} d_{ij}$, dessen Wert wieder vom physikalischen Bezugssystem unabhängig ist, im X -System zu

$$\bar{l}_d = \bar{\sigma}_{11} d_I + \bar{\sigma}_{22} d_{II} + \bar{\sigma}_{33} d_{III} = \bar{\sigma}_{ij} d_{ij} \tag{3.4}$$

vereinfachen. Der Vektor

$$\bar{\sigma}^* = (\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}) \tag{3.5}$$

stellt die Projektion des neundimensionalen Vektors $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{ij})$ in \mathcal{H}_3 dar und charakterisiert die Projektion B^* von B . Man betrachte die deviatorische Ebene $\sigma_{(1)} = \text{konstant}$ durch B^* und die Fließfigur in dieser Ebene (Abb. 6). Eine beliebige Koordinatentransformation $X_i \rightarrow \bar{X}_i$ läßt $\sigma_{(1)}$ unverändert, woraus folgt, daß B^* stets in derselben deviatorischen Ebene bleibt. Insbesondere ergibt eine Hauptachsentransformation von $\bar{\sigma}_{ij}$ einen Punkt B auf der Fließfigur der Ebene $\bar{\sigma}_{(1)} = \text{konstant}$, den man ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf dem Stück SS' , $\sigma_I \geq \sigma_{III} \geq \sigma_{II}$ der Fließfigur annehmen darf (Abb. 6).

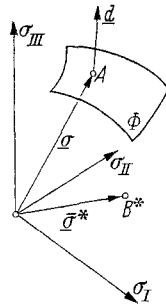


Abb. 5. Die Fließfläche in \mathcal{H}_3 .

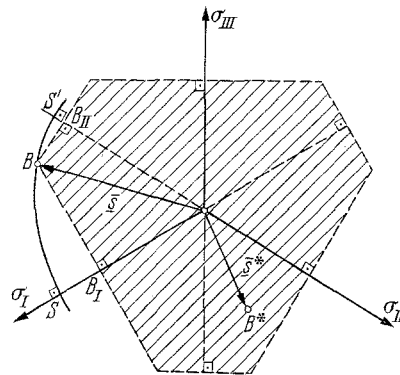


Abb. 6. Projektion B^* von B in \mathcal{H}_3 .

Die Extremaleigenschaft der Hauptwerte führt zur Ungleichung

$$\bar{s}_{II} \leq \bar{s}_{11}, \bar{s}_{22}, \bar{s}_{33} \leq \bar{s}_I, \tag{3.6}$$

aus welcher unter Berücksichtigung von (3.2) folgt, daß B^* im schraffierten, konvexen Gebiet liegen muß, welches durch die symmetrische Fortsetzung von $OB_I B_{II}$ entsteht. Da die Fließfläche in \mathcal{H}_3 und insbesondere die Fließfigur nach Hypothese konvex ist und die Stützgeraden in den Schnittpunkten S, S' , usw. zu BB_I, BB_{II} usw. parallel sind, liegt dieses schraffierte Gebiet ganz innerhalb der Fließfigur, folglich der Punkt B^* innerhalb der Fließfläche in \mathcal{H}_3 oder im Grenzfall auf ihr. Aus der vorausgesetzten Konvexität dieser Fließfläche in \mathcal{H}_3 folgt also

$$l_d = \sigma d \geq \bar{\sigma}^* d = \bar{l}_d. \tag{3.7}$$

Setzt man in (3.7) die äquivalenten tensoriellen Ausdrücke für l_d und \bar{l}_d aus (3.3) und (3.4) ein, so entsteht die Ungleichung (1.5), welche gerade die Konvexität der Fließfläche in S_9 charakterisiert. Es gilt somit der Satz:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvexität der fünfdimensionalen Fließhyperfläche eines isotropen Stoffes in S_9 ist, daß ihr Hauptschnitt in \mathcal{H}_3 konvex sei.

Auf Grund dieses Satzes ist es jetzt möglich, die Konvexität der Fließbedingung eines isotropen Körpers direkt in \mathcal{H}_3 zu untersuchen, ohne daß eine meist mühsame Verifikation in S_9 notwendig ist.

4. Einige isotrope Fließbedingungen. Die Form der Fließfigur in \mathcal{H}_3 hängt bei isotropen kompressiblen Stoffen von der ersten Grundinvariante $\sigma_{(1)}$ ab. Dagegen ist die Fließbedingung des inkompressiblen Stoffes wegen der Unabhängigkeit von $\sigma_{(1)}$ bekanntlich durch eine Zylinderfläche darstellbar, mit Leitgeraden parallel zur Raumdiagonale $e = (1, 1, 1)$ des ersten Oktanten von \mathcal{H}_3 .

Zwei spezielle Fließbedingungen dieser letzten Art finden allgemeine Anwendung in der Plastizitätstheorie, nämlich die *von Misessche* Fließbedingung

$$2 s^2 = s_{(2)} = k^2, \quad (4.1)$$

welche in \mathcal{H}_3 durch eine Kreiszyylinderfläche dargestellt wird, und die *Trescasche* Fließbedingung

$$\text{Max} (|s_I - s_{II}|, |s_{II} - s_{III}|, |s_{III} - s_I|) = 2k, \quad (4.2)$$

welche in Funktion der Grundinvarianten auch als

$$4 s_{(2)}^3 - 27 s_{(3)}^2 - 36 k^2 s_{(2)}^2 + 96 k^4 s_{(2)} - 64 k^6 = 0 \quad (4.3)$$

formuliert werden kann und in \mathcal{H}_3 ein reguläres Sechseckprisma ergibt [7].

Im einachsigen Spannungszustand folgen aus der *von Misesschen* Fließbedingung (4.1) gleiche Zug- und Druckfließspannungen $\sigma_{z,d} = \pm \sqrt{3} k$. Für inkompressible Stoffe mit verschiedenen Zug- und Druckfließspannungen kann (4.1) am einfachsten mit dem Ansatz

$$\alpha s_{(2)} + \beta s_{(3)} = 1 \quad (4.4)$$

erweitert werden. Dabei sind α und β skalare Materialkonstanten, welche sich in Funktion der Zugfließspannung $\sigma_z = a$ und Druckfließspannung $\sigma_d = -b$ zu

$$\alpha = \frac{3}{a^2 b^2} (a^2 - a b + b^2), \quad \beta = -\frac{27}{2 a^2 b^2} (a - b) \quad (4.5)$$

berechnen lassen. Die somit entstandene Fließbedingung

$$2 (a^2 - a b + b^2) s_{(2)} - 9 (a - b) s_{(3)} = \frac{2}{3} a^2 b^2 \quad (4.6)$$

ergibt in \mathcal{H}_3 eine Zylinderfläche. Die Fließfigur hat in jeder deviatorischen Ebene dieselbe Form und kann mit Hilfe von (3.2) und den Beziehungen für die Grundinvarianten

$$s_{(2)} = \frac{1}{2} (s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2), \quad s_{(3)} = \frac{1}{3} (s_I^3 + s_{II}^3 + s_{III}^3) \quad (4.7)$$

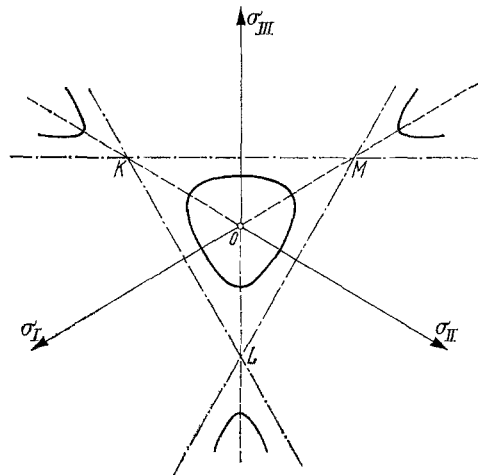


Abb. 7. Die Fließbedingung (4.6) in der deviatorischen Ebene.

konstruiert werden (Abb. 7). Sie besteht aus einer konvexen geschlossenen Kurve, die den Ursprung enthält, und aus drei weiteren asymptotischen Stücken zwischen den Asymptoten KL , LM , MK . Aus Konvexitätsgründen kann nur die geschlossene Kurve um den Ursprung als Fließfigur angenommen werden. Die Asymptoten sind mit den Gleichungen

$$s_I = \frac{\alpha}{\beta}, \quad s_{II} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad s_{III} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.8)$$

festgelegt, so daß nur die Hauptwerte kleiner als α/β in (4.6) zugelassen sind. Bekanntlich [8] besteht zwischen den Zug- und Druckfließspannungen a und b aus Konvexitätsgründen die Ungleichung

$$1/2 \leq a/b \leq 2. \quad (4.9)$$

Für den Grenzfall $b = 2a$ bzw. $a = 2b$ reduziert sich die Fließfigur auf das Asymptotendreieck KLM , das auch in der obenerwähnten Arbeit [8] kurz besprochen worden ist.

Auch die *Trescasche* Fließbedingung (4.2) kann für den Fall mit verschiedenen Zug- und Druckfließspannungen a und b mit dem Ansatz

$$(2b - a) s_I - (2a - b) s_{II} = ab, \quad (2b - a) s_{II} - (2a - b) s_I = ab, \dots \quad (4.10)$$

erweitert werden¹. Nach einiger Rechnung drückt sich auch (4.10) mit den Grundinvarianten allgemein als

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 (2a - b)^2 (a - 2b)^2 s_{(2)}^3 - 27 (a^2 + b^2 - ab)^3 s_{(3)}^2 + \\ & + 81 a^2 b^2 (a - b) (a^2 + b^2 - ab) s_{(2)} s_{(3)} - 9 a^2 b^2 (a^2 + b^2 - ab)^2 s_{(2)}^2 - \\ & - 27 a^4 b^4 (a - b) s_{(3)} + 6 a^4 b^4 (a^2 + b^2 - ab) s_{(2)} - a^6 b^6 = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

aus. Man stellt leicht fest, daß für den Grenzfall $b = 2a$ bzw. $a = 2b$ die beiden Fließbedingungen (4.6) und (4.11) ineinander übergehen und somit dasselbe reguläre Dreieckprisma ergeben. Im allgemeinen Fall stellt (4.10) bzw. (4.11) ein Sechseckprisma in \mathcal{H}_3 dar mit einem deviatorischen Sechseckquerschnitt (Abb. 8), welcher nur eine sechsfache Symmetrie enthält, im Gegensatz zum *Trescaschen* regulären Sechseck, das eine zwölfache Symmetrie besitzt.

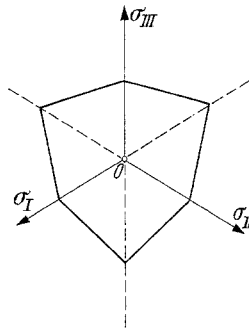


Abb. 8. Die Fließbedingung (4.10) in der deviatorischen Ebene.

Die einfachste Erweiterung von (4.1) bzw. (4.2) auf den kompressiblen Fall führt mit den Ansätzen

$$s_{(2)} = k^2 \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)^2 \quad (4.12)$$

und

$$\text{Max}(|s_I - s_{II}|, |s_{II} - s_{III}|, |s_{III} - s_I|) = 2k \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right) \quad (4.13)$$

zum *Drucker-Pragerschen* Fließkegel [9] bzw. zur *Druckerschen* Fließpyramide [10]. Dabei stellt $m \geq 0$ eine zweite skalare Materialkonstante neben $k > 0$ dar. Aus Konvexitätsgründen ist nur die eine Hälfte $\sigma_{(1)} \leq m$ (oder $\sigma_{(1)} \geq m$) des Fließkegels bzw. der Fließpyramide zugelassen. Die Spitze des Kreiskegels bzw. der regulären Sechseckpyramide befindet sich auf der Raumdiagonale im Abstand $m/\sqrt{3}$ vom Ursprung O .

Die Fließbedingungen (4.12) und (4.13) ergeben von selbst verschiedene Zug- bzw. Druckfließspannungen

$$\sigma_z = \sqrt{3} k / \left(1 + \sqrt{3} \frac{k}{m}\right), \quad \sigma_d = -\sqrt{3} k / \left(1 - \sqrt{3} \frac{k}{m}\right) \quad (4.14)$$

für (4.12) und

$$\sigma_z = 2k / \left(1 + \frac{2k}{m}\right), \quad \sigma_d = -2k / \left(1 - \frac{2k}{m}\right) \quad (4.15)$$

für (4.13), wobei für $|m| \leq \sqrt{3}k$ bzw. $|m| \leq 2k$ die eine oder die andere Fließspannung wegfällt. Da die gewöhnlichen plastischen Stoffe im allgemeinen sowohl auf Druck wie auch auf Zug fließen können, gilt für solche Stoffe die Ungleichung (vergleiche mit [6])

$$|m| > \sqrt{3}k \quad \text{bzw.} \quad |m| > 2k. \quad (4.16)$$

Zusammenfallende Zug- und Druckfließspannungen führen mit diesen Fließbedingungen zu $m \rightarrow \infty$, folglich zum inkompressiblen Stoff.

¹ Punkte deuten eine zyklische Ergänzung an.

Auch die Fließbedingungen (4.6) bzw. (4.10) können mit den Ansätzen

$$a \rightarrow a \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right), \quad b \rightarrow b \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)$$

auf den kompressiblen Fall erweitert werden. In den somit entstandenen neuen Fließbedingungen

$$2(a^2 - ab + b^2) \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right) s_{(2)} - 9(a - b) s_{(3)} = \frac{2}{3} a^2 b^2 \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)^3 \quad (4.17)$$

bzw.

$$(2b - a) s_I - (2a - b) s_{II} = ab \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right), \quad (2b - a) s_{II} - (2a - b) s_I = ab \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right), \dots \quad (4.18)$$

gestatten die drei skalaren Materialkonstanten a, b, m einen größeren Spielraum zur Anpassung an allfällige Versuchsergebnisse.

Im einachsigen Spannungszustand ergibt (4.17) die Zug- bzw. die Druckfließspannung

$$\sigma_z = a / \left(1 + \frac{a}{m}\right), \quad \sigma_d = -b / \left(1 - \frac{b}{m}\right), \quad (4.19)$$

wobei die Ungleichung $m > b$ oder $m < -a$ erfüllt sein muß, damit der Körper sowohl auf Zug wie auch auf Druck fließen kann. Nach (4.19) kann für $m = 2ab/(a - b)$ im Gegensatz zu (4.12) auch ein kompressibler Stoff mit der Fließbedingung (4.17) gleiche Zug- und Druckfließspannungen $\sigma_{z,d} = \pm 2ab/(a + b)$ aufweisen.

Die Fließbedingung (4.17) wird in \mathcal{H}_3 wieder durch einen Kegel dargestellt, dessen deviatorische Schnitte ähnliche Fließfiguren von der Form der Abb. 7 sind, und dessen Spitze auf der Raumdiagonale des ersten Oktanten liegt. Entsprechend sind die deviatorischen Schnitte der Sechseckpyramide (4.18) ähnliche Sechsecke von der Form der Abb. 8. Im einachsigen Spannungszustand sind die beiden Fließspannungen nach (4.18) wieder durch (4.19) gegeben, so daß die obigen Bemerkungen auch für die Fließbedingung (4.18) gültig sind. Die Ungleichung (4.9) gilt auch aus Konvexitätsgründen für die beiden Fließbedingungen (4.17) und (4.18), obwohl sie hier im Gegensatz zum inkompressiblen Fall (4.6) bzw. (4.10) nicht die Bedeutung einer Einschränkung der Zug- und Druckfließspannungen hat, welche nach (4.19) je nach den Werten von a, b und m im beliebigen Verhältnis zueinander stehen können. Für die beiden Grenzfälle $a = 2b, b = 2a$ dieser Ungleichung (4.9) gehen die Fließbedingungen (4.17) und (4.18) ineinander über, wie es schon beim inkompressiblen Stoff der Fall war, und ergeben beide eine reguläre Dreieckpyramide.

Ein Spezialfall von (4.18), nämlich

$$m = ab/(b - a) \quad (4.20)$$

führt zur *Shieldschen* Fließbedingung [11]

$$\left. \begin{aligned} (2b - a) s_I - (2a - b) s_{II} &= ab - \sigma_{(1)}(b - a), \\ (2b - a) s_{II} - (2a - b) s_I &= ab - \sigma_{(1)}(b - a), \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

welche die einzige sinngemäße räumliche Verallgemeinerung der *Coulombschen* Fließbedingung der Erdmechanik darstellt. Auf diesen Spezialfall wird im nächsten Abschnitt nochmals hingewiesen.

5. Die isotropen Fließbedingungen im ebenen Spannungszustand. a) Der ebene Spannungszustand ist hinsichtlich der Anwendung auf Flächentragwerke (z. B. Platten und Schalen) von besonderer Bedeutung. Aus der Hauptspannungsdarstellung von (4.17) gewinnt man mit $\sigma_{III} = 0$ die Fließbedingung

$$\begin{aligned} &(a^2 - ab + b^2) (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}) \left(1 - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{m}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} (a - b) (\sigma_I + \sigma_{II}) (2\sigma_I - \sigma_{II}) (2\sigma_{II} - \sigma_I) = a^2 b^2 \left(1 - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{m}\right)^3, \end{aligned} \quad (5.1)$$

welche für $m \rightarrow \infty$ den inkompressiblen Fall nach (4.6), für $a = b$ den *Drucker-Pragerschen* Fall (4.12) und für gleichzeitig $m \rightarrow \infty$ und $a = b = k\sqrt{3}$ die bekannte *v. Misesche* Fließbedingung im ebenen Spannungszustand enthält. Die Fließkurven nach (5.1) sind in den Abbn. 9a und 9b für $m > 0$ eingezeichnet. Diese Kurven gehen durch die Punkte

$$\left(a / \left(1 + \frac{a}{m}\right), 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0, -b / \left(1 - \frac{b}{m}\right)\right) \quad (5.2)$$

auf der σ_I - bzw. σ_{II} -Achse und schneiden die Symmetrieachse $\sigma_I = \sigma_{II}$ in den Punkten

$$\left(b \left(1 + \frac{2b}{m} \right), b \left(1 + \frac{2b}{m} \right) \right) \quad \text{und} \quad \left(-a \left(1 - \frac{2a}{m} \right), -a \left(1 - \frac{2a}{m} \right) \right). \quad (5.3)$$

Dabei wurde der asymptotische Teil (Abb. 7) außer acht gelassen, da er aus Konvexitätsgründen ausgeschlossen werden muß. In Abb. 9b ist auch der Fall gleicher Zug- und Druckfließspannungen bei $m = 2ab/(a-b)$ eingezeichnet worden, wobei nochmals betont werden soll, daß der Körper kompressibel bleibt, obwohl die beiden Fließspannungen gleich sind. Ist $m = 2a$, fließt der Körper im „ebenen hydrostatischen“ Druck $\sigma_I = \sigma_{II} = -p$ nicht. Für $m = b$ fließt er im einachsigen Druck nicht. Beachtenswert ist hier, daß die sechsfache Symmetrie in der deviatorischen Ebene (Abb. 7), welche den isotropen Körper charakterisiert, sich im ebenen Spannungszustand auf eine einfache Symmetrie bezüglich der Geraden $\sigma_I = \sigma_{II}$ reduziert.

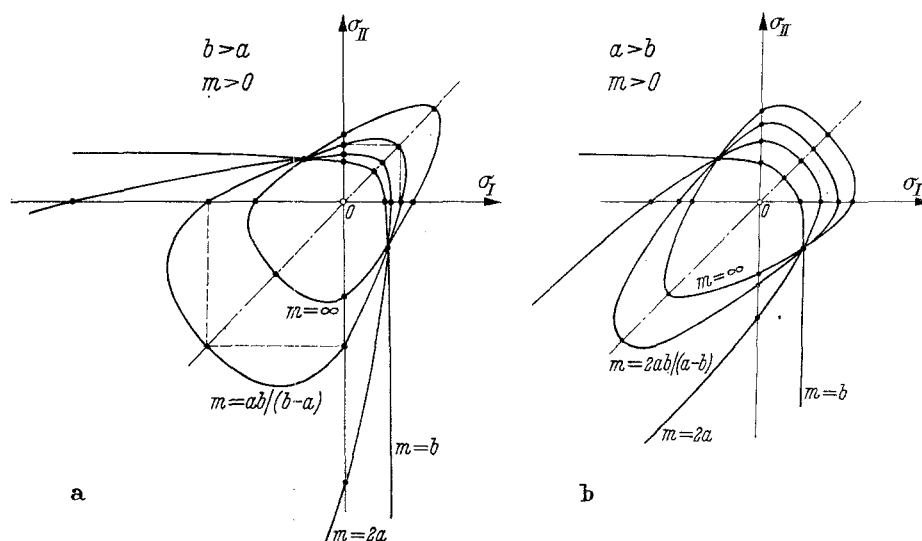


Abb. 9. Die Fließbedingung (4.17) im ebenen Spannungszustand (Gl. (5.1)), a) $b > a$, b) $a > b$.

Die Gleichungen (4.8) ergeben mit $\sigma_{III} = 0$ für die stückweise lineare Fließbedingung im ebenen Spannungszustand die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} b \left(1 + \frac{a}{m} \right) \sigma_I + \left(a - b + \frac{ab}{m} \right) \sigma_{II} &= ab, \\ b \left(1 + \frac{a}{m} \right) \sigma_I - a \left(1 - \frac{b}{m} \right) \sigma_{II} &= ab, \\ \left(a - b + \frac{ab}{m} \right) \sigma_I - a \left(1 - \frac{b}{m} \right) \sigma_{II} &= ab, \\ \left(a - b + \frac{ab}{m} \right) \sigma_{II} - a \left(1 - \frac{b}{m} \right) \sigma_I &= ab, \\ b \left(1 + \frac{a}{m} \right) \sigma_{II} - a \left(1 - \frac{b}{m} \right) \sigma_I &= ab, \\ b \left(1 + \frac{a}{m} \right) \sigma_{II} + \left(a - b + \frac{ab}{m} \right) \sigma_I &= ab. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Die zugehörigen Fließsechsecke sind in den Abbn. 10a und 10b für $m > 0$ eingezeichnet. Auch hier sind die Schnittpunkte auf den Achsen durch (5.2) und auf der Symmetrieachse durch (5.3) gegeben. Der Fall gleicher Zug- und Druckfließspannungen tritt in Abb. 10b wieder für $m = 2ab/(a-b)$ auf. Analog wie bei der vorherigen Fließbedingung fließt der Körper bei $m = 2a$ im ebenen hydrostatischen Druck nicht und bei $m = b$ im einachsigen Druck nicht. Die Fließbedingung (4.18) kann also als lineares Analogon von (4.17) angesehen werden. Die Unstetigkeit und die umständliche

allgemeine Darstellung von (4.18) ((4.11) nach Einsetzen von a durch $a \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)$ und b durch $b \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{m}\right)$) wird durch ihre Linearität im Hauptspannungsraum kompensiert, so daß sie sich für die Anwendung auf ebene Probleme im allgemeinen besser eignen wird.

Aus (5.4) ist ersichtlich, daß für

$$m = a b / (b - a) \tag{5.5}$$

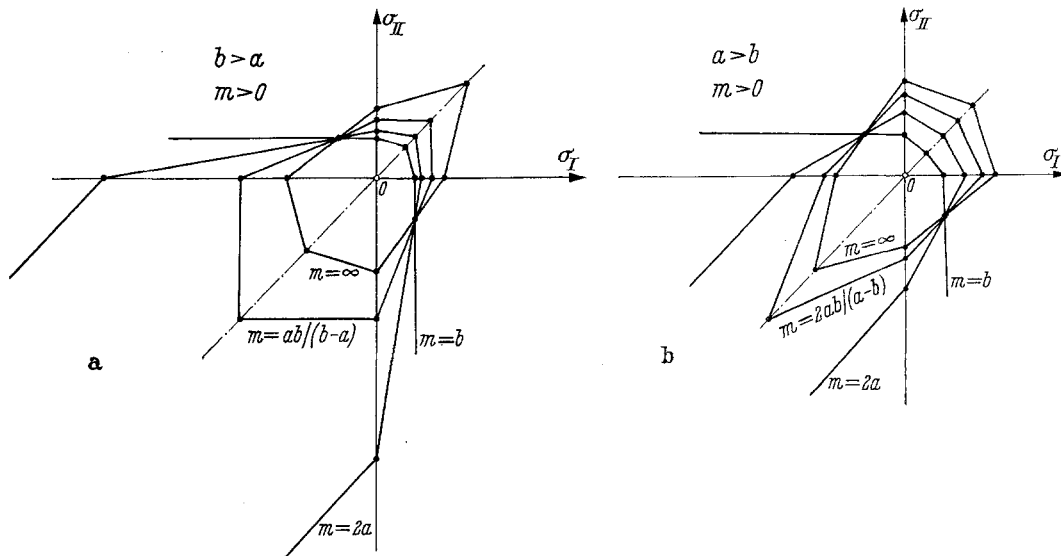


Abb. 10. Die Fließbedingung (4.18) im ebenen Spannungszustand (Gleichung (5.4)), a) $b > a$, b) $a > b$.

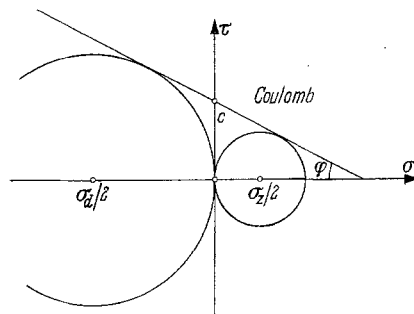


Abb. 11. Die Coulombsche Gerade.

ein Sechseck entsteht (Abb. 10 a), das als die *Coulombsche* Fließbedingung der Erdmechanik [11] interpretiert werden kann, wie im letzten Abschnitt erwähnt wurde. Im wesentlichen ist das ein *Trescasses* Sechseck mit verschiedenen Fließspannungen $a b / (2 b - a)$, $a b / (2 a - b)$, welche aus dem *Coulombschen* Kohäsionsfaktor c und dem Winkel φ (Abb. 11) zu

$$\sigma_s = 2 c \cos \varphi / (1 + \sin \varphi), \quad \sigma_d = - 2 c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi) \tag{5.6}$$

berechnet werden können. Die Materialkonstanten a, b, m sind dann nach (5.2), (5.5) und (5.6) als

$$a = 6 c \cos \varphi / (3 + \sin \varphi), \quad b = 6 c \cos \varphi / (3 - \sin \varphi), \quad m = 3 c \cotg \varphi \tag{5.7}$$

in Funktion von c und φ gegeben.

b) Bemerkung zu einer Arbeit von *Sankaranarayanan* und *Olszak*. Es wurde bereits erwähnt, daß die mindestens sechsfache Symmetrie der Fließfigur eines isotropen Körpers in der deviatorischen Ebene sich im ebenen Spannungszustand auf eine einfache Symmetrie bezüglich der Geraden $\sigma_I = \sigma_{II}$ reduziert. Eine Drehung um $\pi/2: x_2 \rightarrow x'_1, x_1 \rightarrow -x'_2$ des physikalischen Bezugssystems läßt die Fließkurve in der Hauptebene unverändert. Die Symmetrie bezüglich $\sigma_I = \sigma_{II}$ ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß eine konvexe Fließkurve im ebenen Spannungszustand (in der Hauptspannungsdarstellung) als Fließbedingung eines isotropen Körpers interpretiert werden kann.

Nun sind die obengenannten Autoren in einer Arbeit über anisotrope Platten und Schalen [12, s. auch 13] von einem Fließsechseck im ebenen Spannungszustand mit vier Parametern $\sigma_0, \alpha \sigma_0, \beta \sigma_0, \gamma \sigma_0$ ausgegangen (Abb. 12), welches bezüglich $\sigma_I = \sigma_{II}$ symmetrisch ist und trotz dieser Symmetrie die Fließbedingung eines anisotropen Körpers darstellen soll. Wie aus ihrer Bemerkung hervorgeht, daß mit $\gamma = 1$ die „Anisotropie in den Druckspannungen“ aufgehoben werden kann,

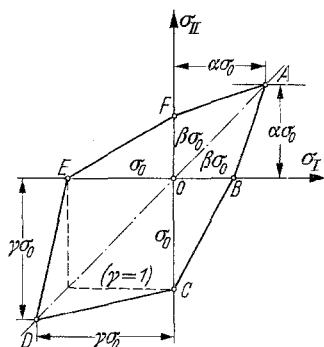


Abb. 12. Das Fließsechseck von [12].

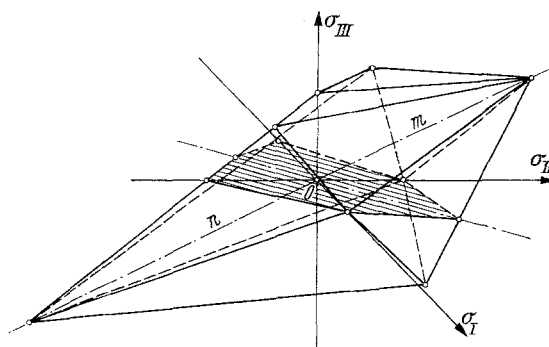


Abb. 13. Isotrope Fließfläche in \mathcal{H}_3 für Abb. 12.

meinen sie dabei, Anisotropie sei in diesem Fall gleichbedeutend mit der Schiefstellung der Sechseckseiten im ersten oder dritten Quadranten (AB, AF , bzw. DC, DE in Abb. 12) bezüglich der σ_I, σ_{II} -Achsen. Für sie sind also nur die *Trescaschen* ($m = \infty, a = b$ in (5.4)) und die *Shieldschen* (Spezialfall (5.5) von (5.4)) Fließsechsecke isotrop, da nur hier die Seiten AB, AF bzw. DC, DE zu den σ_I, σ_{II} -Achsen parallel (bzw. orthogonal) sind. Daß diese Überlegungen grundsätzlich falsch sind, beweisen die bisherigen Ausführungen über die isotropen Fließbedingungen im ebenen Hauptspannungszustand und insbesondere die verschiedenen isotropen Fließsechsecke der Abb. 10 a, b.

Da das Sechseck von Abb. 12 im wesentlichen die Form derjenigen Sechsecke von Abb. 10 a, hat, ist es im Prinzip möglich, es auch aus dem ebenen Schnitt $\sigma_{III} = 0$ einer pyramidenartigen isotropen Fließfläche zu bekommen. Die Fließbedingung von Abb. 12 enthält jedoch vier Materialkonstanten (im Gegensatz zu den dreiparametrischen Sechsecken von Abb. 10 a, b), daher entsteht sie nicht aus einer einzigen isotropen Pyramide (4.18), sondern aus zwei aneinander gefügten Pyramiden gleicher Art (Abb. 13), so daß neben a, b und m eine vierte Materialkonstante n vorkommt, welche die Lage der Spitze der zweiten Pyramide auf der Raumdiagonale kennzeichnet. Die Gleichung der ersten Pyramide ist durch (4.18) und jene der zweiten durch

$$(2a - b) s_I - (2b - a) s_{II} = \frac{abmn}{mn + (n - m)a} \left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{n}\right), \dots \tag{5.8}$$

gegeben. Beide Pyramiden schneiden sich in der deviatorischen Ebene $\sigma_{(1)} = a \left(1 + \frac{a}{m}\right)$, so daß in Abb. 12 der Teil im ersten Quadranten aus dem Schnitt $\sigma_{III} = 0$ der Pyramide (4.18) und der übrigbleibende Teil aus dem Schnitt $\sigma_{III} = 0$ der Pyramide (5.8) zu erhalten ist. Die in [12] vorgeschlagenen Materialkonstanten (Abb. 12) drücken sich in Funktion von m, n, a, b aus als

$$\sigma_0 = \frac{mnb}{a(n - m) + m(n - b)}, \quad \alpha \sigma_0 = \frac{mb}{m + 2b}, \quad \beta \sigma_0 = \frac{ma}{m + a}, \quad \gamma \sigma_0 = \frac{mna}{mn + a(n - 3m)}. \tag{5.9}$$

Nach (5.9) entspricht jedem Satz von Parametern $\sigma_0, \alpha, \beta, \gamma$ ein Satz von Konstanten m, n, a, b und umgekehrt. Jedes vierparametrische Sechseck (Abb. 12) der betrachteten Art kann also aus zwei isotropen Pyramiden von der Form der Abb. 13 erhalten werden. Damit jedoch die Pyramiden von Abb. 13 im Sinne der Plastizitätstheorie als Fließfläche gelten können, müssen sie zusammen eine konvexe Fläche bilden, so daß die Konstanten m, n, a, b den Konvexitätsbeschränkungen $0 < \frac{a}{2} < b < 2a$ (Konvexität der deviatorischen Querschnitte) und $n > m > 0$ oder $m > 0, n < 0$ oder $m < n < 0$ (Konvexität an der Schnittstelle der beiden Pyramiden) unterworfen sein müssen, mit entsprechenden Einschränkungen für $\sigma_0, \alpha, \beta, \gamma$ (die aus (5.9) folgen). Außerhalb dieser für die Materialkonstanten zulässigen Bereiche kann also keine konvexe isotrope Fließfläche gefunden werden, welche mit einem konvexen, bezüglich $\sigma_I = \sigma_{II}$ symmetrischen Sechseck verträglich ist, so daß in diesen Bereichen (und nur in ihnen), um die Konvexität zu gewährleisten, doch eine gewisse räumliche Anisotropie eingeführt werden muß, welche die sechsfache Symmetrie in den

deviatorischen Querschnitten teilweise reduziert. Wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, bewirkt jedoch eine solche spezielle Anisotropie wegen der Symmetrie bezüglich $\sigma_I = \sigma_{II}$ keine richtungsabhängigen Fließeigenschaften, wenn man sich auf Drehungen in der spannungsfreien Ebene beschränkt. Insbesondere kann also entgegen der Behauptung der Autoren für die von ihnen behandelten dünnen Schalen und Platten (sei es innerhalb oder sogar außerhalb der zulässigen Bereiche für die Materialkonstanten) von keiner wesentlichen anisotropischen Erscheinung die Rede sein, solange die Fließkurve im ebenen Hauptspannungszustand bezüglich $\sigma_I = \sigma_{II}$ symmetrisch ist.

6. Fließbedingung des anisotropen Körpers. Die allgemeinste anisotrope Fließbedingung in einem gegebenen physikalischen Bezugssystem x_i ist nach Abschnitt 2 von der Form (2.4). Diese stellt die Gleichung einer achtdimensionalen Hyperfläche F_8 in S_9 dar, deren Schnitt mit der sechsdimensionalen Symmetriehyperebene E_6 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) die fünfdimensionale Fließhyperfläche F_5 ergibt. Im folgenden wird zunächst die Änderung von (2.4) und F_5 infolge einer starren Drehung des physikalischen Bezugssystems B_3 untersucht. Diese Drehung ist nach (2.2) durch die Drehmatrix μ_{ij} gekennzeichnet, welche der Orthogonalitätsbeziehung

$$\mu_{ij} \mu_{kj} = \delta_{ik} \tag{6.1}$$

genügt. Die Drehung in B_3 beeinflusst die tensoriellen Materialkonstanten in P_i in der bekannten Weise, d. h. als

$$K'_{ij} = \mu_{ip} \mu_{jq} K_{pq}, \quad K'_{ijkl} = \mu_{ip} \mu_{jq} \mu_{kr} \mu_{ls} K_{pqrs}, \dots \tag{6.2}$$

Die Fließbedingung in x'_i ist folglich von der Form

$$\Phi'(K_{pq} \mu_{ip} \mu_{jq} \sigma_{ij}, K_{pqrs} \mu_{ip} \mu_{jq} \mu_{kr} \mu_{ls} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \dots) = 0. \tag{6.3}$$

Die Gleichung (6.3) stellt eine neue Fläche F'_8 bzw. F'_5 in S_9 bzw. E_6 dar, welche offensichtlich durch die Koordinatentransformation

$$\sigma'_{pq} = \mu_{ip} \mu_{jq} \sigma_{ij} \tag{6.4}$$

im Raum S_9 in die alte Fläche F_8 bzw. F_5 mit der Gleichung

$$\Phi(K_{pq} \sigma'_{pq}, K_{pqrs} \sigma'_{pq} \sigma'_{rs}, \dots) = 0 \tag{6.5}$$

übergeht, wobei F_8 bzw. F_5 jetzt in S'_9 bzw. E'_6 ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$) eingebettet sind. Die 9×9 Transformationsmatrix

$$M = \mu_{ip} \mu_{jq} \tag{6.6}$$

besteht aus $9 \times (3 \times 3)$ Teilmatrizen, deren Stellung in M durch die 9 Zeiger des ersten Faktors μ_{ip} gekennzeichnet ist, wogegen die Zeiger des zweiten Faktors μ_{jq} die Stellung der einzelnen Elemente in den 3×3 Teilmatrizen ergeben. Somit entsteht die Darstellung

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} \mu_{jq} & \mu_{12} \mu_{jq} & \mu_{13} \mu_{jq} \\ \mu_{21} \mu_{jq} & \mu_{22} \mu_{jq} & \mu_{23} \mu_{jq} \\ \mu_{31} \mu_{jq} & \mu_{32} \mu_{jq} & \mu_{33} \mu_{jq} \end{bmatrix}.$$

Das Produkt von M mit der transponierten Matrix M^T ergibt unter Berücksichtigung von (6.1)

$$M M^T = \mu_{ip} \mu_{kp} \mu_{jq} \mu_{lq} = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

wobei in dieser Notation die rechte Seite die Komponenten der Einheitsmatrix darstellt. Daraus folgt, daß M orthogonal ist, und daß somit die Transformation (6.4) einer starren Drehung $\sigma = M \sigma'$ in S_9 entspricht. Die Koordinatentransformation (2.2) im physikalischen Bezugssystem B_3 bewirkt daher eine starre Drehung der Fläche F_8 in S_9 mit der neundimensionalen Drehmatrix (6.6). Wie man leicht feststellen kann, läßt die Transformationsmatrix M die Symmetriehyperebene E_6 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) invariant, so daß $E_6 = E'_6$ ist. Der Schnitt F_5 von F_8 in E_6 erfährt also infolge M eine ebenfalls starre Drehung in E_6 . Mit anderen Worten bewirkt eine Koordinatentransformation (2.2) im physikalischen Bezugssystem B_3 eine starre Drehung der Fließhyperfläche F_5 in der Symmetriehyperebene E_6 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).

Zur Bestimmung der zugehörigen Drehmatrix $M^{(6)}$ wählt man ein sechsdimensionales, orthogonales Koordinatensystem $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ in E_6 , wobei die neuen Größen τ_{12}, \dots in Funktion der alten durch

$$\tau_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{12} + \sigma_{21}), \dots \tag{6.7}$$

gegeben sind (Drehung in den Ebenen $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \dots, \dots$). Aus M ergibt sich dann die 6×6 Matrix

$$M^{(6)} = \begin{bmatrix} \mu_{11}^2 & \mu_{12}^2 & \mu_{13}^2 & \sqrt{2} \mu_{11} \mu_{12} & \sqrt{2} \mu_{12} \mu_{13} & \sqrt{2} \mu_{13} \mu_{11} \\ \mu_{21}^2 & \mu_{22}^2 & \mu_{23}^2 & \sqrt{2} \mu_{21} \mu_{22} & \sqrt{2} \mu_{22} \mu_{23} & \sqrt{2} \mu_{23} \mu_{21} \\ \mu_{31}^2 & \mu_{32}^2 & \mu_{33}^2 & \sqrt{2} \mu_{31} \mu_{32} & \sqrt{2} \mu_{32} \mu_{33} & \sqrt{2} \mu_{33} \mu_{31} \\ \sqrt{2} \mu_{11} \mu_{21} & \sqrt{2} \mu_{12} \mu_{22} & \sqrt{2} \mu_{13} \mu_{23} & \mu_{11} \mu_{22} + \mu_{12} \mu_{21} & \mu_{12} \mu_{23} + \mu_{13} \mu_{22} & \mu_{13} \mu_{21} + \mu_{11} \mu_{23} \\ \sqrt{2} \mu_{21} \mu_{31} & \sqrt{2} \mu_{22} \mu_{32} & \sqrt{2} \mu_{23} \mu_{33} & \mu_{21} \mu_{32} + \mu_{22} \mu_{31} & \mu_{22} \mu_{33} + \mu_{23} \mu_{32} & \mu_{23} \mu_{31} + \mu_{21} \mu_{33} \\ \sqrt{2} \mu_{31} \mu_{11} & \sqrt{2} \mu_{32} \mu_{12} & \sqrt{2} \mu_{33} \mu_{13} & \mu_{31} \mu_{12} + \mu_{32} \mu_{11} & \mu_{32} \mu_{13} + \mu_{33} \mu_{12} & \mu_{33} \mu_{11} + \mu_{31} \mu_{13} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

deren Orthogonalität mit Hilfe von (6.1) leicht bewiesen werden kann². Die allgemeinste Drehung in E_6 wird durch 15 Parameter beschrieben, während die durch $M^{(6)}$ charakterisierte Drehung dreiparametrig ist. Für eine ebene Drehung um x_3 des physikalischen Bezugssystems B_3 mit dem Winkel ψ vereinfacht sich $M^{(6)}$ zu

$$M^{(6)}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi & \sin^2 \psi & 0 & \frac{\sin 2 \psi}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & 0 & -\frac{\sin 2 \psi}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin 2 \psi}{\sqrt{2}} & \frac{\sin 2 \psi}{\sqrt{2}} & 0 & \cos 2 \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

und nach einer Koordinatentransformation

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sqrt{2}}$$

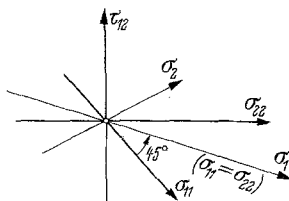


Abb. 14. Das Bezugssystem $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ in U_3 .

im dreidimensionalen Raum $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ (Drehung um τ_{12} mit dem Winkel $\pi/4$ (Abb. 14)) zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2 \psi & -\sin 2 \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2 \psi & \cos 2 \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \\ \sigma'_{33} \\ \tau'_{23} \\ \tau'_{31} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Transformation (6.10), welche die einparametrische Drehung des mit der Fließfläche F_5 fest verbundenen Koordinatensystems $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{31}$ in E_6 darstellt, läßt also die Achsen σ_{33} und σ_1 ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$ in E_6) damit auch die Ebene $\sigma_2 = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = \tau_{31} = 0$ fest. Nach (6.10) erfahren die

² Man beachte, daß $M^{(6)}$ aus der Variation der Materialkonstanten entstanden ist und nicht aus der Änderung eines bestimmten Spannungszustandes in einem materiellen Punkt. Von dem letzteren Vorgehen ausgehend kommt v. Mises [1] auf eine ähnliche Matrix, die sich von (6.8) durch die Faktoren $\sqrt{2}$ unterscheidet und deswegen nicht mehr orthogonal ist, daher nicht einer starren Drehung entsprechen würde. Man erkennt hier, wie wichtig der Ansatz (6.7) für die Orthogonalität ist.

Schnitte der Fließfläche F_5 in den dreidimensionalen Räumen $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ und $\sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{13}$ eine gewöhnliche Rotation um 2ψ bzw. ψ bezüglich der Achsen σ_1 ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$) bzw. σ_{33} . Insbesondere sieht man, daß, solange die Fließfläche nicht genügende Rotationssymmetrien besitzt, der Hauptschnitt im Hauptspannungsraum \mathcal{H}_3 ($\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$) verschiedene Formen annimmt. Da die allgemeine Drehung (2.2) in B_3 sich aus drei sukzessiven Eulerschen Rotationen ψ, ϑ, φ zusammensetzt, ergibt die Übertragung der obigen Überlegungen auf die Drehungen ϑ und φ (bzw. die sukzessive Anwendung von analogen Drehmatrizen (6.9)) die ganze dreiparametrische starre Drehung der Fließfläche F_5 in E_6 . Bei jeder Teildrehung bleibt eine der Ebenen $-\sigma_{11} + \sigma_{22} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, $-\sigma_{22} + \sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, $-\sigma_{33} + \sigma_{11} = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, also bei der resultierenden Drehung die Achse $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ fest.

Die Koordinaten σ_{ij} des Bildpunktes A in S_9 eines bestimmten Spannungszustandes sind infolge der Drehung (2.2) in B_3 der Transformation

$$\sigma'_{ij} = \mu_{ip} \mu_{jq} \sigma_{pq}$$

ausgesetzt (vergleiche mit (6.4)). Die Bewegung von A in S_9 wird daher ebenfalls durch die Drehmatrix (6.6) beschrieben, woraus folgt, daß die einzelnen Punkte der Fließfläche F_5 , welche in B_3 bestimmten Spannungszuständen entsprechen, während der starren Drehung von F_5 in E_6 bezüglich F_5 stationär bleiben. Da die Isotropie als Spezialfall der Anisotropie betrachtet werden kann, bei welchem die Tensoren K_{ij}, K_{ijkl}, \dots isotrop sind, scheint das obige Resultat mit der Feststellung des dritten Abschnittes in Widerspruch zu stehen, daß die isotrope Fließfläche F_5 von (2.2) unbeeinflusst bleibt, und der Bildpunkt A infolge (2.2) auf F_5 eine Kurve beschreibt (Abb. 2), so daß er bezüglich F_5 scheinbar nicht stationär ist. Dieser scheinbare Widerspruch kann aufgehoben werden, wenn man beachtet, daß wegen der Isotropie der Materialtensoren die Drehmatrix (6.6) oder (6.8) die isotrope Fließfläche wieder in sich selbst überführt. Auch sie wird also samt Bildpunkt A auf ihr gemäß der Drehmatrix (6.8) in E_6 gedreht, da sie jedoch bei dieser Drehung wieder in sich übergeht, ist nur die Bewegung des ausgesonderten Bildpunktes A ersichtlich. Hieraus folgen eine Menge von notwendigen Rotationssymmetrien der isotropen Fließfläche, z. B. nach (6.10) Rotationssymmetrie des dreidimensionalen Schnitts in $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}$ bezüglich σ_1 ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$), in $\sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{31}$ bezüglich σ_{33} , in $\sigma_1, \tau_{23}, \tau_{31}$ bezüglich σ_1 usw.

Die einfachste allgemeine anisotrope Fließbedingung, welche sich für den isotropen Körper auf (2.8) bzw. (2.9) reduziert, kann als

$$\Phi(K_{ij} \sigma_{ij}, K_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, K_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}) = 0 \quad (6.11)$$

für den kompressiblen und als

$$\Phi(K_{ij} s_{ij}, K_{ijkl} s_{ij} s_{kl}, K_{ijklmn} s_{ij} s_{kl} s_{mn}) = 0 \quad (6.12)$$

für den inkompressiblen Fall angesetzt werden. Der Ansatz (6.11) enthält unter Berücksichtigung der Symmetrien 6 Materialkonstanten K_{ij} , 21 K_{ijkl} und 56 K_{ijklmn} , also bereits 83 unabhängige Materialkonstanten, der inkompressible Ansatz (6.12) enthält dagegen wegen $s_{ii} = 0$ 5 unabhängige K_{ij} , 15 K_{ijkl} und 35 K_{ijklmn} folglich 55 unabhängige Materialkonstanten. Für den isotropen Körper reduzieren sie sich auf die Komponenten der isotropen Tensoren

$$\begin{aligned} K_{ij} &= k_{11} \delta_{ij}, & K_{ijkl} &= k_{21} \delta_{ij} \delta_{kl} + k_{22} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}), \\ K_{ijklmn} &= k_{31} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + k_{32} [\delta_{ij} (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) + \\ &+ \delta_{kl} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \delta_{mn} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj})] + \\ &+ k_{33} [\delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} \delta_{jn} + \delta_{il} \delta_{kn} \delta_{jm} + \\ &+ \delta_{im} \delta_{kj} \delta_{ln} + \delta_{im} \delta_{kn} \delta_{lj} + \delta_{in} \delta_{kj} \delta_{lm} + \delta_{in} \delta_{km} \delta_{lj}]. \end{aligned}$$

Die verjüngten Produkte $P_1 = K_{ij} \sigma_{ij}, \dots$ ergeben dann

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= k_{11} \sigma_{(1)}, & P_2 &= (k_{21} + 2 k_{22}) \sigma_{(1)}^2 + 4 k_{22} \sigma_{(2)}, \\ P_3 &= (k_{31} + 6 k_{32} + 8 k_{33}) \sigma_{(1)}^3 + 12 (k_{32} + 2 k_{33}) \sigma_{(1)} \sigma_{(2)} + 24 k_{33} \sigma_{(3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Eine mögliche anisotrope Verallgemeinerung der *v. Mises* Fließbedingung (4.1) wurde von *v. Mises* selber [1] mit dem Ansatz

$$K_{ijkl} s_{ij} s_{kl} = 1 \quad (6.14)$$

vorgeschlagen und ziemlich eingehend diskutiert. Später haben andere Autoren ebenfalls auf diesen Ansatz (6.14) hingewiesen und ihn besprochen [4,14].

Um auch die *Trescasche* Fließbedingung für den anisotropen Körper zu verallgemeinern, schlägt *Sawczuk* [15] den Ansatz

$$f_1 = A_{ij} \sigma_{ij} = \text{konst.}, \quad f_2 = B_{kl} \sigma_{kl} = \text{konst.}, \dots, \quad f_n = N_{rs} \sigma_{rs} = \text{konst.} \quad (6.15)$$

vor, der in E_6 Hyperebenen ergibt. Dieser Vorschlag kann jedoch nicht als sinngemäße Verallgemeinerung der *Trescaschen* Fließbedingung angenommen werden, denn obwohl der Ansatz (6.15) im Hauptspannungsraum \mathcal{H}_3 ähnlich wie bei der isotropen *Trescaschen* Fließbedingung ein Sechseck ($n = 6$) ergibt, reduziert er sich in E_6 für den isotropen Fall mit den isotropen Materialkonstanten $A_{ij} = k \delta_{ij}$ auf die triviale Aussage

$$\sigma_{(1)} = \text{konstant},$$

welche u. a. ausgerechnet für die inkompressiblen Stoffe, die der Autor im übrigen Teil seiner Arbeit in Betracht zieht, ein widersprüchliches Resultat ergibt. Bereits im isotropen Fall ist die *Trescasche* Fließfläche (wie aus (4.3) sofort ersichtlich wird) nichtlinear und zerfällt auf keinen Fall auf 6 Hyperebenen in E_6 .

Eine sinngemäße anisotrope Verallgemeinerung der *Trescaschen* Fließbedingung des inkompressiblen Stoffes entsteht, wenn in (4.3) die Grundinvarianten $s_{(2)}$ und $s_{(3)}$ durch die verjüngten Produkte

$$Q_2 = K_{ijkl} s_{ij} s_{kl}, \quad Q_3 = K_{ijklmn} s_{ij} s_{kl} s_{mn} \quad (6.16)$$

wie folgt ersetzt werden:

$$4 Q_2^3 - 27 Q_3^2 - 36 k^2 Q_2^2 + 96 k^4 Q_2 - 64 k^6 = 0, \quad (6.17)$$

so daß für isotrope K_{ijkl} , K_{ijklmn} nach (6.13) mit $4 k_{22} = 24 k_{33} = 1$ wieder die Form (4.3), also die isotrope *Trescasche* Fließbedingung resultiert. In (6.17) ist k eine skalare Materialkonstante, die zusammen mit den 15 tensoriellen Konstanten K_{ijkl} und 35 K_{ijklmn} im allgemeinsten Fall 51 Materialkonstanten ergibt. Es ist natürlich kaum zu erwarten, daß die Fließbedingung (6.16), (6.17) in dieser allgemeinen Form praktisch brauchbar ist, und man könnte versuchen, durch spezielle Annahmen, insbesondere zur Gewährung der stückweise linearen Form in \mathcal{H}_3 , die Anzahl der auftretenden unabhängigen Materialkonstanten zu verkleinern. Diese Aufgabe dürfte jedoch mit ziemlich großen rechnerischen Schwierigkeiten verknüpft sein, und einfachheitshalber wird sie im achten Abschnitt nur für den ebenen Spannungszustand kurz diskutiert.

7. Die anisotrope Fließbedingung im ebenen Spannungszustand. Wenn man sich in B_3 auf Drehungen bezüglich der x_3 -Achse beschränkt (Drehwinkel ψ), so erfährt der Schnitt $\tau_{23} = \tau_{31} = \sigma_{33} = 0$ der Fließfläche F_5 im dreidimensionalen Unterraum U_3 (gekennzeichnet durch die Achsen σ_{11} , σ_{22} , τ_{12}) gemäß (6.10) eine reine Drehung (Drehwinkel 2ψ) um die Achse $\sigma_{11} = \sigma_{12}$ (Abb. 14) und bleibt daher in U_3 . Dieser Schnitt F_2 kann als Fließfläche des ebenen Spannungszustandes mit der spannungsfreien Ebene $x_1 x_2$ aufgefaßt werden. Im folgenden soll die Fließfläche F_2 näher untersucht werden.

Wenn auch Spiegelungen in der Ebene $x_1 x_2$ zugelassen sind, welche ja Drehungen um 180° bezüglich der Spiegelungsachse entsprechen, so ergibt sich aus (6.8) mit z. B. x_1 als Spiegelungsachse die Drehmatrix

$$M^{(6)} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} & & 0 \\ & -1 & 0 \\ 0 & & 1 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in E_6 . Die Fließfläche F_2 wird also in U_3 einer Spiegelung an der $\sigma_{11} \sigma_{22}$ -Ebene ausgesetzt und bleibt weiterhin im Unterraum U_3 . Zusammenfassend kann daher für die Fließfläche F_2 des ebenen Spannungszustandes gesagt werden, daß sie infolge einer Drehung um ψ bzw. einer Spiegelung des ebenen Bezugssystems $x_1 x_2$ in der spannungsfreien Ebene eine Drehung um 2ψ bezüglich der Achse $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ bzw. eine Spiegelung an der Ebene $\tau_{12} = 0$ erfährt und somit im Unterraum U_3 ($\tau_{23} = \tau_{31} = \sigma_{33} = 0$) bleibt.

Hieraus ergibt sich für jede isotrope Fließfläche des ebenen Spannungszustandes (wie im letzten Abschnitt schon erwähnt wurde) eine Rotationssymmetrie bezüglich der Achse $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Die isotrope *v. Misesche* Fließbedingung ist zum Beispiel ein Rotationsellipsoid

$$\frac{\sigma_1^2}{6k^2} + \frac{1}{2k^2} (\sigma_2^2 + \tau_{12}^2) = 1 \quad \left(\sigma_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = \frac{-\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sqrt{2}}, \quad \tau_{12} = \sigma_{12} \sqrt{2} \right) \quad (7.1)$$

mit der Hauptachse σ_1 ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$), so daß die Schnitte $\sigma_1 = \text{konstant}$ Kreise sind (Abb. 15). Die isotrope Trescasche Fließfläche im ebenen Spannungszustand besteht dagegen aus zwei Halbkreis-kegeln

$$\frac{1}{8k^2} (\sigma_2^2 + \tau_{21}^2) = \left(1 \mp \frac{\sigma_1}{2k\sqrt{2}}\right)^2 \quad (7.2)$$

mit den Spitzen A und A' auf der Kegellachse σ_1 und mit dem halben Öffnungswinkel $\pi/4$. Zwischen die Kegel kommt noch eine Kreiszyylinderfläche

$$\sigma_2^2 + \tau_{12}^2 = 2k^2 \quad (7.3)$$

mit derselben Achse σ_1 (Abb. 15). Jede ebene Drehung bzw. Spiegelung in der x_1x_2 -Ebene führt die isotrope Fließfläche in sich selbst über. Außerdem haben Spannungstensor σ_{ij} und Tensor der

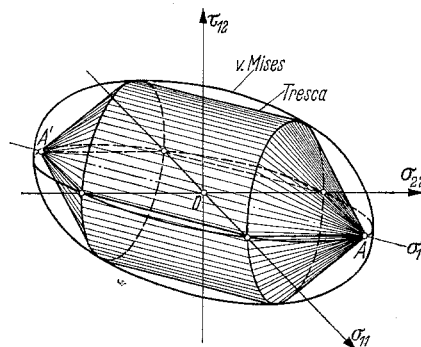


Abb. 15. Die *v. Mises*sche bzw. *Tresca*sche Fließfläche im ebenen Spannungszustand.

Verformungsgeschwindigkeiten d_{ij} stets ein gemeinsames Hauptachsensystem in x_1x_2 , da es überall im Schnitt $\tau_{12} = 0$ der isotropen Fließfläche F_2 eine Normale zu ihr gibt, die in der Ebene $\tau_{12} = 0$ liegt. Dabei gilt als Normale an allfälligen Unstetigkeitsstellen der Fließfläche wie üblich die Gerade senkrecht zu einer der Stützebenen.

Da im allgemeinen die anisotrope Fließfläche keine Rotationssymmetrie zu besitzen braucht, fällt das Hauptachsensystem des Spannungszustandes mit jenem der Verformungsgeschwindigkeiten nicht zusammen. Es stellt sich nun die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz in der spannungsfreien Ebene x_1x_2 eines speziellen Bezugssystems x_{1II} , in welchem die beiden (ebenen) Hauptachsensysteme zusammenfallen. Aus der Dreieigenenschaft von F_2 in U_3 folgt, daß ein solches spezielles Bezugssystem dann und nur dann existiert, wenn

1. es eine ebene Kurve auf F_2 gibt, längs welcher alle Normalen zur Fließfläche in der Kurvenebene liegen,

2. die Kurvenebene die Drehachse σ_1 enthält.

Beide Bedingungen sind insbesondere für den orthotropen Körper erfüllt. Ein Körper heißt bekanntlich orthotrop, wenn in jedem Punkt drei aufeinander senkrechte Richtungen existieren so, daß nach Drehungen um 180° bezüglich dieser Achsen wieder dieselben Materialeigenschaften entstehen. Es sei x_3 eine der Orthotropieachsen, dann kann durch eine ebene Drehung bezüglich x_3 erreicht werden, daß x_1 und x_2 mit den beiden anderen Orthotropieachsen zusammenfallen. Eine Drehung um 180° bezüglich x_1 oder x_2 ist gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der x_1x_2 -Ebene, welche ja eine Spiegelung der Fließfläche F_2 an der $\sigma_{11}\sigma_{22}$ -Ebene verursacht. Wegen der Orthotropie muß F_2 bei dieser Spiegelung wieder in sich übergehen, folglich ist sie bezüglich der $\sigma_{11}\sigma_{22}$ -Ebene symmetrisch und alle Normalen längs der Schnittkurve mit dieser Ebene liegen in ihr, woraus folgt, daß die (ebenen) Hauptachsensysteme von σ_{ij} und d_{ij} zusammenfallen. Durch Wiederholung desselben Gedankenganges kann dieses Resultat auch auf den räumlichen Fall übertragen werden. Es gilt also der Satz:

Für einen orthotropen Körper fallen längs der Orthotropieachsen die Hauptachsen der Spannungen und der Verformungsgeschwindigkeiten zusammen.

Dieser Satz wurde bis jetzt nur für die *v. Mises*sche Fließbedingung (6.14) bewiesen. Damit ist gezeigt, daß er für jede anisotrope Fließbedingung eines orthotropen Körpers gilt. Zu beachten ist ferner, daß die Orthotropie nur eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Satzes von zusammenfallenden Hauptachsensystemen ist.

Ein weiterer spezieller anisotroper Körper, der von *v. Mises* im Zusammenhang mit seiner Fließbedingung (6.14) erwähnt wurde [1], ist das reguläre Kristallsystem (Steinsalz, Kupfer, Aluminium, Eisen). Es besitzt drei zueinander senkrechte, eindeutig ausgezeichnete Achsen, die miteinander beliebig vertauschbar sind. Folglich führen Drehungen um 90° bezüglich dieser Achsen die Fließfläche wieder in sich über. Ist x_3 eine der ausgezeichneten Symmetrieachsen, so können wieder x_1 und x_2 ohne Verletzung der Allgemeinheit als die beiden anderen Symmetrieachsen angenommen werden. Eine Drehung um 90° bezüglich der x_3 -Achse verursacht eine entsprechende Drehung der Fließfläche F_2 in U_3 um 180° bezüglich der σ_1 -Achse, welche ja mit einer Spiegelung an der $\sigma_1\tau_{12}$ -Ebene gleichbedeutend ist. Nach dieser Spiegelung sollte also die Fließfläche des regulären Systems wieder in sich selbst übergehen, folglich muß sie neben der $\sigma_1\sigma_2$ -Ebene (das reguläre Kristallsystem ist trivialerweise auch orthotrop) auch bezüglich der $\sigma_1\tau_{12}$ -Ebene symmetrisch sein. Längs der Schnittkurve von F_2 mit der $\sigma_1\tau_{12}$ -Ebene liegen also die Normalen zu F_2 in dieser Ebene. Es gibt daher mindestens zwei ebene Kurven auf F_2 , welche die Bedingungen für zusammenfallende Hauptachsensysteme erfüllen. Da die ebene Schnittkurve von F_2 in $\sigma_1\tau_{12}$ nach einer Drehung um 45° bezüglich der x_3 -Achse in die Hauptebene ($\sigma_1\sigma_2$ -Ebene) gebracht werden kann, gilt (auch für den räumlichen Spannungszustand) der Satz:

Für ein reguläres Kristallsystem fallen die Hauptachsen von σ_{ij} und d_{ij} zusammen 1. in den drei Symmetrieachsen des Kristallsystems, 2. in drei weiteren Bezugssystemen, welche je eine der Symmetrieachsen enthalten und um 45° gedreht sind.

Schließlich sei noch ein dritter, ebenfalls von *v. Mises* erwähnter spezieller anisotroper Körper, nämlich das hexagonale Kristallsystem (Kadmium, Zink) untersucht. Dieser Körper besitzt die Symmetrieverhältnisse eines geraden Prismas, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck ist. Nimmt man die Prismenachse zur x_3 -Achse, so führen Drehungen um 60° , 120° , 180° bezüglich der x_3 -Achse die Fließfläche in sich selbst über. Daraus folgt, daß die Schnittkurven der Fließfläche F_2 mit den Ebenen $\sigma_1 = \text{konstant}$ etwa die Form der Abb. 16 haben, also durch Drehungen um 120° in sich selbst übergehen. Man sieht, daß in diesem Fall die Bedingungen für die Existenz von gemeinsamen Hauptachsensystemen nicht erfüllt zu sein brauchen.

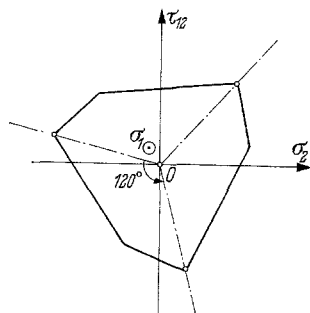


Abb. 16. Der Schnitt $\sigma_1 = \text{konst.}$ der anisotropen Fließfläche für das hexagonale Kristallsystem.

Zusammenfassend kann von der anisotropen Fließfläche F_2 in U_3 gesagt werden, daß sie für einen orthotropen Körper (mit x_3 als Orthotropieachse) eine die σ_1 -Achse enthaltende Symmetrieebene, für ein reguläres Kristallsystem (mit x_3 als eine der Symmetrieachsen) zwei aufeinander senkrechte, sich längs der σ_1 -Achse schneidende Symmetrieebenen, für ein hexagonales Kristallsystem (mit x_3 als Prismenachse) eine Drehsymmetrie um 120° bezüglich der σ_1 -Achse besitzt.

Im nächsten Abschnitt sollen diese drei Fälle zunächst für die anisotrope *v. Misessche* Fließbedingung untersucht werden, um gleichzeitig eine sinngemäße anisotrope *Trescasche* Fließbedingung im ebenen Spannungszustand zu entwickeln, welche grundsätzlich durch die Analogie mit der entsprechenden *v. Misesschen* Fließbedingung entstehen soll.

8. Die anisotrope *v. Misessche* und eine entsprechende *Trescasche* Fließfläche im ebenen Spannungszustand. Da die *v. Misessche* anisotrope Fließbedingung (6.14) eine homogene quadratische Form ist, ergibt sie in U_3 ein Ellipsoid (wenn die Konvexitätsbedingung zwischen den Materialkonstanten erfüllt ist), dessen drei orthogonale Hauptebenen Symmetrieebenen sind, und dessen Zentrum im Ursprung 0 des Spannungsraums liegt. Wenn der Körper orthotrop sein soll, dann muß eine dieser Hauptebenen die σ_1 -Achse enthalten. Für ein reguläres Kristallsystem müssen zwei

Hauptebenen die σ_1 -Achse enthalten, folglich ist die σ_1 -Achse eine Hauptachse des Ellipsoids. Ist das Kristallsystem hexagonal, so führt für das Ellipsoid die notwendige Drehsymmetrie um 120° bezüglich der σ_1 -Achse zu einer vollständigen Rotationssymmetrie um diese Achse, welche gleichzeitig zur Hauptachse des Rotationsellipsoids wird.

Die entsprechende *v. Mises*sche Fließbedingung (im ebenen Spannungszustand) des hexagonalen Systems (mit x_3 als Prismenachse) ist dann besonders einfach und lautet etwa

$$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} (\sigma_2^2 + \tau_{12}^2) = 1 \quad (8.1)$$

mit α, β als (positiven) Materialkonstanten. Das Rotationsellipsoid hat dieselbe Gestalt wie beim isotropen Körper (Abb. 15), und (8.1) unterscheidet sich von der isotropen Fließbedingung (7.1) nur durch das Auftreten einer zweiten Materialkonstante. Diese Gleichung ergibt also richtungsunabhängige Fließeigenschaften (Isotropie), solange man sich nur auf ebene Spannungszustände mit der spannungsfreien Ebene senkrecht zur Prismenachse beschränkt, denn jede Drehung um die x_3 -Achse führt die Fließfläche F_2 in sich selbst über.

Für das reguläre System, wenn x_1, x_2, x_3 die Symmetrieachsen sind, werden $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ zu den Hauptachsen des Fließellipsoids

$$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = 1, \quad (8.2)$$

wobei γ eine dritte (positive) Materialkonstante ist. Eine Drehung des Bezugssystems um x_3 ergibt verschiedene Hauptabschnitte der Fließfläche in der Hauptebene $\sigma_1\sigma_2$. Man sieht hier deutlich, daß die ebenen Hauptachsen von σ_{ij} und d_{ij} nur dann zusammenfallen, wenn $\sigma_1\sigma_2$ sich mit einer der beiden Hauptebenen deckt, die die σ_1 -Achse enthalten.

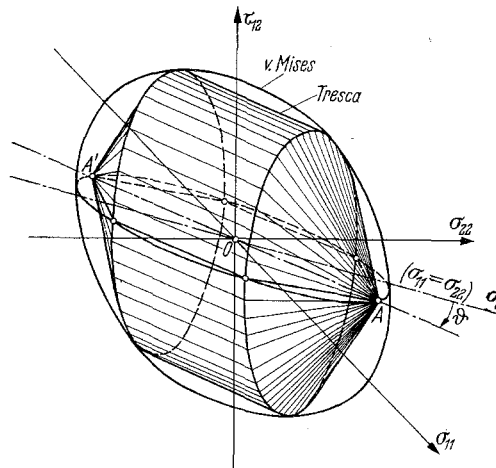


Abb. 17. Die orthotrope *v. Mises*sche bzw. *Tresca*sche Fließfläche im ebenen Spannungszustand.

Beim orthotropen Körper mit x_1, x_2, x_3 als Orthotropieachsen ist die eine Hauptachse des Ellipsoids (Abb. 17) mit der Gleichung

$$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} - \frac{2\sigma_1\sigma_2\cos\omega}{\alpha\beta} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = 1 \quad (8.3)$$

die τ_{12} -Achse, während die beiden anderen, in der $\sigma_1\sigma_2$ -Ebene liegenden Hauptachsen bezüglich σ_1, σ_2 gedreht sind. In (8.3) erscheint also zusätzlich der Winkel ω , der als vierte Materialkonstante aufzufassen ist. Hier fallen nur in den Orthotropieachsen die Hauptachsensysteme von σ_{ij} und d_{ij} zusammen.

Im allgemeinsten Fall enthält keine der Hauptebenen des Ellipsoids die σ_1 -Achse, so daß die Hauptachsensysteme von σ_{ij} und d_{ij} in keinem Bezugssystem zusammenfallen würden.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Verallgemeinerung der *Tresca*schen Fließbedingung auf den anisotropen Fall. Im folgenden wird eine solche Möglichkeit vorgeschlagen, welche von den folgenden prinzipiellen Annahmen ausgeht.

1. Die Fließfläche soll mindestens in speziellen Bezugssystemen einen stückweise linearen, sechseckförmigen Hauptschnitt aufweisen.

2. Sie soll im wesentlichen das lineare Analogon der *v. Mises* Fließfläche sein.
 3. Sie soll sich im isotropen Fall auf die beiden Halbkreisegel und die Zylinderfläche (7.2) bzw. (7.3) reduzieren.

Somit entsteht für das hexagonale Kristallsystem der Ansatz

$$\frac{1}{\beta^2} (\sigma_2^2 + \tau_{12}^2) = \left(1 \mp \frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^2, \quad \sigma_2^2 + \tau_{12}^2 = \alpha^2 \beta^2 / (\alpha + \beta)^2. \quad (8.4)$$

Die erste Gleichung ergibt wieder zwei Halbkreisegel mit den Spitzen auf der σ_1 -Achse und die zweite eine zwischen den Kegeln liegende Zylinderfläche, welche sie längs Kreisen schneidet, die durch die Achsen σ_{11} , σ_{22} gehen. Zylinder und Kegel haben eine gemeinsame Achse. Es kann analog wie bei der entsprechenden *v. Mises* Fließbedingung (8.1) gesagt werden, daß die Fließfläche dieselbe Gestalt wie beim isotropen Körper (Abb. 15) hat. Jede Drehung bezüglich der x_3 -Achse führt die Fließfläche in sich selbst über (beschränkte, ebene Isotropie). In jedem Achsen-system $x_1 x_2$ ist der Hauptschnitt ein (irreguläres) Sechseck.

Tabelle 1. Zusammenfassender Vergleich der Fließflächen.

	<i>v. Mises</i>	<i>Tresca</i>
Hexagonales Kristallsystem	$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} (\sigma_2^2 + \tau_{12}^2) = 1$ Rotationsellipsoid Hauptachse σ_1 .	$\begin{cases} \frac{1}{\beta^2} (\sigma_2^2 + \tau_{12}^2) = \left(1 \mp \frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^2, \\ \sigma_2^2 + \tau_{12}^2 = \alpha^2 \beta^2 / (\alpha + \beta)^2 \end{cases}$ Kreisegel, Kreiszyylinder, gemeinsame Achse σ_1 .
Reguläres Kristallsystem	$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = 1$ Ellipsoid, Hauptachse σ_1 .	$\begin{cases} \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \left(1 \mp \frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^2, \\ \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \alpha^2 / (\alpha + \beta)^2 \end{cases}$ Kegel, Zylinder mit Ellipsenquerschnitt, gemeinsame Achse σ_1 .
Orthotroper Körper	$\frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} + \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} - \frac{2 \sigma_1 \sigma_2 \cos \omega}{\alpha \beta} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = 1$ Ellipsoid Hauptachse: bezüglich σ_1 um $\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{4 \alpha \beta \cos \omega}{\beta^2 - \alpha^2}$ gedreht	$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta^2} (\sigma_1 \sin \omega + \sigma_2 \cos \omega)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \\ & = \left[1 \mp \frac{1}{\alpha} (\sigma_1 \cos \omega - \sigma_2 \sin \omega) \right]^2, \\ & \frac{1}{\beta^2} (\sigma_1 \sin \omega + \sigma_2 \cos \omega)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \alpha^2 / (\alpha + \beta)^2 \end{aligned}$ Kegel, Zylinder mit Ellipsenquerschnitt gemeinsame Achse: bezüglich σ_1 um ω gedreht.
$\sigma_1 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = (-\sigma_{11} + \sigma_{22}) / \sqrt{2}, \quad \tau_{12} = \sigma_{12} \sqrt{2}$		

Für das reguläre Kristallsystem entsteht in den Symmetrieachsen der Ansatz

$$\frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \left(1 \mp \frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^2, \quad \frac{\sigma_2^2}{\beta^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} = \alpha^2 / (\alpha + \beta)^2, \quad (8.5)$$

der zwei Halbkegel mit Ellipsenquerschnitt und mit den Spitzen auf der σ_1 -Achse sowie eine dazwischen liegende Zylinderfläche mit Ellipsenquerschnitt ergibt. Der Zylinder schneidet die Kegel längs Ellipsen, welche durch die Achsen σ_{11} , σ_{22} gehen. Zylinder und Kegel haben eine gemeinsame Achse. Eine Drehung um x_3 des Bezugssystems ergibt verschiedene Hauptschnitte in der Hauptebene $\sigma_1 \sigma_2$, welche jedenfalls immer Sechsecke sind. Außer in den Symmetrieachsen fallen Hauptachsensysteme von σ_{ij} und d_{ij} auch in dem bezüglich x_3 um 45° gedrehten Bezugssystem zusammen.

Schließlich ergeben dieselben Überlegungen wie bei der *v. Mises*schen Fließbedingung für den orthotropen Körper den Ansatz (Abb. 17)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} (\sigma_1 \sin \omega + \sigma_2 \cos \omega)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} &= \left[1 \mp \frac{1}{\alpha} (\sigma_1 \cos \omega - \sigma_2 \sin \omega) \right]^2, \\ \frac{1}{\beta^2} (\sigma_1 \sin \omega + \sigma_2 \cos \omega)^2 + \frac{\tau_{12}^2}{\gamma^2} &= \alpha^2 / (\alpha + \beta)^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

welcher aus (8.5) durch eine Drehung um den Winkel $-\omega$ (Materialkonstante) erzeugt wurde. Die Schnittellipsen gehen in diesem Fall durch keine der Achsen σ_{11} oder σ_{22} . Der Hauptschnitt in der $\sigma_1\sigma_2$ -Ebene ist nur in den Orthotropicachsen ein Sechseck, in jedem anderen Bezugssystem besteht er aus Ellipsen-, Hyperbel- oder Parabelstücken.

Die verschiedenen oben besprochenen Fälle sind zusammenfassend in Tabelle 1 aufgeführt. Zu beachten ist hier, daß bei allen Ansätzen die Zug- und Druckfließspannungen gleich sind. Die Übertragung der obigen Überlegungen auf den Fall mit ungleichen Zug- und Druckfließspannungen würde keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen.

Literatur

1. R. v. Mises, Z. Angew. Math. Mech. 8 (1928) S. 161.
2. W. T. Koiter, Quart. Appl. Math. 11 (1953) S. 350.
3. Th. Lehmann, Rheologica Acta 3 (1964) S. 281.
4. R. Hill, A Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950.
5. H. Ziegler, Z. Angew. Math. Phys. 11 (1959) S. 157.
6. H. Ziegler, Z. Angew. Math. Phys. 20 (1969) S. 659.
7. W. Prager und P. G. Hodge, Theory of Perfectly Plastic Solids, New York 1951.
8. M. Sayir und H. Ziegler, Z. Angew. Math. Phys. 20 (1969) S. 78.
9. D. C. Drucker und W. Prager, Quart. Appl. Math. 10 (1952) S. 157.
10. D. C. Drucker, J. Mech. Phys. Solids 1 (1952) S. 217.
11. R. T. Shield, J. Mech. Phys. Solids 4 (1955) S. 10.
12. R. Sankaranarayanan und W. Olszak, Proc. I. A. S. S. Symp. Warsaw, Sept. 2–5, 1963.
13. R. Sankaranarayanan und W. Olszak, Bull. Ac. Pol. Sc. 14 (1966) S. 243.
14. W. Olszak und W. Urbanowski, Arch. Mech. Stos. 8 (1956) S. 671.
15. A. Sawczuk, Arch. Mech. Stos. 11 (1959) S. 541.

(Eingegangen am 26. März 1970)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *Mahir Sayir*, Lehrstuhl für Mechanik, ETH Zürich, CH-8006 Zürich, Leonhardstr. 33, Schweiz.